

Vibrations non-linéaires de plaques minces: résolution numérique et application à la synthèse sonore de gongs

Michele Ducceschi, Cyril Touzé

▶ **To cite this version:**

Michele Ducceschi, Cyril Touzé. Vibrations non-linéaires de plaques minces: résolution numérique et application à la synthèse sonore de gongs. congrès Français d'Acoustique, CFA 2014, SFA, Apr 2014, Poitiers, France. hal-01134659

HAL Id: hal-01134659

https://ensta-paris.hal.science/hal-01134659

Submitted on 24 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License



Vibrations non-linéaires de plaques minces: résolution numérique et application à la synthèse sonore de gongs

M. Ducceschi et C. Touzé
Unité de Mecanique, UME-ENSTA, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau, France
michele.ducceschi@gmail.com

Les instruments de type cymbales et gongs peuvent être représentés, en vue de la synthèse sonore par modèle physique, par des plaques minces. Quand une plaque est frappée à l'aide d'un marteau ou d'une baguette, des phénomènes non-linéaires se produisent si l'amplitude des vibrations est du même ordre que l'épaisseur de la plaque. Ces phénomènes sont responsables du son typiquement brillant et sans hauteur tonal précise des gongs. Dans ce travail, on présente une résolution numérique basée sur la projection modale et permettant de simuler la dynamique non-linéaire de plaques minces. Le modèle numérique est capable de rendre une variété de sons allant du son typique d'une cloche (régime très faiblement non-linéaire) jusqu'au son d'un gong (régime fortement non-linéaire). Les résultats des simulations sont présentés avec une discussion sur le schéma numérique. Une attention particulière est portée sur la facilité de définir des lois d'amortissements arbitraires, ce qui est crucial pour la synthèse sonore.

1 Introduction

Parmi les différentes techniques de synthèse sonore, les méthodes modales jouent un rôle important. Le mot "mode" vise la paire composée par une certaine fonction spatiale définie sur le domaine du système d'intérêt et par une fréquence d'oscillation (appelées fonction propre et fréquence propre du mode). Pour chaque système linéaire continu, chaque mode correspond à un état vibratoire du système : tous les points vibrent à une fréquence propre. De plus, les modes sont indépendants les uns des autres, par conséquent le principe de superposition s'applique : l'état vibratoire général du système résulte de l'addition des modes [1]. Considérant l'importance que les signaux monochromatiques ont dans la perception du son, ce n'est pas surprenant que les techniques modales représentent un excellent instrument pour faire de la synthèse sonore. Dans le domaine des systèmes linéaires, des logiciels tels que MOSAIC, Modalys e CORDIS [2, 3] ont été entièrement développés sur la base de ces principes. La généralisation théorique des techniques modales à systèmes non-linéaires est possible et, dans certains cas, relativement facile. Dans ces cas, il est possible de sélectionner comme fonctions de base les mêmes fonctions du système linéaire associé. Cela se vérifie dans un système discret dans lequel le principe de superposition ne s'applique plus : les modes sont combinés de façon non-linéaire. Au niveau numérique, le calcul des fonctions propres et des coefficients de couplage s'avère souvent compliqué et peu généralisable et, par conséquent, pour la résolution numérique de ces systèmes d'autres techniques sont adoptées comme l'approximation à différences finies [4]. Il existe, toutefois, au moins deux rasions pour essayer d'élargir l'approche modale à des systèmes non-linéaires : la précision des solutions calculées et l'efficacité (au moins pour des vibrations qui ne sont pas trop non-linéaires). Les techniques modales sont précises si elles sont dûment mises en pratique. De plus, le nombre de modes nécessaire à simuler les vibrations faiblement non-linéaires est relativement bas donc le calcul numérique en bénéficie. De plus, quand le système est sujet à une viscosité, un modèle raffiné de perte peut être simulé facilement en ajoutant un coefficient de perte sur chaque mode. Cela se vérifie dans un modèle de perte très riche qui ne pourrait pas, par exemple, être simulé avec les différences finies. Dans cet article, les techniques modales seront élargies à un système non-linéaire : les plaques de von Kármán . Ce système peut être utilisé pour la synthèse sonore d'instruments idiophones (par exemple cloches, gongs, cymbales), du moins en première approximation [5]. Dans le cas des plaques, la non-linéarité est purement géométrique et résulte de l'amplitude des vibrations. La non-linéarité du système

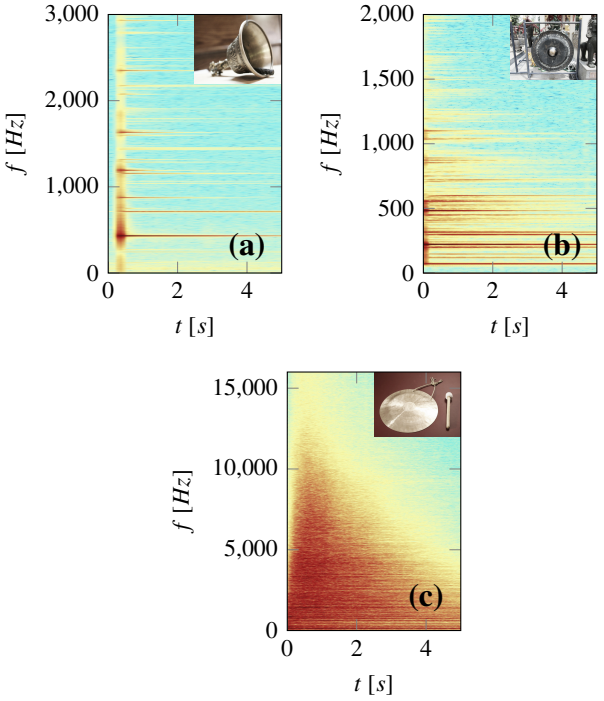


FIGURE 1 – Spectrogrammes des sons émis par des instruments idiophones typiques. (a) : cas d'une cloche, $w \ll h$, régime linéaire. (b) : cas d'un gong épais, $w \sim h$, régime faiblement non-linéaire montrant des phénomènes de couplage et des glissements de fréquence . (c) : cas d'un gong mince, $w > h$, creation d'une cascade d'énergie vers les hautes fréquences.

est nulle, faible, forte quand l'amplitude des vibrations est, respectivement, beaucoup plus petite, du même ordre ou plus grande que l'épaisseur de l'instrument. Ce scénario est typique de certains instruments idiophones (voir Figure 1). Il faut remarquer que, dans le cas de vibrations faiblement non-linéaires, le nombre de modes activé ne dépasse pas la centaine. L'article se compose de deux parties : la résolution modale des équations de von Kármán , avec un schéma d'intégration approprié, sera exposée dans une première partie. Les résultats des simulations pour les régimes de non-linéarité décrits ci-dessus seront présentés dans la seconde partie. La présentation des vibrations fortement non-linéaires, dans lesquelles le nombre de modes en jeu est très élevé, sera très importante.

2 Equations du modèle et schema d'integration temporel

Dans cette section les equations dites de von Kármán seront introduites. Elles seront présentées dans un premier temps sous une forme conservative ; les expressions des énergies potentielle et cinétique seront montrées. Successivement, les equations seront complétées par un terme de perte et un terme de forçage. Enfin, un schema conservatif pour l'integration temporelle des equations sera montré.

2.1 Equations de von Kármán

On considère une plaque rectangulaire ayant des dimensions L_x, L_y et un épaisseur h. Le materiel est homogène, caractérisé par une densité volumique ρ, module de Young E and coefficient de Poisson ν. Le coefficient de rigidité, appelé D, est défini par $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$. Le système de von Kármán s'écrit donc

$$D\Delta\Delta w + \rho h\ddot{w} = \mathcal{L}(w,F), \tag{1a}$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{Eh}{2}\mathcal{L}(w,w), \tag{1b}$$

où Δ est le Laplacien, $w = w(x,y,t)$ est le déplacement vertical et $F = F(x,y,t)$ est la fonction d'Airy. On appelle $\mathcal{L}(w,F)$ opérateur de von Kármán , et il s'écrit

$$\mathcal{L}(w,F) = w_{,xx}F_{,yy} + w_{,yy}F_{,xx} - 2w_{,xy}F_{,xy}$$

où le symbol $_,$ represent une dérivé par rapport aux variables indiquées. Pour la solution des equations de von Kármán , on va maintenant écrire la fonction de déplacement w et la fonction d'Airy F comme des sommes sur les modes d'un système linéaire associé [6]. Ça nous permettra de discretiser le système et de considerer un nombre fini de degrés de liberté.

Les fonctions propres pour w seront indiquées par le symbol $\Phi_k(x,y)$; on écrit donc

$$w(x,y,t) = S_w \sum_{k=1}^{N_\Phi} \frac{\Phi_k(x,y)}{||\Phi_k||} q_k(t), \tag{2a}$$

où Φ_k est telle que

$$\Delta\Delta\Phi_k(x,y) = \frac{\rho h}{D}\omega_k^2\Phi_k(x,y). \tag{2b}$$

Pour chaque application pratique, on remarque que le nombre N_Φ de modes dans l'Eq. (2a) est un nombre fini. Les modes linéaires sont caractérisés par une norme, obtenue a partir d'un produit scalaire $<\alpha,\beta>$ entre deux fonctions $\alpha(x,y)$ et $\beta(x,y)$ définies sur le domain du système. Pour le produit scalaire on a

$$<\alpha,\beta> = \int_S \alpha\,\beta\, dS.$$

La norme, indiqué par le symbole $||\Phi_k||$, est donc

$$||\Phi_k||^2 = <\Phi_k,\Phi_k> .$$

On remarque que la norme de la fonction $\bar{\Phi} = S_w\frac{\Phi_k(x,y)}{||\Phi_k||}$ est S_w, et elle est du coup une quantité arbitraire. L'Eq. (2b) est un problème a valeurs propres, et elle correspond à l'equation de plaque linéaire dite de Kirchhoff.

De la même manière, on écrit les equations suivantes pour la fonction d'Airy

$$F(x,y,t) = S_F \sum_{k=1}^{N_\Psi} \frac{\Psi_k(x,y)}{||\Psi_k||}\eta_k(t), \tag{3a}$$

$$\Delta\Delta\Psi_k(x,y) = \zeta_k^4\Psi_k(x,y). \tag{3b}$$

Les equations à valeurs propres ne sont pas completes sans des conditions aux limites. Pour cet article, les conditions aux limites seront choisies de la manière suivante [7]

$$\Phi_k = \Phi_{k,nn} = 0 \qquad \forall\mathbf{x} \text{ sur le bord }, \forall k$$
$$\Psi_k = \Psi_{k,n} = 0 \qquad \forall\mathbf{x} \text{ sur le bord }, \forall k$$

où n indique la direction perpendiculaire au bord de la plaque. Ces conditions sont des conditions conservatives [6, 8]. On remarque que une solution simple existe pour les fonctions Φ_k ; on a

$$\Phi_k = \sin\frac{k_1\pi x}{L_x}\sin\frac{k_2\pi y}{L_y}; \qquad \omega_k^2 = \frac{D}{\rho h}\left[\left(\frac{k_1\pi}{Lx}\right)^2 + \left(\frac{k_2\pi}{Ly}\right)^2\right]^2$$

où k_1, k_2, appelés nombres modaux, sont deux nombres entiers. Par contre, une solution analytique pour les fonctions d'Airy Ψ_k n'existe pas. Pour cela, on peut utiliser la méthode de Rayleigh-Ritz en s'assurant de sélectionner attentivement les fonctions d'expansion. Bien que la mise en place de cette stratégie ne soit pas facile, elle ne sera pas montré ici. On la trouve quand même dans la reference [7].

Les modes linéaires sont orthogonaux par rapport au produit scalaire. Ils constituent donc une base de fonctions indépendantes [1]. La relation d'orthogonalité entre deux fonctions $\Lambda_m(x,y), \Lambda_n(x,y)$ s'écrit

$$<\Lambda_m,\Lambda_n> = \delta_{m,n}||\Lambda_m||^2,$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker.

Après le calcul des modes propres, le système (1) peut être projeté sur une coordonné modale donné en utilisant la notion de produit scalaire et la propriété d'orthogonalité : on obtient un système d'equations différentielles ordinaires dans la variable temporelle. Les fonctions à calculer sont les coordonnés modales $q_k(t)$, $k = 1,...,N_\Phi$, qui ne dependent que du temps. On trouve

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s = -\frac{ES_w^2}{2\rho}\sum_{p,q,r}^{n}\frac{H_{q,r}^n E_{p,n}^s}{\zeta_n^4} q_p q_q q_r. \tag{4}$$

Dans l'Eq. (4) on trouve deux tensor d'ordre trois, $H_{q,r}^n$ and $E_{p,n}^s$. Ils valent

$$H_{p,q}^n = \frac{\int_S \Psi_n L(\Phi_p,\Phi_q)\mathrm{d}S}{||\Psi_n||||\Phi_p||||\Phi_q||}, \quad E_{r,n}^s = \frac{\int_S \Phi_s L(\Phi_r,\Psi_n)\mathrm{d}S}{||\Phi_r||||\Phi_s||||\Psi_n||}.$$

2.1.1 Expressions des énergies de la plaque

On décrit maintenant les composants des énergies potentielle et cinétique pour une plaque de von Kármán . Une derivation complete n'est pas faite ici, mais on la trouve dans la reference [9]. Les trois composants sont,

respectivement, l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle linéaire U_l et l'énergie potentielle nonlinéaire U_{nl}. En termes des modes on a

$$T = \frac{\rho h}{2} S_w^2 \sum_{k=1}^{N_\Phi} \dot{q}_k^2(t);$$

$$U_l = \frac{\rho h}{2} S_w^2 \sum_{k=1}^{N_\Phi} \omega_k^2 q_k^2(t);$$

$$U_{nl} = \frac{1}{2Eh} S_F^2 \sum_{k=1}^{N_\Psi} \zeta_k^4 \eta_k^2(t).$$

On remarque que les expressions des énergies dependent du temps. D'autre part, l'énergie totale est conservé et on a

$$\frac{d}{dt}(T + U_l + U_{nl}) = 0. \tag{6}$$

Cette relation sera reprise lors de l'introduction d'un schema d'integration conservatif.

2.1.2 Modèles de forçage e de perte pour la synthèse sonore

Pour faire de la synthèse sonore, on est obligés d'ajouter des termes d'amortisement et de forçage dans l'Eq. (1a). Un choix approprié est représenté par

$$D\Delta\Delta w(\mathbf{x},t) + \rho h \ddot{w}(\mathbf{x},t) = \mathcal{L}(w(\mathbf{x},t), F(\mathbf{x},t)) - C\dot{w}(\mathbf{x},t) + \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_f)P(t).$$

Dans cette equation on trouve un terme d'amortisement proportionnel à la vitesse, ainsi que un terme de forçage localisé sur un point $\mathbf{x}_f$ et ayant un amplitude variable au cour du temps. La projection modale nous donne

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s + 2\chi_s \omega_s \dot{q}_s = -\frac{ES_w^2}{\rho} \sum_{p,q,r} \Gamma^s_{p,q,r}\, q_p q_q q_r + \frac{\Phi_s(\mathbf{x}_f)}{\|\Phi_s\|\rho h S_w} P(t),$$

où $\chi_s = C/(2\rho h \omega_s)$ est un coefficient de viscosité (une quantité sans dimension). Cette definition pour l'amortisement est approprié, puisque les plaques métalliques sont sujettes, la plus part des fois, à une perte très faible, et donc la matrice d'amortisement dans ce cas est proche d'une matrice diagonale (qui ne couple pas les modes, voir [10]).

On voit que les equations modales nous donnent la possibilité d'implementer un model de perte très riche, si on connaît les coefficients d'amortisement modaux. L'estimation de ces coefficients peut être faite expérimentalement (voir [11] et Figure 2).

On considère maintenant le mechanism d'excitation. Pour faire de la synthèse, la fonction $P(t)$ peut être choisie parmi les modèles de contact, particulièrement de frappes. En premiere approximation, on peut choisir $P(t)$ comme un cosinus surélevé, cet a dire la fonction suivante

$$P(t) = \frac{P_0}{2}(1 + \cos(\pi(t - t_0)/\Delta t)), \quad \text{pour } |t - t_0| \leq \Delta t,$$

et zero ailleurs.

Cette fonction dépende de deux parameters, l'amplitude maximale P_0 et la durée du contact Δt. En general, on peut

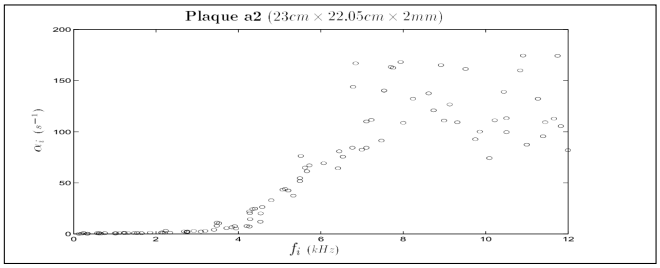


FIGURE 2 – Mesure de coefficients d'amortisement modaux. Figure prise de [11].

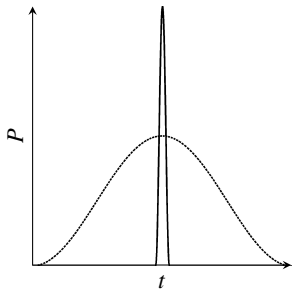


FIGURE 3 – Examples de fonctions de type cosinus surélevé. Ligne en pointillés : simulation d'un maillet ; ligne epaisse : simulation d'une baguette (unités arbitraires).

simuler la frappe d'une baguette en utilisant un petit Δt et un large P_0 ; d'autre part on peut simuler la frappe d'un maillet en sélectionnant un Δt plus long et un P_0 plus petit (voir Figure 3). Des valeurs numériques seront donnée lors de la presentation des résultats des simulations.

2.2 Construction d'un schema d'integration stable

Dans cette section on present un schema d'integration temporelle. En fait, après la discretisation modale des equations de von Kármán , on a obtenu un système de ce type

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t),$$

où $\mathbf{q}$ est le vecteur des coordonnées modales, et $\mathbf{f}$ est le champ de force données par les equations (sans amortisement ni forçage extérieur). On va maintenant utiliser une discretisation temporelle pour calculer la solution de ce système. Pour cela, on considère un pas temporel k (ou une fréquence d'échantillonnage F_s telle que $F_S = 1/k$) ; la solution sera calculé à des pas temporels discrets identifiés par l'index n. On appelle λ_k le schema d'integration, c'est à dire une fonction capable de faire avancer le vector d'etat $\mathbf{q}$ de l'instant n à l'instant $n + 1$; on veut donc

$$\lambda_k : \mathbf{q}(n) \longrightarrow \mathbf{q}(n + 1).$$

Pour des problèmes linéaires, la literature nous donne une variété de schemas ayant des bonnes propriétés de stabilité et de precision (Störmer-Verlet, Runge-Kutta ...). Par contre, ces schemas ne sont plus stables dans le cas des plaques de von Kármán . Par consequent, il faut trouver un schema capable d'intégrer les equations et de rester stable pendant toute la durée de la simulation. Un choix typique dans ces cas est représenté par un schema conservatif, c'est à dire un schema qui conserve une quantité discrete ressemblante

l'énergie du système. Cette loi de conservation discrete nous permet de trouver une condition de stabilité pour le schema. On va montrer un example de ça dans la section suivante.

2.2.1 Opérateurs discrets

Pour la construction du schema, on a besoin d'une série d'opérateurs discrets pour l'approximation des dérivées temporelles. On commence par le plus banal, l'opérateur unitaire

$$1\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(n). \tag{7}$$

On définit maintenant les opérateurs de décalage

$$e_{t-}\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(n-1); \qquad e_{t+}\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(n+1). \tag{8}$$

Des approximations pour la dérivée temporelle sont données par les opérateurs suivants

$$\delta_{t-} \equiv \frac{1}{k}(1 - e_{t-}); \quad \delta_{t\cdot} \equiv \frac{1}{2k}(e_{t+} - e_{t-}); \quad \delta_{t+} \equiv \frac{1}{k}(e_{t+} - 1). \tag{9}$$

La dérivée seconde peut être calculé en combinant les opérateurs precedents. On va choisir l'approximation suivante

$$\delta_{tt} \equiv \delta_{t+}\delta_{t-} = \frac{1}{k^2}(e_{t+} - 2 + e_{t-}) \tag{10}$$

On introduit enfin les operators de moyenne

$$\mu_{t-} \equiv \frac{1}{2}(1 + e_{t-}); \quad \mu_{t\cdot} \equiv \frac{1}{2}(e_{t+} + e_{t-}); \quad \mu_{t+} \equiv \frac{1}{2}(e_{t+} + 1). \tag{11}$$

On montre facilement (en utilisant la formule de Taylor) que l'erreur des opérateurs δ_{tt} and $\delta_{t\cdot}$ est de l'ordre de k^2.

2.2.2 Un schema conservatif

On considère maintenant le schema suivant

$$\delta_{tt}q_s(n) + \omega_s^2 q_s(n) = \frac{S_F}{\rho h}\sum_{k=1}^{N_\Phi}\sum_{l=1}^{N_\Psi} E_{k,l}^s q_k(n)[\mu_{t\cdot}\eta_l(n)]; \tag{12a}$$

$$\mu_{t-}\eta_l(n) = -\frac{Eh}{2\zeta_l^4}\frac{S_w^2}{S_F}\sum_{i,j=1}^{N_\Phi} H_{i,j}^l q_i(n)[e_{t-}q_j(n)]. \tag{12b}$$

En utilisant les opérateurs discrets Eqs.(7)-(11), on obtient un schema implicit du second ordre. Pour ce schema on écrit une loi de conservation de l'énergie discrete. Pour obtenir cette loi, on multiplie Eq. (12a) par $\delta_{t\cdot}\, q_s(n)\, \rho h$ et on somme sur l'index s. En plus, on multiplie Eq. (12b) par δ_{t+}. On peut montrer que [9]

$$\delta_{t+}\left\{\sum_{s=1}^{N_\Phi} S_w^2\frac{\rho h}{2}\left[(\delta_{t-}q_s(n))^2 + \omega_s^2 q_s(n)\,(e_{t-}q_s(n))\right] + \frac{S_F^2}{2Eh}\sum_{l=1}^{N_\Psi}\left(\mu_{t-}\left(\eta_l(n)\eta_l(n)\right)\right)\zeta_l^4\right\} = 0, \tag{13}$$

ce qui est une version discrete de l'Eq. (6).

Pour ce schema on obtient une borne sur la croissance des solutions au cours du temps. On appelle $\epsilon_s^l(n)$ la partie linéaire de l'énergie discrete à l'instant n, on montre alors

$$|q_s(n)|, |q_s(n-1)| \leq \sqrt{\frac{2k^2\epsilon_s^l(n)}{\rho h(1-\alpha^2)S_w^2}} \tag{14}$$

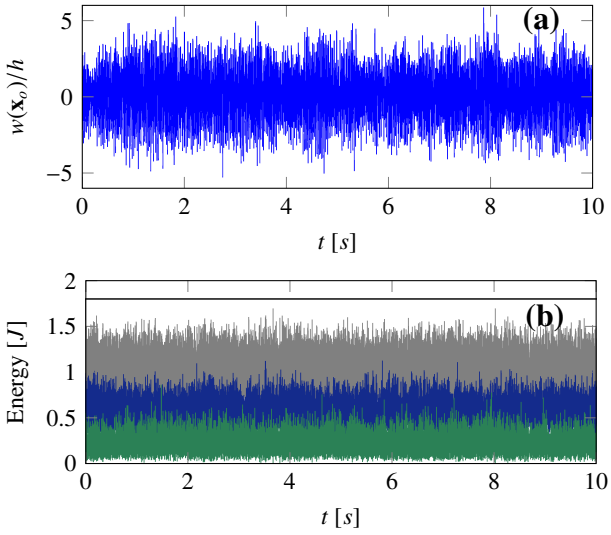


FIGURE 4 – Simulation temporelle d'une plaque d'acier de dimensions $L_x \times L_y = 0.4 \times 0.6\text{m}^2$ et épaisseur $h = 1.5$mm. La simulation à été effectué à l'aide du schema conservatif et la plaque ne present pas de perte. **(a)** Série temporelle du deplacement ; **(b)** énergie totale (ligne épaisse noir), énergie cinétique (gris), énergie potentielle linéaire (bleu), énergie potentielle non-linéaire (vert).

où $\alpha = \frac{k^2\omega_s^2}{2} - 1$. On doit imposer $|\alpha| < 1$, pour que la racine soit un nombre reel ; c'est à dire

$$k < \frac{2}{\omega_s}. \tag{15}$$

Celle-ci est la condition de stabilité à respecter pour le schema conservatif (12).

Figure 4 montre le cas d'une plaque sans perte activé à l'aide d'une impulsion. Les trois contributions d'énergie sont mises en evidence.

On peut maintenant introduire les termes d'amortisement et de forçage dans les equations. On considère les approximations suivantes : $2\chi_s\omega_s\dot{q}_s \sim 2\chi_s\omega_s\delta_{t\cdot}q_s(n)$; $P(t) \sim P(n)$.

3 Résultats des simulations

Dans cette partie le résultats des simulations seront présentés. On considère une plaque d'acier ($E = 2\cdot 10^{11}$Pa, $\rho = 7860\text{kg/m}^3$, $\nu = 0.3$), ayant les dimensions suivantes : $L_x \times L_y \times h = 0.6\text{m}\times 0.4\text{m}\times 1.5\text{mm}$. Le point de forçage $\mathbf{x}_f$ est

$$\mathbf{x}_f = [0.4L_x \;\; 0.4L_y].$$

En absence d'un model de propagation, pour la synthèse sonore on est obligé d'écouter la série temporelle provenant d'un point de la plaque [4]. On appelle ce point $\mathbf{x}_o$; il vaut

$$\mathbf{x}_o = [0.5L_x \;\; 0.3L_y]. \tag{16}$$

Généralement on n'écoute pas directement la série temporelle du déplacement : celle-ci est affectée par des modulations a basse fréquence qui ne sont pas agréables à l'oreille. Pour dégager la modulation a basse fréquence on calcul la dérivée discrete de la même série en utilisant l'opérateur δ_{t+}. Ça nous donne la vitesse au même point et un son plus agréable.

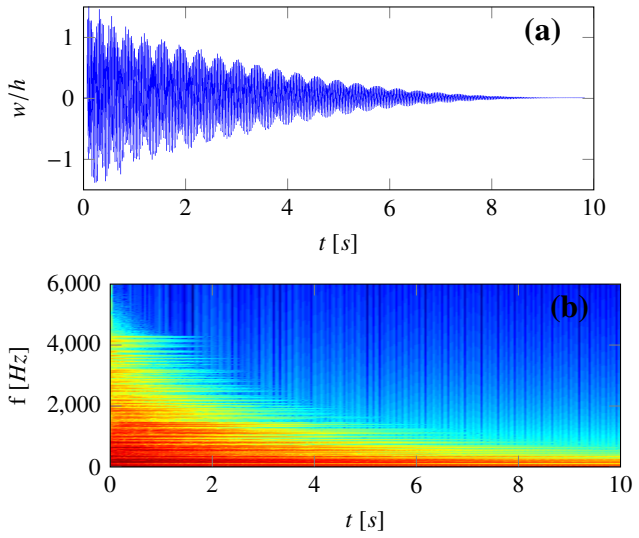


FIGURE 5 – Exemple de vibrations faiblement non-linéaires. (a) série temporelle du déplacement ; (b) spectrogramme de vitesse.

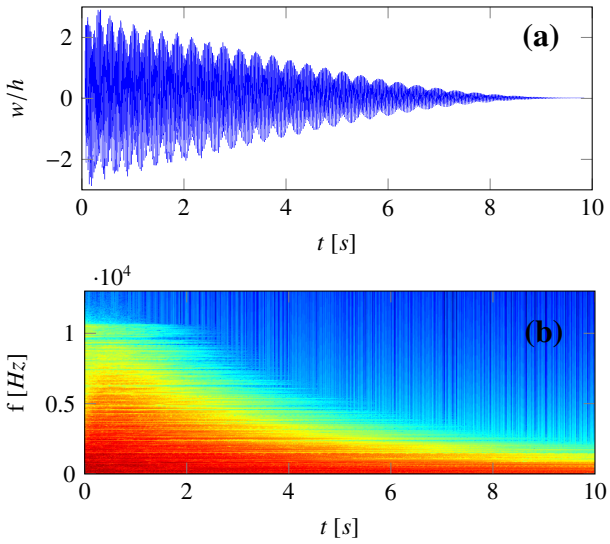


FIGURE 6 – Exemple de vibrations fortement non-linéaires (contact dur). (a) série temporelle du déplacement ; (b) spectrogramme de vitesse.

Les nombres N_Φ, N_Ψ doivent être choisis attentivement puisque un nombre trop grande de modes pourrait surcharger la simulation et allonger le temps de calcul. Dans la plupart de cas, un nombre limité de modes suffit pour rendre de sons convaincants. De manière generale, pour des plaques de taille moyenne, on considère $N_\Phi \sim 200$ pour des vibrations faiblement non-linéaires ; $N_\Phi \sim 500$ pour des vibrations fortement non-linéaires. Enfin, pour la synthèse sonore, on peut choisir $N_\Psi \sim 1/5 N_\Phi$.

Bien que on puisse sélectionner les coefficients d'amortissent comme on veut, un choix simple est fait ici. On consider une loi globale telle que

$$\chi_s = 7.5 \cdot 10^{-4}\ \omega_s^{-0.2}.$$

Cette loi ne represent pas un phénomène physique, mais elle nous donne des courbes de décroissance raisonnables pour la plaque considérée.

3.1 Vibrations faiblement non-linéaires

On considère maintenant un example de vibrations faiblement non-linéaires. La plaque est activé à l'aide d'un cosinus surélevé d'amplitude maximale $P_0 = 400$N et durée de contact $\Delta t = 0.9$ms. Figure 5(a) est la série temporelle du déplacement à la sortie. On voit bien que $w \sim h$ dans ce cas. Figure 5(b) est le spectrogramme de la vitesse au même point. Pour cette simulation $N_\Phi = 200$, $N_\Phi = 32$; la fréquence propre la plus élevée vaut donc $f_{200} = 4086.2$Hz. On voit la coupure modale à cette valeur de fréquence dans la Figure 5(b). A l'oreille, le sons resemble celui d'un gong tapé faiblement à l'aide d'une baguette.

Le temps de calcul en Matlab sur un machine équipé d'un processeur @3.20GHz et 8Gb de mémoire est de l'ordre de deux minutes par second de simulation.

3.2 Vibrations fortement non-linéaires

Deux exemples de vibrations fortement non-linéaires sont maintenant présentés. Le premier est la simulation d'un gong frappé à l'aide d'une baguette (contact dur) ; le deuxième est la simulation d'un gong frappé par un maillet (contact doux).

Figure 6 montre le premier exemple. Pour cela, $P_0 = 1000$N, et $\Delta t = 0.8$ms. L'amplitude maximale du déplacement est $\sim 2.5h$. La coupure modale dans ce cas a été effectué à $N_\Phi = 500$; la fréquence propre la plus élevée est donc $f_{500} = 10043$Hz. Le spectrogramme de vitesse montre la competition entre deux effets : au debut on a la production d'une cascade d'énergie qui active des modes de fréquence plus élevé ; après quelque temps les effets de perte dominent et l'énergie est dissipé à partir des hautes fréquences. On remarque que $N_\Phi = 500$ est un nombre suffisant pour représenter la cascade entière. Pour cette simulation $N_\Psi = 85$.

Figure 7 montre le deuxième exemple. On utilise, comme dans le cas precedent, $N_\Phi = 500$, $N_\Psi = 85$. Par contre, on change les paramètres de forçage : $P_0 = 400$N, $\Delta t = 3$ms. On retrouve la même amplitude maximale de vibrations, e la production d'une cascade. D'autre part, l'evolution de la cascade est plus lente par rapport au cas precedent ; ceci est une consequence d'un temps de contact prolongé. À l'oreille on écoute effectivement un son plus doux que le precedent.

Le temps de calcul en Matlab sur un machine équipé d'un processeur @3.20GHz et 8Gb de mémoire est de l'ordre d'une heure par second de simulation.

4 Conclusion

Ce travail a montré l'application des techniques modales au cas de vibrations non-linéaires de plaques. Pour cela, les vibrations transverses et longitudinales ont été écrites comme des sommes sur une base de fonctions correspondantes aux modes propre du système linéaire associé. Les coefficients de couplage non-linéaire ont été dérivés comme des intégrales de produits des déformées modales. Un schema conservatif d'integration temporelle a été montré pour application à la synthèse sonore. Le résultats de synthèse montrent que un nombre limité de modes est suffisant pour simuler des vibrations fortement non-linéaires. En conclusion, on a

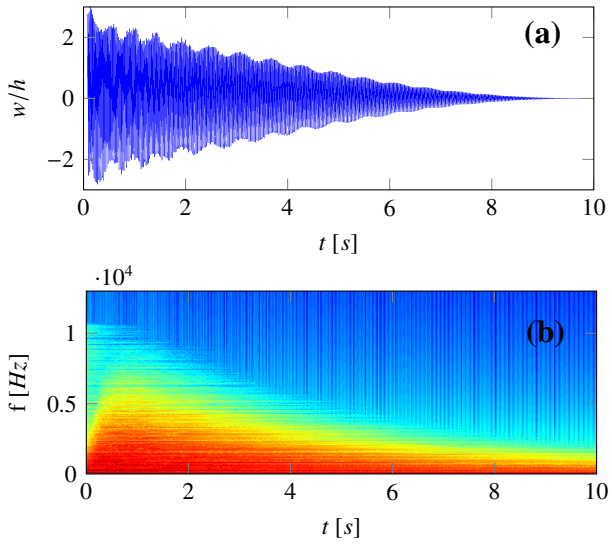


FIGURE 7 – Exemple de vibrations fortement non-linéaires (contact doux). (a) série temporelle du déplacement ; (b) spectrogramme de vitesse.

montré que les techniques modales offrent une alternative valide au méthodes des difference finies, particulièrement grace à leur precision et à la possibilité d'implementer un model de perte très riche.

Références

[1] P. Hagedorn and A. DasGupta. *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*. Wiley, 2007.

[2] D. Morrison and J.-M. Adrien. Mosaic : a framework for modal synthesis. *Computer Music Journal*, 17(1) :45–56, 1993.

[3] G. Eckel, F. Iovino, and R. Caussé. Sound synthesis by physical modeling with Modalys. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, Dourdan, France, 1195.

[4] S. Bilbao. *Numerical Sound Synthesis*. Wiley, 2008.

[5] A.H. Nayfeh. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons, 1995.

[6] O Thomas and S Bilbao. Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3) :569–590, 2008.

[7] M. Ducceschi, C. Touzé, S. Bilbao, and C.J. Webb. Nonlinear dynamics of rectangular plates : investigation of modal interaction in free and forced vibrations. *Acta Mechanica*, 225(1) :213–232, 2013.

[8] M. Amabili. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions : theory and experiments. *Computers and Structures*, 82(31-32) :2587–2605, 2004.

[9] M. Ducceschi. *Nonlinear vibrations of thin rectangular plates. A numerical investigation with application to wave turbulence and sound synthesis*. PhD thesis, ENSTA, 2014.

[10] J. Woodhouse. Linear damping models for structural vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 215(3) :547 – 569, 1998.

[11] C. Lambourg. *Modele temporel pour la simulation numerique de plaques vibrantes. Application a la synthese sonore*. PhD thesis, Université du Maine, 1997.