

Intégrale J et champs asymptotiques le long d'une fissure plane

Claude Stolz, Mathieu Le Cren, Alexandre Martin

▶ **To cite this version:**

Claude Stolz, Mathieu Le Cren, Alexandre Martin. Intégrale J et champs asymptotiques le long d'une fissure plane. CSMA 2019, 14ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2019, Giens (Var), France. hal-02266883

HAL Id: hal-02266883
https://hal.science/hal-02266883

Submitted on 1 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2019
14ème Colloque National en Calcul des Structures
13-17 Mai 2019, Presqu'île de Giens (Var)

Intégrale J et champs asymptotiques le long du front d'une fissure plane.

C. Stolz[1,2], M. Le Cren[1], A. Martin[1]

[1] *IMSIA - UMR 9219, Université Paris-Saclay, alexandre.martin@cnrs.fr, matthieu-m.le-cren@edf.fr*
[2] *GeM - UMR 6183, École Centrale Nantes, claude.stolz@ec-nantes.fr*

Résumé — La méthode $G-\theta$ est une méthode de détermination du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte (FICs) répandue. Dans cette contribution, nous étudions l'influence de la courbure du front de fissure sur la précision de l'évaluation des FICs. Le rôle de la courbure du front de fissure sur la valeur de l'intégrale J de Rice est quantifié. De nouveaux champs de déplacements admissibles, tenant compte de la courbure, sont proposés. Le gain en précision est évalué sur des cas-tests admettant une solution analytique, dans le cas des fissures planes sollicitées en mode I.
Mots clés — Mécanique de la rupture, Taux de restitution d'énergie, FICs, Fissures planes à front courbe.

1 Introduction

Afin d'assurer la sûreté des structures, les ingénieurs doivent montrer qu'une fissure, de forme et position postulées, ne mène pas à la rupture dans les conditions normales de fonctionnement. Les critères utilisés sont fondés sur la mécanique linéaire de la rupture. On doit par exemple montrer que le facteur d'intensité de contrainte en mode I reste inférieur à la ténacité du matériau K_{Ic}. L'objectif de cette contribution est d'améliorer la précision du calcul des facteurs d'intensité de contrainte par la méthode $G-\theta$ [1, 4], dans le cas des fissures planes à front courbe.

L'extraction des facteurs d'intensité de contrainte par la méthode $G-\theta$ s'appuie sur l'utilisation de champs de déplacements auxiliaires [2]. L'approche consiste, dans un premier temps, à quantifier l'influence de la courbure du front de fissure sur l'évaluation de l'intégrale J de Rice, puis dans un second temps, à proposer de nouveaux champs de déplacements auxiliaires tenant compte de la courbure.

Considérons une fissure Σ plane à front courbe. Un point M_0 du front de fissure Γ_0 est repéré par son abscisse curviligne s. La base locale au point $M_0(s)$ est représentée sur la Figure 1. La Figure 2 représente une vue en coupe dans le plan $(M_0(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{e}_z)$, d'un tore de rayon R_S, centré sur le front de fissure. Les lèvres de la fissure sont notées Σ^- et Σ^+. La direction de propagation de la fissure est $\boldsymbol{N}(s)$. Soit $C(s)$ le domaine représenté en vert sur la Figure 2. Le contour de $C(s)$ est $\partial C(s) = \Gamma_I \cup AB \cup \Gamma_S \cup CD$ et son orientation est représentée par les flèches noires sur la Figure 2. La normale au contour $\partial C(s)$, dans le plan $(M_0(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{e}_z)$, est notée $\boldsymbol{n}$.

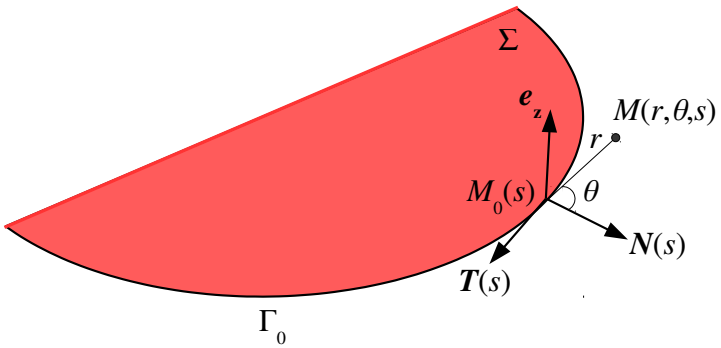


Figure 1 – Base locale pour un point M_0 du front de fissure, d'abscisse curviligne s.

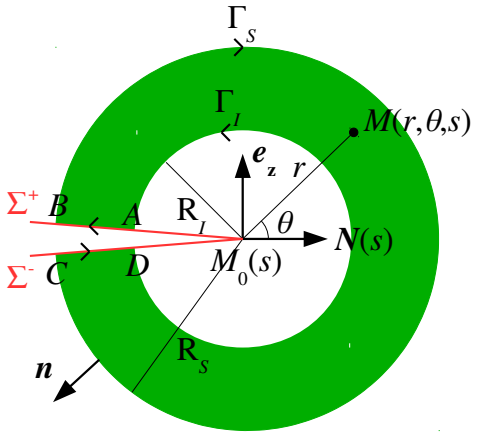


FIGURE 2 – Tore pour le calcul de l'intégrale J.

On définit le tenseur d'Eshselby $\boldsymbol{P}$ par :

$$\boldsymbol{P} = w\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u},$$

où w la densité d'énergie de déformation, $\boldsymbol{I}$ est le tenseur identité, $\boldsymbol{u}$ le champ de déplacements et $\boldsymbol{\sigma}$ de champ de contraintes. La transposée du tenseur d'Eshelby est à divergence nulle :

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{P}^T\right) = \boldsymbol{0}.$$

L'intégrale J de Rice [5] est définie par :

$$J(s) = \lim_{R_S \to 0} \int_{\Gamma_S} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{N}(s)\, \mathrm{d}l.$$

La formule d'Irwin [3] relie l'intégrale J aux facteurs d'intensité de contrainte $\mathrm{K_I}$, $\mathrm{K_{II}}$ et $\mathrm{K_{III}}$ par :

$$J(s) = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\mathrm{K_I^2}(s) + \mathrm{K_{II}^2}(s)\right) + \frac{1}{2\mu}\mathrm{K_{III}^2}(s)$$

Il est connu que localement les champs mécaniques asymptotiques en pointe de fissure sont le champ de déplacements $\boldsymbol{U}_0$, le champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{U}_0)$ et le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)$, obtenus en déformation plane et antiplane. On remarque que le champ $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}_0)$ n'est plus statiquement admissible sur un tore unitaire de longueur ds et de rayon R_S fini.

2 Expression de l'intégrale J pour une fissure plane à front courbe

Soit $\boldsymbol{\Psi}$ un champ de tenseurs d'ordre deux tel que $\operatorname{div}(\boldsymbol{\Psi}) = \boldsymbol{0}$. L'intégrale sur tout volume fermé de $\operatorname{div}(\boldsymbol{\Psi}) \cdot \boldsymbol{N}(s)$ est nulle. L'intégrale sur le tore de longueur ds, de rayon extérieur R_S et de rayon intérieur R_I de $\operatorname{div}(\boldsymbol{\Psi}) \cdot \boldsymbol{N}(s)$ s'écrit :

$$\int_s^{s+\mathrm{d}s} \left(\int_{C(s)} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Psi}) \cdot \boldsymbol{N}(s)\, \mathrm{d}A \right) \mathrm{d}s = 0. \tag{1}$$

L'élément de surface élémentaire dA s'écrit :

$$\mathrm{d}A = (1 + \kappa r \cos\theta) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta,$$

où $\kappa(s)$ est la courbure au point d'abscisse curviligne s. L'équation (1) est valable pour toute longueur élémentaire ds et on a donc :

$$\int_{C(s)} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Psi}) \cdot \boldsymbol{N}(s)\, \mathrm{d}A = 0. \tag{2}$$

L'opérateur divergence se décompose en un opérateur plan et anti-plan (noté div_Π) complété par des termes linéaires en courbure :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\Psi}) = \mathrm{div}_\Pi(\boldsymbol{\Psi}) + \frac{\kappa}{1+\kappa r\cos\theta}\boldsymbol{F}.$$

Soit A_S le disque de rayon R_S et A_I le disque de rayon R_I. On a $C(c) = A_S/A_I$ et (2) donne :

$$\int_{A_S/A_I} \mathrm{div}_\Pi(\boldsymbol{\Psi})\cdot\boldsymbol{N}(s)\,\mathrm{d}A + \int_{A_S/A_I}\kappa\boldsymbol{F}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0.$$

Après intégration par parties, on obtient :

$$\int_{\Gamma_S}\boldsymbol{N}(s)\cdot\boldsymbol{\Psi}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l - \int_{\Gamma_I}\boldsymbol{N}(s)\cdot\boldsymbol{\Psi}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l + \int_{A_S/A_I}\kappa\boldsymbol{F}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0. \tag{3}$$

En appliquant (3) au cas $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{P}^T$, on trouve :

$$\int_{\Gamma_I}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N}(s)\,\mathrm{d}l = \int_{\Gamma_S}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N}(s)\,\mathrm{d}l + \int_{A_S/A_I}\kappa\boldsymbol{F}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

On a finalement :

$$J(s) = \lim_{R_I\to 0}\int_{\Gamma_I}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N}(s)\,\mathrm{d}l = \int_{\Gamma_S}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N}(s)\,\mathrm{d}l + \int_{A_S}\kappa\boldsymbol{F}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

Le vecteur tangent $\boldsymbol{T}(s)$ a pour coordonnées dans la base fixe $(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)$:

$$\boldsymbol{T}(s) = \cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\,\boldsymbol{e}_y,$$

où l'angle ϕ est reliée à l'abscisse curviligne par la relation $\mathrm{d}s = \kappa(s)\mathrm{d}\phi$. Le calcul de la divergence d'un champ de tenseurs d'ordre deux dans la base mobile $(\boldsymbol{e}_r(\theta,s),\ \boldsymbol{e}_\theta(\theta,s),\ \boldsymbol{e}_\phi(s))$ permet d'expliciter le terme linéaire en courbure de (4) :

$$J(s) = \int_{\Gamma_S}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N}(s)\ (1+\kappa R_S\cos\theta)R_S\mathrm{d}\theta + \int_{A_S}\kappa\left(P^{\phi\phi} - \cos\theta\frac{\partial P^{\phi r}}{\partial\phi} + \sin\theta\frac{\partial P^{\phi\theta}}{\partial\phi}\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \tag{5}$$

avec :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} = P^{rr}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_r + P^{r\theta}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_\theta + P^{r\phi}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_\phi + P^{\theta r}\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_r + P^{\theta\theta}\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta + P^{\theta\phi}\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\phi \\ + P^{\phi r}\boldsymbol{e}_\phi\otimes\boldsymbol{e}_r + P^{\phi\theta}\boldsymbol{e}_\phi\otimes\boldsymbol{e}_\theta + P^{\phi\phi}\boldsymbol{e}_\phi\otimes\boldsymbol{e}_\phi.\end{aligned}$$

Si le rayon extérieur du tore R_S tend vers zéro, $1+\kappa R_S\cos\theta$ tend vers un, l'intégrale de surface dans (5) tend vers zéro et on retrouve le cas plan. Dans le cas d'une fissure droite, la courbure κ tend vers zéro et on retrouve également le cas plan. Si la courbure κ est finie, R_S doit être très petit devant $1/\kappa$ pour que l'expression du cas plan reste valide.

3 Construction de champs locaux statiquement admissibles

Pour limiter les effets dus à la courbure, on construit des champs locaux statiquement admissibles dans le tore à partir des champs asymptotiques de déformations planes et antiplanes $\boldsymbol{U}_0$. On considère un champ de déplacements développé en série de Taylor de la courbure :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_0 + \kappa\boldsymbol{U}_1 + \kappa^2\boldsymbol{U}_2 + \ldots$$

Le tenseur de déformations associé devient :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla u}) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \kappa\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \kappa^2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \ldots$$

Le développement des contraintes est obtenu par la loi d'élasticité :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \kappa \boldsymbol{\sigma}_1 + \kappa^2 \boldsymbol{\sigma}_2 + \dots$$

En développant la divergence du tenseur des contraintes selon la courbure :

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{div}_\Pi \boldsymbol{\sigma}_0 + \kappa \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{U}_0) + \kappa \mathrm{div}_\Pi \boldsymbol{\sigma}_1 + \kappa^2 \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{U}_1) + \kappa^2 \mathrm{div}_\Pi \boldsymbol{\sigma}_2 + \kappa^3 \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2) + \dots$$

et en exprimant que le champ de contraintes est statiquement admissible, les termes successifs du développement vérifient :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathrm{div}_\Pi \boldsymbol{\sigma}_0, \\ \mathbf{0} &= \mathrm{div}_\Pi \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{U}_0), \\ \mathbf{0} &= \mathrm{div}_\Pi \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{U}_1), \\ &\dots \end{aligned} \tag{6}$$

Les champs plans et antiplans asymptotiques vérifient la première équation de (6). Pour un mode de rupture donné, le champ $\boldsymbol{U}_0$ est le champ plan ou antiplan donné par la solution de Westergaard [7] correspondante. Le champ $\boldsymbol{U}_0$ étant donné, l'expression de $\boldsymbol{F_0}(\boldsymbol{U}_0)$ est connue. Le champ $\boldsymbol{U}_1$ est obtenu en résolvant la deuxième équation de (6). Une fois $\boldsymbol{U}_1$ déterminé, l'expression de $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{U}_1)$ est connue. Ainsi, les champs $\boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{U}_3, \dots, \boldsymbol{U}_n$ sont obtenus de proche en proche.

Les champs $\boldsymbol{U}_1$ et $\boldsymbol{U}_2$ qui vérifient les deux premières équations de (6) ne sont pas uniques. En effet, partant d'une solution particulière, il est possible de construire une nouvelle solution en ajoutant une combinaison de termes de la série de Williams [8]. Pour le mode I, on choisit :

$$\boldsymbol{U}_1 = \frac{r\sqrt{r}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \left[\left(a_1 \cos\frac{3\theta}{2} + b_1 \cos\frac{\theta}{2} \right) \boldsymbol{e}_r + \left(c_1 \sin\frac{3\theta}{2} + d_1 \sin\frac{\theta}{2} \right) \boldsymbol{e}_\theta \right],$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{8\nu - 3}{8},\ b_1 = \frac{128\nu^2 - 96\nu + 13}{24}, \\ c_1 &= -\frac{8\nu - 5}{8},\ d_1 = \frac{128\nu^2 - 192\nu + 55}{24}, \end{aligned}$$

et :

$$\boldsymbol{U}_2 = \frac{r^2\sqrt{r}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \left[\left(a_2 \cos\frac{5\theta}{2} + b_2 \cos\frac{3\theta}{2} + c_2 \cos\frac{\theta}{2} \right) \boldsymbol{e}_r + \left(d_2 \sin\frac{5\theta}{2} + e_2 \sin\frac{3\theta}{2} + f_2 \sin\frac{\theta}{2} \right) \boldsymbol{e}_\theta \right],$$

avec :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{3 - 24\nu}{64},\ b_2 = \frac{512\nu^3 + 64\nu^2 + 80\nu + 53}{360},\ c_2 = \frac{67 - 256\nu^2}{192}, \\ d_2 &= \frac{24 - 9\nu}{64},\ e_2 = -\frac{512\nu^3 - 704\nu^2 - 80\nu + 137}{360},\ f_2 = \frac{256\nu^2 - 192\nu - 37}{192}. \end{aligned}$$

Considérons les trois champs approchés à l'ordre 0, 1, 2 en courbure :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{U}_0, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{U}_0 + \kappa \boldsymbol{U}_1, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{U}_0 + \kappa \boldsymbol{U}_1 + \kappa^2 \boldsymbol{U}_2. \end{aligned}$$

Pour un tel champ de déplacements $\boldsymbol{u}_i$ tel que $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_i)$ n'est pas statiquement admissible, l'écart entre l'intégrale J et sa valeur théorique J_{th} n'est donc pas nul. En particulier, on montre que :

$$J - J_{th} = \begin{cases} O(\kappa R_S), \text{ pour } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1, \\ O\left((\kappa R_S)^2\right), \text{ pour } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2, \\ O\left((\kappa R_S)^3\right), \text{ pour } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_3. \end{cases}$$

Si la courbure κ est finie et R_S est très petit devant $1/\kappa$, l'écart entre l'intégrale J et sa valeur théorique est négligeable que l'on prenne $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2$ ou $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_3$. En revanche, si R_S n'est pas négligeable devant $1/\kappa$, l'écart entre l'intégrale J et sa valeur théorique diminue au fur et à mesure qu'on ajoute des termes correctifs.

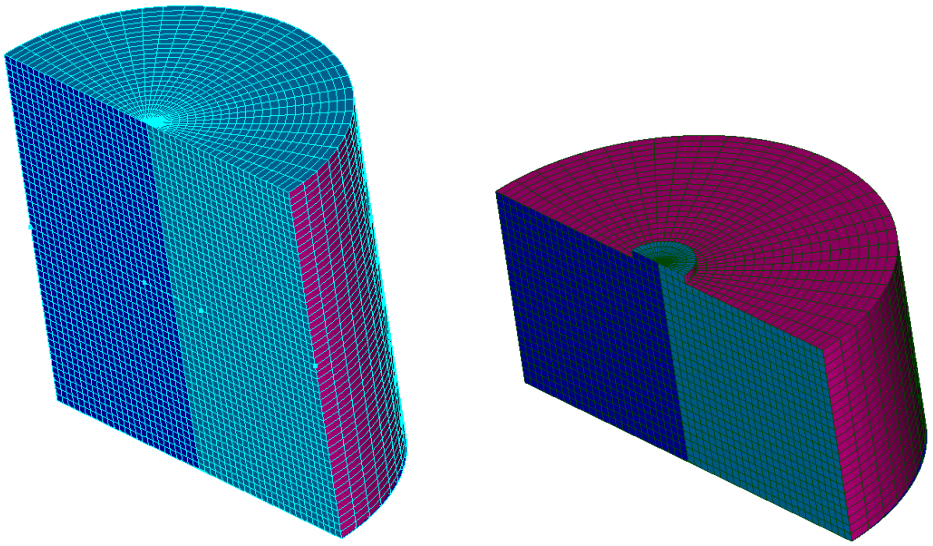


FIGURE 3 – Maillage utilisé pour étudier le cas de la fissure circulaire : domaine complet (à gauche) et illustration des lèvres de la fissure (à droite).

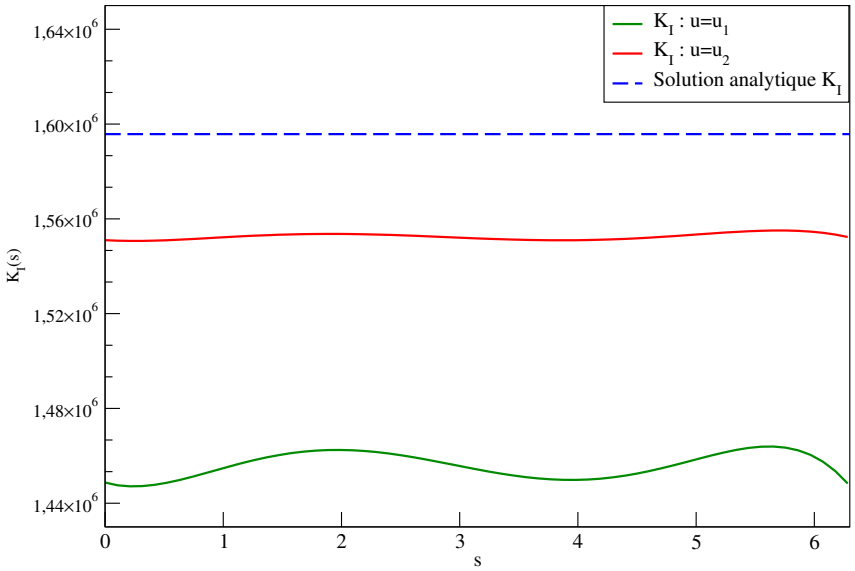


FIGURE 4 – Variation du facteur d'intensité de contrainte de K_I en fonction de l'abscisse curviligne s pour la fissure circulaire.

4 Simulations numériques

4.1 Fissure circulaire

On considère une fissure plane à front circulaire de rayon $a = 2$ m dans un demi-cylindre de hauteur $L = 10a$, ce qui permet de considérer que les chargements imposés sur les faces supérieures et inférieures sont ceux donnés à l'infini (*cf.* FIGURE 3). Une charge uniforme $\sigma_0 = 1$ MPa est appliquée sur la face supérieure et sur la face inférieure de la structure dans la direction normale aux lèvres de la fissure. Le facteur d'intensité de contrainte K_I est uniforme et sa valeur est :

$$K_I = 2\sigma_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} = 1{,}595769 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}. \tag{7}$$

Les courbes représentant K_I en fonction de l'abscisse curviligne obtenues en choisissant comme champs auxiliaires $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont représentées sur la FIGURE 4. L'utilisation du champ $\boldsymbol{u}_2$ permet de diminuer l'erreur relative de $\sim 10\%$ à $\sim 2{,}5\%$. De plus, l'amplitude des oscillations le long du front de fissure diminue.

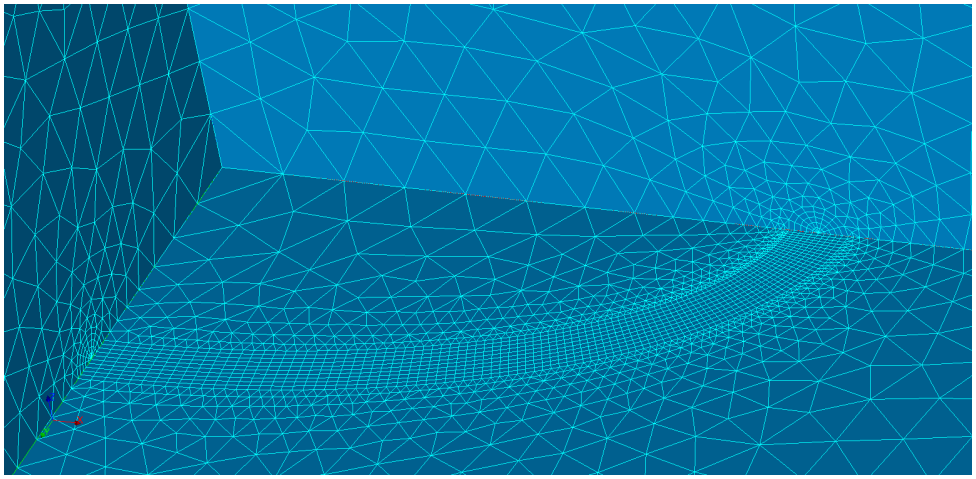


FIGURE 5 – Détail du maillage utilisé pour étudier le cas de la fissure elliptique.

4.2 Fissure elliptique

Analysons à présent le cas d'une fissure plane à front elliptique, de grand axe $a = 1$ m et de petit axe $b = 0{,}5$ m. La structure est soumise à une charge uniforme $\sigma_0 = 1$ MPa sur sa face supérieure et dans la direction normale à la lèvre de la fissure. Les paramètres matériau sont $E = 200$ GPa et $\nu = 0{,}3$. On représente un huitième de la structure en exploitant les symétries (*cf.* FIGURE 5). Pour le problème considéré, l'expression analytique de $\mathrm{K_I}$ est donnée par la formule suivante (*cf.* [6]) :

$$\mathrm{K_I} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi b}}{V(k)} \left(\sin^2\psi + \frac{b^2}{a^2} \cos^2\psi \right)^{\frac{1}{4}}, \tag{8}$$

où l'angle ψ repère un point sur le front de fissure et $V(k)$ est l'intégrale elliptique de deuxième espèce :

$$V(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2 \sin^2\rho}\, \mathrm{d}\rho, \tag{9}$$

où k est l'excentricité, définie par $k^2 = \dfrac{b^2}{a^2}$. Au point du front de fissure de coordonnées $x = a\cos\psi$, $y = b\sin\psi$ et $z = 0$, avec $\psi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ la courbure est :

$$\kappa = \frac{ab}{\left(a^2 \sin^2\psi + b^2 \cos^2\psi\right)^{3/2}}. \tag{10}$$

La FIGURE 6 présente la valeur du facteur d'intensité de contrainte $\mathrm{K_I}$, en fonction de l'angle ψ, obtenue en utilisant $\boldsymbol{u}_1$ comme champ auxiliaire. L'écart entre les valeurs numériquemes et analytiques est d'autant plus élevé que la courbure est grande. La FIGURE 7 présente cette valeur en utilisant $\boldsymbol{u}_2$ comme champ auxiliaire.

5 Conclusion

Nous avons montré que l'utilisation des champs asymptotiques en point de fissure comme champs de déplacements auxiliaires dans l'évaluation de l'intégrale J de Rice produit un écart proportionnel à la courbure du front de fissure. Nous avons ensuite construit une famille de champs de déplacements qui permet de réduire cet écart au fur et à mesure que des termes correctifs sont ajoutés. Finalement, nous avons illustré le gain apporté par l'utilisation de ces nouveaux champs auxiliaires sur deux cas-tests, pour lesquels la valeur analytique du facteur d'intensité de contrainte en mode I est connue.

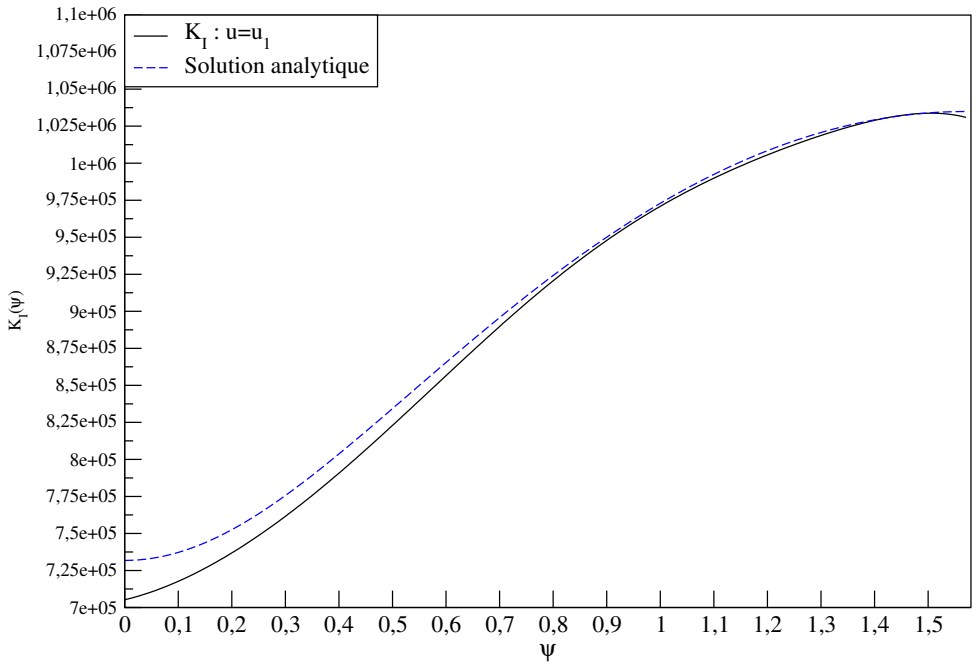


FIGURE 6 – Variation du facteur d'intensité de contrainte K_I en fonction de l'angle ψ pour la fissure elliptique, obtenue en prenant comme champ auxiliaire $\boldsymbol{u}_1$.

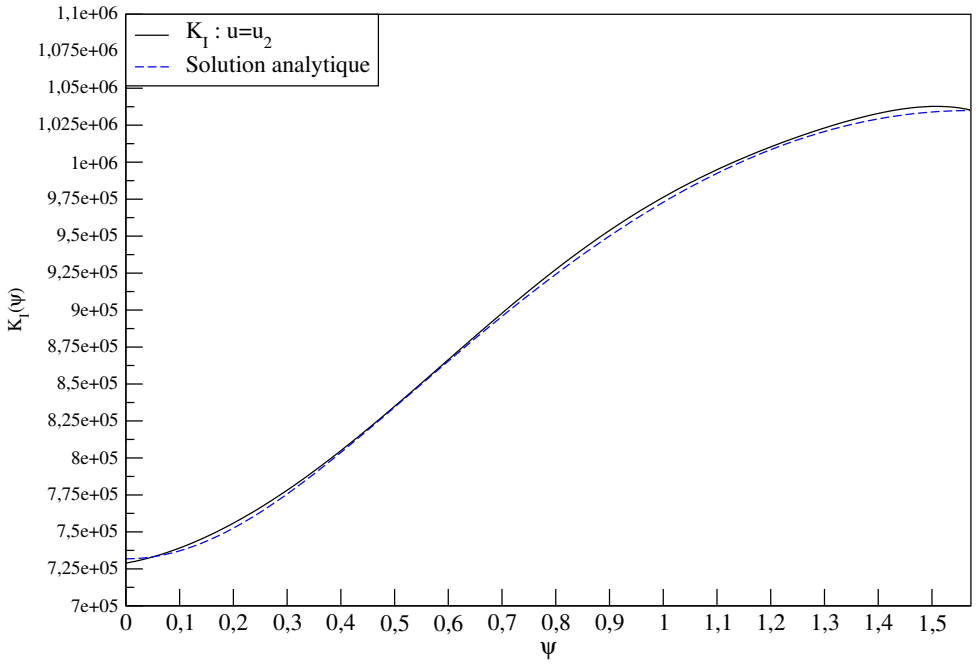


FIGURE 7 – Variation du facteur d'intensité de contrainte K_I en fonction de l'angle ψ pour la fissure elliptique, obtenue en prenant comme champ auxiliaire $\boldsymbol{u}_2$.

Références

[1] P. Destuynder et M. Djaoua. Sur une Interprétation Mathématique de l'Intégrale de Rice en Théorie de la Rupture Fragile. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 3(1) :70–87, 1981.

[2] M. Gosz et B. Moran. An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(3) :299 – 319, 2002.

[3] G. Irwin. Analysis of stresses ans strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24 :361 – 364, 1957.

[4] F. Z. Li, C. F. Shih et A. Needleman. A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engineering Fracture Mechanics*, 21(2) :405 – 421, 1985.

[5] J. R. Rice, P. C. Paris et J. G. Merkle. Some further results of J-integral analysis and estimate. *Progress in Flaw Growth and Fracture Toughness Testing*, ASTM STP 536 :231–245, 1973.

[6] H. Tada, P. Paris et G. Irwin. *The stress analysis of cracks handbook*. Wiley-Blackwell, 2000.

[7] H. M. Westergaard. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6 :A49 – A53, 1939.

[8] M. L. Williams. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24 :109 – 114, 1957.