

La mécanique des Sphères de Lie: un futur pour la CAO?

Christian Arber, Frédéric Jean

▶ **To cite this version:**

Christian Arber, Frédéric Jean. La mécanique des Sphères de Lie: un futur pour la CAO?. SMF. Des mathématiques au monde socio-économique, 28, 2015, Fascicules " Journée annuelle " de la SMF. hal-01175755

HAL Id: hal-01175755

https://ensta-paris.hal.science/hal-01175755

Submitted on 12 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La mécanique des Sphères de Lie: un futur pour la CAO?

Christian ARBER* Frédéric JEAN†

« M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde. »

C.G.J. Jacobi, lettre à Legendre, 2 juillet 1830, in Gesammelte Werke, Vol. I, Berlin (1881), p. 454

Pierre Bézier, « chez Citroën, une recherche assez semblable à la mienne avait été menée dès 1958 par un mathématicien, Paul de Casteljau. Mais elle n'avait pas été rendue publique. À ce propos, durant des années, quand je présentais mes travaux à la Régie Renault ou ailleurs, j'invoquais les recherches d'un professeur mythique que j'avais appelé Durant. Je lui avais attribué les résultats de mes propres réflexions, ce qui donnait confiance aux gens. Parce que si j'avais dit qu'il s'agissait de polynômes définis par moi-même, je crois que je serais devenu une abomination pour la maison ! Alors je parlais des fonctions de Durant et les gens regardaient les courbes, très satisfaits. J'ai même enseigné ces fonctions au Conservatoire national des arts et métiers. On m'a encore demandé des nouvelles de Durant, voici trois ans chez General Motors... Plus sérieusement, la propriété intellectuelle sur ce travail devrait pourtant être partagée avec Paul de Casteljau, dont je ne manque jamais de citer la contribution.»



Sophus Lie (1842-1899)



Bernhard Riemann (1826-1866)



Elie Cartan (1869-1951)

*Missler Software, 7 rue du Bois Sauvage, BP 521 Cedex, 91055 Evry France, c.arber@topsolid.com

†Unité de Mathématiques Appliquées, ENSTA ParisTech, Université Paris-Saclay, 828 bd des Maréchaux, 91762 Palaiseau cedex France, frederic.jean@ensta-paristech.fr

Abstract

La plupart des pièces ou ensembles de pièces de la vie courante sont conçus maintenant en CAO (Conception Assistée par Ordinateur): voiture, avion bien sûr, mais aussi savon, emballage de savon, machine à emballer les savons,... On peut se douter que la modélisation géométrique y joue un grand rôle. Mais quelle géométrie? Et finalement quels ressorts mathématiques sont employés dans ce qui est utilisé tous les jours par des centaines de milliers de concepteurs à travers le monde (et des millions d'utilisateurs de jeux vidéo!)? A leur insu et pour leur bonheur. Géométrie cartésienne bien sûr, mais aussi de belles vieilles idées de la grande école de géométrie franco-allemande de la fin du XXIème siècle revivent actuellement. Rangées dans les réserves du musée de l'algèbre triomphante, elles sont exhumées régulièrement par quelques archéologues des mathématiques (les géomètres!). Maintenant combinées avec les progrès fantastiques portés par la géométrie Riemannienne sur les groupes de Lie, elles permettent des avancées importantes dans le codage d'un logiciel de CAO. En seront-elles le futur? On illustrera cela avec l'espace des Sphères de Lie, pour traiter le problème du solveur d'esquisses (construction naturelle de géométries sous contraintes), un des problèmes centraux de la modélisation.

Contents

1 Mathématiques et CAO **3**
- 1.1 Les deux types de modèles en CAO . . . 3
- 1.2 Les solveurs d'esquisses . . . 5
- 1.3 Digression: qu'est-ce que sont donc les mathématiques pour l'ingénieur? . . . 6
- 1.4 Points, lignes et cercles: l'espace des sphères de Lie . . . 7
- 1.5 Une solution au problème du solveur d'esquisses . . . 8
- 1.6 Une implémentation algorithmique industrielle . . . 8

2 Solveur d'esquisse et espace des sphères **9**
- 2.1 Modéliser l'esquisse . . . 9
- 2.2 Résoudre l'esquisse . . . 13

1 Mathématiques et CAO

La CAO est au carrefour de 3 sciences : l'informatique, la mécanique et ... les mathématiques que l'ingénieur, s'il en a quelques mauvais souvenirs d'étude, figera dans sa mémoire. Pourtant elles sont l'alphabet et le langage dans lequel s'écrit forcément tout ce que nous faisons, puisque nous n'avons d'autre choix que de convertir en nombres notre monde réel pour le stocker dans un ordinateur. Les modèles de plus en plus performants ainsi implantés dans notre ordinateur donnent toujours plus de crédit à la pensée pythagoricienne (VIième siècle av JC!) selon laquelle "tout serait nombre". Il se trouve que les techniques mathématiques (géométrie) applicables dans notre domaine ont considérablement progressé à partir des idées initiales des grands géomètres de la deuxième moitié du XIXième siècle (Gauss, Möbius, Poncelet, Plücker, Grassmann, Steiner, Chasles, Klein, Darboux,...), et surtout l'envolée triomphante des groupes de Lie et de la géométrie Riemannienne (Lie, Hadamard, Riemann, Cartan,...). Cette dernière est maintenant employée de façon très poussée et systématique en physique fondamentale et appliquée (astronomie, laser, chimie moléculaire, ...). Ces techniques, difficiles et peu enseignées en école d'ingénieur, n'ont pas pour le moment pénétré réellement le monde industriel, et encore moins celui de la CAO. Pourtant elles conduisent à des innovations dont on ne sait pas réellement mesurer l'importance – par manque d'études – dans notre façon de coder un logiciel de CAO, et dans les bénéfices que l'on pourrait en attendre, tant du point de vue de la vitesse de calcul que de la simplicité naturelle induite pour l'utilisateur. Nous illustrerons cela à travers le problème de l'esquisse, ou comment dessiner de façon pratique un profil fait de points, lignes, arcs, qui sera à la base de toute construction géométrique en CAO.

1.1 Les deux types de modèles en CAO

Avant de décrire plus précisément le problème de l'esquisse et une des solutions possibles, il n'est pas inutile de revenir sur les deux types de modélisation qui coexistent en CAO, donnant lieu finalement à des représentations mathématiques différentes au sein des logiciels.

Il existe grosso modo deux objectifs pour un concepteur: faire du beau, du fluide (design: carrosserie de voiture, fuselage,...) parce que cela se voit ou doit avancer dans un milieu fluide, ou faire de la fonction: lien, mouvement (mur, poutre, boîte de vitesse, train d'atterrissage,...) parce que cela doit "tenir ou marcher".

Design

Il s'agit de modéliser géométriquement une forme, délimitée par des surfaces supportées par une structure topologique en fil de fer (complexe simplicial). Parce que le beau fait vendre, les surfaces doivent être harmonieuses, bien contrôlées en courbure, et se raccorder impeccablement ("pièces d'aspect"). L'école française est fière à juste titre des travaux pionniers de l'ingénieur Pierre Bézier chez Renault, et du mathématicien Paul De Casteljau chez Citroën, qui ont fait considérablement avancer la modélisation de ce type de formes. Et un premier croisement très fructueux mathématique et ingénierie de conception. Les courbes ou surfaces de Bézier sont des applications directes des polynômes de Bernstein, et des techniques barycentriques, donc projectives. Dans ce type de modélisation vont dominer les représentations de Bézier, ou leur généralisation aux Nurbs (Non Uniform Rational Bernstein Splines). Parce qu'il permettait de résoudre des problèmes inabordables avant l'ordinateur – modélisation géométrique de formes polynomiales quelconques – ce domaine a concentré l'essentiel de la recherche et de l'enseignement en CAO, depuis les années 70 jusqu'on peut dire les années 2000. A partir des années 2000, le sujet a décliné, car considéré comme résolu, bien que des avancées très notables soient encore en marche (TSplines) et que la recherche y soit toujours active.



Figure 1: Intérieur de bateau (TopSolid): rien n'est droit, tout est design et formes polynomiales.

Fonctions

Tout mouvement qui doit se perpétuer dans l'espace, animé par un moteur, est forcément issu d'un sous-groupe du groupe des déplacements euclidiens: translation, rotation, vissage. Cela contraint énormément les formes dites fonctionnelles, devant être en contact les unes avec les autres, qui se retrouvent devoir être des plans, des cylindres, des sphères et des hélicoïdes. On peut produire des mouvements plus évolués avec des cames, mais leur coût d'étude et de fabrication est tel, que l'on préfère s'en tenir dans l'essentiel des cas à la composition de mouvements simples (translation, rotation).

Les pièces fonctionnelles ne se voyant pas, elles doivent donc être simples, pour se fabriquer à moindre coût, c'est-à-dire, schématiquement, par les mouvements de translation d'une fraise ou les mouvements de rotation d'un tour. Il y a peu de problèmes de conception de la pièce elle-même, et la difficulté est reportée sur la fabrication, car les pièces fonctionnelles doivent être fabriquées dans des tolérances très précises (pensons à l'horloge mécanique qui tient la seconde sur un an, par exemple).

Sur ce type de pièces assurant des liaisons et des mouvements, il n'est pas étonnant que la ligne et le cercle dominent dans le plan, de même que le plan et la sphère dans l'espace, comme éléments géométriques de base. Modéliser, construire des lignes et des cercles est un problème mathématique considéré comme vulgaire, et résolu totalement depuis Descartes, voire Euclide. Cela ne pouvait passionner aucun chercheur en CAO, encore moins un mathématicien, jusqu'au début des années 90.

A moins que...

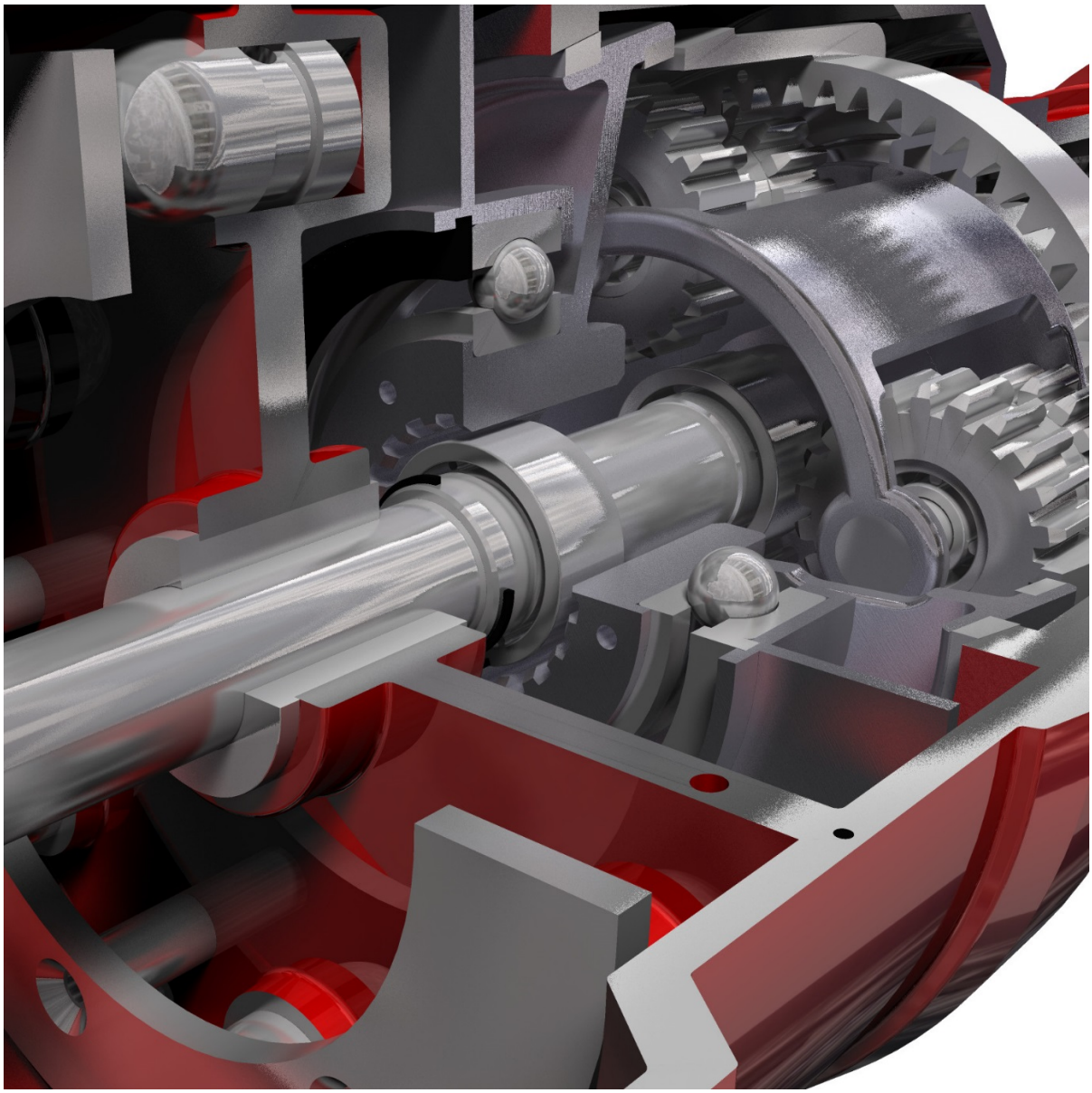


Figure 2: Un moto-réducteur (TopSolid): les liaisons mécaniques induisent des géométries planes, cylindriques, sphériques.

1.2 Les solveurs d'esquisses

La construction d'esquisses est restée explicite, substituant l'ordinateur à la planche à dessin, jusqu'à la fin des années 80. Si le logiciel fournissait quelques fonctions permettant de calculer des tangences par exemple, l'utilisateur déroulait son propre schéma constructif, en empilant des points, lignes, cercles qui se déduisaient des entités précédentes, par une fonction de construction simple: arc point/point/rayon, ligne point/tangence, ... Il devait trouver lui-même le chemin de résolution de ce qu'il voulait construire, ou plus difficile encore, copier à partir de l'esquisse manuelle du designer.

Au début des années 90, des logiciels et travaux pionniers (Parametric Technology, DCubed,...) ont révolutionné l'approche proposée: les profils composés de points, lignes et arcs sont créés comme un ensemble de géométries sous contraintes, se résolvant au fur à mesure par un solveur en constant éveil. Le procédé constructif est implicite, à la charge du logiciel.

Un utilisateur dessine une esquisse, ensemble de géométries (point, ligne, cercle, plan ou sphère,

mais aussi des coniques, des BSplines,...), dans le plan ou dans l'espace. Il spécifie également des contraintes (fixité, distance, angle, tangence, perpendicularité, coïncidence, symétrie,...) liant ces géométries. Au fur à mesure qu'il dessine, les contraintes se résolvent. Le logiciel lui indique les degrés de liberté restants, et également si certaines contraintes sont liées entre elles, et donc potentiellement redondantes (sur-contraintes).

Dans le cas de degrés de liberté restants, le logiciel peut bouger la géométrie suivant les mouvements laissés possibles par le système de contrainte. Lorsqu'une géométrie n'a plus de degré de liberté, l'utilisateur est averti.

Les esquisses "fonctionnelles" contiennent en presque totalité des lignes et des cercles, ou l'on cherche en tous les cas à se ramener à cela, pour permettre une fabrication à moindre coût et très précise.

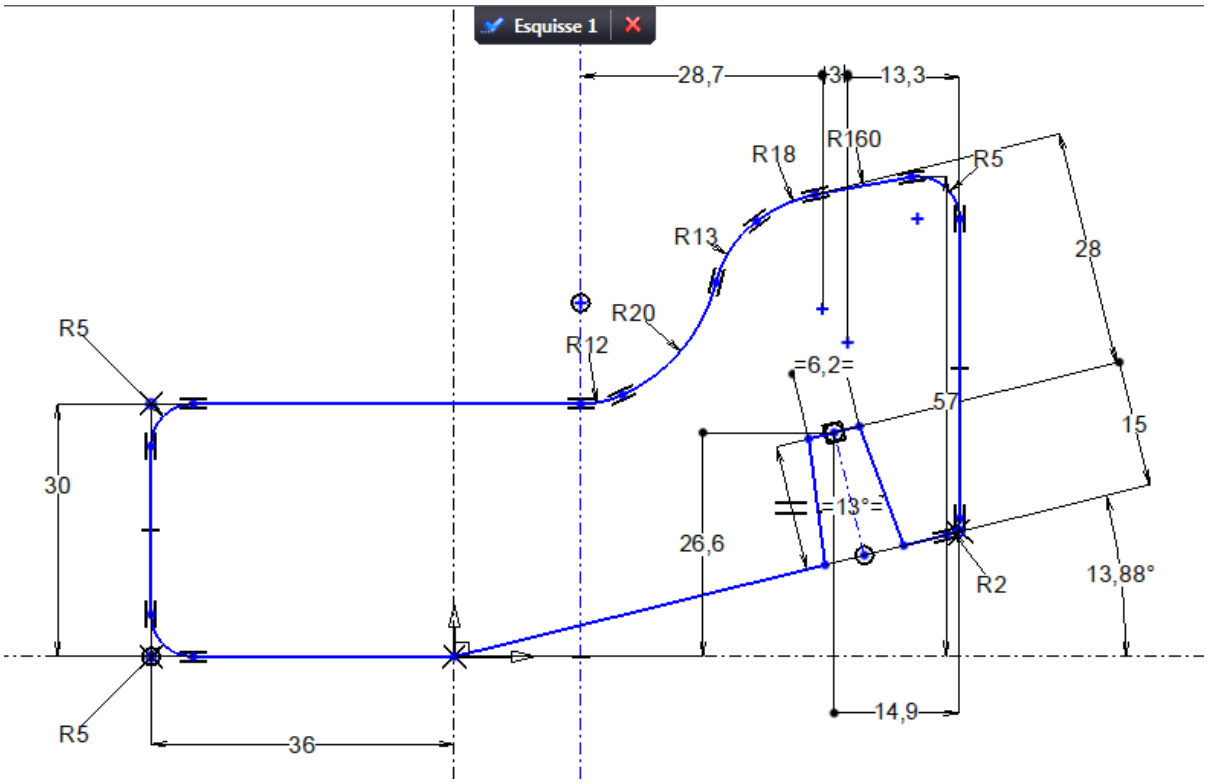


Figure 3: Une esquisse TopSolid iso-contrainte (en gras): succession de points, lignes, cercles pilotées par des coïncidences, alignements, cotations,...

1.3 Digression: qu'est-ce que sont donc les mathématiques pour l'ingénieur?

Souvent assimilées à quelque chose de magique, artistique ou mystérieux, elles sont avant tout un outillage intellectuel permettant de décrire avec le minimum de signes des situations les plus générales possibles. Ainsi une surface pourra être décrite soit point par point, ce qui est très lourd, ou plus synthétiquement par un polynôme (u,v) qui encodera, sous forme approximée et réduite, une grande quantité d'information.

La simple description point par point fait appel à des mathématiques, puisque l'on doit décrire un point par des nombres et qu'il a fallu attendre Descartes et le XVIIème siècle pour arriver à un codage correct de cette notion.

Ainsi le niveau de mathématiques avec lequel on aborde une modélisation, peut se comparer avec le fait de disposer d'un poing, d'un maillet, d'un étau, d'une presse de 1 tonne, de 10 tonnes,...

S'il ne faut pas utiliser un marteau pilon pour écraser une mouche, il est parfois utile de disposer d'une presse de 100 tonnes pour former une portière.

Aussi le discours consistant à dire que les mathématiques avancées ne servent à rien, que l'on entend parfois, est aussi ridicule que celui qui consiste à mathématiser toute situation. En fait cela dépend du problème auquel on s'attaque!

Apprendre les mathématiques consiste donc à investir intellectuellement sur des outils qui pourront dans certains cas servir à l'ingénieur pour résoudre les problèmes qui s'y prêtent.

1.4 Points, lignes et cercles: l'espace des sphères de Lie

Les points, lignes et cercles deviennent donc les inconnues à résoudre dans le problème de l'esquisse. Depuis la nuit des temps, nous avons appris à penser les points, les lignes, les cercles comme des éléments de nature différente. Une ligne, un cercle ne sont-ils pas composés de points? Combien d'ingénieurs savent encore qu'il existe des inversions involutives permettant de transformer un cercle en ligne?

Modélisation de l'espace

Depuis Descartes, nous avons appris à penser l'espace ambiant comme un espace affine (ensemble de points) avec un espace de vecteurs sous-jacent (vecteur entre deux points). L'espace, à trois dimensions indépendantes, est muni d'une métrique qui permet de mesurer des distances. Galilée, Newton, Lagrange, Einstein,... y ont ajouté la dimension temporelle pour décrire les mouvements à des échelles plus ou moins grandes (espace plat pour Newton, courbe pour Einstein).

Dans cet espace, le point est l'élément de base, et les droites, plans et sphères sont des collections de points. Ainsi un point est profondément différent d'une sphère.

L'espace des sphères

Dans le problème de la résolution d'une esquisse, il est très intéressant de pouvoir considérer les points, droites et cercles comme des objets de même nature (les informaticiens diraient de la même classe). Ceci n'est d'ailleurs pas très surprenant, car un point est assez naturellement un cercle de rayon nul et une droite un cercle de rayon infini (Pascal avait déjà souligné l'importance de cette considération dans une de ses fameuses pensées, "c'est une sphère infinie, dont le centre est partout, la circonférence nulle part" [Pensées : II, 73]).

Si l'on considère maintenant l'espace (vectoriel) des formes quadratiques sur un espace (vectoriel) classique, et qu'on n'en utilise que le sous espace (vectoriel) de celles qui représentent des sphères, on a un bon candidat. Si de plus on le munit de la forme quadratique qui donne grosso modo le rayon de la sphère (pour la droite ou le plan c'est un peu plus subtil), on obtient l'espace rêvé pour faire nos calculs et utiliser tout l'arsenal mathématique qui a étudié en long et en large les espaces quadratiques.

En l'occurrence notre espace des sphères possède un morceau euclidien tout à fait classique (le sous espace des hyperplans), auquel on doit ajouter un plan hyperbolique pour pimenter un peu notre affaire. Ceci en fait un espace pseudo-euclidien, en fait lorentzien. Dans le cas du problème de l'esquisse plane, il s'agit du même espace que celui de la relativité restreinte, déjà étudié sous toutes les coutures par les physiciens (voir la section 2 pour les détails).

Tout ceci pour dire qu'en raisonnant dans cet espace on est passé du maillet à l'étau, voire à la presse.

Nouveau? Non, car inventé par le norvégien Sophus Lie vers 1880. Cela lui a permis de passer une thèse, démontrer quelques résultats, établir certaines correspondances entre des géométries, suivant le programme d'Erlangen de son grand ami, Felix Klein. Mais cela est tombé dans l'oubli! Le seul livre qui traitait avec un peu de détail l'espace des sphères dans les années 90 est le livre de Marcel Berger [Ber90a, Ber90b] (qui a nourri une génération de géomètres). Il existe très peu d'utilisations pratiques de cet espace, ce qui est tout à fait étonnant.

1.5 Une solution au problème du solveur d'esquisses

Il s'agit donc d'assembler des sous figures ou des pièces liées par des contraintes mettant en jeu des points, des droites (plans), des cercles (sphères).

On va rechercher les déplacements qui conservent la forme des sous figures ou des pièces et qui amènent à la satisfaction des contraintes.

La formulation nous amène à une méthode de descente suivant le plan tangent (espace des torseurs) d'une variété riemannienne (groupe des déplacements de l'espace des sphères) munie d'une métrique qui équilibre les translations et les rotations. Cette descente nous fait parcourir une géodésique (chemin le plus court au sens de cette métrique) sur cette variété et nous donne la solution la plus proche de l'endroit d'où nous partons.

De plus par des considérations de symétrie sur les contraintes, nous pouvons espérer choisir les conditions initiales du problème qui vont nous faire converger vers des solutions différentes (ce dernier point est un point de recherche) et donc nous permettre d'explorer toutes les solutions et les classifier.

Cerise sur le gâteau, si nous introduisons des masses et des inerties sur les corps, cela revient à définir la métrique posée sur la variété riemannienne, et le mouvement trouvé respectera les équations de Newton. Nous avons donc en même temps résolu le problème de la cinématique et de la dynamique pour nos mouvements de l'esquisse!

1.6 Une implémentation algorithmique industrielle

Ce changement de perspective, que l'on pouvait qualifier (avec quelque humour mathématique) de très projectif, a été implémenté dans le logiciel français TopSolid à partir des années 2000. Un solveur d'esquisse, dont l'espace de base est l'espace des sphères, est utilisé tous les jours avec succès par des milliers de mécaniciens et concepteurs pour créer des pièces fonctionnelles. Et plus encore. Mais c'est une trop longue histoire.

La mathématisation poussée du problème de résolution d'une esquisse définie par contraintes a conduit cependant clairement à trois types de bénéfices:

- Simplification de l'algorithme, parce qu'il ne travaille que sur un type unifié d'objets. Ceci permet d'éviter nombre de structures de contrôle (if, then, else) qui induisent toujours des bifurcations et de nombreux problèmes (bugs). Le développement est maîtrisable par un seul ingénieur.
- La simplicité induit de la performance et de la fiabilité.
- La possibilité de passer naturellement et continûment de droite à cercle et inversement, ce qui correspond à la réalité physique de la tige qui plie et prend de la courbure.

Il ne faut pas éluder cependant la difficulté. La simplicité et concision s'obtiennent par l'emploi de mathématiques plus sophistiquées. Calculer les torseurs du groupe des déplacements affines est déjà technique, mais calculer ceux du groupe de Lorentz et les manipuler n'est accessible, on le comprend, qu'à ceux qui ont bénéficié d'une solide formation mathématique.

2 Solveur d'esquisse et espace des sphères

Revenons plus en détails sur le problème du solveur d'esquisse et sur l'espace des sphères, qui permet de traiter de la même façon points, droites et cercles, ou en dimension n quelconque, points, hyperplans affines et sphères. Notre présentation s'inspire très largement de celles de Marcel Berger [Ber90a, Ber90b] et de Thomas Cecil [Cec07], ces ouvrages étant les rares à traiter ce sujet.

2.1 Modéliser l'esquisse

L'espace des sphères

Prenons dans $\mathbb{R}^n$ une sphère centrée en un point p de rayon $r \geq 0$ (quand $r = 0$ la sphère est réduite à un point). Son équation est $\|x - p\|^2 = r^2$ ou encore $\|x\|^2 - 2p^T x + \|p\|^2 - r^2 = 0$, c'est-à-dire une forme quadratique affine dont la partie homogène est $\|x\|^2$. En fait toute forme quadratique affine de la forme

$$q(x) = k\|x\|^2 + a^T x + h, \tag{1}$$

est une équation de sphère pourvu que les coefficients réels h, k et le vecteur a de $\mathbb{R}^n$ satisfassent $\|a\|^2 - 4kh \geq 0$ et $k \neq 0$, il suffit en effet de poser $p = -a/(2k)$ et $r^2 = (\|a\|^2 - 4kh)/4k^2$. De plus quand $k = 0$ et $a \neq 0$, la forme quadratique q donne l'équation d'un hyperplan affine. On peut donc identifier points, sphères et hyperplans avec un certain sous-ensemble des formes quadratiques affines. Précisons cette identification.

D'abord l'ensemble des formes quadratiques affines de la forme (1) est un espace vectoriel de dimension $n + 2$. Puisque la quantité $\rho(q) = \|a\|^2 - 4kh$ joue un rôle important ici, nous allons représenter une forme quadratique affine q par le vecteur $\xi = (a, k + h, k - h) \in \mathbb{R}^{n+2}$ de façon à diagonaliser ρ, c'est-à-dire que $\rho(\xi) = \rho(q)$ s'écrit

$$\rho(\xi) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_{n+1}^2 - \xi_{n+2}^2.$$

On voit ainsi apparaître la *métrique (ou norme) de Lorentz*! Un point $\xi = (\bar{\xi}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2})$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ représente la forme quadratique affine

$$q_\xi(x) = \frac{1}{2}(\xi_{n+1} + \xi_{n+2})\|x\|^2 + \bar{\xi}^T x + \frac{1}{2}(\xi_{n+1} - \xi_{n+2}),$$

le point clé étant que les équations des sphères (y compris les points) et des hyperplans sont associées à des éléments ξ de norme $\rho(\xi) \geq 0$.

Il faut ensuite remarquer que deux équations proportionnelles définissent le même objet géométrique, le bon espace pour travailler n'est donc pas $\mathbb{R}^{n+2}$ mais l'espace projectif $\mathbb{P}^{n+1}$. Rappelons que $\mathbb{P}^{n+1}$ est l'ensemble des classes d'équivalences $[\xi]$ pour la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ définie par: $\xi \sim \eta$ si $\xi = \lambda\eta$ pour un réel $\lambda \neq 0$. Notons que le signe de la norme de Lorentz est identique pour tous les représentants d'une même classe.

On définit finalement *l'espace des sphères* $\mathcal{S}$ comme l'ensemble des classes de $\mathbb{P}^{n+1}$ de norme de Lorentz positive ou nulle, c'est-à-dire,

$$\mathcal{S} = \{[\xi] \in \mathbb{P}^{n+1} \ : \ \rho(\xi) \geq 0\}.$$

Dans le langage de la physique, $\mathcal{S}$ correspond aux classes d'équivalence de vecteurs de type espace (de norme de Lorentz positive) et de type lumière (de norme de Lorentz nulle). D'après notre discussion ci-dessus, à tout objet (point, sphère ou hyperplan) de $\mathbb{R}^n$ est associé un unique élément $[\xi]$ de $\mathcal{S}$ qui définit l'équation q_ξ de l'objet. On a ainsi obtenu une application injective ϕ entre $\mathbb{R}^n \cup \mathsf{Sphères} \cup \mathsf{Hyperplans}$ et l'espace des sphères $\mathcal{S}$,

Point p	$\overset{\phi}{\longmapsto}$	$\left[\left(p, \dfrac{1-\|p\|^2}{2}, \dfrac{1+\|p\|^2}{2}\right)\right]$,
Sphère $S(p,r)$	$\overset{\phi}{\longmapsto}$	$\left[\left(p, \dfrac{1-\|p\|^2+r^2}{2}, \dfrac{1+\|p\|^2-r^2}{2}\right)\right]$,
Hyperplan $N^T x + h = 0$ où N normale unitaire	$\overset{\phi}{\longmapsto}$	$[(N, h, -h)]$.

Inversement tout élément de l'espace des sphères définit l'équation d'un des trois objets géométriques ci-dessus, à l'exception de $[(0,\dots,0,1,-1)]$ qui correspond aux formes quadratiques constantes. On va donc ajouter à $\mathbb{R}^n$ un point à l'infini et on note Points l'espace ainsi obtenu, *i.e.* Points $= \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (muni de la topologie adéquate, Points est ce que l'on appelle le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$). En posant $\phi(\infty) = [(0,\dots,0,1,-1)]$ on transforme ainsi ϕ en une bijection,

$$\phi : \mathsf{Points} \cup \mathsf{Sphères} \cup \mathsf{Hyperplans} \to \mathcal{S}.$$

L'image $\phi(\mathsf{Points})$ est l'ensemble $\{\rho = 0\}$ des éléments de $\mathcal{S}$ de norme nulle et $\phi(\mathsf{Sphères} \cup \mathsf{Hyperplans})$ est l'ensemble $\{\rho > 0\}$ des éléments de norme positive.

Produit scalaire de Lorentz

En résumé, nous avons remplacé les ensembles des points, sphères et hyperplans par un sous-ensemble de $\mathbb{P}^{n+1}$. En quoi est-ce un gain?

Le premier gain, le plus évident, est que l'on a réuni les trois types d'objets en un seul espace et que l'on peut y faire des calculs en utilisant les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^{n+1}$ (nous en donnons des exemples dans la section suivante). Ces coordonnées étaient d'ailleurs connues indépendamment de la construction ci-dessus sous le nom de coordonnées *tétracycliques* quand $n = 2$, *pentasphériques* quand $n = 3$, ou plus généralement *polysphériques*.

Le deuxième avantage est que notre espace est muni d'une métrique, la métrique de Lorentz. Introduisons la forme bilinéaire associée sur $\mathbb{R}^{n+2}$, appelée *produit scalaire de Lorentz*,

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_{n+1}\eta_{n+1} - \xi_{n+2}\eta_{n+2}, \qquad \rho(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle.$$

Une propriété remarquable de $\mathcal{S}$ est que les caractéristiques géométriques d'un objet sont codées par sa norme de Lorentz et son produit scalaire avec un élément particulier. En effet, choisissons un représentant particulier du point à l'infini, $\xi_\infty = (0,\dots,0,1,-1)$ et considérons un élément $[\xi] \in \mathcal{S}$, qui vérifie donc $\rho(\xi) \geq 0$. Alors:

- si $\rho(\xi) > 0$ et $\langle \xi, \xi_\infty \rangle \neq 0$, $[\xi]$ représente une sphère de rayon
$$r = \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{\langle \xi, \xi_\infty \rangle^2}};$$
- si $\rho(\xi) > 0$ et $\langle \xi, \xi_\infty \rangle = 0$, $[\xi]$ représente un hyperplan;
- si $\rho(\xi) = 0$ et $\langle \xi, \xi_\infty \rangle \neq 0$, $[\xi]$ représente un point;
- si $\rho(\xi) = 0$ et $\langle \xi, \xi_\infty \rangle = 0$, $[\xi] = [\xi_\infty]$ représente le point à l'infini.

De même le produit scalaire entre deux éléments de $\mathcal{S}$ code les positions relatives des objets correspondants. Par exemple, considérons un élément $[\xi] \in \mathcal{S}$ représentant un point $p \in \mathbb{R}^n$, *i.e.* $\phi(p) = [\xi]$, et un autre élément $[\eta] \in \mathcal{S}$. Alors $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ si et seulement si p appartient à $\phi^{-1}([\eta])$ (qui est un point, une sphère ou un hyperplan).

Autre exemple: considérons deux éléments $[\xi], [\eta]$ de norme positive (représentant des sphères ou hyperplans donc). Alors $|\langle \xi, \eta \rangle| \leq \rho(\xi)\rho(\eta)$ si et seulement si les objets $\phi^{-1}([\xi])$ et $\phi^{-1}([\eta])$ ont une intersection non-vide. Quand c'est le cas, l'angle entre les espaces tangents à ces objets en un point d'intersection est donné par $\arccos(\frac{|\langle \xi, \eta \rangle|}{\rho(\xi)\rho(\eta)})$. En particulier les objets sont orthogonaux (au sens euclidien) dès que $\langle \xi, \eta \rangle = 0$.

L'espace des sphères fournit donc le bon cadre pour modéliser une esquisse: les objets géométriques sont vus comme des éléments de $\mathcal{S}$ et toutes les contraintes sont exprimées au moyen du produit scalaire de Lorentz. Il reste à comprendre maintenant comment on peut résoudre une telle esquisse.

Quelques résultats immédiats de géométrie plane

En pratique, à la fois pour l'implémentation d'algorithmes utilisant l'espace des sphères et pour l'obtention de résultats de géométrie plane, il est utile de travailler avec des formes quadratiques normalisées plutôt que sur l'espace projectif $\mathbb{P}^{n+1}$. Ainsi chaque classe d'équivalence $X \in \mathcal{S}$ aura un unique *représentant normalisé* $\xi_X \in \mathbb{R}^{n+2}$, qui satisfait donc $[\xi_X] = X$, par exemple avec le choix de normalisation suivant:

- pour une classe $p \in \mathcal{S}$ associée à un point de $\mathbb{R}^n$, ξ_p est le représentant tel que $\langle \xi_p, \xi_\infty \rangle = 1$ (et $\rho(\xi_p) = 0$ puisque p est associé à un point);
- pour une classe $S \in \mathcal{S}$ associée à une sphère de $\mathbb{R}^n$, ξ_S est le représentant tel que $\rho(\xi_S) = 1$ et $\langle \xi_S, \xi_\infty \rangle > 0$;
- pour une classe $a \in \mathcal{S}$ associée à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, ξ_a est le représentant tel que $\rho(\xi_a) = 1$ et $\langle \xi_a, \xi_0 \rangle \geq 0$ où ξ_0 est le représentant normalisé du point 0 (et $\langle \xi_a, \xi_\infty \rangle = 0$ puisque a est associé à un hyperplan)[1].

Les caractéristiques géométriques élémentaires des objets s'expriment très simplement, et surtout linéairement, au moyen des représentants normalisés (on utilise la même notation pour un objet et l'élément de $\mathcal{S}$ qui lui est associé):

- courbure d'une sphère S: $1/r = \langle \xi_S, \xi_\infty \rangle$ (nulle quand S est en fait un hyperplan);
- distance entre deux points p et q: $\|p - q\|^2 = -2\langle \xi_p, \xi_q \rangle$;
- angle θ entre deux hyperplans a et b: $\cos\theta = |\langle \xi_a, \xi_b \rangle|$;
- puissance d'un point p par rapport à un cercle $C = C(q, r)$ (cas $n = 2$): $\|p - q\|^2 - r^2 = 2r\langle \xi_p, \xi_C \rangle$.

Dans le cas $n = 2$, on obtient ainsi aisément des constructions et résultats plus ou moins élémentaires de la géométrie plane illustrés dans la figure 2.1.

Bissectrices Soient a et b deux droites. Les deux bissectrices sont données par $[\xi_a - \xi_b]$ et $[\xi_a + \xi_b]$ puisque l'on a égalité des angles $|\langle \xi_a \pm \xi_b, \xi_a \rangle| = |\langle \xi_a \pm \xi_b, \xi_b \rangle|$. On peut aussi démontrer immédiatement qu'elles sont orthogonales:

$$\langle \xi_a - \xi_b, \xi_a + \xi_b \rangle = \langle \xi_a, \xi_a \rangle - \langle \xi_b, \xi_b \rangle = 0.$$

[1] Notre normalisation ne suffit en fait pas à déterminer un unique représentant normalisé dans le cas d'un hyperplan vectoriel, il faudrait pour être rigoureux imposer une normalisation supplémentaire pour ce cas-là.

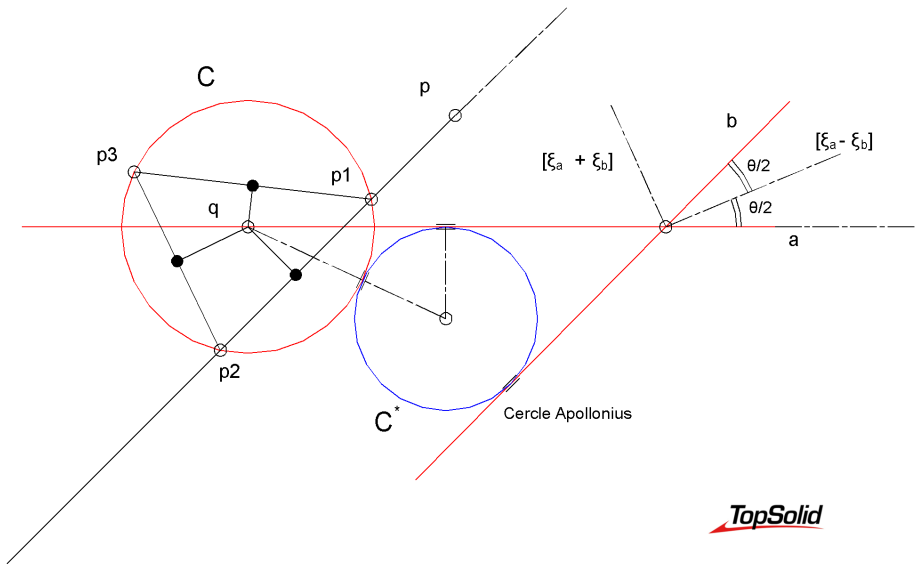


Figure 4: Illustration de constructions élémentaires (TopSolid):

- C = cercle passant par p_1, p_2, p_3;
- q = point de concours des médiatrices du triangle $(p_1 p_2 p_3)$;
- puissance de p par rapport à C : $(p-p_1)^T(p-p_2) = \|p-q\|^2 - r^2 = 2r\langle \xi_p, \xi_C \rangle$;
- C^* = cercle tangent à a, b et C (cercle d'Apollonius).

Concours des bissectrices d'un triangle "Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes" se démontre aussi immédiatement: si on note a, b, c les droites qui définissent le triangle, le point p d'intersection entre les deux premières bissectrices vérifie $\langle p, \xi_a - \xi_b \rangle = \langle p, \xi_b - \xi_c \rangle = 0$, et donc, en sommant, $\langle p, \xi_a - \xi_c \rangle = 0$.

Concours des médiatrices d'un triangle Les médiatrices d'un triangle $(p_1 p_2 p_3)$ sont représentées par $[\xi_{p_1} - \xi_{p_2}]$, $[\xi_{p_2} - \xi_{p_3}]$ et $[\xi_{p_3} - \xi_{p_1}]$, cela se vérifie en effet aisément grâce au produit scalaire de Lorentz (avec ξ_∞ pour montrer que ces éléments représentent des droites et avec les ξ_{p_i} pour montrer que ces droites sont à égale distance des points). Comme la somme $(\xi_{p_1} - \xi_{p_2}) + (\xi_{p_2} - \xi_{p_3}) + (\xi_{p_3} - \xi_{p_1})$ est nulle, le raisonnement du point précédent montre que les médiatrices sont concourantes.

Cercle passant par trois points Le cercle C passant par trois points p_1, p_2, p_3 est déterminé par $\xi_C = \xi_{p_1} \wedge \xi_{p_2} \wedge \xi_{p_3}$ (produit vectoriel dans un espace de dimension 4).

Problème d'Apollonius (cercle tangent à trois cercles) Le représentant normalisé ξ du cercle recherché est déterminé par les équations linéaires suivantes:

$$\langle \xi, \xi_{C_1} \rangle = \pm 1, \quad \langle \xi, \xi_{C_2} \rangle = \pm 1, \quad \langle \xi, \xi_{C_3} \rangle = \pm 1.$$

2.2 Résoudre l'esquisse

Selon le modèle développé dans la section précédente, une esquisse à N objets est un N-uplet $([\xi_1], \ldots, [\xi_N])$ d'éléments de $\mathcal{S}$. Se donner un nombre p de contraintes scalaires sur une telle esquisse c'est se donner une fonction $F : \mathcal{S}^N \to \mathbb{R}^p$, l'esquisse satisfaisant la contrainte si $F([\xi_1], \ldots, [\xi_N]) = 0$ (nous laissons de côté ici le fait que F s'exprime uniquement avec le produit scalaire de Lorentz mais il est évident que c'est un avantage considérable dans les calculs). Le problème du solveur d'esquisse se formule donc ainsi:

> *étant donné une esquisse* $([\xi_1^*], \ldots, [\xi_N^*]) \in \mathcal{S}^N$*, trouver une esquisse* $([\xi_1], \ldots, [\xi_N])$ *de même nature telle que* $F([\xi_1], \ldots, [\xi_N]) = 0$.

Par esquisses de même nature nous entendons le fait que $\rho([\xi_i])$ et $\rho([\xi_i^*])$ soit de même signe pour chaque i, c'est-à-dire que $[\xi_i]$ représente un élément de Points si et seulement si c'est le cas pour $[\xi_i^*]$.

L'idée ici sera de chercher la nouvelle esquisse comme une modification de l'ancienne. On va donc chercher chaque $[\xi_i]$ sous la forme $g_i \cdot [\xi_i^*]$, où g_i est une transformation d'un certain type; il faudra alors résoudre un problème de la forme $G(g_1, \ldots, g_N) := F(g_1 \cdot [\xi_1^*], \ldots, g_N \cdot [\xi_N^*]) = 0$. Deux questions se posent: quelle classe de transformations choisir? Comment résoudre efficacement $G = 0$?

Le groupe circulaire

Nous devons d'abord trouver une classe de transformations de $\mathcal{S}$ dans lui-même qui envoie le sous-ensemble $\{\rho = 0\}$ sur lui-même et $\{\rho > 0\}$ sur lui-même. Pour conserver la structure de notre espace, nous cherchons ces applications comme des transformations projectives de $\mathbb{P}^{n+1}$. Rappelons que toute transformation projective g de $\mathbb{P}^{n+1}$ vérifie $g \cdot [\xi] = [A\xi]$ pour une application linéaire $A \in \mathbf{GL}(n+2)$, *i.e.* $g = [A]$. Or il suffit qu'une telle transformation laisse l'ensemble $\{\rho = 0\}$ invariant pour qu'elle laisse aussi $\mathcal{S}$ invariant.
Ainsi la classe d'applications que nous allons considérer est celle des transformations projectives de $\mathbb{P}^{n+1}$ qui préservent la condition $\rho(\xi) = 0$. Ces transformations forment un groupe $\mathbf{G}$ que nous appellerons *groupe circulaire*, selon la terminologie de [Ber90b] (on trouve d'autres noms dans la littérature, comme groupe orthogonal projectif de ρ ou groupe de Möbius, ce dernier pouvant prêter à confusion). Une propriété importante de $\mathbf{G}$ est que chacun de ses éléments préserve non seulement la relation $\rho(\xi) = 0$ mais aussi $\langle \xi, \eta \rangle = 0$. Ainsi l'orthogonalité et les angles sont conservés. Il s'avère en fait que $\mathbf{G}$ est isomorphe à $\mathbf{O}(n+1,1)/\{\pm I\}$, où $\mathbf{O}(n+1,1)$ est le groupe de Lorentz (*i.e.* l'ensemble des éléments de $\mathbf{GL}(n+2)$ qui préservent le produit scalaire de Lorentz). On peut donc se reporter à l'abondante littérature sur le groupe de Lorentz pour décrire notre groupe $\mathbf{G}$ (voir par exemple [GMŠ63] ou [Car00]). Nous retiendrons essentiellement les propriétés suivantes de $\mathbf{O}(n+1,1)$.

- Le groupe de Lorentz a quatre composantes connexes, celle de l'identité étant $\mathbf{SO}^+(n+1,1)$, l'ensemble des applications de Lorentz propres de déterminant 1. En notant J la matrice associée à la forme quadratique ρ dans les coordonnées ξ, c'est-à-dire

$$J = \begin{pmatrix} I_{n+1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

  les autres composantes connexes de $\mathbf{O}(n+1,1)$ sont $-\mathbf{SO}^+(n+1,1)$, $J\mathbf{SO}^+(n+1,1)$ et $-J\mathbf{SO}^+(n+1,1)$.

- $\mathbf{SO}^+(n+1,1)$ est un groupe de Lie qui est l'image de son algèbre de Lie par l'exponentielle, $\mathbf{SO}^+(n+1,1) = \exp(\mathfrak{so}(n+1,1))$.

- Le groupe $\mathbf{SO}^+(n+1,1)$ agit transitivement sur chaque ensemble de niveau $\{\rho = c\}$ avec $c \geq 0$, ce qui signifie que pour ξ de norme de Lorentz positive ou nulle, tout point de même norme que ξ peut s'écrire $M\xi$ pour un certain $M \in \mathbf{SO}^+(n+1,1)$.

En conséquence de ces propriétés, en ne gardant dans $\mathbf{G}$ que les transformations projectives associées à une transformation linéaire de $\mathbf{SO}^+(n+1,1)$, on obtient un groupe $\mathbf{G}^+$ isomorphe à $\mathbf{SO}^+(n+1,1)$ qui agit transitivement sur $\{\rho = 0\}$ d'une part, et sur $\{\rho > 0\}$ d'autre part. Cette propriété de transitivité est importante pour le problème de l'esquisse, elle garantit que chacun des deux ensembles s'écrit comme $\mathbf{G}^+ \cdot [\xi^*]$, où $[\xi^*]$ est un élément quelconque de l'ensemble considéré; ainsi, avec les notations utilisées plus haut, résoudre $F([\xi_1], \ldots, [\xi_N]) = 0$ et résoudre $G(g_1, \ldots, g_N) = 0$ sont deux problèmes équivalents. Le fait que $\mathbf{G}^+$ soit isomorphe à $\mathbf{SO}^+(n+1,1)$ implique de plus que c'est un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{so}(n+1,1)$, qui vérifie $\mathbf{G}^+ = \exp(\mathfrak{g})$. Nous allons en voir plus loin l'importance pour les algorithmes.

Notons que dans notre problème il n'est pas nécessaire, ni souhaitable, d'utiliser tout le groupe $\mathbf{G}^+$. En effet ce dernier est de dimension $(n+1)(n+2)/2$ alors que $\{\rho > 0\}$ est de dimension $n+1$ et $\{\rho = 0\}$ de dimension n. En théorie on pourrait, en partant d'un élément $[\xi] \in \mathcal{S}$, se restreindre à l'espace quotient $\mathbf{G}^+/\mathbf{Iso}([\xi])$, où le sous-groupe d'isotropie $\mathbf{Iso}([\xi])$ est l'ensemble des transformations de $\mathbf{G}^+$ qui laissent $[\xi]$ invariant. Cet espace quotient a la bonne dimension mais n'est en général pas un groupe, ce qui rend l'utilisation de méthodes numériques telle que la méthode de Newton délicate. En pratique on préférera travailler sur des sous-ensembles de $\mathbf{G}^+$ de dimension éventuellement supérieure à celle de $\mathbf{G}^+/\mathbf{Iso}([\xi])$ ou dont l'action n'est pas globalement transitive, mais qui sont des sous-groupes de $\mathbf{G}^+$.

Méthode de Newton sur un groupe de Lie

Revenons sur le problème du solveur d'esquisse. Il s'agit de résoudre une équation $F = 0$ définie sur une variété $\mathcal{S}^N$ (qui une variété à bord, en fait).

Une méthode standard pour résoudre ce type d'équation est la méthode de Newton. Nous n'allons pas la décrire en détail ici, rappelons simplement le raisonnement au coeur de l'algorithme dans le cas où $F : E \to \mathbb{R}^p$ est une application définie sur un espace vectoriel euclidien E. Partant d'une approximation x^0 d'un zéro de F, on fait un développement limité de la fonction F au premier ordre en x^0,

$$F(x) \simeq F(x^0) + DF(x^0)(x - x^0),$$

et on choisit un point x^1 qui annule les termes de premier ordre, c'est-à-dire

$$x^1 = x^0 - DF(x^0)^\dagger F(x^0),$$

où $DF(x^0)^\dagger$ est l'inverse de Moore–Penrose (ou pseudo-inverse) de l'application $DF(x^0)$. L'algorithme consiste ensuite à itérer la construction à partir de x^1.

Quand la fonction F est définie sur une variété, la formule d'itération précédente qui repose sur la linéarité de l'espace de départ n'est plus valide et une structure supplémentaire est nécessaire pour définir des déplacements infinitésimaux dans la variété. Les groupes de Lie possèdent une telle structure.
Supposons en effet que l'application F est définie sur un groupe de Lie $\mathbf{H}$, $\mathbf{H} = \exp(\mathfrak{h})$, et reprenons l'argument de la méthode de Newton. Partant d'une approximation h^0 d'un zéro de F, on écrit les points de H sous la forme $h^0 \exp(a)$, a étant un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Le développement au premier ordre de F s'écrit

$$F(h^0 \exp(a)) = F(h^0) + DF(h^0)(h^0 \cdot a) + o(a).$$

En annulant les termes du premier ordre, on obtient la formule suivante pour l'itération:

$$h^1 = h^0 \exp\left((h^0)^{-1} \cdot (-DF(h^0)^\dagger F(h^0))\right).$$

On obtient ainsi un algorithme de Newton sur les groupes de Lie ayant les mêmes propriétés de convergence que ceux définis sur des espaces vectoriels (voir par exemple [ADM+02]).

Appliquons ceci au problème du solveur d'esquisse: nous devons résoudre $F(x) = 0$ où $x = ([\xi_1], \ldots, [\xi_N]) \in \mathcal{S}^N$ en partant de $x^* = ([\xi_1^*], \ldots, [\xi_N^*])$. En utilisant des sous-groupes $\mathbf{G}_i$ du groupe circulaire, nous écrivons chaque élément $[\xi_i]$ sous la forme $g_i \cdot [\xi_i^*]$ avec $g_i \in \mathbf{G}_i$. Le produit de ces groupes est un groupe de Lie $\mathbf{H}$, $\mathbf{H} = \exp(\mathfrak{h})$, ce qui permet d'écrire x comme $h \cdot x^*$, $h \in \mathbf{H}$, et de remplacer la recherche des zéros de $F(x)$ par celle des zéros de $G(h) = F(h \cdot x^*)$. On peut donc utiliser la méthode de Newton sur les groupes de Lie que nous venons de présenter pour résoudre ce problème.

Remarquons que l'on peut l'appliquer de plusieurs façons différentes. Soit directement comme on vient de le faire, soit en l'appliquant plutôt au gradient de la fonction $\|F\|^2$ si on cherche à minimiser cette fonction (il faut dans ce cas donner une métrique sur $\mathbf{H}$ pour définir le gradient, la plus naturelle étant la forme de Killing associée à $\mathfrak{h}$). On peut aussi en donner une version continue qui nous conduira à intégrer le flot d'un champ de vecteurs (interprété comme une direction de descente dans la formulation avec minimisation).

Conclusion

La formulation du problème du solveur d'esquisse que nous venons de présenter est utilisée concrètement depuis plusieurs années dans le logiciel TopSolid. Elle permet de résoudre localement en 2D et 3D tous les problèmes de construction géométrique, mécanique, cinématique usuels, dès que les conditions initiales sont "bonnes".

Cependant si nous savons aisément trouver une solution, nous ne savons pas calculer l'ensemble des solutions, ni même en obtenir une autre à partir de la donnée de l'une d'entre elles. Nous ne savons pas non plus comment les classer de façon stable par rapport à un changement de configuration du système (condition initiale ou valeur des contraintes). Et nous ne sommes pas capables d'expliquer pourquoi l'algorithme converge aussi bien globalement alors que seule sa convergence locale est garantie en pratique (le fait que les contraintes s'expriment essentiellement en fonction du produit scalaire de Lorentz y joue certainement un rôle).

Toutes ces questions sont des problèmes de recherche actuels, qui mêlent géométrie, systèmes dynamiques et optimisation. Une compréhension profonde de ces questions pourrait amener à une théorie plus générale des esquisses dépassant l'espace des sphères. Plus prosaïquement elle donnerait un avantage compétitif conséquent au premier logiciel qui implémenterait les fruits de cette recherche, fournissant un bel exemple de collaboration entre mathématiques et industrie.

References

[ADM+02] Roy L. Adler, Jean-Pierre Dedieu, Joseph Y. Margulies, Marco Martens, and Mike Shub. Newton's method on riemannian manifolds and a geometric model for the human spine. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 22(3):359–390, 2002.

[Ber90a] Marcel Berger. *Géométrie T1.* Collection FAC. Fernand Nathan, Paris, 1990.

[Ber90b] Marcel Berger. *Géométrie T2.* Collection FAC. Fernand Nathan, Paris, 1990.

[Car00] Moshe Carmeli. *Group theory and general relativity.* Imperial College Press, London; Distributed by World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000.

[Cec07] T.E. Cecil. *Lie Sphere Geometry: With Applications to Submanifolds.* Universitext. Springer, 2007.

[GMŠ63] I. M. Gel'fand, R. A. Minlos, and Z. Ja. Šapiro. *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications.* Pergamon Press, New York, 1963.