

# Modèle phénoménologique pour la prédiction de spectres stationnaires et instationnaires de turbulence d'ondes de plaques

Thomas Humbert, C Josserand, Olivier Cadot, Cyril Touzé

▶ **To cite this version:**

Thomas Humbert, C Josserand, Olivier Cadot, Cyril Touzé. Modèle phénoménologique pour la prédiction de spectres stationnaires et instationnaires de turbulence d'ondes de plaques. Rencontres du non linéaire, Mar 2014, Paris, France. hal-01134705

**HAL Id: hal-01134705**

**https://ensta-paris.hal.science/hal-01134705**

Submitted on 24 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèle phénoménologique pour la prédiction de spectres stationnaires et instationnaires de turbulence d'ondes de plaques

T. Humbert[1,2], C. Josserand[1], O. Cadot[2] & C. Touzé[2]

[1] Institut D'Alembert, UMR 7190 CNRS-UPMC, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France.
[2] Unité de Mécanique (UME), ENSTA ParisTech, 828 Bd des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France
thomas.humbert.box@gmail.com

**Résumé.** La théorie de la turbulence d'ondes a pour but de décrire le comportement à long terme de systèmes faiblement non-linéaires hors équilibre. Pour les plaques minces en vibration, ce formalisme permet de prédire un spectre de Kolmogorov-Zakharov avec un flux d'énergie des échelles d'injection à celles de dissipation. Dans cette contribution, une équation phénoménologique pour le spectre d'énergie est établie depuis les solutions générales (Rayleigh-Jeans et Kolmogorov-Zakharov) de l'équation cinétique. Cette équation modèle est alors utilisée pour établir les solutions autosimilaires du système dans le cadre de la turbulence instationnaire.

**Abstract.** Wave turbulence theory aims at describing the long time behavior of weakly non-linear, out-of-equilibrium systems. For thin vibrating plates, the framework allows predicting a Kolmogorov-Zakharov spectrum with an energy flux from the injection to the dissipative scales. In this contribution, a phenomenological equation for the energy spectrum is established from the general solutions (Rayleigh-Jeans and Kolmogorov-Zakharov) of the kinetic equation. This model equation is then used in order to establish the self-similar solutions of the system in the case of non-stationary turbulence.

## 1 Introduction

La théorie de la turbulence d'ondes (ou turbulence faible) (TTO) a pour but de décrire le comportement à long terme de systèmes faiblement non-linéaires où l'énergie est échangée par les différentes échelles [1,2,3]. Sous des hypothèses classiques (dispersivité, existence d'une fenêtre de transparence dans laquelle la dynamique est supposée conservative) et par analogie avec la turbulence hydrodynamique [1], des spectres de Kolmogorov-Zakharov (KZ) sont prédits en plus des spectres de Rayleigh-Jeans associés à l'équipartition des quantités conservées. Le spectre de turbulence d'ondes pour les plaques élastiques en vibration a été déduit théoriquement dans [4] en utilisant le modèle de Föppl-Von Kármán (FVK) pour des plaques minces à non-linéarités géométriques vibrant à amplitude modérée. Deux expériences indépendantes mises en oeuvre peu après [5,6] n'ont pas retrouvé ces spectres prédits théoriquement et numériquement. Récemment, une étude expérimentale et numérique portant sur l'effet de l'amortissement sur les propriétés turbulentes de la dynamique des plaques minces a établi clairement que les différences entre expériences et théorie provenaient en grande partie de la dissipation [7].

En cherchant un moyen de modéliser théoriquement et dans un cadre proche des conditions expérimentales ce dernier résultat, l'idée d'utiliser un modèle de type phénoménologique est apparue assez rapidement comme intéressante, celle-ci ayant déjà été employée dans diverses application de la TTO, fournissant un cadre propice à l'étude de dynamiques instationnaires [8,9]. Ces modèles *ad hoc* sont construits en cherchant une équation qui admet les spectres de Rayleigh-Jeans et de Kolmogorov-Zakharov comme solutions stationnaires. Le but de cette étude est donc d'étudier un tel modèle phénoménologique dans le cas des vibrations de plaques minces élastiques.
Cette contribution se restreint au cadre conservatif et est organisée de la façon suivante : on montre tout d'abord comment établir l'équation phénoménologique. Dans un second temps le cas d'une turbulence à injection constante est présenté et le comportement du front de cascade jusqu'à l'obtention d'un régime stationnaire est étudié. Le cas de la turbulence en déclin est finalement traité en recherchant la présence

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

de solutions autosimilaires évoquées par [1] et observées récemment dans des simulations directes des équations de Föppl-Von Kármán [10].

## 2 Equation modèle

L'analyse théorique considère la dynamique dans le cadre des équations de Föppl-von Kármán. Pour une plaque mince d'épaisseur $h$, de coefficient de Poisson $\nu$, de densité $\rho$ et de module d'Young $E$, celles-ci s'écrivent [11]

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \zeta + \mathcal{L}(\chi, \zeta), \tag{1}$$

$$\Delta^2 \chi = -\frac{Eh}{2} \mathcal{L}(\zeta, \zeta), \tag{2}$$

où $\zeta$ est le déplacement transverse et $\chi$ la fonction d'Airy. L'opérateur $\mathcal{L}$ est bilinéaire symétrique et s'exprime en coordonnées cartésiennes par : $\mathcal{L}(f,g) = f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}$. L'application complète de la TTO aux équations de von Kármán pour les plaques minces a été réalisée dans [4]. Les deux solutions de l'équation cinétique sont alors :

- La solution d'équilibre de Rayleigh-Jeans (RJ) où chaque mode possède la même énergie. Le spectre de puissance de la vitesse $E_\omega$ vérifie également $\partial_t E_\omega = 0$.

- La solution de Kolmogorov-Zakharov (KZ) pour laquelle un flux d'énergie $\varepsilon$ est transféré le long de la cascade jusqu'à la pulsation de coupure $\omega_c$ où il est dissipé. D'après [4], ce spectre d'énergie s'écrit
$$E_\omega \propto \varepsilon^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right). \tag{3}$$

En dérivant l'équation (3) par rapport à $\omega$, il vient que $\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega$ est égal à une constante. En dérivant une seconde fois par rapport à $\omega$ et en cherchant une équation acceptant les deux solutions mentionnées précédemment, l'équation modèle suivante peut être écrite :

$$\partial_t E_\omega = \partial_\omega (\omega E_\omega^2 \partial_\omega E_\omega). \tag{4}$$

Le flux d'énergie $\varepsilon$ associé à cette équation est

$$\varepsilon = -\omega E_\omega^2 E'_\omega, \tag{5}$$

où $E'_\omega$ est la dérivée de $E_\omega$ par rapport à $\omega$. Par une analyse dimensionnelle de l'équation (5), la dépendance théorique du spectre d'énergie par rapport au flux d'énergie [4] est retrouvée :

$$E_\omega \propto \varepsilon^{1/3} \tag{6}$$

On cherche maintenant en simulant l'équation (4) à retrouver le spectre de Kolmogorov-Zakharov dans le régime stationnaire. Pour cela, l'injection d'énergie a lieu à flux constant afin de se rapprocher du cadre expérimental d'un forçage harmonique.

## 3 Premier cas : injection à flux constant

### 3.1 Spectres instationnaires et stationnaires

Afin de simuler numériquement l'equation (4), une méthode par volumes finis est utilisée. Le flux est calculé à chaque maille et la valeur du spectre d'énergie $E_\omega$ est définie au centre de ces mêmes mailles. En procédant de la sorte, il est simple de fixer un flux $\varepsilon$ constant au cours du temps en $\omega = 0$. Une

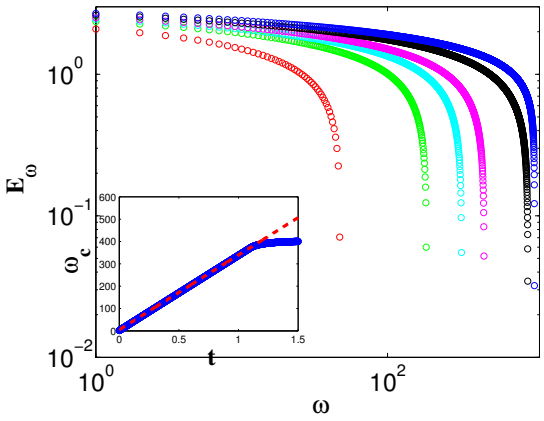



**Figure 1.** Spectre d'énergie $E_\omega$ en fonction de la pulsation $\omega$ pour des temps croissants de gauche à droite et un flux $\varepsilon = 1$. Figure insérée : pulsation caractéristique $\omega_c$ en fonction du temps, pointillés rouges : $\omega_c \propto t$

simulation typique consiste en 2048 points dans la direction $\omega$ et plus d'un million de pas de temps.

La figure 1. montre dans ce cadre le spectre d'énergie à différents instants et suggère que la cascade avance des grandes aux petites échelles en suivant un processus autosimilaire. De plus, la pulsation caractéristique du spectre définie ici par

$$\omega_c = \frac{\int_0^\infty E_\omega \omega d\omega}{\int_0^\infty E_\omega d\omega} \tag{7}$$

présente clairement un comportement linéaire en fonction du temps. Une très forte dissipation a été implémentée (voir équation (15)) à partir de $\omega = 10^3$ de telle sorte que lorsque le front atteint cette échelle, le système devient rapidement stationnaire et la pulsation de coupure reste constante. Cette dissipation permet de recréer le cadre théorique de la turbulence d'ondes.

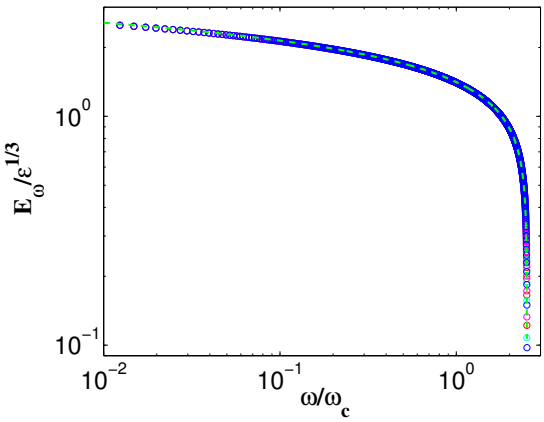



**Figure 2.** Spectre d'énergie $E_\omega$ divisé par $\epsilon^{1/3}$ en fonction de la pulsation adimensionnée $\omega/\omega_c$ pour des flux $\epsilon = 0.5, 1, 2, 5$. Pointillés verts : spectre de Kolmogorov-Zakharov $E_\omega \propto \log(\frac{\omega_c}{\omega})^{1/3}$.

Comme cela peut être remarqué dans la figure 2., un accord parfait avec le spectre de Kolmogorov-Zakharov est alors observé. Cette même figure présente la mise à l'échelle classique du spectre par $\epsilon^{1/3}$

pour des flux $\epsilon = 0.5, 1, 2, 5$ et montre la validité de cette loi d'échelle pour nos données. Le comportement typique des spectres d'énergie des plaques en vibration dans le régime stationnaire est donc correctement décrit par l'équation phénoménologique (4).

### 3.2 Analyse en variables autosimilaires

Analysons désormais les solutions autosimilaires admises par l'équation phénoménologique (4) en cherchant une solution de la forme

$$E_\omega = t^\alpha g(\frac{\omega}{t^\beta}). \tag{8}$$

avec $\alpha$ et $\beta$ deux inconnues réelles et $g$ une fonction à déterminer. En injectant l'équation (8) dans l'équation (4), il vient que $\alpha$ et $\beta$ doivent remplir la condition suivante :

$$2\alpha = \beta - 1. \tag{9}$$

Si l'on suppose maintenant qu'en injectant un flux constant d'énergie il en résulte que l'énergie totale du système croît linéairement avec le temps, l'égalité

$$\int_0^{+\infty} E_\omega d\omega = At \tag{10}$$

où $A$ est une constante mène à une seconde relation $\alpha + \beta = 1$. On trouve donc $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, de telle sorte que les solutions autosimilaires doivent être nécessairement de la forme

$$E_\omega = g(\frac{\omega}{t}). \tag{11}$$

ce qui montre que les solutions autosimilaires de l'équation (4) doivent avoir une fréquence de coupure croissant linéairement avec le temps.

Afin de déterminer la forme de cette fonction $g$, introduisons dans l'équation (4) une variable autosimilaire notée $\zeta = \ln(\omega/t)$. La solution recherchée est alors également la solution de l'équation :

$$(h^2 h')' + e^\zeta h' = 0 \tag{12}$$

où il a été posé $h(\zeta) = g(\omega/t)$, $h'$ dénotant désormais la dérivée de la fonction $h$ par rapport à la variable autosimilaire $\zeta$. L'équation (12) ne présentant pas de solutions analytiques, elle est donc vue comme une équation aux dérivées ordinaires et est résolue par une méthode de Runge-Kutta pour des conditions initiales propageant un flux similaire à celui des simulations temporelles. La figure 3. compare les deux solutions, montrant un accord certain entre elles.

La turbulence instationnaire de plaques a été étudiée numériquement dans [10] avec un schéma aux différences finies conservant exactement l'énergie de l'équation de FVK, montrant un front de cascade se propageant vers les hautes fréquences et laissant dans son sillage un spectre autosimilaire. Quand la plaque est excitée de façon continue en un point par une force harmonique, le front de la cascade évolue linéairement avec le temps. Ces comportements sont parfaitement retrouvés dans la présente étude, montrant la capacité du modèle phénoménologique à déterminer à l'aide d'une équation simple des caractéristiques complexes du régime turbulent.

[10] considère également le cas de la turbulence libre, observant un front de cascade évoluant en $t^{1/3}$. Cette situation est ci-dessous mise en œuvre via l'utilisation de l'équation phénoménologique.

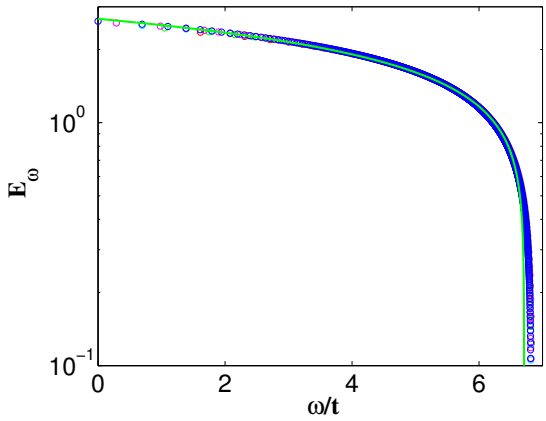



**Figure 3.** Symboles : Spectre d'énergie $E_\omega(\frac{\omega}{t})$ à divers instants pour $\epsilon = 1$. Ligne verte : solution de l'équation (12) pour le même flux.

## 4 Turbulence libre

### 4.1 Analyse en variables autosimilaires

La turbulence libre considère l'étude de la propagation d'une condition initiale en l'absence de forçage et voit alors la propagation d'un front vers les petites échelles. La quantité initiale d'énergie étant conservée, l'amplitude du spectre décroît parallèlement à la propagation du front au cours du temps. Considérons une quantité initiale d'énergie $K$, elle vérifie l'égalité suivante vis à vis de l'énergie totale du système :

$$\int_0^{+\infty} E_\omega d\omega = K. \tag{13}$$

Dans ce cas, la seconde relation sur les inconnues $\alpha$ et $\beta$ devient $\alpha = -\beta$ de sorte que l'on trouve $\alpha = -1/3$ et $\beta = 1/3$. Les solutions autosimilaires pour le spectre d'énergie $E_\omega$ s'écrivent alors :

$$E_\omega = t^{-1/3} g(\frac{\omega}{t^{1/3}}). \tag{14}$$

### 4.2 Simulations temporelles

Pour étudier cette situation par simulation temporelle, la dissipation aux hautes fréquences est supprimée et le forçage est arrêté après une seconde, instant servant d'origine des temps. Cette dernière condition s'applique facilement en fixant à zéro la valeur du flux en $\omega = 0$.

La figure 4(a). montre l'évolution de la quantité initiale d'énergie (en rouge) en fonction du temps. Les deux figures insérées décrivent l'évolution de la pulsation caractéristique et de l'amplitude du spectre en $\omega = 0$ en fonction du temps, décrivant un comportement respectivement en $t^{1/3}$ et en $t^{-1/3}$. Ces deux observations de même que la mise à l'échelle finale présentée en figure 4(b). corroborent la dérivation en variables autosimilaires donnée par l'équation (14).

## 5 Conclusions et perspectives

Un modèle phénoménologique construit à partir des deux solutions de l'équation cinétique de turbulence d'ondes pour les plaques minces a été présenté et appliqué au cas de la turbulence instationnaire dans deux situations : la turbulence libre et une turbulence excitée par un flux constant d'énergie au cours du temps. En simulant numériquement l'équation phénoménologique, un comportement autosimlaire a été remarqué dans les deux cas, et justifié dans un second temps par une analyse en variables

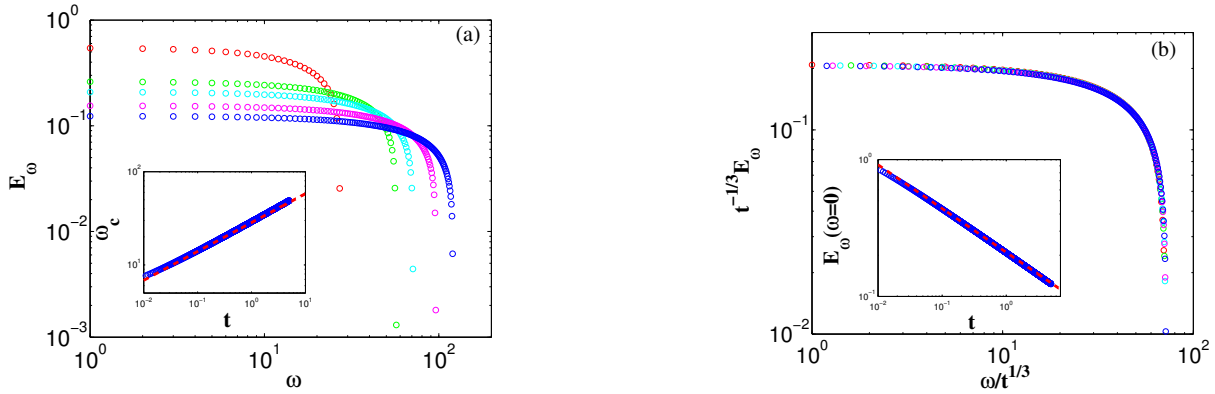



**Figure 4.** (a) Spectre d'énergie $E_\omega$ en fonction de la pulsation $\omega$ pour (de haut en bas) $t = 0, 1, 2, 3, 4$ s. Figure insérée : pulsation caractéristique $\omega_c$ en fonction du temps, pointillés rouges : $\omega_c \propto t^{1/3}$. (b) Fonction d'autosimilarité $g(\frac{\omega}{t^{1/3}})$ pour les mêmes données. Figure insérée : $E_\omega(\omega = 0)$ en fonction du temps, pointillés rouges : $E_\omega(0) \propto t^{-1/3}$.

autosimilaires. On notera qu'il a été vérifié que ces solutions sont également des solutions de l'équation cinétique.

Ces deux exemples montrent la capacité de notre modèle à capturer des éléments fondamentaux de la dynamique des plaques minces élastiques et une comparaison avec des simulations instationnaires directes de l'équation de FVK présentées dans [11] nous permettront de valider définitivement le travail présenté ici. La perspective la plus intéressante vient cependant de la possibilité d'introduire directement un terme d'amortissement dans l'équation (4) en écrivant

$$\partial_t E_\omega = \partial_\omega(\omega E_\omega^2 E'_\omega) - \gamma_\omega E_\omega \tag{15}$$

où $\gamma_\omega$ peut être une loi d'amortissement quelconque. En utilisant les données expérimentales de [7] montrant l'influence de la dissipation sur la forme de la cascade d'énergie, la capacité du modèle à capturer la dynamique non conservative du système sera évaluée. Cela permettrait alors de posséder un modèle hérité de la turbulence d'ondes mais plus simple d'utilisation et autorisant une comparaison adéquate avec la situation expérimentale.

## Références


1. V. E. Zakharov, V. S. Lvov, G. Falkovitsch, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence*, Springer, (1992) .
2. A. Newell, R. Benno, Wave turbulence", *Annual Review of Fluid Mechanics*, **43** : 59–78 (2011).
3. S. Nazarenko, *Wave turbulence*, Springer, (2011).
4. G. Düring, C. Josserand, S. Rica, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 025503 (2006).
5. N. Mordant, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 234505 (2008).
6. A. Boudaoud, O. Cadot, B. Odille and C. Touzé, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 234504 (2008).
7. T. Humbert, O. Cadot, G. Düring, C. Josserand, S. Rica, C. Touze, *EPL (Europhysics Letters)* **102**, 30002 (2013).
8. G. Falkovitch, A. Shafarenko, *Journal of Nonlinear Science*, **1**, 457 (1991).
9. C. Connaughton, A. Newell, Y. Pomeau, *Physica D*, **184**, 64 (2003).
10. M. Ducceschi, O. Cadot, C. Touzé and S. Bilbao, submitted to *Physica D*, (2013).
11. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, New York (1959).