



**HAL**  
open science

## Modélisation par éléments finis mixtes spectraux de capteurs piézoélectriques

Sébastien Imperiale, Gary Cohen, Nicolas Leymarie, Patrick Joly

► **To cite this version:**

Sébastien Imperiale, Gary Cohen, Nicolas Leymarie, Patrick Joly. Modélisation par éléments finis mixtes spectraux de capteurs piézoélectriques. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00551180

**HAL Id: hal-00551180**

**<https://hal.science/hal-00551180>**

Submitted on 2 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Modélisation par éléments finis mixtes spectraux de capteurs piézoélectriques

S. Imperiale<sup>1</sup>, G. Cohen<sup>2</sup>, N. Leymarie<sup>1</sup>, P. Joly<sup>2</sup>

<sup>1</sup> CEA LIST, F-91191, Gif-sur-Yvette, France.

<sup>2</sup> POEMS, Inria Rocquencourt, Le Chesnay, France

Généralement constitués de matériaux piézo-composites, les capteurs multi-éléments sont de plus en plus utilisés en contrôle non destructif par ultrasons en raison de leur capacité à focaliser ou dévier un faisceau ultrasonore pour des composants de formes canoniques ou complexes. Dans l'objectif de modéliser avec précision la sensibilité en émission et en réception de tels capteurs, une modélisation en domaine temporel par éléments finis a été développée. Les équations de la piézoélectricité reposent sur le couplage des équations de Maxwell et de l'élastodynamique. L'hypothèse électrostatique est utilisée, ramenant les équations à résoudre à des équations dynamiques couplées avec une équation statique. La résolution de l'équation statique est coûteuse et doit être faite à chaque pas de temps de la simulation. Ce travail présente le développement d'un modèle homogénéisé basé sur des éléments finis d'ordre élevé bénéficiant des compétences du projet POEMS. La discrétisation par éléments finis mixtes spectraux d'ordre élevé est particulièrement efficace lorsqu'on cherche à approcher des solutions régulières. Toutefois ces méthodes étant coûteuses sur des géométries complexes et sur-maillées, l'emploi de techniques d'homogénéisation applicables à la structure périodique des capteurs piézo-composites a pour but de réduire la complexité du modèle étudié, en simplifiant sa géométrie, bénéficiant ainsi des performances des méthodes d'ordre élevé. Un code éléments finis 2D basé sur ce concept original a été développé permettant de simuler des capteurs en mode émission (champ rayonné par le capteur dans le sabot et dans la pièce) mais aussi en réception (écho de sabot ou écho de surface). Une extension à des simulations 3D est prévue pour une intégration à terme à la plateforme logicielle CIVA.

### 1 Introduction

Les transducteurs ultrasonores utilisés lors de contrôles non destructifs sont aujourd'hui constitués de multiples composants dont la complexité est croissante. Afin de modéliser le comportement de telles structures, il faut savoir alors prendre en compte des comportements anisotropes, viscoélastiques et diffusifs avec des échelles d'hétérogénéités petites devant les longueurs d'ondes caractéristiques étudiées.

L'objectif du travail initié entre les équipes du CEA LIST et du projet POEMS vise à modéliser avec précision la réponse électro-acoustique de capteurs piézo-électriques par une méthode éléments finis (EF). De nombreuses études par des méthodes EF traitent de ce vaste sujet [1, 2, 3, 4]. L'originalité de notre approche vise à coupler une méthode EF mixtes spectraux en régime transitoire à une technique d'homogénéisation du piézo-composite. L'homogénéisation permet de définir un maillage à l'échelle de la dimension de la pastille piézo-composite et non à celle du barreau justifiant, de par leur performance, l'utilisation d'éléments mixtes d'ordre élevé.

Dans un premier temps, une description du problème est réalisée détaillant l'ensemble du domaine modélisant un contrôle : capteur, sabot pièce. Dans un second temps, on décrira la formulation mathématique du problème puis sa discrétisation. Les techniques d'homogénéisation

utilisées seront introduites. Finalement, des résultats numériques validant notre approche seront présentés.

#### 1.1 Définition du problème pour la modélisation d'un contrôle

Le capteur est composé de la juxtaposition du backing, de la pastille piézoélectrique fortement hétérogène et d'une lame d'adaptation (voir figure 1).

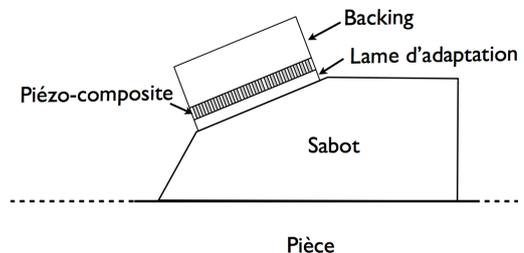


FIGURE 1 – Géométrie d'une configuration de contrôle type.

Le backing est un matériau amortisseur permettant de dissiper l'onde produite en face arrière du bloc piézo-composite. Ce bloc est composé d'une succession de barreaux piézoélectriques répartis de façon homogène dans un polymère. Les effets piézoélectriques ne concerne que ce bloc, qui sera noté  $\Omega_{BP}$ . La lame d'adaptation permet

d'optimiser le transfert d'énergie acoustique du capteur vers la pièce. De plus, on considère que le capteur est posé sur un sabot, lui même au contact d'une pièce. Prenant le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  comme représentatif de l'ensemble des composants de la figure (1), le système d'équations régissant le problème couple l'équation de l'élastodynamique et les équations de Maxwell sous l'hypothèse électrostatique. Cette écriture reprend le formalisme introduit dans [5] mais étendu au cas de la piézoélectricité et s'écrit

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2}{dt^2} u_i + \nabla \cdot \sum_{j=1}^d A_{ij} \nabla (u_j + \beta \frac{d}{dt} u_j) \\ = -\nabla \cdot E_i \nabla \varphi - \alpha \rho \frac{d}{dt} u_i \quad (1) \\ \nabla \cdot \epsilon \nabla \varphi = \nabla \cdot \sum_{j=1}^d E_j^T \nabla u_j \end{aligned}$$

où la variable  $u_i$  représente une des  $d$  composantes du champ de déplacement et le potentiel  $\varphi$  est le champ électrique calculé uniquement sur le domaine  $\Omega_{BP}$ . Les matrices  $A_{ij}$  et  $E_i$ , de dimension  $d \times d$ , sont définies à partir des tenseurs élastique  $\mathbf{C} = (c_{ijkl})$  et piézoélectrique  $\mathbf{e} = (e_{ijk})$  avec dans le cas où  $d = 3$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} c_{i1j1} & c_{i1j2} & c_{i1j3} \\ c_{i2j1} & c_{i2j2} & c_{i2j3} \\ c_{i3j1} & c_{i3j2} & c_{i3j3} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$E_i = \begin{pmatrix} e_{1i1} & e_{2i1} & e_{3i1} \\ e_{1i2} & e_{2i2} & e_{3i2} \\ e_{1i3} & e_{2i3} & e_{3i3} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Les termes dissipatifs font intervenir la dérivée par rapport aux temps de  $u_i$ , ils sont notamment utilisés pour modéliser les propriétés du backing [6] ou encore des matériaux piézoélectrique et viscoélastique [7]. On a nécessairement  $\alpha(\mathbf{x}) \geq 0$  et  $\beta(\mathbf{x}) \geq 0$ . On impose des conditions aux bords de surface libre pour le capteur, le sabot et la partie supérieure de la pièce. Comme on souhaite modéliser la propagation dans une pièce de taille infinie, on utilise autour de la pièce des couches absorbantes adaptées (PML) [4, 8] (voir figure 2).

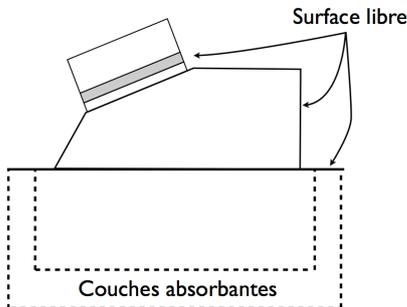


FIGURE 2 – Description des conditions aux bords pour les variables élastiques.

La capteur est doté à l'aide d'électrodes collées de part et d'autre de la pastille piézo-électrique. L'électrode inférieure est reliée à la masse, le potentiel  $\varphi$  est alors nul partout. En revanche sur la face supérieure les conditions aux limites dépendent du mode choisi : émission

ou réception. Dans le cas du mode en émission le potentiel  $\varphi$  est imposé à  $V$ , tel que

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x}, t) \quad \text{donné.} \quad (4)$$

Pour modéliser des capteurs multi-éléments, il suffit de faire varier spatialement la valeur de  $V$ . En mode réception, les électrodes sont considérées comme connectées à une résistance. Appliquant la loi d'Ohm sur une surface  $\Gamma_e$  (voir figure 3) correspondant à une électrode, on obtient la relation suivante

$$\varphi = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_e} (\epsilon \nabla \varphi - \sum_{j=1}^d E_j^T \nabla u_j) \cdot \mathbf{n} \quad (5)$$

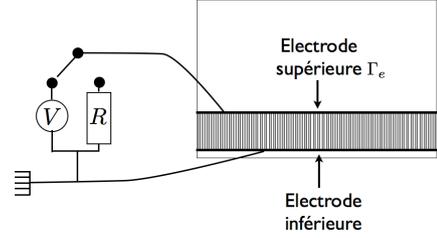


FIGURE 3 – Description des conditions aux bords pour les variables électriques.

## 1.2 Formulation du problème

Pour préparer une future discrétisation éléments finis, on présente ici la formulation variationnelle du problème (1) en mode émission (voir condition 4). On cherche en tout instant les composantes du champ de déplacement noté  $u_i(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$  et le potentiel électrique  $\varphi_0(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega_{BP})$  tel que l'on ait  $\forall i = 1..d$ ,  $\forall v \in H^1(\Omega)$  et  $\forall \psi \in H_0^1(\Omega_{BP})$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{d^2}{dt^2} u_i v + \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} A_{ij} \nabla u_j \cdot \nabla v \\ = - \int_{\Omega} E_i \nabla (\varphi_0 + V) \cdot \nabla v \\ - \int_{\Omega} \alpha \rho \frac{d}{dt} u_i v - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \beta A_{ij} \nabla \frac{d}{dt} u_j \cdot \nabla v \\ \int_{\Omega_{BP}} \epsilon \nabla (\varphi_0 + V) \cdot \nabla \psi = \int_{\Omega_{BP}} \sum_{j=1}^d E_j^T \nabla u_j \cdot \nabla \psi \end{aligned} \quad (6)$$

$H_0^1(\Omega_{BP})$  est l'ensemble des fonctions de  $H^1(\Omega_{BP})$  nulles sur la frontière inférieure et la frontière supérieure du bloc piézo-composite.  $V(\mathbf{x}, t)$  est une fonction arbitraire de  $H^1(\Omega_{BP})$  valant 0 uniquement sur la frontière inférieure du bloc telle que le potentiel  $\varphi = \varphi_0 + V$ . Considérant que le capteur fonctionne en mode émission, la tension appliquée aux bornes du capteur est égale à la trace de  $V(\mathbf{x}, t)$  sur la frontière supérieure. Pour simplifier la présentation, on supposera par la suite que  $\alpha(\mathbf{x})$  et  $\beta(\mathbf{x})$  sont constants. De plus, les termes venant de l'utilisation de couches absorbantes ne seront pas détaillés (voir [8, 9] pour plus de détails).

## 2 Discrétisation

Les éléments finis mixtes spectraux sont des éléments d'ordre élevé. Ils assurent une convergence à l'ordre arbitraire  $r$  de la méthode d'éléments finis et offrent un excellent compromis coût de calcul/précision. Ils ont été introduits dans [9] pour l'équation des ondes et dans [5] pour l'élastodynamique. Ces techniques ont été étendus ici pour la piézoélectricité.

### 2.1 Discrétisation par éléments finis mixtes spectraux

La discrétisation se fait en utilisant une approximation interne des espaces  $H_0^1(\Omega_{BP})$  et  $H^1(\Omega)$  en choisissant d'utiliser les éléments finis mixtes spectraux développés dans [3]. Les espaces d'approximations sont définis à partir de  $\widehat{K} = [0, 1]^d$  le carré ou le cube de référence. On utilise un maillage  $\mathcal{M}_h$  de  $\Omega$ , composé de quadrangles en 2D et hexaèdres en 3D notés  $K_j$ . On note  $\mathbf{F}_j = (F_{j,1} \dots F_{j,d})$  la transformation telle que  $\mathbf{F}_j(\widehat{K}) = K_j$ . Sur ce maillage, on peut définir le sous espace de  $H^1(\Omega)$

$$U_h^r(\Omega) = \left\{ v_h \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v_h|_{K_j} \circ \vec{F}_j \in Q_r \right\} \quad (7)$$

où  $Q_r$  est l'espace polynomial classiquement engendré par les polynômes d'ordre total au plus  $d \times r$ . L'utilisation d'éléments définis sur  $\widehat{K}$  permet de définir les fonctions de bases  $\hat{\varphi}$  par produits tensoriels de fonctions 1D, telles que

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^d \hat{\varphi}_{j_k}(x_k) \quad (8)$$

$\{\hat{\xi}_p\}$ ,  $p = 1..r+1$ , étant un ensemble 1D de points de quadratures de Gauss-Lobatto (voir [9]). Les fonctions  $\hat{\varphi}_{j_k}$  forment une base lagrangienne, elles vérifient la relation

$$\hat{\varphi}_{j_k}(\hat{\xi}_p) = \delta_{j_k p} \quad \forall p = 1..r+1 \quad (9)$$

avec  $\delta_{j_k p}$  le symbole de Kronecker.

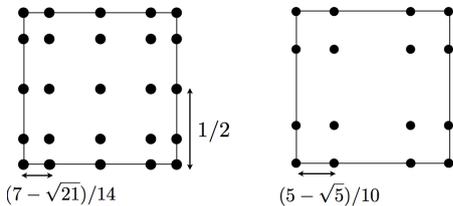


FIGURE 4 – Points de quadrature pour l'ordre 4 (à gauche) et 3 (à droite) de Gauss-Lobatto. Ces points de quadrature servent également à définir une base lagrangienne de fonctions de base.

On cherche donc  $u_h$  et  $\varphi_h$  dans les espaces  $[U_h^r(\Omega)]^d$  et  $U_h^r(\Omega_{BP})$ . On décompose nos deux inconnues sur leur espaces de fonctions de base respectives et l'on teste l'égalité variationnelle (6) pour toutes ces fonctions de base. Les intégrales qui interviennent sont calculées en utilisant la quadrature de Gauss-Lobatto, exacte sur  $2r - 1$

assurant la consistance à l'ordre  $r$  de la méthode. On obtient après calcul un système d'équations différentielles ordinaires en temps avec contraintes algébriques

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} u_h + (\alpha \mathcal{M} + \beta \mathcal{K}) \frac{d}{dt} u_h + \mathcal{K} u_h + \mathcal{B}^T \varphi_h &= -\mathcal{B}^T V_h \\ \mathcal{C} \varphi_h &= \mathcal{B} u_h \end{aligned} \quad (10)$$

On peut directement éliminer l'inconnue  $\varphi_h$  pour obtenir un système d'ordre deux en temps portant uniquement sur les variables élastiques

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} u_h + (\alpha \mathcal{M} + \beta \mathcal{K}) \frac{d}{dt} u_h + (\mathcal{K} + \mathcal{B}^T \mathcal{C}^{-1} \mathcal{B}) u_h \\ = -\mathcal{B}^T V_h \end{aligned} \quad (11)$$

Le choix des fonctions de bases et des points de quadrature garantissent des propriétés essentielles aux matrices pour l'efficacité de la méthode. La matrice  $\mathcal{M}$  est diagonale et symétrique définie positive. Les matrices  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{K}$  sont symétriques semi-définies positives et peuvent être factorisées permettant ainsi un gain en terme de stockage et de coût de calcul lors de l'opération de multiplication par un vecteur [5, 9]).

### 2.2 Schéma temporel

Dans ce qui suit,  $\Delta t$  représente le pas de temps et  $u_h^n$  l'approximation de  $u_h$  au temps  $n\Delta t$ . On utilise une discrétisation explicite centrée. On obtient alors le schéma

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + (\alpha \mathcal{M} + \beta \mathcal{K}) \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} \\ + (\mathcal{K} + \mathcal{B}^T \mathcal{C}^{-1} \mathcal{B}) u_h^n = -\mathcal{B}^T V_h^n \end{aligned} \quad (12)$$

La stabilité du schéma est assurée par la condition CFL

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\rho(\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{K} + \mathcal{B}^T \mathcal{C}^{-1} \mathcal{B}))}} = \Delta t_{opt} \quad (13)$$

où  $\rho(\mathcal{A})$  désigne le rayon spectral de  $\mathcal{A}$ . On résoud à chaque pas de temps un système linéaire de la forme

$$\left( \mathcal{M} + \frac{\Delta t}{2} (\alpha \mathcal{M} + \beta \mathcal{K}) \right) u_h^{n+1} = Rhs(u_h^n, u_h^{n-1}, V_h^n) \quad (14)$$

où  $Rhs$  est un second membre qui peut être calculé à partir des pas de temps précédents. La matrices  $\mathcal{M}$  étant diagonales, seul le terme visqueux  $\beta \mathcal{K}$  pose problème. Comme ce terme vient d'une approximation d'un comportement propagation et faiblement dissipatif par un comportement diffusif il est souvent très faible devant 1, et si la discrétisation n'est pas trop fine, ce terme est également petit devant  $\Delta t_{opt}$  (ou de l'ordre de  $\Delta t_{opt}$ ). On peut montrer que si l'on utilise la matrice  $\mathcal{M} + (\alpha \Delta t / 2) \mathcal{M}$  comme préconditionneur, on se ramène à inverser un système linéaire  $\mathcal{L}$  bien conditionné pour des petites valeurs de  $\beta$ . Plus précisément, on peut montrer que

$$\text{Cond}(\mathcal{L}) \leq 1 + \frac{\beta}{\Delta t_{opt}} \quad (15)$$

Les méthodes itératives sont donc parfaitement adaptées à ce type de résolution.

### 3 Homogénéisation du piézo-composite

La discrétisation par éléments finis du bloc piézo-composite pénaliserait la méthode aux éléments finis. En effet plus le bloc sera hétérogène avec une petite période ( $\varepsilon$ ) (voir figure 5) plus il faudra mailler finement, au moins aussi fin que la période. L'effet est double sur l'efficacité. Le nombre de mailles est augmenté et le pas de temps, qui est proportionnel à la taille de la maille, diminue.

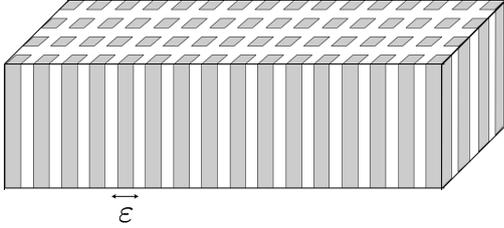


FIGURE 5 – Bloc piézo-composite en configuration matricielle.

Pour faire face à ces difficultés Nous avons choisi d'utiliser les techniques d'homogénéisation asymptotiques décrites dans [10] et [11]. Ces techniques sont initialement développées pour le cas stationnaire mais peuvent être étendues pour des problèmes temporels. Elles visent à remplacer le bloc piézo-composite par un milieu homogène équivalent qui pourra être alors maillé plus grossièrement. En effet une discrétisation d'ordre élevé nécessite un maillage relativement grossier pour être efficace, un maillage trop fin risquerait de générer inutilement un grand nombre d'inconnues. L'intérêt est donc double : d'une part on diminue le nombre de maille et donc l'encombrement mémoire d'autre part on peut utiliser efficacement les discrétisations d'ordre élevé sur des mailles relativement grandes.

Considérons que les  $N$  solutions  $u_i^\varepsilon$  du problème (16) dépendent d'une variable lente  $\mathbf{x}$  et d'une variable rapide  $\mathbf{x}/\varepsilon$ . Notons qu'en première approximation, les conditions aux bords n'ont pas besoin d'être précisées pour faire de l'homogénéisation. On peut alors écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} D_i(\mathbf{x}/\varepsilon) u_i^\varepsilon - \sum_{j=1}^N \nabla \cdot C_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon) \nabla u_j^\varepsilon = f_i \quad (16)$$

où l'on a fait l'hypothèse que les matrices  $D_i$  et  $C_{ij}$  respectent de bonnes propriétés de telle sorte que le problème soit bien posé (notamment  $C_{ij} = C_{ji}^T$  et  $D_i = D_i^T$ ). On décompose ensuite les  $u_i^\varepsilon$  en puissance de  $\varepsilon$

$$u_i^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon, t) = u_i^0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon, t) + O(\varepsilon^2) \quad (17)$$

On cherche à déterminer les solutions  $u_i^0(\mathbf{x}, t)$  qui ne dépendent pas de la période. Dans le domaine les  $u_i^0$  sont alors solutions du problème homogénéisé suivant :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} D_i^* u_i^0 - \sum_{j=1}^N \nabla \cdot C_{ij}^* \nabla u_j^0 = f_i \quad (18)$$

La détermination des coefficients  $D_i^*$  et  $C_{ij}^*$  nécessite la résolution de problèmes cellulaires  $Y$  représentés dans la figure 6.

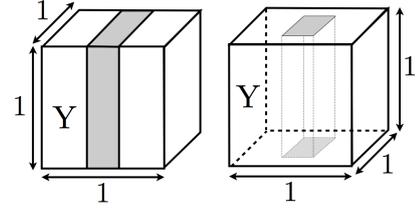


FIGURE 6 – Cellule périodique  $Y$  pour une description laminaire (à gauche) et matricielle (à droite).

Il faut déterminer les coefficients  $w_{jkl} \in H^1(Y)$  à moyenne nulle et périodique sur  $Y$  tels que

$$\sum_{j=1}^N \nabla \cdot C_{ij} \nabla w_{jkl} = -\nabla \cdot C_{il} \mathbf{e}_k \quad \begin{array}{l} \forall i, l = 1..N \\ \forall k = 1..d \end{array} \quad (19)$$

où  $\mathbf{e}_k$  est le  $k$ -ième vecteur de la base canonique. Les coefficients homogénéisés s'expriment

$$(C_{ij}^*)_{mn} = \int_Y (C_{ij})_{mn} + \sum_{l=1}^N \int_Y C_{il} \nabla w_{lnj} \cdot \mathbf{e}_m \quad (20)$$

Lorsque la géométrie est laminaire (variation dans une seule direction), il est possible de déterminer quasi-analytiquement (à une inversion de matrice de taille  $N \times N$  près) les coefficients du milieu homogénéisé. On a alors

$$(C_{ij}^*)_{m,n} = \int_Y (C_{ij})_{mn} - \int_Y C_p^{-1} b_{pnj} \cdot b_{pmi} + \left( \int_Y C_p^{-1} \right)^{-1} \left( \int_Y C_p^{-1} b_{pnj} \right) \cdot \left( \int_Y C_p^{-1} b_{mpi} \right) \quad (21)$$

où  $(C_p)_{mn} = (C_{mn})_{pp}$  et  $(b_{pki})_m = (C_{mi})_{pk}$ . Les densités homogénéisées se calculent plus simplement

$$D_i^* = \int_Y D_i \quad (22)$$

Cette théorie peut facilement s'appliquer pour la piézo-électricité en prenant  $N = d + 1$  et

$$\begin{array}{ll} D_i = \rho I & i = 1..d \\ C_{ij} = A_{ij} & i, j = 1..d \\ C_{Ni}^T = C_{iN} = E_i & i = 1..d \\ D_N = 0 \\ C_{NN} = -\epsilon \end{array} \quad (23)$$

La formule (21) avec les paramètres (23) nous permet de retrouver une partie des résultats obtenus dans [12] dans un contexte plus général.

## 4 Résultats numériques

On étudie dans un premier temps l'impact de l'utilisation de l'homogénéisation, au niveau de la précision du calcul EF. Pour cela on étudie une configuration sans sabot. Le capteur est directement au contact de la pièce (voir figure 7).

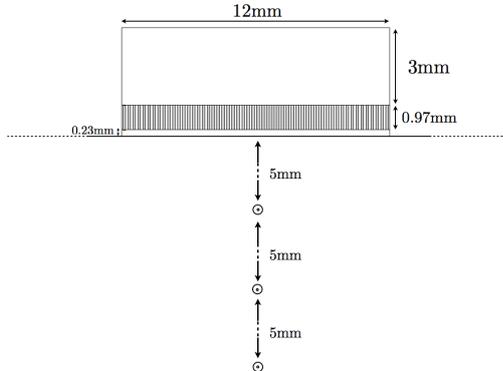


FIGURE 7 – Configuration de la simulation.

La lame d'adaptation est constituée de polymère (ainsi que la matrice qui inclut les barreaux). Le backing est un mélange d'Araldite et de poudre de Tungsten, la poudre agit comme un micro-diffuseur, on a choisi de modéliser ce phénomène comme de l'absorption non visqueuse ( $\alpha > 0$  et  $\beta = 0$ ). Le bloc composite est constitué de 60 barreaux de largeur 0,1 mm en PZT 5A (voir table 1).

PZT 5A : Barreaux					
$c_{11}$	111,0	$c_{12}$	75,4	$c_{22}$	121,0
$c_{33}$	21,1	$\rho$	7750		
$e_{13}$	12,7	$e_{21}$	-5,4	$e_{22}$	15,1
$\epsilon_{11}$	1730	$\epsilon_{22}$	1700		
Araldite/Tungsten (isotrope) : Backing					
$c_{11}$	16,2	$c_{12}$	3,9	$\rho$	5800
$\alpha$	30,5	$\beta$	0		
Araldite (isotrope) : Polymère					
$c_{11}$	8,5	$c_{12}$	2,1	$\rho$	1100
$\epsilon_{11}$	4	$\epsilon_{22}$	5		
Acier (isotrope) : Pièce					
$c_{11}$	271,5	$c_{12}$	108,8	$\rho$	7800

TABLE 1 – Caractéristiques des matériaux utilisés : les masses volumiques  $\rho$  sont en  $kg.m^{-3}$ , les coefficients élastiques  $c_{ij}$  en  $GPa$ , les coefficients piézoélectriques  $e_{ij}$  en  $C.m^{-1}$  et les permittivités  $\epsilon_{ii}$  sont données par rapport à celle du vide.

Les coefficients homogénéisés sont calculés en utilisant les résultats précédents. Il est intéressant de constater la grande hétérogénéité des permittivités (voir table 2). L'excitation électrique est une période de sinus de durée  $0,46 \mu s$ . On s'intéresse au champ de déplacement, selon l'axe du capteur, à différentes profondeurs dans la pièce (5, 10 et 15 mm). Ce champ est calculé avec la méthode homogénéisée et comparé avec une méthode classique prenant en compte la structure périodique complète du piézo-composite. Les sismogrammes représentés sur la figure (8) sont quasiment semblables au regard de la bande passante choisie par le biais de l'excitation. Cet

(PZT 5A / Araldite) homogénéisé					
$c_{11}$	15,3	$c_{12}$	9,4	$c_{22}$	43,6
$c_{33}$	3,7	$\rho$	4425		
$e_{13}$	5e-3	$e_{21}$	-0,383	$e_{22}$	9,156
$\epsilon_{11}$	7,98	$\epsilon_{22}$	852,12		

TABLE 2 – Coefficients homogénéisés du bloc piézo-composite en reprenant les coefficients et les unités du tableau 1 selon les équations (21) et (23).

exemple valide la démarche utilisée pour l'homogénéisation du piézo-composite et prouve que l'approximation qui en résulte n'influe pas sur la qualité des résultats observés dans cette gamme de fréquence.

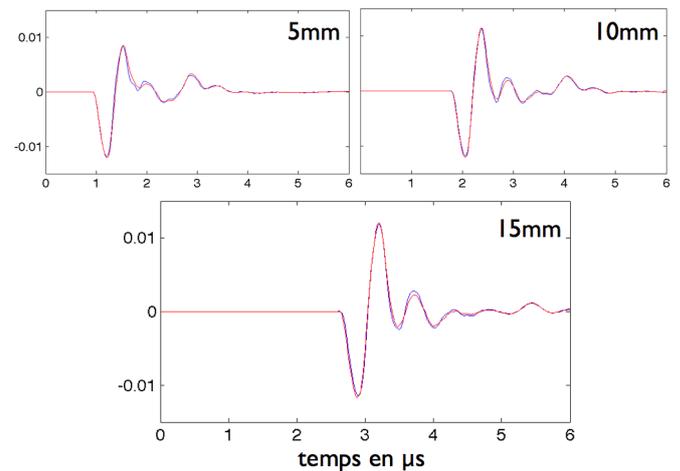


FIGURE 8 – Sismogrammes à 5, 10 et 15 mm de profondeur de la composante du champ de déplacement orientée selon l'axe du capteur : en bleu le calcul complet, en rouge le calcul homogénéisé.

Les coûts de calculs sont comparés dans la table (3). Pour le cas illustré il est important de constater que la méthode homogénéisée est environ 20 fois plus rapide. Notons que ce gain devrait être encore plus conséquent en passant sur des cas en 3 dimensions.

	Avec homo.	Sans homo.
Ordre des EF	6	3
Nombre d'éléments	1324	35777
Nombre d'inconnues	48189	323248
$\Delta t$ ( $\mu s$ )	4,71e-3	1,56e-3

TABLE 3 – Comparaison des coûts de calculs avec et sans homogénéisation.

La deuxième expérience numérique présentée est une configuration multi-éléments sur un sabot. Les éléments sont activés en appliquant une loi de retard sur chacune des électrodes. Pour cet exemple on choisit une simple loi de retard linéaire. On s'attend ainsi à générer un front d'onde incliné par rapport au plan du capteur. La figure (10) présente les résultats qui ont été obtenus au bout de quelques minutes de calculs.

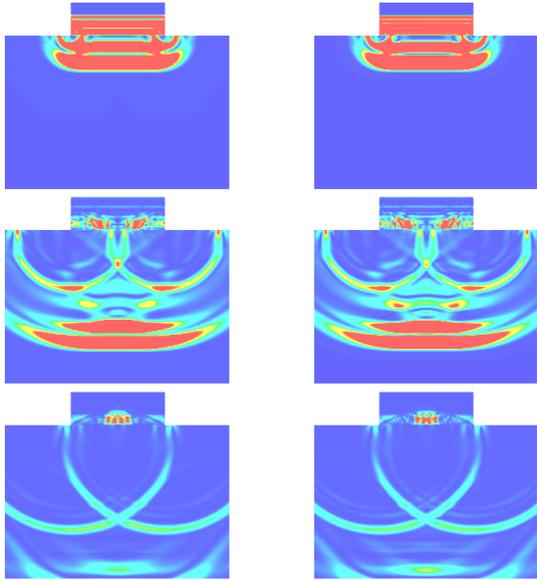


FIGURE 9 – Instantanés de la norme du déplacement à différents temps ( $0,92 \mu s$ ,  $2,76 \mu s$  et  $4,61 \mu s$ ) : à gauche le calcul homogénéisé, à droite le calcul complet.

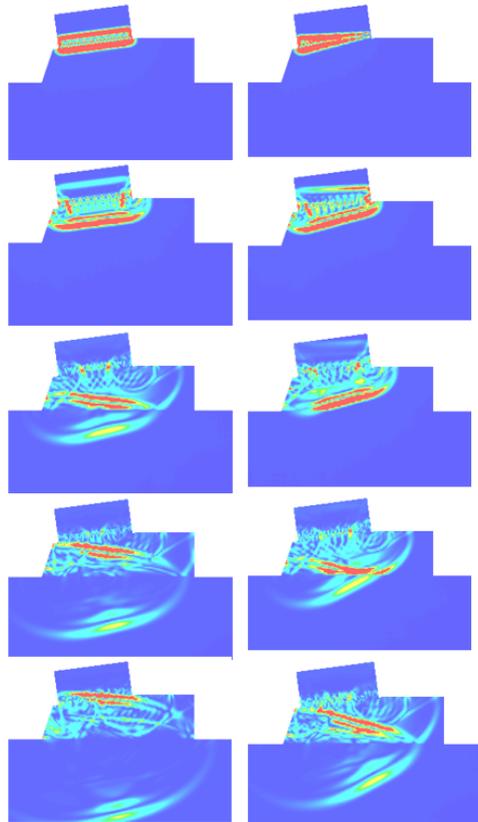


FIGURE 10 – Instantanés de la norme du déplacement à différents temps : à gauche sans application de loi de retard, à droite avec application d'une loi de retard linéaire (déviation angulaire).

## 5 Conclusions

On a présenté une méthode originale pour la modélisation de capteurs en configurations complexes. Cette méthode repose sur une discrétisation éléments finis d'ordre élevé et l'utilisation de techniques d'homogénéisation asymptotique. Ce travail a abouti à la création

d'un code élément fini qui simule des configurations 2D en un temps de calcul raisonnable de l'ordre de la minute. Les configurations présentées ont été réalisées sur un ordinateur portable classique. Les résultats obtenus doivent encore être confrontés à des données expérimentales et à des configurations issues de la littérature. Une extension à des simulations 3D est prévue pour une intégration à terme à la plateforme logicielle CIVA.

## Références

- [1] A. C. Hladky-Hennion, J. N. Decarpigny, "Finite element modeling of active periodic structures: application to 1-3 piezocomposites", *J. Acoust. Soc. Am.*, 94 (1), 621-635 (1993).
- [2] R. Lerch, "Simulation of Piezoelectric Devices by Two- and Three-Dimensional Finite Elements", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 37 (2), 233-247 (1990).
- [3] Y. Ricon, F. Montero de Espinosa, "Piezoelectric modelling using a time domain finite element program", *Journal of the European Ceramic Society*, 27 (13-15), 4153-4157 (2007).
- [4] M. Kaltenbacher, R. Lerch, "Perfectly Matched Layer Technique for the Numerical Computation of Wave Propagation Phenomena", *IEEE Ultrasonics Symposium* (2007).
- [5] G. Cohen, S. Fauqueux, "Mixed spectral finite elements for the linear elasticity system in unbounded domains", *SIAM J. Sci. Comput.*, 26 (3), 864-884 (2005).
- [6] J. E. San Miguel Medina, F. Buiocchi, J. C. Adamowski, "Numerical modeling of a circular piezoelectric ultrasonic transducer radiating water", *ABCM symposium Series in Mechatronics*, 2, 458-464 (2006).
- [7] M. Barboteu, J. R. Fernandez, Y. Ouafik, "Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem", *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42 (4), 667-682 (2008).
- [8] E. Becache, S. Fauqueux, and P. Joly, "Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves", *J. Comp. Phys.*, 188 (2), 399-433 (2003).
- [9] G. Cohen, "High order numerical methods for transient wave equation", *Springer* (2001).
- [10] G. Allaire, "Shape optimization by the homogenization method", *Springer* (2001).
- [11] J. A. Otero, R. Rodriguez-Ramos, G. Monsivais, R. Perez-Alvarez, "Dynamical behavior of a layered piezocomposite using the asymptotic homogenization method", *Journal of mechanics of materials*, 37 (1), 33-44 (2005).
- [12] J. B. Castillero, R. Rodriguez-Ramos, "Homogenization and effective properties of periodic thermomagnetoelastic composites", *Journal of mechanics of materials and structures*, 4 (5), 819-836 (2009).