

Liaisons convexes et endommagement à variation graduée

Nunziante Valoroso, Claude Stolz

▶ **To cite this version:**

Nunziante Valoroso, Claude Stolz. Liaisons convexes et endommagement à variation graduée. CSMA 2019, 14ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2019, Giens (Var), France. hal-02266884

HAL Id: hal-02266884
https://hal.science/hal-02266884

Submitted on 1 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2019
14ème Colloque National en Calcul des Structures
13-17 Mai 2019, Presqu'île de Giens (Var)

Liaisons convexes et endommagement à variation graduée

N. Valoroso[1,2], C. Stolz[1,3]

[1] *IMSIA, UMR-CNRS 9219, Université de Paris Saclay*
[2] *DiT, Università di Napoli Parthenope, nunziante.valoroso@uniparthenope.it*
[2] *IRC, École Spéciale des Travaux Publics, du Bâtiment et de l'Industrie*
[3] *GeM, Ecole Centrale Nantes, claude.stolz@ec-nantes.fr*

Abstract — On propose une modélisation de l'endommagement fondée sur l'introduction de liaisons convexes en complément d'une une loi locale. On retrouve ainsi un modèle d'endommagement à variation graduée dont la formulation est proche de celle dite *Thick Level Set*. Cependant, la modélisation présente s'affranchit complètement des level sets, d'où les performances numériques améliorées pour la simulation de l'initiation, la coalescence et la propagation des défauts dans les matériaux quasi-fragiles.
Mots clés — endommagement, liaisons convexes, Thick Level Set.

1 Introduction

Le modèle d'endommagement dit *Thick Level Set* (TLS) permet de décrire l'initiation et la propagation de défauts dans les matériaux quasi-fragiles [1, 2, 3]. Afin d'éviter la localisation des déformations ce modèle propose de contrôler la forme de la fonction d'endommagement d dans une zone de transition entre le matériau sain et le matériau complètement endommagé. Plus particulièrement, le modèle TLS repose sur la définition de l'endommagement comme fonction explicite de la distance ϕ à la surface Γ_o qui délimite la région non endommagée du domaine étudié. Ce dernier résulte ainsi décomposé en trois parties distinctes : la partie saine Ω_o, la zone de transition Ω_c où l'endommagement varie entre 0 et 1, et la partie totalement endommagée Ω_1. La frontière de la zone de transition est notée $\partial\Omega_c = \Gamma_o \cup \Gamma_1$, avec les propriétés suivantes :

$$M_o^t \in \Gamma_o, \quad d(M_o^t) = 0, \quad \phi(M_o^t, t) = 0, \tag{1}$$

$$M_1^t \in \Gamma_1, \quad d(M_1^t) = 1, \quad \phi(M_1^t, t) \geq l_c. \tag{2}$$

La surface définie par l'équation $\phi(M,t) = 0$ décrit le mouvement de la frontière Γ_o. Dans la zone de transition l'endommagement a une forme explicite

$$\begin{aligned} &d(\phi) = 0, && \phi(M,t) \leq 0, && M \in \Omega_o \\ &\dot{d} > 0, && 0 \leq \phi(M,t) \leq l_c, && M \in \Omega_c \\ &d(\phi) = 1, && \phi(M,t) \geq l_c. \end{aligned} \tag{3}$$

La fonction $d(\phi)$ est supposée continue et croissante; elle admet donc l'inverse $\phi(d)$. L'évolution de l'endommagement est ainsi associée au mouvement d'une interphase dont l'épaisseur est notée l_c. Dans un cas plus général [2], il existe un endommagement local et la modélisation TLS intervient quand le gradient de la fonction d'endommagement atteint le seuil critique décrit par une fonction $f(d)$. Cette dernière condition équivaut à

$$d = d(\phi), \qquad ||\nabla\phi|| = 1. \tag{4}$$

Quand le seuil est atteint, la fonction ϕ devient une fonction distance signée.
La présente contribution vise à étudier un modèle isotrope élastique-endommageable dont la loi de comportement locale inclut une variable scalaire d'endommagement soumise à deux liaisons internes explicitement définies. La première est la relation d'ordre, locale et classique, sur le paramètre d'endommagement qui décrit la transition entre les deux phases du matériau :

$$0 \leq d \leq 1. \tag{5}$$

La deuxième condition, non-locale et non-classique, consiste à limiter le gradient de l'endommagement:

$$||\nabla d|| \leq f(d). \tag{6}$$

2 L'état local

On décrit l'état local par la déformation infinitésimale ε, le paramètre d'endommagement d et son gradient ∇d; ce dernier apparaît uniquement par la donnée de la liaison interne (6).

Le comportement est introduit à l'aide d'une densité d'énergie libre convexe notée $w(\varepsilon, d)$; les forces thermodynamiques conjuguées aux variables ε, d sont le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et le taux de restitution d'énergie Y :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}, \qquad Y = -\frac{\partial w}{\partial d}. \tag{7}$$

Pour un modèle d'endommagement isotrope la forme de la fonction densité d'énergie est typiquement

$$w(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} g(d) \mathbb{E}\varepsilon : \varepsilon, \tag{8}$$

où $\mathbb{E}$ est le tenseur d'élasticité du matériau vierge et $g(d)$ est la fonction scalaire de dégradation qui transforme le matériau sain en un matériau endommagé.

2.1 Les liaisons convexes

Dans la modélisation proposée le paramètre d'endommagement d est soumis à deux liaisons internes traduites par des fonctions convexes. Par définition il obéit à la condition (5); ceci peut s'exprimer à travers une unique fonction convexe g_1 qui réalise les deux inégalités :

$$g_1(d) = d(d-1) \leq 0. \tag{9}$$

La deuxième liaison est la condition (6). On notera g_2 la fonction qui exprime la borne sur le gradient de l'endommagement:

$$g_2(d) = ||\nabla d|| - f(d) \leq 0. \tag{10}$$

L'inégalité (10) définit un ensemble convexe si la fonction g_2 est elle-même convexe, c'est-à-dire si $-f(d)$ est convexe, ce qui équivaut à $f(d)$ concave. On supposera dans la suite que $f(0) > 0$. Pour toute fonction f concave s'il existe une valeur d_o telle que $f(d_o) > 0$ alors l'ensemble $\mathcal{C} = \{(d, \nabla d) / g_2(d) \leq 0\}$ est convexe non vide. La démonstration est immédiate. Prenons deux éléments de $\mathcal{C}$:$(d, \nabla d), (d^*, \nabla d^*)$; leur combinaison convexe est par définition un élèment de $\mathcal{C}$ et vérifie la condition:

$$||\theta \nabla d + (1-\theta)\nabla d^*|| \leq \theta ||\nabla d|| + (1-\theta)||\nabla d^*|| \leq \theta f(d) + (1-\theta) f(d^*), \qquad \theta \in [0,1] \tag{11}$$

et pour f concave

$$\theta f(d) + (1-\theta) f(d^*) \leq f(\theta d + (1-\theta) d^*) \tag{12}$$

Q.E.D.

Pour tenir compte des conditions de liaison (9) et (10) on introduira deux champs de multiplicateurs de Lagrange γ_1, γ_2; ces derniers vérifient les conditions de Kuhn-Tucker:

$$\gamma_i \geq 0; \qquad g_i \leq 0; \qquad \gamma_i g_i = 0. \tag{13}$$

On remarquera que les relations d'exclusion ci-dessus confèrent un caractère non dissipatif aux liaisons. Une densité d'énergie potentielle des liaisons est donc définie par:

$$w_\gamma(d; \gamma_i) = \gamma_1 g_1(d) + \gamma_2 g_2(d). \tag{14}$$

Elle est convexe de par la convexité des fonctions g_1 et g_2.

3 Équilibre

On étudie les états d'équilibre d'un système dont la frontière est décomposée en une partie $\partial\Omega_u$ où on impose le déplacement $\mathbf{u} = \mathbf{u}^d$ et la partie complémentaire $\partial\Omega_T$ où les efforts $\mathbf{T}$ sont donnés. Les variables du problème sont le champ de déplacement $\mathbf{u}$, le champ d'endommagement d et les champs des multiplicateurs de Lagrange γ_i. L'énergie potentielle du système s'écrit :

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, d; \gamma_i) = \int_\Omega w \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}.\mathbf{u} \, \mathrm{d}S + \int_\Omega w_\gamma \, \mathrm{d}\Omega \tag{15}$$

Elle est définie sur l'ensemble des champs de déplacement compatibles $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \left\{ \mathbf{u}^* | \mathbf{u}^*(M) = \mathbf{u}^d(M), M \in \partial\Omega_u \right\}. \tag{16}$$

3.1 Variation en u

Pour un champ d'endommagement donné, un état d'équilibre $\mathbf{u}^{sol}$ rend l'énergie potentielle minimale sur l'ensemble $\mathcal{K}$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{u}}.\delta\mathbf{u} = 0, \qquad \forall \delta\mathbf{u} \in \{\mathbf{v} | \mathbf{v}(M) = 0, M \in \partial\Omega_u\}. \tag{17}$$

Cette condition équivaut aux équations d'équilibre avec ses conditions aux limites :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} = 0, \text{ sur } \Omega_o; \qquad \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} = \mathbf{T}, \text{ sur } \partial\Omega_T. \tag{18}$$

3.2 Variations en γ_i

Ces variations définissent une partition du domaine Ω suivant l'état des liaisons internes:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma_1}\delta\gamma_1 = \int_\Omega d(d-1)\delta\gamma_1 \, \mathrm{d}\Omega = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma_2}\delta\gamma_2 = \int_\Omega (||\nabla d|| - f(d))\delta\gamma_2 \, \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{20}$$

Pour une distribution d'endommagement donnée d, le domaine est décomposé en trois parties : $\Omega = \Omega_o \cup \Omega_c \cup \Omega_1$:

- sur Ω_o et Ω_1, $g_1 = 0$, γ_1 est positif quelconque,
- sur Ω_o et Ω_1, comme $g_2 \leq 0$ donc $\gamma_2 = 0$,
- sur Ω_c, comme $g_1 < 0$ alors $\gamma_1 = 0$

Le domaine Ω_c est décomposé en deux sous-domaines :

- Ω_c^- où $g_2 < 0$ donc $\gamma_2 = 0$,
- Ω_c^o où $g_2 = 0$ et γ_2 est positif quelconque.

3.3 Variation en d

Une variation de l'endommagement δd induit une variation d'énergie potentielle de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d}\delta d &= \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial d}\delta d \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \gamma_1(2d-1)\delta d \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \gamma_2(\nabla d.\frac{\nabla \delta d}{||\nabla d||} - f'\delta d) \, \mathrm{d}\Omega \\ &= -\int_\Omega G \, \delta d + \int_{\partial\Omega} \gamma_2 \frac{\nabla d}{||\nabla d||}.\mathbf{n} \, \delta d \, \mathrm{d}S + \int_S |[\gamma_2 \frac{\nabla d}{||\nabla d||}]|_s.\mathbf{n} \, \delta d \, \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{21}$$

Cette variation contient trois contributions : un terme de volume, une contribution sur les surfaces de discontinuités éventuelles et un terme de surface sur la frontière du solide.

Le terme de volume définit le taux de restitution d'énergie local G :

$$G = Y - \gamma_1(2d-1) + \gamma_2 f' + \mathrm{div}(\gamma_2 \frac{\nabla d}{||\nabla d||}) \tag{22}$$

Lorsque $\gamma_2 = 0$, la définition de G est purement algébrique. Quand $\gamma_2 \neq 0$, le terme de divergence montre le caractère non-local de la loi de comportement dû à la liaison (10).

Quant aux surfaces de discontinuités éventuelles, si elles sont non dissipatives on a :

$$[|\gamma_2 \frac{\nabla d}{||\nabla d||}]|_S.\mathbf{n} = 0. \tag{23}$$

En particulier, des équations de type (23) doivent être satisfaites sur la surface Γ_o, le long de laquelle $d = 0^+$ et $||\nabla d|| = f(0^+) > 0$, ce qui implique $\gamma_2 = 0$. Sur une surface de discontinuité du gradient de d, l'endommagement est continu et $g_2 = 0$. Dans ce cas particulier on obtient :

$$d^+ = d^-, \qquad ||\nabla d^+|| - f(d^+) = ||\nabla d^-|| - f(d^-) = 0, \tag{24}$$

ces relations impliquent :

$$0 = \mathbf{n}.\nabla d^+ + \mathbf{n}.\nabla d^-, \qquad 0 = (\gamma_2^+ \nabla d^+ - \gamma_2^- \nabla d^-).\mathbf{n}, \qquad 0 < \gamma_2^+, \qquad 0 < \gamma_2^-, \tag{25}$$

soit $\gamma_2^+ = \gamma_2^- = 0$.

Les conditions aux limites. Une différence majeure par rapport aux modèles d'endommagement à gradient de la littérature vient du fait que sur la frontière $\partial\Omega \cap \partial\Omega_c^o$ nous avons $g_2 = 0$, ce qui implique que $\nabla d \neq 0$ et par conséquent $\gamma_2 = 0$. La condition aux limites sur la dérivée normale de l'endommagement n'est donc plus nécessairement homogène dans le cadre du modèle d'endommagement à variation graduée.

4 Dissipation

Les liaisons internes (9) et (10) étant non-dissipatives, la dissipation totale du système est due à la seule contribution du taux de restitution d'énergie locale :

$$-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d}\dot{d} = \int_\Omega G\dot{d}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega Y\dot{d}\,\mathrm{d}\Omega \geq 0 \tag{26}$$

Suivant [4] on suppose que l'évolution de l'endommagement est donnée par un pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D}(\dot{d})$ fonction convexe de $\dot{d}$ et positivement homogène de degré 1. Quand $\mathcal{D}$ est régulier, on obtient une équation cinétique sur d:

$$G = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{d}} \tag{27}$$

ce qui équivaut à l'équation de Biot [5]:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{d}} = 0 \tag{28}$$

Pour un pseudo-potentiel non-régulier

$$\mathcal{D}(d^*) = \begin{cases} Y_c d^*, & \text{si } d^* \geq 0, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{29}$$

l'évolution est gouvernée par une règle de normalité sous la forme:

$$G - Y_c \leq 0, \quad \dot{d} \geq 0, \quad (G - Y_c)\dot{d} = 0. \tag{30}$$

Comme pour la mécanique linéaire de la rupture [6] une énergie dissipée $\mathcal{G}(d)$ peut être introduite, quand le seuil Yc dépend uniquement d'un paramètre

$$\mathcal{G}(d) = \int_0^d Y_c(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha. \tag{31}$$

Dans ce cas l'énergie totale du système s'écrit:

$$\mathcal{W}(\mathbf{u},d,\gamma_i) = \mathcal{E}(\mathbf{u},d,\gamma_i) + \mathcal{G}(d) \tag{32}$$

et l'évolution de l'endommagement suivant la loi de normalité est régie par l'inéquation variationnelle:

$$\dot{d} \geq 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial d}(\delta d - \dot{d}) \geq 0, \qquad \forall \delta d \geq 0. \tag{33}$$

La loi de normalité consiste en une équation aux dérivées partielles déterminant γ_2 sur le domaine Ω_c^o. Au point au $\dot{d} > 0$ l'équation (30) fournit :

$$G = Y + \gamma_2 f' + \mathrm{div}(\gamma_2 \frac{\nabla d}{||\nabla d||}) = Y_c. \tag{34}$$

Sur le domaine Ω_c^o, comme $g_2 = ||\nabla d|| - f(d) = 0$ l'équation se réduit à

$$(Y - Y_c) f + \mathrm{div}(\gamma_2 \nabla d) = 0. \tag{35}$$

Plaçons nous sur une iso-endommagement et introduisons la fonction $\phi(d)$ telle que

$$\nabla \phi = \frac{\nabla d}{f}, \quad ||\nabla \phi|| = 1, \quad \phi = \int_o^d \frac{\mathrm{d}\omega}{f(\omega)}, \tag{36}$$

La fonction ϕ est une distance signée de la surface $d = 0^+$, et $f(d) = d'(\phi)$. Soit un point $M_o(\alpha,\beta)$ de Γ_o ; un point M de Ω_c^o a pour coordonnées (α,β,z) tel que

$$M = M_o + z\frac{\nabla d}{||\nabla d||}, \quad M_o \in \Gamma_o. \tag{37}$$

Considérons l'intégrale de (35) sur un tronc de cône de direction ∇d fermé par les surfaces $\mathrm{d}S(z=0)$ et $\mathrm{d}S(z=l) = j(z)\,\mathrm{d}S(z=0)$. Le terme $j(z)$ prend en compte le changement d'aire dû à la présence de la courbure quand toutes les surfaces sont décrites dans la base locale attachée à M_o of Γ_o. L'intégrale de la divergence $\mathrm{div}(\gamma_2 \nabla d)$ se réduit aux contributions sur les surfaces ($\mathrm{d}S(0)$, $\mathrm{d}S(l)$) où $\gamma_2 = 0$. On retrouve ainsi le taux de restitution d'énergie $\hat{G}$ associé au mouvement de la zone de transition d'épaisseur actuelle $\phi(d) = l_c$ proposé pour le modèle TLS [1]. L'endommagement évolue donc sous la condition :

$$\hat{G} = \int_{z=0}^{z=l} Y f j(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^l Y_c f j(\phi)\,\mathrm{d}\phi. \tag{38}$$

Cette analyse montre que associant à un modèle d'endommagement local l'équation de liaison (6) on retrouve les propriétés du modèle Thick Level Set. Cependant, la modélisation de l'endommagement à variation graduée avec liaisons convexes s'affranchit complètement des level sets car la résolution de l'équation (35) qui détermine l'évolution de l'endommagement ne dépend aucunement de la notion de fonction de niveau.

5 Étude la barre en traction

Une barre de longueur L est soumise à une élongation contrôlée. Afin de comparer les résultats obtenus avec d'autres théories [7, 8] ainsi que pour étudier l'influence des liaisons on considère la forme suivante de l'énergie libre

$$w = \frac{1}{2}(1-d)E\varepsilon^2 + \frac{k}{2}||\nabla d||^2, \tag{39}$$

où $k > 0$ est un paramètre de régularisation avec les dimensions d'une force, et une forme simple de la fonction de liaison

$$g_2(d) = ||\nabla d|| - \frac{1}{l_c} \leq 0. \tag{40}$$

L'étude la barre en traction dont l'énergie est régularisée par la présence du terme quadratique en ∇d permet de déterminer, entre autre, les conditions sur le paramètre k pour que la solution soit cohérente avec celle du problème non régularisé.

On obtient deux familles de solutions. La première est la solution homogène, la seconde est l'initiation d'un défaut suivi de sa propagation. On suppose que ce défaut prend place en $x = 0$. Pour la forme régularisée, la solution dépend de k. La présence du terme de régularisation modifie la définition (22) en

$$G^k = G + k\Delta d \tag{41}$$

ainsi que les conditions aux limites qui imposent maintenant $\nabla d.\mathbf{n} = 0$ sur la frontière de Ω_c.

Lors de la croissance de l'endommagement, on décompose l'évolution en deux phases, la première pendant laquelle $||\nabla d|| < 1/l_c$ et $\gamma_2 = 0$ et la seconde pendant laquelle la liaison est satisfaite avec l'égalité. On peut montrer que la seconde phase ne peut exister que si k est suffisamment petit. En effet, la condition $G^k = Y_c$ avec $\gamma_2 = 0$ permet de construire $d(x)$ par quadrature en intégrant

$$\frac{\Sigma^2}{2E(1-d)} - Y_c d + \frac{k}{2}(\nabla d)^2 = C. \tag{42}$$

La constante C est déterminée par les conditions aux limites

$$\nabla d(x=0).\mathbf{e}_x = \nabla d(x=L).\mathbf{e}_x = 0; \qquad d(x=L) = 0. \tag{43}$$

Posons $d(0) = d_m$. On obtient que $C = \Sigma^2/2E$ sur $[0,L]$. Ce qui détermine le chargement Σ

$$\Sigma^2 = 2EY_c(1-d_m) = \Sigma_c^2(1-d_m). \tag{44}$$

La solution ainsi déterminée sera valable tant que $||\nabla d||\, l_c < 1$; cette condition est toujours vérifiée si

$$K = \frac{k}{2l_c^2 Y_c} < 1. \tag{45}$$

Sous cette condition il apparaît une zone $[x_a, x_b]$ pour laquelle $d = d_a + \dfrac{x_b - x}{l_c}$. Sur ce segment $\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_2(x_a) = \gamma_2(x_b) = 0$, et le gradient $\nabla d.\mathbf{e}_x$ est continu en ces points. On montre alors que $K = d_a d_b$ avec

$$d_a = \frac{1}{2}(d_m + K)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4K}{(d_m+K)^2}}\right) \tag{46}$$

$$d_b = \frac{1}{2}(d_m + K)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4K}{(d_m+K)^2}}\right) \tag{47}$$

Les courbes de réponse de la barre sont présentées dans la Figure 1.

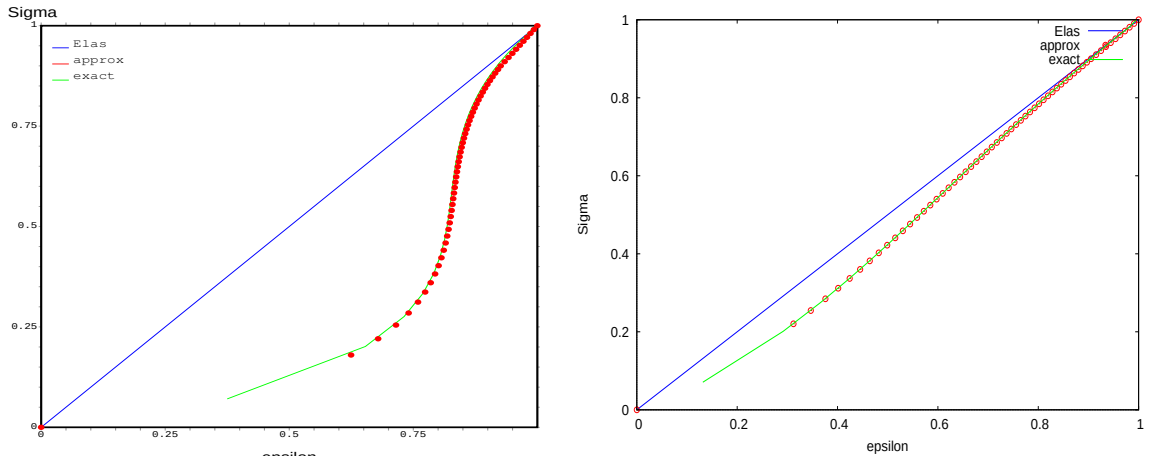


Figure 1: Courbes réponse $\Sigma - \varepsilon$ pour $K = 0.01$. $L = 1$ (gauche), et $L = 5$ (droite).

Une valeur $K = 0.1$ n'est pas adaptée, l'endommagement est trop étalé. Pour K donné, la valeur d_o pour laquelle la liaison g_2 est satisfaite en un point est donnée par :

$$d_o = 2\sqrt{K} - K, \tag{48}$$

ce qui implique que K doit être inférieur à 1. Plus K est faible, plus l'endommagement est concentré autour de $x = 0$ au cours de la phase initiale.

La solution obtenue ici est une approximation de la solution exacte. En effet, tant que la liaison (40) n'est pas satisfaite avec l'égalité, l'évolution de d présente une zone de charge $[0, x_c]$ et une zone de décharge $[x_c, x_M]$ sur le segment de longueur x_M. La fonction $x_c(d_m)$ est décroissante puis croissante, jusqu'à dépasser la valeur x_M. C'est ce qui apparaît sur la réponse en endommagement (Figure 2) lorsque les courbes $d(x)$ se croisent.

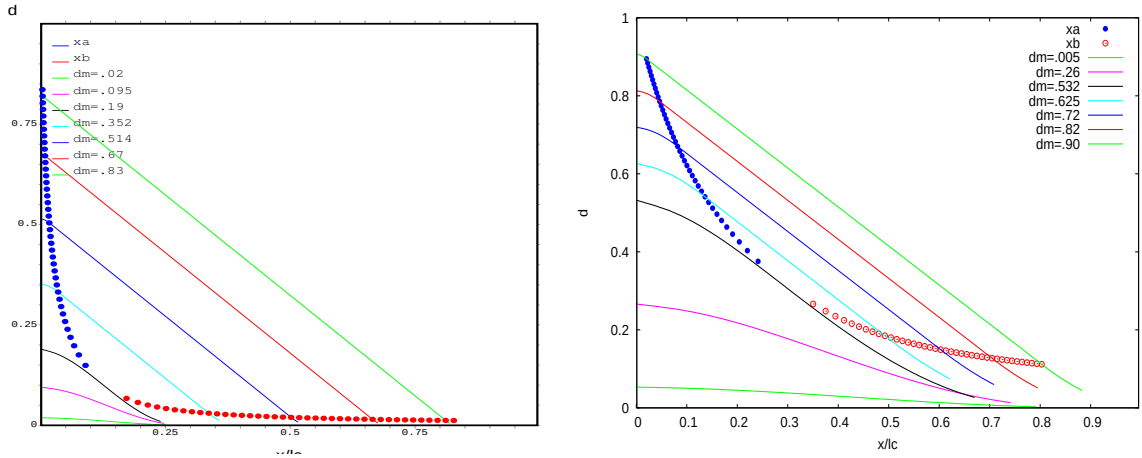


Figure 2: Profils d'endommagement $d(x)$ pour $K = 0.01$ (gauche) et $K = 0.1$ (droite).

La condition $\dot{d} > 0$ n'est satisfaite que lorsque la zone où $g_2 = 0$ est clairement établie. Plus K est petit, plus cette condition est satisfaite rapidement au cours de l'histoire du chargement. La valeur de K doit être suffisamment petite pour que la valeur x_M soit très inférieure à l_c afin que la partie linéaire de d soit dominante.

6 Conclusions

Nous avons proposé et mis en oeuvre une nouvelle modélisation de l'endommagement à variation graduée où l'on retrouve les propriétés du modèle *Thick Level Set*. Cependant, cette nouvelle approche s'affranchit complètement du formalisme des fonctions de niveau (level-set) et de toutes les difficultés qui en découlent, l'information nécessaire au suivi des interphases lors de la propagation des défauts étant contenue dans les champs de multiplicateurs de Lagrange associés à deux équations de liaison décrites par des fonction convexes.

References

[1] N. Moës, C. Stolz, P-E. Bernard, N. Chevaugeon, *A level set based model for damage growth: The thick level set approach*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, Ltd, 86(3):358–380, 2011.

[2] N. Moës, C. Stolz, N. Chevaugeon, *Coupling local and non-local damage evolutions with the Thick Level Set model*, Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci., 2(16),2014.

[3] C. Stolz, *On moving thick layer approach for graded damage modelling*, Int. J. of Frac,202(2):195-205, 2016.

[4] B. Halphen, Q. S. Nguyen, *Sur les matériaux standard généralisés*, J. Mécanique, 14:1-37, 1975.

[5] M. A. Biot, *Mechanics of incremental deformations*,Wiley,1965.

[6] Q. S. Nguyen, *Bifurcation and stability of dissipative systems*, CISM Courses, lectures no 327, Springer-Verlag, Wien- New York,1993.

[7] B. Bourdin, J.J Marigo, *The variational approach to fracture*, J. Elast., 91:5-48, 2008

[8] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofhacker, *A thermodynamically consistent phase field models of fracture: variational principles and multifields FE implementation*, Int. J. Numer. Methods Eng., 83(10):1273-1311