

Optimisation de programmes polynomiaux en variables 0-1 et sans contraintes

Claudia d'Ambrosio, Sourour Elloumi, Amélie Lambert, Arnaud Lazare

▶ **To cite this version:**

Claudia d'Ambrosio, Sourour Elloumi, Amélie Lambert, Arnaud Lazare. Optimisation de programmes polynomiaux en variables 0-1 et sans contraintes. ROADEF 17, Feb 2017, Metz, France. hal-02455556

HAL Id: hal-02455556
https://hal.science/hal-02455556

Submitted on 21 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Optimisation de programmes polynomiaux en variables 0-1 et sans contraintes

Claudia D'Ambrosio[1], Sourour Elloumi[2,3], Amélie Lambert[3], Arnaud Lazare[2,3]

[1] LIX - 91128 Palaiseau CEDEX, France
[2] ENSTA ParisTech, 91120 Palaiseau, France
arnaud.lazare@ensta-paristech.fr
[3] CEDRIC-Cnam - Paris Cedex 03, France

Mots-clés : *Programmation polynomiale en variables binaires, Reformulation convexe*

1 Introduction

Dans ce papier nous nous intéressons à minimiser un polynôme de degré maximum 4 dont les variables sont binaires. La formulation d'un tel problème est la suivante :

$$(P)\begin{cases} \min f(x) = \sum\limits_{\substack{\text{monômes p}\\ \text{de la forme}\\ x_i}} c_p x_i + \sum\limits_{\substack{\text{monômes p}\\ \text{de la forme}\\ x_i x_j}} c_p x_i x_j + \sum\limits_{\substack{\text{monômes p}\\ \text{de la forme}\\ x_i x_j x_k}} c_p x_i x_j x_k + \sum\limits_{\substack{\text{monômes p}\\ \text{de la forme}\\ x_i x_j x_k x_l}} c_p x_i x_j x_k x_l \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

Ce problème est $\mathcal{NP}$-difficile. Les difficultés proviennent ici à la fois de la non-convexité de la fonction objectif, mais aussi de l'intégrité des variables. Classiquement, un tel problème est résolu par un algorithme de branch-and-bound basé sur une relaxation de (P) plus facile à résoudre [3, 1]. Ici, nous proposons deux méthodes de résolution basées sur des reformulations convexes de (P). Dans la première approche, nous reformulons d'abord (P) en un problème équivalent et quadratique, puis nous convexifions la fonction f en utilisant la programmation semi-définie. Dans la deuxième méthode, nous convexifions directement la fonction f, c'est à dire en conservant son degré initial.

2 `Q_form Method` : Reformulation quadratique convexe de (P)

Ici, nous présentons une formulation équivalente à (P) qui est quadratique convexe. Pour cela, nous ajoutons de nouvelles variables y_{ij} égales aux produits $x_i x_j$, et nous linéarisons l'égalité $y_{ij} = x_i x_j$ par les inégalités de Fortet [4]. Ensuite, grâce aux variables y, nous remplaçons les monômes degrés 3 ou 4 par des monômes de degré 2. Plus précisément, chaque terme trilinéaire $x_i x_j x_k$ est remplacé par le terme quadratique $y_{ij} x_k$, et chaque terme quadrilinéaire $x_i x_j x_k x_l$ est remplacé par le terme quadratique $y_{ij} y_{kl}$. Nous obtenons ainsi la fonction a-priori non convexe suivante :

$$f'(x,y) = \sum_{\substack{\text{monômes p}\\ \text{de la forme}\\ x_i}} c_p x_i + \sum_{\substack{\text{monômes p}\\ \text{de la forme}\\ x_i x_j}} c_p x_i x_j + \sum_{\substack{\text{monômes p}\\ \text{de la forme}\\ x_i x_j x_k}} c_p y_{ij} x_k + \sum_{\substack{\text{monômes p}\\ \text{de la forme}\\ x_i x_j x_k x_l}} c_p y_{ij} y_{kl}$$

La deuxième étape consiste à convexifier f'. Pour cela, nous introduisons la fonction suivante pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda' \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$f_{\lambda,\lambda'}(x,y) = f'(x,y) + \sum_i \lambda_i (x_i^2 - x_i) + \sum_{i,j} \lambda'_{ij} (y_{ij}^2 - y_{ij})$$

qui a la même valeur que f' puisque x et y sont des variables binaires. De plus, il existe des valeurs de λ et λ' pour lesquelles $f_{\lambda,\lambda'}$ est une fonction convexe. En utilisant la programmation semi-definie positive [2], nous déterminons des vecteurs λ et λ' optimaux, dans le sens où ils maximisent la valeur de la relaxation continue du problème reformulé. Le problème équivalent et convexe est ensuite résolu par un branch-and-bound.

3 `P_form Method` : Reformulation polynomiale convexe de (P)

Ici, nous reformulons (P) directement en un problème convexe sans ajouter de variable ou de contrainte. L'idée est de perturber le Hessien de f en lui ajoutant des fonctions nulles sur le domaine de (P). Pour cela, étant donné un vecteur $\gamma \in \mathbb{R}^n$, nous construisons f_γ qui a la même valeur que f puisque x est une variable binaire :

$$f_\gamma(x) = f(x) + \sum_i \gamma_i (x_i^2 - x_i)$$

Comme dans la section précédente, nous cherchons un vecteur γ tel que $f_\gamma(x)$ soit une fonction convexe. Cependant, comme f a un degré supérieur à 2, son hessien $H_f(x)$ n'est pas constant. Ainsi, dans un premier temps, nous approximons $H_f(x)$. Pour cela, nous calculons les intervalles $[\underline{c_{ij}},\overline{c_{ij}}]$ qui contiennent les éléments de $H_f(x)$, i.e. tels que $\forall (i,j), h_{ij} \in [\underline{c_{ij}},\overline{c_{ij}}]$. Ensuite, nous calculons le vecteur γ grâce au Théorème de Gerschgorin de la façon suivante :

$$\gamma_i = \max\left[0, \left(-\underline{c_{ii}} + \sum_{j \neq i} \max\left(\left|\underline{c_{ij}}\right|, |\overline{c_{ij}}|\right)\right)\right] \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Le problème reformulé est ensuite résolu par un branch-and-bound.

4 Conclusions et perspectives

Nous avons présenté deux approches pour résoudre (P) qui sont basées sur des reformulations convexes. La première utilise la littérature sur la programmation quadratique, mais la taille du problème reformulé est supérieure à celle de (P). La deuxième reste dans l'espace initial des variables, mais la difficulté est que nous devons travailler avec une approximation du Hessien non constant de f. Nous présenterons une comparaison expérimentale de ces approches.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au cas où les variables sont binaires, nous travaillons à l'extension de ces premiers résultats au cas où les variables peuvent être des entiers naturels ou des réels.

Références

[1] C.S. Adjiman, S. Dallwig, C.A. Floudas, and A. Neumaier. A global optimization method, αbb, for general twice-differentiable constrained NLPs - I. Theoretical advances. *Computers and Chemical Engineering*, 22(9) :1137–1158, 1998.

[2] A. Billionnet and S. Elloumi. Using a mixed integer quadratic programming solver for the unconstrained quadratic 0-1 problem. *Mathematical Programming*, 109 :55–68, 2007.

[3] C. Buchheim and C. D'Ambrosio. Monomial-wise optimal separable underestimators for mixed-integer polynomial optimization. *Journal of Global Optimization*, pages 1–28, 2016.

[4] R. Fortet. L'algèbre de boole et ses applications en recherche opérationnelle. *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle*, 4 :5–36, 1959.