

# Transitoires de piano et non-linéarités des cordes : mesures et simulations

Juliette Chabassier, Antoine Chaigne, Patrick Joly

▶ **To cite this version:**

Juliette Chabassier, Antoine Chaigne, Patrick Joly. Transitoires de piano et non-linéarités des cordes : mesures et simulations. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00539771

**HAL Id: hal-00539771**
**https://hal.science/hal-00539771**

Submitted on 25 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

10ème **C**ongrès **F**rançais d'**A**coustique

*Lyon, 12-16 Avril 2010*

# Transitoires de piano et non-linéarités des cordes : mesures et simulations

Juliette Chabassier[1], Antoine Chaigne[2], Patrick Joly[3]

[1] Projet POEMS - INRIA Rocquencourt - juliette.chabassier@inria.fr

[2] Unité de Mécanique - ENSTA Palaiseau - antoine.chaigne@ensta.fr

[3] Projet POEMS - INRIA Rocquencourt - patrick.joly@inria.fr

Au cours de leur mouvement, les cordes du piano sont soumises à des variations de tension consécutives aux variations de longueur induites par le déplacement transversal. Ce phénomène est particulièrement prononcé au moment de l'attaque par le marteau, le déplacement moyen étant alors la plupart du temps d'un ordre de grandeur supérieur au diamètre de la corde. Il s'ensuit un couplage entre les ondes de flexion transversale et l'onde de compression longitudinale. Cette dernière se propage environ 10 à 20 fois plus rapidement que les ondes de flexion. Dans le domaine temporel, l'onde longitudinale apparaît sous la forme d'un précurseur qui excite l'ensemble de la structure de l'instrument avant l'arrivée des premières oscillations transversales. Elle joue donc un rôle crucial dans la composition du transitoire de piano. Dans le domaine spectral, le couplage transverse-longitudinal peut être vu comme une composition de non-linéarités quadratiques et cubiques. En conséquence, on observe l'apparition de combinaison de fréquences appartenant aux spectres respectifs des deux types de vibration.
Afin de mieux comprendre ces phénomènes, nous avons entrepris des simulations numériques. Le modèle utilisé est un système non linéaire couplé mettant en jeu la vibration transversale et la vibration longitudinale ainsi que l'angle de flexion permettant de prendre en compte la raideur. L'énergie totale du système est conservée au cours du temps, impliquant la stabilité de la solution. Le schéma numérique proposé est un schéma innovant, non linéaire, implicite, qui conserve un équivalent discret de l'énergie totale à chaque pas de temps, et assure ainsi la stabilité numérique dans un cas non linéaire où cette dernière est difficile à obtenir.
Les résultats des simulations sont examinés et discutés par comparaison avec des formes d'onde expérimentales obtenues sur la table d'harmonie cordée d'un piano droit.

## 1 Introduction

Un modèle de corde non linéaire a été introduit par Morse & Ingard [7], mettant le problème de la vibration d'une corde sous la forme d'un système couplé non linéaire, dit "modèle géométriquement exact" (GEM). Conklin [6] a mis en évidence que dans le spectre du piano, certains partiels ne peuvent pas être expliqués par la théorie linéaire de corde, et Bank & Sujbert ont mis en évidence que certains de ces partiels dits "fantômes" apparaissaient à des sommes ou différences d'harmoniques. Plusieurs auteurs ([3], [4]) ont cherché à faire des simulations numériques basées sur un modèle non linéaire de corde, en utilisant non pas le GEM mais des modèles approchés provenant de développements de Taylor dont certains termes sont négligés pour préserver la positivité de l'énergie. Nous considérons dans ce papier le GEM, et nous proposons en section 2 une approche asymptotique pour comprendre en quel sens le modèle simplifié utilisé dans [3] et [4] est mathématiquement justifié lorsque la corde est excitée selon sa direction transversale. Selon ce modèle simplifié, exciter la corde à une certaine fréquence dans sa direction transversale peut engendrer des fréquences 20 fois supérieures dans la direction longitudinale. Ce phénomène peut s'observer expérimentalement (section 3) en particulier au chevalet, où le couplage non linéaire se traduit en temps par un précurseur. En domaine fréquentiel, on retrouve expérimentalement les partiels quadratiques observés par [4] mais également des partiels cubiques. Enfin en dernière partie nous présentons un modèle de corde réaliste, couplé avec un marteau non linéaire et un chevalet équivalent. Une méthode énergétique est utilisée pour garantir la stabilité numérique du problème discrétisé couplé, et nous présentons une comparaison entre mesure et simulation pour l'observation d'un point de la corde C2.

## 2 Modèles de corde non linéaires

Considérons une corde infiniment fine, paramétrée au repos par $x \in [0, L]$, $L$ étant la longueur en mètres de la corde. On notera dans la suite $\mu$ la masse linéique de la corde, $A$ l'aire de la section droite, $E$ le module d'Young et $T_0$ la tension au repos de la corde. On notera également $\partial_t \cdot \equiv \frac{\partial \cdot}{\partial t}$ et $\partial_x \cdot \equiv \frac{\partial \cdot}{\partial x}$ les dérivées partielles selon le temps $t$ et l'espace $x$ respectivement. Enfin, les inconnues vectorielles seront notées en caractères gras contrairement aux inconnues scalaires.

### 2.1 Modèle géométriquement exact

Un modèle standard de corde non linéaire couplant le déplacement transversal $u$ au déplacement longitudinal

$v$ est le modèle géométriquement exact [7] :

$$\begin{cases} \mu\,\partial_t^2 u = \partial_x \left[ EA\,\partial_x u - (EA - T_0)\,\dfrac{\partial_x u}{\sqrt{\left(\partial_x u\right)^2 + \left(1+\partial_x v\right)^2}} \right] \\ \mu\,\partial_t^2 v = \partial_x \left[ EA\,\partial_x v - (EA - T_0)\,\dfrac{\left(1+\partial_x v\right)}{\sqrt{\left(\partial_x u\right)^2 + \left(1+\partial_x v\right)^2}} \right] \end{cases}$$

Ce système provient de la description géométrique du mouvement d'un point matériel de la corde, en appliquant la loi fondamentale de la dynamique au système élémentaire soumis aux seules forces de tension. On utilise la loi de Hooke pour relier la tension locale de la corde à son allongement relatif, lui même lié au terme en racine carrée. L'adimensionnement du système peut être fait en introduisant de nouvelles variables de temps et d'espace, en posant

$$\begin{cases} \alpha = \frac{EA-T_0}{EA}, \quad T = L\sqrt{\dfrac{\mu}{EA}} \\ x^* = x/L,\ u^* = u/L,\ v^* = v/L,\ t^* = t/T \end{cases}$$

On aboutit au système :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x \left[ \partial_x u - \alpha\,\dfrac{\partial_x u}{\sqrt{\left(\partial_x u\right)^2 + \left(1+\partial_x v\right)^2}} \right] \\ \partial_t^2 v = \partial_x \left[ \partial_x v - \alpha\,\dfrac{\left(1+\partial_x v\right)}{\sqrt{\left(\partial_x u\right)^2 + \left(1+\partial_x v\right)^2}} \right] \end{cases}$$

## 2.2 Modèles approchés

Dans les papiers de Anand [1], Bilbao [3], Bank & Sujbert [4], on trouve un modèle qui s'établit avec la méthode précédente, mais au cours de laquelle on fait un développement de Taylor de la racine, puis l'on néglige un certain terme, aboutissant à un modèle polynomial *a priori* plus simple que le modèle exact. L'intuition qui mène à négliger ce terme est liée à la positivité de l'énergie du modèle qui en découle, les autres modèles ne vérifiant pas ce principe. Nous avons voulu voir en quoi ce modèle était en effet mathématiquement justifié quand les données initiales sont petites (voir [5]).

Posons $U_{ex}$ l'énergie potentielle du modèle géométriquement exact :

$$\boxed{U_{ex}(u,v) = \frac{1}{2}\,u^2 + \frac{1}{2}\,v^2 - \alpha\Big[\sqrt{u^2+(1+v)^2} - (1+v)\Big]}$$

On cherche à résoudre, pour $U \equiv U_{ex}$, le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}^\epsilon}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\nabla U\big(\dfrac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial x}\big)\right] = 0, \\ u^\epsilon(t=0,x) = \epsilon\,\overline{u}(x)\,, \quad \partial_t u^\epsilon(t=0,x) = \epsilon\,\overline{u}_t, \\ v^\epsilon(t=0,x) = 0\,, \qquad \partial_t v^\epsilon(t=0,x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

et on cherche la solution $\mathbf{u}^\epsilon$ sous la forme

$$\left| \begin{array}{l} u^\epsilon = \epsilon\,u_1 + \epsilon^2\,u_2 + \epsilon^3\,u_3 + \dots \\ v^\epsilon = \epsilon\,v_1 + \epsilon^2\,v_2 + \epsilon^3\,v_3 + \dots \end{array} \right. \tag{2}$$

Remarquons que la sollicitation initiale est **selon la direction transversale de la corde**, que l'on suppose petite (proportionnelle à $\epsilon$). Nous cherchons l'équation à laquelle on aboutit si on néglige tous les termes en $\epsilon^4$. Ecrivons le développement de Taylor à l'ordre 4 de $U$ :

$$U_{DL4}(u,v) = \frac{1-\alpha}{2}\,u^2 + \frac{1}{2}\,v^2 + \frac{\alpha}{2}\,u^2 v + \frac{\alpha}{8}\,u^4 - \frac{\alpha}{2}\,u^2 v^2$$

Alors

$$\nabla U_{DL4}(u,v) = \begin{pmatrix} (1-\alpha)\,u + \alpha\,uv + \dfrac{\alpha}{2}\,u^3 - \alpha\,uv^2 \\ v + \dfrac{\alpha}{2}\,u^2 - \alpha\,u^2 v \end{pmatrix}$$

Quelques calculs donnent facilement

$$\left| \begin{array}{l} (u^\epsilon)^2 = \epsilon^2 u_1^2 + 2\epsilon^3 u_1 u_2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ (v^\epsilon)^2 = \epsilon^2 v_1^2 + 2\epsilon^3 v_1 v_2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ (u^\epsilon)^2 v^\epsilon = \epsilon^3 u_1^2 v_1 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ u^\epsilon v^\epsilon = \epsilon^2 u_1 v_1 + \epsilon^3(u_1 v_2 + u_2 v_1) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ u^\epsilon (v^\epsilon)^2 = \epsilon^3 u_1 v_1^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ (u^\epsilon)^3 = \epsilon^3 u_1^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{array} \right. \tag{3}$$

En ne prenant en compte que les termes en facteur de $\epsilon$, on obtient le problème de Cauchy suivant

$$(\mathcal{S}_1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (1-\alpha)\,\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, \\ u_1(t=0,x) = \overline{u}(x)\,, \quad \partial_t u_1(t=0,x) = \overline{u}_t, \\ v_1(t=0,x) = 0\,, \qquad \partial_t v_1(t=0,x) = 0. \end{cases}$$

Ce premier système découple $u_1$ et $v_1$, et conduit à la nullité de $v_1$ pour tout temps : $v_1 \equiv 0$. $v^\epsilon$ n'a donc pas, dans son développement (2), de composante en $\epsilon$. D'autre part, on remarque que $u_1$ est la solution d'un problème de propagation d'onde scalaire à vitesse $\sqrt{1-\alpha}$ avec données initiales $(\overline{u}(x), \overline{u}_t(x))$, ce que l'on exploitera plus tard en 2.3. Les expressions de $u^\epsilon$ et $v^\epsilon$ se simplifient et l'on peut écrire à présent le problème de Cauchy qui découle des termes en facteur de $\epsilon^2$ :

$$(\mathcal{S}_2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - (1-\alpha)\,\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\big(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\big)^2\Big) = 0, \\ u_2(t=0,x) = 0\,, \quad \partial_t u_2(t=0,x) = 0, \\ v_2(t=0,x) = 0\,, \quad \partial_t v_2(t=0,x) = 0. \end{cases}$$

Le même raisonnement que précédemment mène à $u_2 \equiv 0$, et $v_2$ peut être vu comme la solution d'un problème de propagation d'ondes scalaire, à vitesse 1, à données initiales nulles et second membre $-\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\big(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\big)^2\Big)$, que l'on connait grâce à $(\mathcal{S}_1)$.

Écrivons enfin le problème de Cauchy qui découle des

termes en facteur de $\epsilon^3$ :

$$(\mathcal{S}_3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - (1-\alpha)\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \\ \qquad \alpha\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\dfrac{\partial v_2}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big)^3\Big] = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = 0, \\ u_3(t=0,x) = 0\,, \quad \partial_t u_3(t=0,x) = 0, \\ v_3(t=0,x) = 0\,, \quad \partial_t v_3(t=0,x) = 0. \end{cases}$$

Combinons à présent les trois systèmes de la façon suivante : $\epsilon(\mathcal{S}_1) + \epsilon^2(\mathcal{S}_2) + \epsilon^3(\mathcal{S}_3)$ :

$$(\mathcal{S}_\epsilon)\quad \begin{cases} \partial_t^2(\epsilon\, u_1 + \ \epsilon^2\, u_2 + \epsilon^3\, u_3) \\ \qquad - \partial_x\Big[(1-\alpha)\partial_x(\epsilon u_1 + \ \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3) \\ \qquad\qquad + \epsilon^3\alpha\,\partial_x u_1 \partial_x v_2 + \epsilon^3\dfrac{\alpha}{2}(\partial_x u_1)^3\Big] = 0, \\ \partial_t^2(\epsilon\, v_1 + \ \epsilon^2\, v_2 + \epsilon^3\, v_3) \\ \qquad - \partial_x\Big[\partial_x(\epsilon v_1 + \ \epsilon^2 v_2 + \epsilon^3 v_3) \\ \qquad\qquad + \epsilon^2\dfrac{\alpha}{2}(\partial_x u_1)^2\Big] = 0. \end{cases}$$

Or nous utilisons (3), conduisant au système suivant pour $(u^\epsilon, v^\epsilon)$, si l'on néglige $\epsilon^4$ :

$$(\mathcal{S}_{BS})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(1-\alpha)\dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial x} + \alpha\dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial x}\dfrac{\partial v^\epsilon}{\partial x} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\alpha}{2}\Big(\dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial x}\Big)^3\Big] = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v^\epsilon}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\dfrac{\partial v^\epsilon}{\partial x} + \dfrac{\alpha}{2}\Big(\dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial x}\Big)^2\Big] = 0, \\ u^\epsilon(t=0,x) = \epsilon\,\overline{u}(x)\,, \quad \partial_t u^\epsilon(t=0,x) = \epsilon\,\overline{u}_t, \\ v^\epsilon(t=0,x) = 0\,, \qquad \partial_t v^\epsilon(t=0,x) = 0. \end{cases}$$

ce qui correspond au problème de Cauchy (1) en posant

$$\boxed{U(u,v) = \frac{1-\alpha}{2}\,u^2 + \frac{1}{2}\,v^2 + \frac{\alpha}{2}\,u^2 v + \frac{\alpha}{8}\,u^4}$$

Cette fonctionnelle est exactement la **fonctionnelle proposée empiriquement dans [1, 3, 4]** : elle correspond au développement de Taylor de $U_{ex}$ à l'ordre 4 dans lequel on néglige le terme $u^2v^2$. Notons que ce système approché n'est justifié que dans le cas où la corde est initialement sollicitée selon sa direction transversale.

## 2.3 Solution approchée et apparition de fréquences non linéaires

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'une sollicitation selon la direction transversale uniquement engendrait un mouvement dans la direction longitudinale, grâce au caractère non linéaire couplé de l'équation. De plus, si la sollicitation transversale est d'ordre $\epsilon$, alors le déplacement longitudinal sera d'ordre $\epsilon^2$. Nous nous demandons à présent quel sera le contenu fréquentiel du déplacement longitudinal si la sollicitation transversale est un mode du modèle linéarisé (typiquement une sinusoïde).

Nous supposons pour simplifier que $\overline{u}_t = 0$ et que $\overline{u}(x) = \sin(n\pi x)$. Si l'on néglige les termes d'ordre $\epsilon^3$, on peut assimiler $u$ à $\epsilon u_1$ et $v$ à $\epsilon^2 v_2$, puisque nous avons calculé que $u_2 \equiv 0$ et $v_1 \equiv 0$. Or, $v_2$ est la solution de l'équation d'ondes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = -\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\Big(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big)^2\Big) \\ v_2(t=0,x) = 0\,, \quad \partial_t v_2(t=0,x) = 0. \end{cases}$$

où $u_1$ est elle même, dans notre cas, la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (1-\alpha)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \\ u_1(t=0,x) = \sin(n\pi x)\,, \quad \partial_t u_1(t=0,x) = 0. \end{cases}$$

Il vient aisément que

$$u_1(x,t) = \sin(n\pi x)\cos(n\pi\sqrt{1-\alpha}t)$$

et le calcul mène à

$$v_2(x,t) = f(t)\sin\big(2n\pi x\big), \text{ où}$$
$$f(t) = \frac{n\pi}{16}\Big[\alpha + \cos\big(2n\pi\sqrt{1-\alpha}t\big) - (\alpha+1)\cos\big(2n\pi t\big)\Big]$$

On remarque tout d'abord que $v_2$ aura deux fois plus de noeuds spatiaux que $u_1$, de plus comme $\alpha = \frac{EA-T_0}{EA}$, les valeurs réalistes de $\alpha$ sont proches de 0.99 ce qui mène à $\sqrt{1-\alpha} \approx 1/10$, conduisant à un rapport d'environ 20 entre les fréquences de $v_2$ et celles de $u_1$, conformément aux valeurs mesurées expérimentalement (voir section 3). Nous présentons ici le résultat d'une expérience

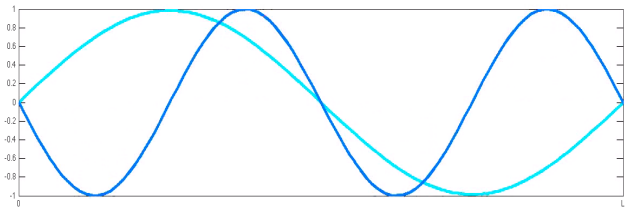


FIGURE 1 – Déplacements normalisés transversal (cyan) et longitudinal (bleu), à un instant donné, en fonction de l'abscisse curviligne sur la corde.

numérique (réalisée avec le code présenté en section 4, et avec le modèle géométriquement exact) pour laquelle on choisit le second mode ($n = 2$), $\alpha = 0.99$ et on prend une amplitude $\epsilon = 2\%$ de la longueur totale de la corde. La figure 1 montre le déplacement transversal (cyan) et le déplacement longitudinal (bleu) à un instant donné, en fonction de $x$. On peut clairement voir le doublement du nombre de noeuds pour la direction longitudinale. Enfin, la figure 2 montre les mouvements transversal et longitudinal d'un point choisi de la corde (à 20%) en fonction du temps. On note deux modulations dans le déplacement longitudinal : une modulation basse fréquence, de période moitié par rapport au déplacement transversal et une modulation plus haute fréquence, de période environ 20 fois moins que le déplacement transversal. Ces expériences numériques montrent qu'à petite amplitude, on retrouve les résultats théoriques lorsqu'on néglige $\epsilon^3$.

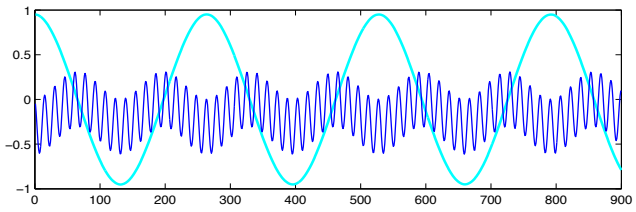



FIGURE 2 – Déplacements normalisés transversal (cyan) et longitudinal (bleu), à un point donné, en fonction du temps.

# 3 Expérimentations

Les forces transmises par les cordes au chevalet solidaire de la table mettent en mouvement l'ensemble, ce qui permet le transfert d'énergie vibratoire et acoustique. Elles se réduisent principalement à deux composantes transversales : une verticale (notée $u$ dans les paragraphes qui précèdent) et une horizontale, et à une composante longitudinale (notée $v$). La compo-

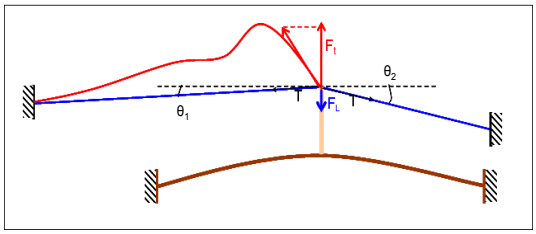



FIGURE 3 – Représentation schématique des forces transmises par la corde au chevalet.

sante transversale $F_T$ n'existe que lorsque la corde est en mouvement. En exploitant les développements limités à l'ordre 4 écrits précédemment, on montre qu'elle s'écrit :

$$F_T = -T_0\,\partial_x u - EA\partial_x u\,\partial_x v - \frac{EA}{2}(\partial_x u)^3\ . \qquad (4)$$

On vérifie bien que $F_T$ n'est différente de zéro que lorsque la dérivée d'espace $\partial_x u$ n'est pas nulle. En revanche, en raison de la géométrie particulière du chevalet, de la courbure de la table et de la fixation des cordes, la force longitudinale induit une composante verticale non nulle $F_L$ sur la table (cf la figure 3). Une façon simple de rendre compte de cette conversion est de considérer que les deux portions de corde forment respectivement les angles $\theta_1$ et $\theta_2$ de part et d'autre du chevalet. Ces angles étant faibles, on peut écrire :

$$F_L = -\,(\theta_1+\theta_2)\left[T_0 + EA\,\partial_x v + \frac{EA}{2}(\partial_x u)^2\right] \qquad (5)$$

On vérifie notamment que $F_L$ induit par construction une composante statique à la table, propriété bien connue des facteurs.

Notons $f_n$, $f_m$ et $f_l$ les composantes du mouvement transversal $u$ dans le cas découplé, les indices $n$, $m$ et $l$ pouvant prendre toutes les valeurs des rangs des partiels présents dans la vibration. De même, notons $f_i$ et $f_j$ les composantes de la vibration longitudinale $v$. L'expression (5) montre que l'on va retrouver les $f_i$ et des combinaisons quadratiques $f_n \pm f_m$ dans la composante $F_L$. L'expression (4) montre, pour sa part, que l'on va retrouver les composantes transversales $f_n$, des combinaisons $f_i \pm f_n$ et des combinaisons cubiques $f_m \pm f_n \pm f_l$ dans $F_T$. L'ensemble de toutes ces composantes est susceptible de se retrouver dans le spectre du son de piano, en régime non linéaire. Ces résultats généralisent les observations faites par Conklin [6]. Une étude supplémentaire est nécessaire à ce stade pour déterminer les conditions d'existence de ces combinaisons de fréquence.

## 3.1 Domaine temporel : précurseurs

Dans le domaine temporel, il est possible d'observer au niveau du chevalet la présence de composantes dues à la non-linéarité dans le transitoire d'attaque. En effet, les ondes longitudinales se propageant environ 10 à 20 fois plus rapidement que les ondes transversales, elles se manifestent sous la forme d'un précurseur qui, comme son nom l'indique, précède le début des oscillations transversales. Ce précurseur change d'amplitude relative avec la force d'excitation, contrairement au précurseur "linéaire" dû à la raideur de la corde, ce qui permet de les distinguer l'un de l'autre. Ajoutons qu'une étude adimensionnée de la corde raide en régime de grande amplitude montre que le terme non linéaire est prépondérant par rapport à la raideur, dès lors que l'amplitude de $u$ est supérieure au rayon $a$ de la corde, le rapport variant en $u^2/a^2$. Les figures 4 et 5 montrent les

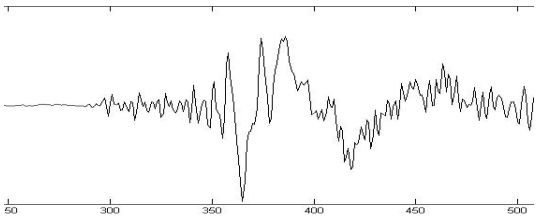



FIGURE 4 – Précurseur au chevalet ; corde C2 ; frappe piano.

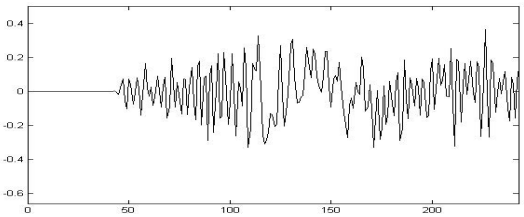



FIGURE 5 – Précurseur au chevalet ; corde C2 ; frappe fortissimo.

précurseurs visibles sur l'accélération du chevalet d'un piano droit mesurée au point d'attache de la corde $C2$ (corde 73(16) - 65,4 Hz), frappée avec un maillet respectivement à faible (piano) et fort niveau (fortissimo). On distingue clairement dans les deux cas une oscillation rapide qui précède la première oscillation transversale, le rapport entre les périodes étant environ égal à 20. Par ailleurs, le niveau relatif du précurseur augmente clairement avec l'amplitude de l'excitation.

### 3.2 Domaine spectral : non-linéarités quadratiques et cubiques

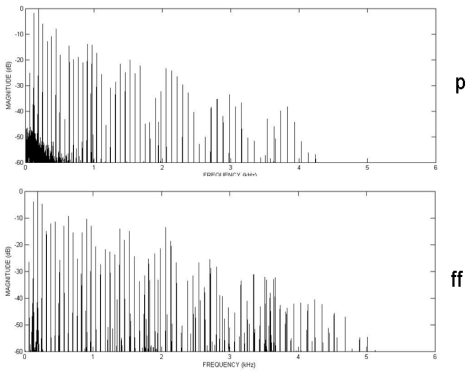



FIGURE 6 – Spectre de l'accélération au chevalet - corde C2. (Haut) Frappe piano ; (Bas) Frappe fortissimo.

L'analyse spectrale permet de quantifier précisément l'influence de la non-linéarité géométrique. La figure 6 montre les spectres d'amplitude de l'accélération au chevalet pour la corde C2 excitée par un maillet, respectivement piano et fortissimo. On constate non seulement un accroissement de la bande fréquentielle excitée, dû à la non-linéarité de la tête du maillet, mais aussi un enrichissement spectral entre les raies quasi-harmoniques pour le cas fortissimo. Une analyse fine des mêmes

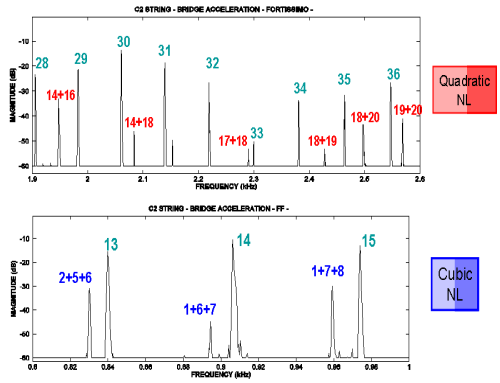



FIGURE 7 – Spectre de l'accélération au chevalet - corde C2 - frappe fortissimo. Agrandissement de deux zones spectrales montrant les non-linéarités quadratiques et cubiques.

spectres est représentée à la figure 7 avec un agrandissement de deux domaines fréquentiels particuliers. Ces figures montrent clairement (avec une grande précision, à mieux que 1 Hz près, soit la résolution fréquentielle de l'analyse) que les raies additionnelles sont des combinaisons quadratiques et cubiques des fréquences propres transversales de la corde. L'agrandissement d'autres zones spectrales auraient, en outre, mis en évidence, certaines combinaisons avec des fréquences longitudinales, conformément aux préductions théoriques découlant des équations (5) et (4).

## 4 Simulations numériques sur des modèles réalistes

### 4.1 Modèle de corde raide et discrétisation

La prise en compte de la raideur est essentielle dans le réalisme d'une simulation numérique d'instrument de musique. Introduisons $\phi$ un angle qui mesure la déviation entre la section droite (supposée rester droite lors du mouvement) de la corde et la normale à sa fibre neutre. Un modèle de poutre de Timoshenko est utilisé afin de coupler $u$ et $\phi$. Ce choix de modèle a été fait dans un souci de réalisme physique et pertinence mathématique. $\rho$ est la masse volumique de la corde, $G$ son module de cisaillement, $I$ son inertie de raideur, $k'$ le paramètre de Timoshenko. Le système de corde raide considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho A\, \partial_t u) - \partial_x\Big[AGk'\big(\partial_x u - \phi\big) + EA\, \partial_x u \\ \qquad\qquad - (EA - T_0)\dfrac{\partial_x u}{\sqrt{(\partial_x u)^2 + (1+\partial_x v)^2}}\Big] = 0, \\ \partial_t(\rho A\, \partial_t v) - \partial_x\Big[EA\, \partial_x v \\ \qquad\qquad - (EA - T_0)\dfrac{1+\partial_x v}{\sqrt{(\partial_x u)^2 + (1+\partial_x v)^2}}\Big] = 0, \\ \partial_t(\rho I\, \partial_t \phi) - \partial_x\Big[EI\, \partial_x \phi\Big] - AGk'\big(\partial_x u - \phi\big) \quad = 0. \end{cases}$$

Ce système est un cas particulier du système

$$\boxed{\partial_t \nabla \mathcal{T}(\partial_t \mathbf{q}) - \partial_x \nabla_{\partial_x \mathbf{q}}\, \mathcal{U}(\mathbf{q}, \partial_x \mathbf{q}) + \nabla_{\mathbf{q}}\, \mathcal{U}(\mathbf{q}, \partial_x \mathbf{q}) = 0} \quad (6)$$

avec $\mathbf{q} = (u, v, \phi)$ et

$$\begin{cases} \mathcal{T}(\partial_t \mathbf{q}) = \dfrac{\rho A}{2}(\partial_t u)^2 + \dfrac{\rho A}{2}(\partial_t v)^2 + \dfrac{\rho I}{2}(\partial_t \phi)^2, \\ \mathcal{U}(\mathbf{q}, \partial_x \mathbf{q}) = \dfrac{EA}{2}(\partial_x u)^2 + \dfrac{EA}{2}(\partial_x v)^2 + \dfrac{EI}{2}(\partial_x \phi)^2 \\ \qquad\qquad - (EA - T_0)\sqrt{(\partial_x u)^2 + (1+\partial_x v)^2} \\ \qquad\qquad + \dfrac{AGk'}{2}(\partial_x u - \phi)^2. \end{cases}$$

Ces systèmes conservent l'énergie

$$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{q}, \partial_x \mathbf{q}, \partial_t \mathbf{q}) = \int_0^L \mathcal{T}(\partial_t \mathbf{q}) + \int_0^L \mathcal{U}(\mathbf{q}, \partial_x \mathbf{q})}$$

ce qui constitue une propriété fondamentale d'un point de vue physique mais aussi mathématique. Nous avons cherché à reproduire numériquement cette conservation d'une énergie, ce qui nous conduit à la **stabilité inconditionnelle de la solution numérique**, difficile à obtenir dans ce cas non linéaire et non scalaire. Nous avons montré dans [5] que dans une certaine classe de schémas numériques conservatifs, il était impossible de construire un schéma explicite sauf si le modèle est linéaire. Nous avons montré que le schéma intuitif qui discrétise le gradient par une différence finie directionnelle ne conduit à un schéma conservatif que pour des modèles très particuliers. En conséquence, le schéma numérique construit et implémenté pour simuler les systèmes de cordes non linéaires de piano est un schéma implicite, du second ordre en temps, inconditionnellement stable.

### 4.2 Modèle de cordes couplées avec un chevalet et un marteau

Une note de piano est le plus souvent obtenue en frappant un triplet de cordes très légèrement désaccordées ($T_0$ varie entre les cordes) avec un même marteau. Nous avons mis en place un modèle réaliste de cordes couplées à un marteau, dont les seules données sont les caractéristiques mécaniques de la corde et du marteau, les caractéristiques géométriques et la vitesse initiale du marteau. Nous avons couplé ce modèle à une description réaliste de chevalet, obtenue suite à des mesures d'admittance au chevalet d'une table d'harmonie cordée (donnant une collection de coefficients équivalents de masse $M_b^{\mathcal{B}}$, raideur $K_b^{\mathcal{B}}$ et amortissement $R_b^{\mathcal{B}}$, régissant le mouvement d'un scalaire $U_b$). Appelons $\xi(t)$ la position du centre de gravité du marteau au cours du temps et $M^{\mathcal{H}}$ sa masse, $\mathbf{q}_i = (u_i, v_i, \phi_i)$ les trois variables de la corde numéro $i$, $\mathcal{U}_i$ l'énergie potentielle correspondant à l'accord de la corde numéro $i$, $< u_i >$ la moyenne de $u_i$ pondérée par une fonction $\delta(x)$ de répartition de la force du marteau sur les cordes. $\Phi$ est une fonction non linéaire d'interaction entre le marteau et les cordes, pour laquelle on prend en compte un hysteresis. La condition au chevalet est complexe et fait intervenir une matrice de rotation $P$ liée aux angles $\theta_1$ et $\theta_2$ de la partie précédente (cf figure 3), telle que $\forall\, i,\ \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \phi_i \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \sum_b U_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le système complet s'écrit :

$$
\begin{cases}
M^{\mathcal{H}} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -\displaystyle\sum_i F_i(t) \\
e(t) = < u_i > (t) - \xi(t) \\
F_i(t) = K_i^{\mathcal{H}} \Phi\big(e(t)\big) + R_i^{\mathcal{H}} \dfrac{d}{dt} \Phi\big(e(t)\big) \\
\partial_t \nabla \mathcal{T}(\partial_t \mathbf{q}_i) - \partial_x \nabla_{\partial_x \mathbf{q}}\, \mathcal{U}_i(\mathbf{q}_i, \partial_x \mathbf{q}_i) \\
\qquad\qquad + \nabla_{\mathbf{q}}\, \mathcal{U}_i(\mathbf{q}_i, \partial_x \mathbf{q}_i) = F_i \begin{pmatrix} \delta(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
T_i(t) = -\nabla U_i(\mathbf{q}_i, \partial_x \mathbf{q}_i)(L, t) \\
M_b^{\mathcal{B}} U_b''(t) + R_b^{\mathcal{B}} U_b'(t) + K_b^{\mathcal{B}} U_b(t) = {}^tP \displaystyle\sum_i T_i(t)
\end{cases}
$$

| Paramètre | Notation | Valeur |
|---|---|---|
| Nombre de cordes | $N_c$ | 3 |
| Longueur de corde | L | 1.9 m |
| Module d'Young | E | $2.0 \times 10^{11}$ N/m$^2$ |
| Section | $A$ | $2,347 \times 10^{-6}$ m$^2$ |
| Masse volumique | $\rho$ | 8920 kg/m$^3$ |
| Tension | $T_0$ | 750 N |
| Masse du marteau | $M^{\mathcal{H}}$ | 9.8 g |
| Vitesse du marteau | $v_{\mathcal{H}}$ | 2.3 m/s |
| Impact du marteau | $x_{\mathcal{H}}$ | 220.9 mm |
| Point d'observation | $x_0$ | 663.3 mm |
| Fonction d'interaction | $\Phi(e)$ | $4.0 \times 10^8\, e^{2.3}$ |

TABLE 1 – Paramètres de simulation, corde C2

Ce modèle nous a permis de reconstituer numériquement des formes d'ondes obtenues expérimentalement dans [2] sur plusieurs cordes. Le tableau 1 montre les paramètres principaux utilisés pour la simulation sur la corde C2, et la figure 8 montre la comparaison des vitesses d'un point observé (noir) et simulé (rouge).

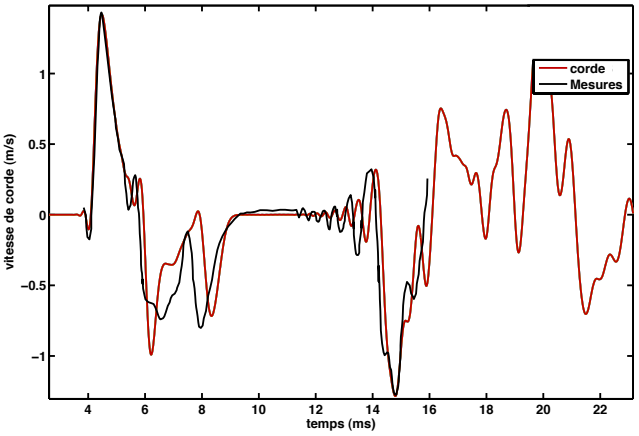



FIGURE 8 – Comparaison des vitesses d'un point observé (noir) et simulé (rouge), en fonction du temps.

Des résultats de simulation mettant en évidence le précurseur au chevalet décrit en section précédente seront présentés à l'oral.

## Références


[1] Anand G.V., "Large-Amplitude Damped Free Vibration of a Stretched String.", *Journal of the Acoustical Society of America* 45, 1089-1096 (1969)

[2] Askenfelt A., Jansson E.V. , "From Touch to String Vibration - The Initial Course of the Piano Tone", *KTH Technical Report*, (1988)

[3] Bilbao S., "Conservative Numerical Methods for Nonlinear Strings.", *Journal of the Acoustical Society of America* 118, 3316-3327 (2005)

[4] Bank B., Sujbert L., "Generation of Longitudinal Vibrations in Piano Strings : From Physics to Sound Synthesis.", *Journal of the Acoustical Society of America* 117, 2268-2278 (2005)

[5] Chabassier J., Joly P., "Energy Preserving Schemes for Nonlinear Hamiltonian Systems of Wave Equations. Application to the Vibrating Piano String.", *INRIA Technical Report* , (2009), http ://hal.inria.fr/inria-00444470/fr/

[6] Conklin H.A. (Jr), "Generation of Partials due to Nonlinear Mixing in a Stringed Instrument", *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(1) 536-545 (1999).

[7] Morse P.M., Ingard K.U., *Theoretical Acoustics*, (1968)