

AOT 13 - Cours de l'ENSTA Paris

Géométrie Différentielle

et Application au Contrôle Géométrique

Frédéric JEAN  
UMA, ENSTA Paris

Notes de cours  
12 octobre 2021



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Variétés différentiables</b>	<b>1</b>
1.1	Variétés différentiables . . . . .	1
1.2	Applications différentiables . . . . .	5
1.3	Sous-variétés . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Espaces tangent et cotangent</b>	<b>13</b>
2.1	Vecteurs tangents . . . . .	13
2.2	Dérivations . . . . .	14
2.3	Différentielle d'une application . . . . .	18
2.4	Coordonnées sur l'espace tangent . . . . .	19
2.5	Cas des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	22
2.6	Espace cotangent* . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Champs de vecteurs</b>	<b>27</b>
3.1	Fibrés tangent et cotangent . . . . .	27
3.2	Champs de vecteurs . . . . .	30
3.3	Équations différentielles . . . . .	33
3.4	Flots et groupes de difféomorphismes . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Familles de champs de vecteurs</b>	<b>39</b>
4.1	Systèmes commandés . . . . .	39
4.2	Crochets et algèbre de Lie . . . . .	42
4.3	Orbite d'une famille de champs de vecteurs . . . . .	49
4.4	Espace tangent à une orbite . . . . .	55
4.5	Distributions et mécanique non-holonyme* . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Systèmes commandés affines*</b>	<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	63
5.2	Ensembles atteignables . . . . .	64
5.3	Systèmes sans dérive . . . . .	67
5.4	Systèmes affines commandables . . . . .	72

<b>A Exercices</b>	<b>79</b>
A.1 Champs de coordonnées . . . . .	79
A.2 Véhicule articulé . . . . .	81
A.3 Sphère roulant sur une sphère . . . . .	82
A.4 Transfert de population pour systèmes quantiques . . . . .	86
A.5 Application du lemme de Gauss . . . . .	89
A.6 La sphère imaginaire . . . . .	89
<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>
<b>Index</b>	<b>94</b>

# Chapitre 1

## Variétés différentiables

### 1.1 Variétés différentiables

On considère un espace topologique  $M$  (c'est-à-dire un espace de points muni d'une topologie). On suppose que cet espace est

- à base dénombrable : la topologie de  $M$  a une base dénombrable d'ouverts. Cette propriété est équivalente à l'existence d'un sous-ensemble dénombrable dense (par exemple  $\mathbb{Q}^n$  pour  $\mathbb{R}^n$ );
- séparé : deux points distincts ont des voisinages distincts.

**Définition.** Une *carte de dimension  $n$*  sur  $M$  est un couple  $(U, \varphi)$  formé de

- un ouvert  $U \subset M$ ;
- un homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  (un homéomorphisme est une application continue et inversible dont l'inverse est continue).

L'ouvert  $U$  est le domaine de la carte. Pour  $p \in U$ ,  $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$  :  $\varphi$  est ce que l'on appelle une fonction *coordonnées*.

Un point de  $M$  peut appartenir à deux domaines différents correspondant à deux cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$ .

**Définition.** Deux cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  sur  $M$  sont compatibles si  $U \cap V = \emptyset$  ou si  $\varphi \circ \psi^{-1}$  est un difféomorphisme entre les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  que sont  $\psi(U \cap V)$  et  $\varphi(U \cap V)$ .

*(Rappels : Une application  $f : U \subset E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels normés et  $U$  un ouvert de  $E$ , est un difféomorphisme de  $U$  dans  $f(U)$  si elle est de classe  $C^\infty$ , inversible et si son inverse est de classe  $C^\infty$ . Une condition nécessaire et suffisante est que  $f$  soit injective et que  $Df(x)$  soit un isomorphisme  $\forall x \in U$ .)*

*Remarques.*

- A priori les dimensions des cartes n'ont pas été fixées. On pourrait donc avoir  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  et  $\psi(V) \subset \mathbb{R}^m$  avec  $m \neq n$ . Cependant, si  $U \cap V \neq \emptyset$ , le fait que  $\varphi \circ \psi^{-1}$  et  $\psi \circ \varphi^{-1}$  soient des difféomorphismes impose que les deux cartes soient de même dimension.

- *Signification en coordonnées.* Une carte  $(U, \varphi)$  donne un système local de coordonnées. Sur  $U \cap V$ , on a donc deux systèmes de coordonnées :  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  et  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ . Comme ce sont des homéomorphismes, l'application  $\varphi \circ \psi^{-1}$  est une bijection et son inverse est  $\psi \circ \varphi^{-1}$ . Ces deux applications s'écrivent

$$\begin{aligned}\varphi \circ \psi^{-1} : y = (y^1, \dots, y^n) &\mapsto (x^1 = f^1(y), \dots, x^n = f^n(y)), \\ \psi \circ \varphi^{-1} : x = (x^1, \dots, x^n) &\mapsto (y^1 = g^1(x), \dots, y^n = g^n(x)).\end{aligned}$$

La compatibilité signifie que les fonctions  $f^i$  et  $g^i$  sont de classe  $C^\infty$ .

**Définition.** Un *atlas de dimension  $n$*  de  $M$  est un ensemble  $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  de cartes de dimension  $n$  tel que :

- les ouverts  $U_\alpha$  recouvrent  $M$  ;
- toutes les cartes de  $A$  sont compatibles deux à deux.

Un atlas permet donc de définir des coordonnées locales partout sur  $M$ . On dit que deux atlas sont équivalents si leur union est encore un atlas, c'est-à-dire que  $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  et  $A' = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$  sont équivalents si toutes les cartes  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  et  $(V_\beta, \psi_\beta)$  sont compatibles deux à deux.

**Définition.** Une *structure différentiable de dimension  $n$*  sur  $M$  est une classe d'équivalence d'atlas de dimension  $n$  de  $M$ .

En pratique on définit une structure différentiable en donnant un atlas représentant la classe.

**Définition.** Une *variété différentiable* de dimension  $n$  est un espace topologique  $M$  séparé et à base dénombrable muni d'une structure différentiable de dimension  $n$ .

*Remarques.*

- Un même espace topologique peut être muni de plusieurs structures différentiables différentes. Par exemple, pour la topologie canonique, la sphère unité  $S^7$  de dimension 7 peut être munie de 28 structures différentiables différentes,  $S^8$  de 2,  $S^{31}$  de plus de 16 millions. En revanche  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^1$ ,  $S^2$ ,  $S^4$ ,  $S^5$  et  $S^6$  ont une unique structure différentiable. Pour  $S^3$ , le problème reste ouvert.
- On peut définir de même la  $C^k$ -compatibilité en demandant que  $\varphi \circ \psi^{-1}$  soit un difféomorphisme de classe  $C^k$ . On obtient alors des variétés différentiables de classe  $C^k$ .

### Commentaires sur les propriétés topologiques de $M$ .

**Espace séparé :** sur un espace non séparé il n'existe pas de métrique, puisque tout espace muni d'une distance est séparé.

De même un sous-espace compact n'est pas forcément fermé et l'image d'un compact par une application continue n'est pas toujours compact. C'est pour avoir ce type de propriété que l'on impose à une variété d'être un espace séparé. En revanche, tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé. Comme on s'intéressera généralement à des sous-ensemble d'un  $\mathbb{R}^N$  (pour sa topologie canonique), cette condition sera automatiquement satisfaite.

**Base dénombrable :** la classe d'équivalence d'un atlas  $A$  peut être représentée par son atlas maximal qui est l'ensemble de toutes les cartes compatibles avec celles de  $A$ . On veut que la topologie définie par les domaines de ces cartes ait une base dénombrable.

Cette hypothèse est importante pour éviter un certain nombre de pathologies des espaces topologiques : sans elle, il est par exemple possible de munir  $\mathbb{R}^n$  d'une topologie qui le rende homéomorphe à un  $\mathbb{R}^k$  muni de la topologie canonique, pour  $k < n$  quelconque. Elle n'est en revanche pas indispensable : définissons une *variété généralisée* de la même façon qu'une variété mais sans exiger que sa topologie soit à base dénombrable (beaucoup d'auteurs définissent ainsi les variétés) ; tous les résultats de ce polycopié sont valables pour les variétés généralisées (à l'exception notable du théorème 1.8 du plongement de Whitney).

Notons enfin qu'une variété généralisée connexe  $M$  est une variété (*i.e.* a une base dénombrable) si et seulement si elle est *métrisable*, c'est-à-dire si elle peut être équipée d'une distance telle que la topologie induite sur  $M$  par la distance coïncide avec la topologie originale de  $M$  (voir par exemple [5]). Nous utiliserons ce point dans la preuve du théorème de l'orbite au § 4.3).

### Exemples de variétés différentiables.

1.  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentiable de dimension  $n$  pour l'atlas à une seule carte  $(\mathbb{R}^n, \text{id})$ .
2. Tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  est une variété de même dimension : tout isomorphisme  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  définit un atlas  $(E, \varphi)$ . De même tout ouvert  $U \subset E$  de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant  $(U, \varphi)$ .
3. L'espace euclidien  $\mathbb{E}^n$  est une variété de dimension  $n$  : il est en bijection avec  $\mathbb{R}^n$  via le choix d'un système de coordonnées  $x$ . L'atlas à une carte  $(\mathbb{E}^n, x)$  y définit donc un structure différentiable.

Tous ces exemples sont triviaux puisqu'il s'agit d'espaces homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$ .

4. Le cercle  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ , muni de la topologie induite, est une variété de dimension 1 : cependant il n'est pas homéomorphe à  $\mathbb{R}$  (puisque  $S^1$  est compact). Une seule carte

ne sera donc pas suffisante pour créer un atlas. On définit deux cartes  $(U_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, \varphi_2)$  :

$$\begin{array}{ll} U_1 = S^1 \setminus \{(1, 0)\} & U_2 = S^1 \setminus \{(-1, 0)\} \\ \varphi_1 : U_1 \rightarrow ]0, 2\pi[ & \varphi_2 : U_2 \rightarrow ]-\pi, \pi[ \\ (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \theta & (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \theta \end{array}$$

Les domaines de ces cartes recouvrent clairement le cercle :  $U_1 \cup U_2 = S^1$ . De plus  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  est un difféomorphisme, ce qui montre que les deux cartes sont compatibles.

Ainsi  $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$  est un atlas et définit une structure différentiable sur  $S^1$ .

5. La sphère  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  est une variété de dimension 2 : on peut construire un atlas en utilisant la projection stéréographique .

Les points  $S$  et  $N$  désignant respectivement les pôles sud et nord, on considère les ouverts  $U_N = S^2 \setminus N$  et  $U_S = S^2 \setminus S$  et les applications

$$\begin{array}{ll} \varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2 & \varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p = (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) & (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right) \end{array}$$

*Exercice 1.1.* Montrer que les cartes  $(U_N, \varphi_N)$  et  $(U_S, \varphi_S)$  forment un atlas de  $S^2$ .

6. La sphère  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est une variété de dimension  $n$  : pour y définir une structure différentiable, on peut utiliser soit la projection stéréographique (2 cartes), soit les projections sur les hyperplans  $\{x_i = 0\}$  ( $2n + 2$  cartes).

**Opérations** Tout sous-ensemble ouvert  $\Omega$  d'une variété différentiable  $M$  est lui-même une variété différentiable. Sa structure différentiable est définie par la restriction à  $\Omega$  d'un atlas de  $M$ , c'est-à-dire par l'atlas  $A_\Omega = \{(U_\alpha \cap \Omega, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \Omega})\}$ , où  $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  est un atlas de  $M$ . On dit parfois que  $\Omega$  est une sous-variété ouverte de  $M$ .

*Exemple.* L'ensemble des matrices inversibles  $GL_n(\mathbb{R})$  est une variété en tant que sous-variété ouverte de  $M_n(\mathbb{R})$  (qui est un espace vectoriel donc une variété).

**Lemme 1.1.** Soient  $M$  et  $N$  des variétés différentiables respectivement de dimension  $n$  et  $k$  et d'atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  et  $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ .

Alors l'espace produit  $M \times N$  est une variété de dimension  $n + k$  dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme  $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ , où  $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{n+k}$ .

La preuve est laissée en exercice.

*Exemples.*



- Le tore  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  est une variété, de même que le tore plat de dimension  $n$ ,  $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ .  
Ce tore intervient en robotique en tant qu'espace des configurations d'un robot bras à  $n$  articulations planes.
- Le cylindre  $\mathbb{R} \times S^1$  et le cylindre de dimension  $n + 1$ ,  $\mathbb{R} \times S^n$  sont des variétés.
- L'espace des configurations d'une voiture  $\mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$  est une variété ( $\mathbb{R}^2$  paramètre la position planaire du centre de gravité de la voiture, un  $S^1$  paramètre la direction de la voiture dans le plan, et l'autre  $S^1$  l'angle des roues).

## 1.2 Applications différentiables

On connaît les notions de différentiabilité et de difféomorphismes pour les applications entre espaces vectoriels normés. On va définir ces notions pour les applications entre variétés. Le principe est toujours le même : on dira qu'une application entre variétés est différentiable (ou est un difféomorphisme) si, lue dans une carte, elle l'est. Formalisons cette définition.

Soient  $M$  et  $N$  des variétés différentiables de dimension  $n$  et  $k$  et  $F : M \rightarrow N$  une application. Si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  contenant  $p$  et  $(V, \psi)$  une carte de  $N$  contenant  $F(p)$ , avec  $F(U) \subset V$ , on dit que

$$F^{\varphi\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^k$$

est l'application  $F$  lue dans les cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$ . Dans le cas particulier où  $M$  ou  $N$  est égal à  $\mathbb{R}^n$ , l'application de carte correspondante est l'identité et on note

$$g^\varphi = g^{\varphi\text{id}} = g \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$$

si  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  et

$$h^\psi = h^{\text{id}\psi} = \psi \circ h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^k$$

si  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow N$ .

**Définition.** L'application  $F$  est *différentiable* (ou de classe  $C^\infty$ ) en  $p \in M$  si il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  contenant  $p$  et une carte  $(V, \psi)$  de  $N$  contenant  $F(p)$ , avec  $F(U) \subset V$ , telles que  $F^{\varphi\psi}$  est de classe  $C^\infty$ .

On dit que  $F$  est une *application différentiable* de  $M$  dans  $N$  si elle est différentiable en tout point  $p \in M$ .

Cette définition est correcte car la notion de différentiabilité ne dépend pas des cartes choisies dans les variétés. En effet, si on choisit deux systèmes de coordonnées locales différents  $\varphi_1, \varphi_2$  (resp.  $\psi_1, \psi_2$ ) sur  $M$  (resp.  $N$ ), on a

$$\psi_2 \circ F \circ \varphi_2^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ (\psi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1},$$

et les applications entre espaces vectoriels normés  $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$  et  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  sont de classe  $C^\infty$ .

Donnons quelques propriétés des applications différentiables.

- Toute application différentiable est continue.  
(Car sur tout ouvert de carte  $U$ , on a  $F|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ .)
- Soit  $\bigcup_{i \in I} U_i$  un recouvrement ouvert de  $M$ . Alors  $F$  est différentiable si et seulement si chaque restriction  $F|_{U_i}$ ,  $i \in I$ , l'est.
- La composition d'applications différentiables est différentiable.  
En effet, soient  $F : M \rightarrow M'$ ,  $G : M' \rightarrow M''$  et  $G \circ F : M \rightarrow M''$ . Alors, dans des cartes de  $M$ ,  $M'$  et  $M''$ ,

$$\varphi'' \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\varphi'' \circ G \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ F \circ \varphi^{-1}).$$

**Définition.** Une application  $F : M \rightarrow N$  est un *difféomorphisme de  $M$  sur  $N$*  si  $F$  est une bijection et si  $F$  et  $F^{-1}$  sont différentiables. On a alors nécessairement  $\dim M = \dim N$ .

Notons que  $(U, \varphi)$ , avec  $U$  ouvert de  $M$ , est une carte de la variété si et seulement si  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $U$  sur  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ .

### Rang d'une application.

*Rappel :* soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  une application dérivable en  $x \in \mathbb{R}^n$ . Le rang de  $f$  en  $x$  est défini comme le rang de l'application linéaire  $Df(x)$  (c'est-à-dire  $\dim \text{Im} Df(x)$  ou encore  $n - \dim \ker Df(x)$ ).

Soient  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable et  $p \in M$ .

**Proposition 1.2** (et définition). *Le rang de  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$  en  $\varphi(p)$  ne dépend pas des cartes  $(U, \varphi)$  de  $M$  et  $(V, \psi)$  de  $N$  telles que  $p \in U$  et  $F(p) \in V$ . Cette quantité est appelée le rang de  $F$  en  $p$  et est notée  $\text{rg}_p F$ .*

**Preuve.** Soient  $(U', \varphi')$  et  $(V', \psi')$  d'autres cartes. Sur l'intersection des domaines :

$$\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})$$

et donc

$$D(\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1})(x) = D(\psi' \circ \psi^{-1}) \circ D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(x).$$

Comme  $D(\psi' \circ \psi^{-1})$  et  $D(\varphi' \circ \varphi^{-1})$  sont des isomorphismes, on obtient

$$\text{rg} D(\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1})(\varphi'(p)) = \text{rg} D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

■

Lue en coordonnées locales, l'application  $F$  devient

$$F^{\varphi\psi}(x^1, \dots, x^n) = (F^1(x^1, \dots, x^n), \dots, F^k(x^1, \dots, x^n))$$

et le rang de  $F$  en  $p$  est celui de la matrice jacobienne

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^k}{\partial x^n} \end{array} \right) \Big|_{x(p)}$$

Le rang permet de caractériser les difféomorphismes.

**Lemme 1.3.** *Une application différentiable de  $M$  dans  $N$  est un difféomorphisme si et seulement si elle est bijective et de rang  $n = \dim M = \dim N$  en tout point de  $M$ .*

**Preuve.** La preuve est laissée en exercice (indication : appliquer le théorème d'inversion locale à  $F^{\varphi\psi}$ ). ■

Il y a d'autres classes importantes d'applications différentiables caractérisées par leur rang.

**Définition.** —  $F : M \rightarrow N$  est une *immersion* si  $F$  est différentiable et  $\text{rg} F = \dim M$  en tout point de  $M$  (autrement dit, en coordonnées locales  $DF^{\varphi\psi}(x)$  est injective pour tout  $x$ ). Dans ce cas, on a nécessairement  $\dim M \leq \dim N$ .  
—  $F : M \rightarrow N$  est une *submersion* si  $F$  est différentiable et  $\text{rg} F = \dim N$  en tout point de  $M$  (autrement dit, en coordonnées locales,  $DF^{\varphi\psi}(x)$  est surjective pour tout  $x$ ). On a alors  $\dim M \geq \dim N$ .

Une immersion n'est pas forcément injective.

*Exemple.*  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ , est une immersion mais n'est pas injective puisque  $F(t+k) = F(t)$  pour tout entier  $k$ .

De même pour  $F(t) = (2 \cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin(2t - \pi))$ .

Considérons maintenant une immersion injective  $\widetilde{F} : M \rightarrow N$ . C'est une bijection de  $M$  dans  $\widetilde{M} = \widetilde{F}(M)$ . Si on utilise  $\widetilde{F}$  pour munir  $\widetilde{M}$  d'une topologie et d'une structure différentiable,  $\widetilde{F}$  devient un difféomorphisme entre les variétés  $M$  et  $\widetilde{M}$ . Cependant la structure différentiable et la topologie sur  $\widetilde{M}$  ne dépendent que de  $M$  et de  $\widetilde{F}$ . Il n'y a donc aucune raison en général pour que  $\widetilde{M}$  soit un sous-espace de la variété  $N$  (pour la topologie induite).

*Exemple.* L'application  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(t) = (2 \cos(2 \cot t + \frac{\pi}{2}), \sin(4 \cot t + \pi))$  n'est pas un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans  $F(\mathbb{R})$  muni de la topologie induite de  $\mathbb{R}^2$ .

On introduit donc une nouvelle définition qui permet d'éviter ces problèmes.

**Définition.** On dit que  $F : M \rightarrow N$  est un *plongement* si  $F$  est une immersion injective et un homéomorphisme de  $M$  dans  $F(M)$  pour la topologie induite.

Remarquons qu'une immersion injective est déjà une bijection de  $M$  dans  $F(M)$  et est continue, car différentiable. Pour qu'elle soit de plus un homéomorphisme, il suffit donc que  $F^{-1}$  soit continue sur  $F(M)$ .

*Exemple.* Les applications  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$  ou  $G : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $G(t) = (\frac{1}{t} \cos 2\pi t, \frac{1}{t} \sin 2\pi t)$  sont des plongements.

### 1.3 Sous-variétés

Voyons maintenant comment obtenir simplement des variétés.

#### Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ .

**Définition.** Un sous-ensemble  $N \subset \mathbb{R}^n$  est une *sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k \leq n$*  si, pour tout point  $x$  de  $N$ , il existe un ouvert  $U_x \subset \mathbb{R}^n$  contenant  $x$  et un difféomorphisme  $\varphi : U_x \rightarrow \varphi(U_x) \subset \mathbb{R}^n$  tel que

$$\varphi(U_x \cap N) = \varphi(U_x) \cap \mathbb{R}^k.$$

Autrement dit, une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble que l'on peut localement redresser en un sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}^k$ .

Il est clair qu'une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  est une variété, les  $(U_x \cap N, \varphi|_{U_x \cap N})$  formant un atlas pour  $N$ . La structure différentiable et la topologie sont induites par celles de  $\mathbb{R}^n$ . Remarquons alors (le montrer) que l'inclusion de la variété  $N$  dans  $\mathbb{R}^n$  est un plongement (le terme *sous-variété plongée* est d'ailleurs souvent employé à la place de sous-variété).

De façon générale, l'image d'un plongement est une sous-variété.

**Lemme 1.4.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^k$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un plongement. Alors  $N = f(U)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ .

**Preuve.** Soient  $x_0 \in U$  et  $f(x_0) \in N = f(U)$ . Comme  $f$  est une immersion, sa différentielle  $Df(x_0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de rang  $k$ . Quitte à modifier l'ordre des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , on suppose que  $Df(x_0)$  s'écrit par blocs

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

où  $A \in M_k(\mathbb{R})$  est une matrice inversible (c'est-à-dire que les dérivées partielles de  $f$  par rapport aux  $k$  premières coordonnées sont linéairement indépendantes). On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, z) &\mapsto f(x) + (0, z) \end{aligned}$$

Cette application vérifie  $\varphi(x_0, 0) = f(x_0) = y_0$  et sa différentielle en  $(x_0, 0)$  est inversible puisqu'elle s'écrit

$$D\varphi(x_0, 0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

Il résulte alors du Théorème d'Inversion Locale qu'il existe un voisinage  $U_{(x_0,0)} \subset \mathbb{R}^n$  de  $(x_0, 0)$  et un voisinage  $V_{y_0} \subset \mathbb{R}^n$  de  $y_0$  tels que  $\varphi$  restreinte à  $U_{(x_0,0)}$  est un difféomorphisme sur  $V_{y_0}$ .

On voudrait alors que le difféomorphisme  $\varphi^{-1}$  permette de définir  $N$  comme une sous-variété. Il faut pour cela qu'il vérifie

$$\varphi^{-1}(V_{y_0} \cap N) = \varphi^{-1}(V_{y_0}) \cap \mathbb{R}^k = U_{(x_0,0)} \cap \mathbb{R}^k,$$

c'est-à-dire que  $V_{y_0} \cap f(U) = \varphi(U_{(x_0,0)} \cap \mathbb{R}^k)$ .

Or ces deux ensembles ont pour définition

$$\begin{aligned} V_{y_0} \cap f(U) &= \{y \in V_{y_0} \text{ t.q. } \exists x \in U, f(x) = y\}, \\ \varphi(U_{(x_0,0)} \cap \mathbb{R}^k) &= \{y \in V_{y_0} \text{ t.q. } \exists x \in U_{(x_0,0)} \cap U, f(x) = y\}. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant que  $f$  est un plongement :  $f$  est injective (pas de croisement) et  $f^{-1}$  est continue sur  $f(U)$ .

Il existe donc un voisinage  $V'_{y_0} \subset V_{y_0}$  de  $y_0$  tel que l'image de  $V'_{y_0} \cap f(U)$  par  $f^{-1}$  est contenue dans  $U_{(x_0,0)}$ . En considérant maintenant le difféomorphisme  $\varphi^{-1}$  restreint à  $V'_{y_0}$ , il vérifie

$$\varphi^{-1}(V'_{y_0} \cap f(U)) = \varphi^{-1}(V'_{y_0}) \cap \mathbb{R}^k,$$

ce qui montre que  $N = f(U)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ . ■

*Exercice 1.2.* Soit  $U = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \times ]0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}^2$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$f(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta).$$

Montrer que  $f(U)$  (la sphère  $S^2$  privée d'un demi-grand cercle) est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2.

Enfin la façon la plus pratique d'obtenir des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  est de considérer des pré-images de submersions.

**Lemme 1.5.** Soient  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  une application différentiable et  $y \in F(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ . Si  $F$  est une submersion sur  $N = F^{-1}(y)$ , alors  $N$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ .

**Preuve.** Soit  $x_0$  un point de  $N = F^{-1}(y)$ . Quitte à changer l'ordre des coordonnées dans  $\mathbb{R}^k$ , on peut supposer que la différentielle de  $F$  en  $x_0$  s'écrit par blocs

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$$

où  $A \in M_{n-k}(\mathbb{R})$  est une matrice inversible. Considérons alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (F(x) - y, x_{n-k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

La différentielle de  $\varphi$  en  $x_0$  s'écrit par blocs

$$D\varphi(x_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$$

et est donc inversible. Il résulte alors du Théorème d'Inversion Locale qu'il existe un voisinage  $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$  tel que l'application  $\varphi$  restreinte à  $U_{x_0}$  est un difféomorphisme. De plus

$$\begin{aligned} \varphi(U_{x_0} \cap N) &= \varphi(\{x \in U_{x_0} \text{ t.q. } F(x) = y\}) \\ &= \{(0, \dots, 0, x_{n-k+1}, \dots, x_n) \text{ t.q. } x \in U_{x_0}\} \\ &= \varphi(U_{x_0}) \cap \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

■

Ce lemme est très utilisé dans le cas suivant. Soient  $f^1(x), \dots, f^p(x)$  des fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  et  $S$  la "surface" définie par les zéros de ces fonctions :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } f^1(x) = \dots = f^p(x) = 0\}.$$

Si, pour tout point  $x$  de  $S$ , la jacobienne  $(\frac{\partial f^i}{\partial x^j})_{i,j}$  est de rang  $p$ , alors  $S$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - p$ .

*Exemples.*

- Soit  $f(x) = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . La sphère  $f^{-1}(r^2)$  de rayon  $r$  est une sous-variété de dimension  $n - 1$  car la différentielle de  $f$  ne s'y annule pas.
- Soit  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2}$ . La surface  $f^{-1}(1)$ , qui peut être soit un ellipsoïde soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, est une sous-variété de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$ .
- Soit  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Le cône de sommet origine,  $f^{-1}(0)$ , n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  car la différentielle de  $f$  à l'origine est nulle. En revanche le cône privé de l'origine est une sous-variété.

### Sous-variétés de variétés.

**Définition.** Une partie  $N$  d'une variété  $M$  de dimension  $n$  est une *sous-variété* de  $M$  de dimension  $k \leq n$  si, pour tout point  $q$  de  $N$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  contenant  $x$  telle que

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k.$$

La carte  $(U, \varphi)$  est dite adaptée à  $N$ . Elle vérifie

$$\varphi(U \cap N) = \{(x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U) \text{ t.q. } x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

Les deux résultats suivants se montrent presque de la même façon que les lemmes 1.5 et 1.4 (il faut en plus passer par des cartes des variétés  $M$  et  $N$ ).

**Lemme 1.6.** *Soient  $M, N$  des variétés de dimension  $n, k$  et  $F : N \rightarrow M$  un plongement. Alors  $W = F(N)$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $k$ .*

**Lemme 1.7.** *Soient  $M, N$  des variétés de dimension  $n, k$ ,  $F : M \rightarrow N$  une submersion et  $y \in F(M)$ . Alors  $W = F^{-1}(y)$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $n - k$ .*

*Exercice 1.3.* Montrer que le groupe spécial linéaire  $SL_n(\mathbb{R})$  (l'ensemble des matrices  $(n \times n)$  de déterminant égal à un) est une variété.

*Exercice 1.4.* Montrer que le groupe orthogonal

$$O(n) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } M^T M = I\}$$

est une variété. Quelle est sa dimension ?

On aura besoin ultérieurement (§ 4) d'une notion moins forte que celle de sous-variété pour caractériser les sous-ensembles d'une variété. On vient de voir dans le lemme 1.4 qu'une sous-variété peut être vue comme l'image d'un plongement. On introduit alors la définition suivante, suggérée dans la discussion page 7.

**Définition.** Un sous-ensemble  $W$  d'une variété  $M$  est une *sous-variété immergée* de  $M$  de dimension  $k \leq n$  si il existe une immersion injective  $f : N \rightarrow M$ , où  $N$  est une variété de dimension  $k$ , dont l'image  $f(N)$  est égale à  $W$ .

*Remarques.*

- Une sous-variété immergée peut aussi être définie comme une variété contenue dans  $M$  telle que l'inclusion  $i : W \rightarrow M$  est une immersion (alors que c'est un plongement pour les vraies sous-variétés).
- Des ouverts suffisamment petits de  $W$  sont des "vraies" sous-variétés de  $M$  (nous laissons la preuve de cette affirmation en exercice). En revanche  $W$  lui-même n'en est pas forcément une, sa topologie étant en général plus forte que celle induite par  $M$  (voir page 7).

**Des variétés aux sous-variétés.** Soit  $M$  une variété et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  un plongement. L'ensemble  $f(M)$  est alors une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ . Les variétés  $M$  et  $f(M)$  sont alors difféomorphes, c'est-à-dire indistinguables du point de vue de la géométrie différentielle.

Inversement, est-il possible de plonger toute variété dans un espace  $\mathbb{R}^N$ ? De façon équivalente, est-il possible de considérer n'importe quelle variété comme une sous-variété d'un  $\mathbb{R}^N$ ? La réponse est oui, et on peut de plus préciser  $N$ .

**Théorème 1.8** (Plongement de Whitney). *Toute variété de dimension  $n$  admet un plongement sur une sous-variété fermée de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .*

Admis.



# Chapitre 2

## Espaces tangent et cotangent

### 2.1 Vecteurs tangents

Le but de ce chapitre est de formaliser dans une variété la notion de direction de déplacement ou encore de mouvements possibles à partir d'un point donné.

**Dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{E}^n$**  Regardons d'abord comment cette notion apparaît dans un espace vectoriel,  $\mathbb{R}^n$  par exemple. Dans  $\mathbb{R}^n$ , les directions possibles à partir d'un point  $x$  sont tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble des déplacements est donc  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , l'ensemble des couples  $(x, v)$  formés d'un point de départ  $x$  et d'une direction  $v$ . Cette notation est cependant trompeuse : dans le produit  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , les deux  $\mathbb{R}^n$  jouent des rôles différents puisque l'un est un espace de points et l'autre un espace de directions. La distinction entre ces deux rôles est également mise en évidence dans l'expression de la différentielle d'une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  :

$$\begin{aligned} Df : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (x, v) &\mapsto Df(x)[v] \end{aligned}$$

Le cas de l'espace euclidien  $\mathbb{E}^n$  est plus intéressant. Un mouvement est considéré ici comme une courbe  $M(t)$  dans  $\mathbb{E}^n$ . La vitesse en  $M_0 = M(0)$  est un vecteur  $\dot{M}(0)$  : ce n'est donc pas un élément de  $\mathbb{E}^n$ , qui est un espace de points. En fait, si on regarde tous les mouvements possibles  $M(t)$  à partir de  $M_0$ , leurs tangentes  $\dot{M}(0)$  forment un espace vectoriel de dimension  $n$ . Il s'agit de l'ensemble des segments orientés  $\overrightarrow{M_0P}$ .

Notons  $T_{M_0}\mathbb{E}^n$  cet espace vectoriel et appelons-le l'espace tangent à  $\mathbb{E}^n$  en  $M_0$ . À chaque point de  $\mathbb{E}^n$  correspond un espace tangent différent, qui sont isomorphes deux à deux puisque de même dimension. De plus, et c'est propre à  $\mathbb{E}^n$  et aux espaces affines, il y a un isomorphisme naturel de  $T_M\mathbb{E}^n$  dans  $T_{M'}\mathbb{E}^n$  induit par la translation de  $M$  à  $M'$ . Cette propriété ne sera plus vraie pour les variétés.

**Dans une variété** Considérons maintenant une variété différentiable  $M$  et un point  $p$  de  $M$ . On s'intéresse aux courbes dans  $M$  qui sont différentiables et qui passent par  $p$

$$c : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M, \quad c(0) = p. \\ t \mapsto c(t)$$

**Définition.** Deux courbes  $c_1$  et  $c_2$  sont *tangentes au point  $p$*  si  $c_1(0) = c_2(0) = p$  et si il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  telle que  $p \in U$  et

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0).$$

La définition est indépendante de la carte choisie. En effet si  $(V, \psi)$  est une autre carte autour de  $p$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_1)](0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0) = \frac{d}{dt}(\psi \circ c_2)(0) \end{aligned}$$

On définit ainsi une relation d'équivalence (c'est-à-dire une relation qui est transitive, symétrique et réflexive) sur l'ensemble des courbes passant par  $p$  :  $c_1 \sim c_2$  si elles sont tangentes en  $p$ .

**Définition.** Un *vecteur tangent* à  $M$  en  $p$  est une classe d'équivalence de courbes tangentes en  $p$ .

L'espace tangent à  $M$  en  $p$ , noté  $T_p M$ , est l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  en  $p$ .

*Exemple.* Dans  $\mathbb{R}^n$ , il est clair que deux courbes  $c_1, c_2$  sont tangentes au point  $x$  dès que  $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$ . Il y a donc un isomorphisme canonique entre l'ensemble des classes de courbes tangentes  $T_x \mathbb{R}^n$  et l'ensemble des directions  $\dot{c}(0)$ . Ce qui est propre à  $\mathbb{R}^n$  c'est que cet isomorphisme ne dépend pas du point  $x$ .

On peut montrer que  $T_p M$  est un espace vectoriel en utilisant une carte. La structure vectorielle n'apparaît cependant pas clairement. De plus la définition de  $T_p M$  fait intervenir un espace très gros, l'ensemble des courbes passant par  $p$ , qui n'est pas aisé à manipuler. Nous allons voir maintenant qu'on peut donner une autre définition – équivalente – des vecteurs tangents qui résoudra ces difficultés.

## 2.2 Dérivations

Considérons l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, de classe  $C^\infty$ , définies sur un ouvert de  $M$  contenant un voisinage de  $p$ , dans lequel on identifie les fonctions qui sont

égales sur un voisinage de  $p$  (on obtient ainsi des *germes* de fonction). On note  $C^\infty(p)$  cet ensemble. Notons que c'est une algèbre, c'est-à-dire un espace vectoriel muni d'une opération interne (la multiplication).

Sur cet ensemble de fonctions on définit des opérateurs.

**Définition.** Une *dérivation en  $p$*  est une application linéaire  $D_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement dit,  $D_p$  est une dérivation si, pour tous réels  $\alpha, \beta$  et toutes fonctions  $f, g$  dans  $C^\infty(p)$ ,

- (i)  $D_p \cdot (\alpha f + \beta g) = \alpha D_p \cdot f + \beta D_p \cdot g$  (linéarité),
- (ii)  $D_p \cdot (fg) = g(p)D_p \cdot f + f(p)D_p \cdot g$  (Leibniz).

L'ensemble  $\mathcal{D}(p)$  des dérivations en  $p$  forme un espace vectoriel pour les opérations :

$$\begin{cases} (D_p + D'_p) \cdot f = D_p \cdot f + D'_p \cdot f \\ D_p \cdot (\alpha f) = \alpha D_p \cdot f \end{cases}$$

*Remarque.* Toute dérivation vérifie  $D_p \cdot \text{cte} = 0$  (car  $D_p \cdot 1 = D_p \cdot (1 \times 1) = 0$ ).

Nous allons montrer que l'espace vectoriel tangent  $T_p M$  s'identifie à  $\mathcal{D}(p)$ . La première étape est de déterminer la dimension de l'espace vectoriel  $\mathcal{D}(p)$ . Nous avons besoin pour cela du résultat suivant.

**Lemme 2.1** (Lemme d'Hadamard). *Soit  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ , une carte de  $M$  centrée en  $p$ . Pour toute fonction  $g \in C^\infty(p)$ , il existe  $\chi_1, \dots, \chi_n \in C^\infty(p)$  telles que*

$$g = g(p) + \sum_{i=1}^n x^i \chi_i$$

(autrement dit  $g(q) = g(p) + \sum_{i=1}^n x^i(q) \chi_i(q)$  pour tout  $q \in U$ ).

*Remarque.* Dire qu'une carte  $(U, \varphi)$  est centrée en  $p$  signifie simplement que  $\varphi(p) = 0$ .

**Preuve.** Quitte à réduire  $U$ , on suppose  $\varphi(U)$  convexe (par exemple une boule). On travaille sur la fonction  $g$  lue dans la carte  $\varphi$ , c'est-à-dire  $g^\varphi = g \circ \varphi^{-1}$ . C'est une fonction de classe  $C^\infty$  de  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

On peut calculer  $g^\varphi$  en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} g^\varphi(x^1, \dots, x^n) - g^\varphi(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [g^\varphi(tx^1, \dots, tx^n)] dt \\ &= \sum_{i=1}^n x^i \int_0^1 \frac{\partial g^\varphi}{\partial x^i}(tx) dt. \end{aligned}$$

Posons alors  $\chi_i^\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\partial g^\varphi}{\partial x^i}(tx) dt$ . On a obtenu

$$g^\varphi(x) = g^\varphi(0) + \sum_{i=1}^n x^i \chi_i^\varphi(x).$$

Comme  $g = g^\varphi \circ \varphi$  et  $\varphi(p) = 0$ , il suffit de composer la formule ci-dessus par  $\varphi$  pour achever la démonstration. ■

Utilisons ce lemme pour caractériser les éléments de  $\mathcal{D}(p)$ . Fixons une carte  $(U, \varphi)$  centrée en  $p$ . Une dérivation s'écrit alors

$$\begin{aligned} D_p \cdot g &= D_p \cdot (g(p)) + \sum_{i=1}^n (\chi_i(p) D_p \cdot x^i + x^i(p) D_p \cdot \chi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \chi_i(p) D_p \cdot x^i. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ainsi la donnée de  $D_p$  est équivalente à la donnée des réels  $D_p \cdot x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Lemme 2.2.**  $\dim \mathcal{D}(p) = n = \dim M$ .

*Remarque.* Ce lemme montre que, sur  $\mathbb{R}^n$ , toute dérivation est une dérivée directionnelle. En effet, à toute direction  $v \in \mathbb{R}^n$  est associée une dérivation en  $x$

$$g \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(x + tv) - g(x)), \quad (2.2)$$

qui est la dérivée directionnelle en  $x$  dans la direction  $v$ . L'ensemble des dérivées directionnelles en  $x$  est ainsi un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}(x)$  de dimension  $n$  et est donc égal à  $\mathcal{D}(x)$ .

Faisons maintenant le lien entre les dérivations et les vecteurs tangents.

**Proposition 2.3.** Soient  $g \in C^\infty(p)$  et  $X_p$  un vecteur tangent en  $p$ . Alors la dérivée  $\frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$  est la même pour toutes les courbes  $c(s)$  passant par  $p$  et appartenant à la classe d'équivalence  $X_p$ .

**Preuve.** Choisissons des coordonnées locales  $\varphi$  et écrivons  $g \circ c$  comme la composée de  $g^\varphi = g \circ \varphi^{-1}$  avec  $c^\varphi = \varphi \circ c$ . On obtient alors

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = D(g \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(0).$$

La proposition résulte alors du fait que  $\frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(0)$  ne dépend que de la classe d'équivalence  $X_p$ . ■

On note  $X_p \cdot g$  la valeur de cette dérivée.

**Proposition 2.4.** L'application  $g \mapsto X_p \cdot g$  est une dérivation.

**Preuve.** Il suffit de choisir des coordonnées locales  $\varphi$  et un représentant  $c(t)$  de la classe  $X_p$ . La linéarité et Leibniz se déduisent aisément de l'expression

$$X_p \cdot g = \frac{d}{dt}(g^\varphi \circ c^\varphi)(0).$$

■

Cette dérivation est en fait une généralisation des dérivées directionnelles. En effet on a vu que dans  $\mathbb{R}^n$  un vecteur tangent  $v_x$  est associé canoniquement à une direction  $v = \dot{c}(0)$ . La dérivation  $g \mapsto v_p \cdot g$  est alors clairement égale à la dérivée directionnelle (2.2). D'ailleurs on appellera parfois  $g \mapsto X_p \cdot g$  dérivée directionnelle de  $g$  dans la direction  $X_p$ .

**Théorème 2.5.** *L'ensemble des vecteurs tangents  $T_p M$  s'identifie à l'espace vectoriel  $\mathcal{D}(p)$  de dimension  $n$  des dérivations en  $p$ .*

Cette identification permet de définir une structure vectorielle sur l'espace tangent  $T_p M$  (appelé également, en conséquence, espace vectoriel tangent). Notons que cette structure vectorielle coïncide avec celle que l'on peut obtenir à partir de la lecture dans une carte.

**Preuve.** Soit  $\Psi : T_p M \rightarrow \mathcal{D}(p)$  qui à un vecteur tangent  $X_p$  fait correspondre la dérivation définie par  $X_p \cdot g$ . Ainsi, si  $c$  est un représentant de la classe d'équivalence  $X_p = [c]_p$ ,  $\Psi(X_p)$  est la dérivation  $X_p \cdot g = \frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$ .

Montrons d'abord que  $\Psi$  est injective. Soient  $X_p = [c]_p$  et  $X'_p = [c']_p$  des vecteurs de  $T_p M$  tels que  $\Psi(X_p) = \Psi(X'_p)$ , c'est-à-dire que, pour toute fonction  $g \in C^\infty$ , on a

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = \frac{d}{dt}(g \circ c')(0).$$

Fixons des coordonnées locales  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ . On a, pour chaque  $i$ ,

$$\frac{d}{dt}(x^i \circ c)(0) = \frac{d}{dt}(x^i \circ c')(0),$$

ce qui implique  $\dot{c}^\varphi(0) = \dot{c}'^\varphi(0)$  et donc  $X_p = X'_p$ . Ainsi l'application  $\Psi$  est injective.

Montrons qu'elle est aussi surjective. Soit  $D_p$  une dérivation. On a vu que, dans une carte  $\varphi$  donnée,  $D_p$  est déterminée par les réels  $d^i = D_p \cdot x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Considérons alors la courbe  $c(t) = \varphi^{-1} \circ (td^1, \dots, td^n)$  et notons  $X_p$  son vecteur tangent en  $p$ .

On a

$$X_p \cdot x^i = \frac{d}{dt}(x^i \circ c)(0) = d^i = D_p \cdot x^i,$$

ce qui montre que  $D_p = \Psi(X_p)$  et donc que  $\Psi$  est surjective. ■

Dans la suite nous identifierons systématiquement  $T_p M$  et  $\mathcal{D}(p)$ . Ainsi le terme vecteur tangent désignera indifféremment la classe d'équivalence de courbes tangentes ou la dérivation associée alors que l'espace tangent  $T_p M$  sera employé à la place de  $\mathcal{D}(p)$ .

## 2.3 Différentielle d'une application

Soient  $M$  et  $N$  des variétés différentiables de dimension  $n$  et  $k$  et  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable. Si  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction sur  $N$ ,  $F$  permet de lui faire correspondre une fonction sur  $M$ ,  $F^*g = g \circ F$ , appelée *image réciproque de  $g$  par  $F$* . On définit ainsi l'application :

$$\begin{aligned} F^* : C^\infty(F(p)) &\rightarrow C^\infty(p) \\ g &\mapsto F^*g = g \circ F \end{aligned}$$

Remarquons que le sens de  $F^*$  est l'inverse de celui de  $F$ .

**Proposition 2.6** (et définition). *L'application  $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$  définie par*

$$dF_p(X_p) \cdot g = X_p \cdot (F^*g), \quad \forall g \in C^\infty(F(p)),$$

*est linéaire.*

*On l'appelle la différentielle de  $F$  en  $p$  (ou encore application linéaire tangente à  $F$  en  $p$ ).*

*Remarque.* L'élément  $dF_p(X_p)$  de  $T_{F(p)}N$  est donc un vecteur tangent à  $N$ . On peut également le caractériser de la façon suivante : soit la courbe  $c(s) \subset M$  passant par  $p$  de vecteur tangent  $X_p$  en  $p$ . Alors  $dF_p(X_p)$  est le vecteur tangent en  $F(p)$  de la courbe  $F \circ c$  incluse dans  $N$ .

**Preuve.** La linéarité de  $dF_p$  découle immédiatement de celle de  $X_p$ . En effet

$$\begin{aligned} dF_p(\lambda X_p + \mu Y_p) \cdot g &= (\lambda X_p + \mu Y_p) \cdot (F^*g) \\ &= \lambda X_p \cdot (F^*g) + \mu Y_p \cdot (F^*g) \\ &= \lambda dF_p(X_p) \cdot g + \mu dF_p(Y_p) \cdot g. \end{aligned}$$

■

La définition de la différentielle ne fait appel qu'à des propriétés locales de la variété et de l'application. Comme localement une variété est difféomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , toutes les propriétés des applications différentiables dans les espaces vectoriels normés sont vraies localement pour les applications différentiables sur les variétés (c'est le principe de base pour obtenir des résultats locaux dans les variétés). Citons les plus importantes de ces propriétés.

**Théorème 2.7** (Théorème de composition). *Soient  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable en  $p \in M$  et  $G : N \rightarrow W$  une application différentiable en  $F(p) \in N$ . Alors  $G \circ F$  est différentiable en  $p$  et*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$$

**Corollaire 2.8.** *Si  $F : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme, alors, pour tout  $p \in M$ ,  $dF_p$  est un isomorphisme.*

La réciproque à ce corollaire n'est vraie que localement. Elle nécessite d'introduire la notion de difféomorphisme local.

**Définition.** Une application  $F : M \rightarrow N$  est un *difféomorphisme local en  $p$*  s'il existe un voisinage  $U \subset M$  de  $p$  et un voisinage  $V \subset N$  de  $F(p)$  tels que l'application  $F|_U : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme.

**Théorème 2.9** (Théorème d'inversion locale). *Soit  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable en  $p \in M$  telle que  $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  est un isomorphisme.*

*Alors  $F$  est un difféomorphisme local en  $p$ . De plus la réciproque du difféomorphisme  $F|_U$  a pour différentielle*

$$d(F|_U^{-1})_{F(p)} = (dF_p)^{-1}.$$

Ce théorème a une conséquence importante pour la détermination de coordonnées locales. En effet, un système de coordonnées locales n'est rien d'autre qu'un difféomorphisme local de  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi une application différentiable  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  définit des coordonnées locales en  $p$  si et seulement si  $d\varphi_p$  est un isomorphisme.

Notons enfin que l'on pourrait également énoncer le théorème des fonctions implicites (mais nous n'en avons pas besoin dans ce cours).

## 2.4 Coordonnées sur l'espace tangent

En utilisant les différentielles des cartes, nous allons étendre le calcul en coordonnées locales à l'espace tangent. On commence par traiter le cas de  $\mathbb{R}^n$ .

**Description de  $T_x \mathbb{R}^n$**  On a vu plusieurs propriétés de  $T_x \mathbb{R}^n$  : il est canoniquement isomorphe à  $\mathbb{R}^n$  et il peut être identifié à l'ensemble des dérivées partielles en  $x$ . Il est temps maintenant d'en donner une description facile à utiliser.

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Considérons les dérivées partielles en  $x$ , c'est-à-dire les dérivations sur  $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x : g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x^i}(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ces dérivées partielles forment une base de l'ensemble des dérivées directionnelles en  $x$  et donc une base de  $T_x \mathbb{R}^n$  dite base naturelle. Ainsi tout vecteur tangent  $v_x \in T_x \mathbb{R}^n$  s'écrit

$$v_x = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_x.$$

Ce vecteur est aussi la classe d'équivalence des courbes  $c(t)$  passant par  $x$  telles que  $\dot{c}(0) = (v^1, \dots, v^n)$ .

L'identification canonique  $T_x \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$  est définie alors comme l'isomorphisme  $v_x \mapsto (v^1, \dots, v^n)$ .

**Coordonnées sur  $T_pM$**  Soient  $p \in M$  et  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ , une carte de  $M$  dont le domaine contient  $p$ . Comme  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $U$  sur  $\varphi(U)$ , sa différentielle  $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$  est inversible (corollaire 2.8) et  $(d\varphi_p)^{-1} = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}$  est un isomorphisme de  $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$  sur  $T_pM$ .

Nous allons nous servir de cet isomorphisme pour définir des coordonnées sur  $T_pM$ . Soient  $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$  et  $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_x)$  la base canonique de  $T_x\mathbb{R}^n$ . L'image de cette base définit des vecteurs tangents à  $M$  en  $p$ , que l'on note

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\right).$$

Ces tangents  $(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p)$  forment une base de  $T_pM$ , appelée *base naturelle* associée aux coordonnées locales  $\varphi$ .

Remarquons que, si  $g \in C^\infty(p)$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \cdot g = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\right) \cdot g = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \cdot (g \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial g^\varphi}{\partial x^i}(\varphi(p)),$$

où  $g^\varphi = g \circ \varphi^{-1}$  est la fonction  $g$  lue dans les coordonnées  $x^i$ .

**Lemme 2.10.** *Dans la base naturelle associée aux coordonnées locales  $\varphi$ , un vecteur tangent  $X_p \in T_pM$  s'écrit*

$$X_p = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + \dots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p, \quad \text{avec } X^i = X_p \cdot x^i.$$

*Remarque.* Comparer avec la formule 2.1, page 16.

**Preuve.** Il suffit de remarquer que  $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}$  et que  $X_p \cdot x^i = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}$ . ■

*Exercice 2.1.* Considérons dans  $\mathbb{R}^2$  la courbe  $c(t) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t)$ . Calculer son vecteur tangent. L'écrire également en coordonnées polaires.

**Changement de coordonnées.** Le lemme ci-dessus permet de trouver assez simplement les formules de changement de coordonnées dans l'espace tangent. Soient  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  et  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$  des coordonnées locales autour de  $p$  et  $X_p$  un vecteur tangent en  $p$  de coordonnées  $X^1, \dots, X^n$  dans la base naturelle associée à  $\varphi$  :  $X_p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ . On note

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (y^1(x), \dots, y^n(x))$$

l'application  $\psi$  lue dans la carte  $\varphi$ .



Dans la base naturelle associée à  $\psi$ ,  $X_p$  a pour coordonnées  $Y^j = X_p \cdot y^j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . En écrivant tout dans les coordonnées  $\varphi$ , on obtient

$$Y^j = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial((y^j)^\varphi)}{\partial x^i}(\varphi(p)) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial y^j(x)}{\partial x^i} \Big|_{x=\varphi(p)}$$

ou encore, en écriture matricielle,

$$\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial y^j(x)}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

On peut enfin calculer la différentielle d'une application  $F$  en coordonnées locales.

Soit  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable en  $p \in M$ . Choisissons  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  des coordonnées locales sur  $M$  centrées en  $p$  et  $\psi = (y^1, \dots, y^k)$  des coordonnées locales sur  $N$  centrées en  $F(p)$ . Enfin soit  $X_p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  un élément de  $T_p M$ .

Pour tout  $g \in C^\infty(F(p))$ , on écrit

$$dF_p(X_p) \cdot g = X_p \cdot (g \circ F) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial((g \circ F)^\varphi)}{\partial x^i}(0). \quad (2.4)$$

Écrivons  $(g \circ F)^\varphi = g^\psi \circ F^{\varphi\psi}$ , où  $F^{\varphi\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$  et  $g^\psi = g \circ \psi^{-1}$  sont les applications  $F$  et  $g$  lues dans les cartes. Notons  $F^{\varphi\psi}(x) = (F^1(x), \dots, F^k(x))$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , on a

$$\frac{\partial((g \circ F)^\varphi)}{\partial x^i}(0) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g^\psi}{\partial y^j}(0) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} \cdot g.$$

En insérant cette valeur dans (2.4), qui est valable pour tout  $g \in C^\infty(F(p))$ , on obtient l'expression suivante pour la différentielle de  $F$  en  $p$  :

$$dF_p(X_p) = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) X^i \right) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}.$$

On peut réécrire cette expression de façon matricielle en faisant intervenir la matrice jacobienne de  $F^{\varphi\psi}$ .

**Lemme 2.11.** Si  $X_p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  dans la base naturelle de  $T_p M$  associée aux coordonnées locales  $\varphi$ , alors  $dF_p(X_p) = \sum_{j=1}^k Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$  dans la base naturelle de  $T_{F(p)} N$  associée à  $\psi$ , avec

$$\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^k \end{pmatrix} = JF^{\varphi\psi}(0) \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}.$$

Cette formulation en coordonnées permet de calculer le rang de  $F$  (tel que défini par la proposition 1.2).

**Corollaire 2.12.** *Le rang de  $F$  en  $p$  est égal à la dimension de  $dF_p(T_pM)$ .*

Ceci nous donne d'ailleurs une définition intrinsèque du rang d'une application.

## 2.5 Cas des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

L'espace tangent à une sous-variété est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à la variété ambiante : si  $N$  est une sous-variété de  $M$  et  $p \in N$ , alors  $T_pN \subset T_pM$ . L'espace tangent à une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  est donc un sous-espace vectoriel de  $T_x\mathbb{R}^n$ . Il sera en fait plus pratique de le voir comme un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  en utilisant l'identification canonique  $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ . Sa caractérisation dépend de la façon dont a été définie la sous-variété.

**Cas général.** Une sous-variété  $N$  de  $\mathbb{R}^n$  est définie au voisinage de chacun de ses points  $x$  par un difféomorphisme  $\varphi : U_x \rightarrow \varphi(U_x) \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi(U_x \cap N) = \varphi(U_x) \cap \mathbb{R}^k$ .

En tant que sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace tangent à  $N$  est alors

$$T_xN = D\varphi^{-1}(\varphi(x))[\mathbb{R}^k \times \{0\}_{\mathbb{R}^{n-k}}].$$

**Plongement.** Soit  $N$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  définie comme  $N = F(U)$ , où  $F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un plongement. Alors, en tant que sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , son espace tangent est

$$T_xN = DF(F^{-1}(x))[\mathbb{R}^k].$$

*Exemple.* Considérons une courbe  $c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  dans  $\mathbb{R}^n$ , de classe  $C^\infty$ , qui est un plongement sur un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$ . L'ensemble de la courbe  $\mathcal{C} = c(I)$  est alors une sous-variété. En  $t_0 \in I$ , la différentielle  $Dc(t_0)$  a pour matrice

$$\dot{c}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}^1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{x}^n(t_0) \end{pmatrix}$$

et l'espace tangent à  $\mathcal{C}$  est  $T_{c(t_0)}\mathcal{C} = \mathbb{R}\dot{c}(t_0)$ .

Ainsi l'espace tangent correspond à l'espace vectoriel engendré par la tangente à la courbe, comme on s'y attendait.

On peut également retrouver ce résultat en construisant une base de  $T_{c(t_0)}\mathcal{C}$ . Soit  $\frac{d}{dt}|_{t_0}$  la base de  $T_{t_0}\mathbb{R}$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , on a

$$Dc(t_0)\left[\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right] \cdot x^i = \frac{d}{dt}(x^i(t))\Big|_{t_0} = \dot{x}^i(t_0),$$

et l'image de la base de  $T_{t_0}\mathbb{R}$  est

$$Dc(t_0)\left[\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right] = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

C'est bien le vecteur vitesse (ou vecteur tangent) de la courbe.

**Submersions** Soit  $N \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété définie comme  $N = F^{-1}(y)$ , où  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  est une submersion.

**Proposition 2.13.** *En tant que sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace tangent à la sous-variété  $N$  est  $T_x N = \ker DF(x)$ .*

**Preuve.** Par définition,  $T_x N$  est l'ensemble des vecteurs tangents  $\dot{c}(0)$  pour toutes les courbes différentiables  $c(t)$  tracées sur  $N$  passant par  $x$ . Une telle courbe vérifie en particulier  $F \circ c(t) = y = \text{cte}$ , c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}(F \circ c)(0) = DF(x)[\dot{c}(0)] = 0.$$

Ainsi  $T_x N$  est inclus dans  $\ker DF(x)$ . Comme ces espaces vectoriels ont même dimension, ils sont égaux. ■

C'est la façon la plus pratique de déterminer les espaces tangents.

*Exemple.* La sphère de dimension  $n$  :  $S^n = F^{-1}(1)$ , où  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  est la forme quadratique  $F(x) = \langle x, x \rangle = (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2$ , qui est une submersion. Comme  $DF(x)[h] = 2\langle x, h \rangle$ , l'espace tangent à la sphère est

$$T_x S^n = \ker DF(x) = (\mathbb{R}x)^\perp,$$

c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à  $x$ .

*Exercice 2.2.* Déterminer les espaces tangents à  $O(n)$  et  $SO(n)$ .

*Exercice 2.3.* Déterminer l'espace tangent à  $SL_n(\mathbb{R})$ .

## 2.6 Espace cotangent\*

On définit maintenant le dual de l'espace tangent à une variété  $M$ .

**Définition.** — Une *1-forme* (ou covecteur) en  $p \in M$  est une forme linéaire sur  $T_pM$ , c'est-à-dire une application linéaire

$$\begin{aligned} \omega_p : T_pM &\rightarrow \mathbb{R} \\ X_p &\mapsto \omega_p(X_p) \end{aligned}$$

On note  $\omega_p(X_p) = \langle \omega_p, X_p \rangle$ , le crochet étant ici le crochet de dualité.

— L'espace cotangent à  $M$  en  $p$ , noté  $T_p^*M$ , est l'espace vectoriel des 1-formes en  $p$ . C'est l'espace vectoriel dual de  $T_pM$  (c'est-à-dire  $T_p^*M = (T_pM)^*$ ).

*Exemple.* Soit  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur  $M$ . Alors, en identifiant  $T_t\mathbb{R}$  avec  $\mathbb{R}$ , la différentielle de  $g$  en  $p$ ,  $dg_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ , peut être vue comme une 1-forme. Cet exemple justifie les notations ci-dessous en coordonnées.

Rappelons d'abord que, si  $e_1, \dots, e_n$  est la base d'un espace vectoriel  $V$ , il existe une unique base duale  $e^1, \dots, e^n$  du dual  $V^*$  telle que  $e^i(e_j) = \delta_{ij}$ .

Considérons maintenant des coordonnées locales  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  en  $p$  et  $dx_p^i : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  la différentielle de la  $i$ -ème coordonnée (on identifie de nouveau  $T_t\mathbb{R}$  avec  $\mathbb{R}$ ). Par définition,  $dx_p^i(X_p) = X_p \cdot x^i$ . En particulier, pour tout couple  $i, j$ ,

$$\left\langle dx_p^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle = dx_p^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \Big|_p = \delta_{ij}.$$

Ainsi  $dx_p^1, \dots, dx_p^n$  est une base de  $T_p^*M$ , duale de la base  $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$  de  $T_pM$ .

Dans cette base, toute 1-forme de  $T_p^*M$  s'écrit

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_p^i, \quad \text{où } \omega_i = \omega_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right),$$

puisque  $\omega_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \omega_j \langle dx_p^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \rangle$ . De même, tout vecteur de  $T_pM$  s'écrit

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad \text{où } X^i = dx_p^i(X_p).$$

Les formules de changement de coordonnées pour les 1-formes s'obtiennent comme les formules (2.3) pour les vecteurs tangents : on choisit des coordonnées locales  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  et  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$  et on note  $\varphi \circ \psi^{-1} = (x^1(y), \dots, x^n(y))$  l'application  $\varphi$  lue dans la carte  $\psi$ . Soit  $\omega_p$  une 1-forme,  $\omega_1, \dots, \omega_n$  ses coordonnées dans la base de  $T_p^*M$  associée à  $\varphi$  et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  ses coordonnées dans la base associée à  $\psi$ . En écrivant que  $\mu_j = \omega_p \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \right)$ , on obtient, en écriture matricielle,

$$(\mu_1 \cdots \mu_n) = (\omega_1 \cdots \omega_n) \left( \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^j} \Big|_{\psi(p)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

*Remarque.* Cette formule est l'inverse de celle pour les vecteurs tangents. En effet, en notant  $A$  la matrice des dérivées partielles des  $y^i$  par rapport à  $x$  (c'est-à-dire la matrice qui intervient dans (2.3)), on obtient

$$Y = AX \quad \text{et} \quad \mu = \omega A^{-1},$$

$X, Y$  étant des vecteurs colonnes et  $\mu, \omega$  des vecteurs lignes.

On a vu dans la section 2.3 qu'à une application différentiable correspond une application linéaire entre espaces tangents, la différentielle. De la même façon, il lui correspond également une application linéaire entre espaces cotangents. Soit  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable et  $p \in M$ .

**Définition.** L'application réciproque de  $F$  en  $p$  est l'application linéaire  $F^* : T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$  telle que

$$F^*\omega_{F(p)}(X_p) = \omega_{F(p)}(dF_p(X_p)).$$

C'est l'application duale de  $dF_p$  :

$$\langle (F^*\omega)_p, X_p \rangle = \langle \omega_{F(p)}, dF_p(X_p) \rangle,$$

le membre de droite utilisant le crochet de dualité dans  $T_pM$  alors que celui de gauche utilise celui dans  $T_{F(p)}M$ .



# Chapitre 3

## Champs de vecteurs

Jusqu'à maintenant nous avons vu les notions d'espace et de vecteur tangents en un point, qui correspondent aux mouvements infinitésimaux à partir d'une configuration donnée. En considérant toutes les configurations possibles, nous sommes maintenant en mesure de définir des mouvements sur toute la variété : ces mouvements vont être introduits comme des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des équations différentielles. Du point de vue des espaces de configurations, cela signifie que l'on caractérise les mouvements par la donnée en tout point de la vitesse.

L'outil principal sera ainsi la notion de champ de vitesse, ou plutôt de champ de vecteurs : il s'agit d'une application assignant à chaque point  $p$  de la variété un vecteur  $X_p$  de l'espace tangent. Avant d'aller plus loin dans la définition, il faut préciser l'espace auquel appartient l'image de cette application.

### 3.1 Fibrés tangent et cotangent

On s'intéresse à l'ensemble de tous les vecteurs tangents en tous les points de la variété.

**Définition.** L'ensemble  $TM = \{(p, X_p), p \in M, X_p \in T_p M\}$  est appelé le *fibré tangent* de la variété  $M$ .

De même, l'ensemble  $T^*M = \{(p, \omega_p), p \in M, \omega_p \in T_p^* M\}$  est appelé le *fibré cotangent* de  $M$ .

Le fibré tangent est l'union des espaces tangents

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \quad \text{ou simplement} \quad \bigcup_{p \in M} T_p M,$$

mais il faut bien préciser que cette union est disjointe : on ne peut pas additionner des éléments  $X_p$  et  $X_{p'}$  appartenant à des espaces tangents différents.

On appelle *projection canonique* sur  $TM$  la projection

$$\begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M \\ (p, X_p) &\mapsto p \end{aligned}$$

et la fibre au-dessus de  $p$  la pré-image  $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_p M$  d'un point  $p$ .

**Théorème 3.1.** *Le fibré tangent (resp. cotangent) a une structure naturelle de variété différentiable de dimension  $2n$ .*

**Preuve.** Soit  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$  et  $\pi^{-1}(U)$  l'ensemble des fibres au-dessus d'un point de  $U$ , i.e.  $\pi^{-1}(U) = \{\{p\} \times T_p M, p \in U\}$ . L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \pi^{-1}(U) \subset TM &\rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ (p, X_p) &\mapsto (\varphi(p), d\varphi_p(X_p)) \end{aligned}$$

est une bijection d'après le corollaire 2.8 (notons que l'on a utilisé ici l'identification  $T_x \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$  puisque  $d\varphi_p(X_p) \in T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$  est identifié à ses coordonnées dans la base naturelle).

Nous allons montrer que les couples  $(\pi^{-1}(U), \Phi)$  forment un atlas de  $TM$  et définissent donc une structure différentiable. La preuve se fait en deux étapes.

- (i) Il faut d'abord munir  $TM$  d'une topologie : on la définit en posant que les applications  $\Phi$  (pour toutes les cartes de  $M$ ) sont des homéomorphismes (c'est-à-dire que les ouverts de  $TM$  sont les parties  $W \subset TM$  telles que  $\Phi(W \cap \pi^{-1}(U))$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^{2n}$ ). Pour que cela soit possible, il suffit de montrer que, si  $\Phi$  et  $\Psi$  sont les applications correspondant à des cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$ , alors

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

est un homéomorphisme. Or, sur son ensemble de définition,

$$\Psi \circ \Phi^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}, D(\psi \circ \varphi^{-1})),$$

et est donc un difféomorphisme (pour la structure différentiable de  $\mathbb{R}^{2n}$ ). C'est donc a fortiori un homéomorphisme.

- (ii) L'expression ci-dessus montre de plus que les couples  $(\pi^{-1}(U), \Phi)$  sont des cartes compatibles entre elles. Comme elles recouvrent  $TM$  elles forment donc un atlas et définissent une structure différentiable.

On montre de même que  $T^*M$  est une variété en utilisant les applications

$$\Phi' : (p, \omega_p) \mapsto (\varphi(p), (\varphi^{-1})^* \omega_p).$$

■

La projection canonique  $\pi : TM \rightarrow M$  apparaît maintenant comme une application différentiable. C'est de plus une submersion surjective.

Remarquons également que l'on peut définir un difféomorphisme  $h : \pi^{-1}(U) \subset TM \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  en posant  $h(p, X_p) = (p, d\varphi_p(X_p))$ , qui est de plus linéaire sur les fibres. Ainsi le fibré tangent est difféomorphe localement à un produit :  $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^n$  ( $h$  est ce qu'on appelle une *trivialisat*ion locale).

En revanche, en général  $TM$  n'est pas globalement trivial, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de difféomorphisme de  $TM$  dans  $M \times \mathbb{R}^n$  linéaire le long des fibres.



*Exemples.*

- Le fibré tangent à  $\mathbb{R}^n$  admet une trivialisat on globale  $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  via l'identification canonique  $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ .
- Le fibré tangent au cercle  $S^1$  admet une trivialisat on globale car il est difféomorphe au cylindre :  $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ . En revanche le fibré tangent  $TS^2$  n'admet pas de trivialisat on globale.
- Est-ce que  $O(n)$  (ou  $SO(n)$ ) admet une trivialisat on globale ?

Remarquons que l'application  $\Phi$  permet de définir des coordonnées locales sur  $TM$  en utilisant les coordonnées de l'espace tangent construites dans la section 2.4. En effet, si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$ , avec  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ , le difféomorphisme  $\Phi$  sur  $\pi^{-1}(U)$  s'écrit

$$\Phi(p, X_p) = (x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^{2n},$$

avec  $(x^1, \dots, x^n) = \varphi(p)$  et  $X^i = X_p \cdot x^i$ . Ce sont bien des coordonnées locales sur  $TM$ .

En s'appuyant sur la construction de  $\Phi$ , on peut prolonger une application entre deux vari t es en un application entre leurs fibrés tangents.

**Définition.** Soit  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable. On définit le *prolongement* (ou *différentielle*) de  $F$  comme l'application différentiable :

$$\begin{aligned} dF : TM &\rightarrow TN \\ (p, X_p) &\mapsto (F(p), dF_p(X_p)) \end{aligned}$$

Il est clair que  $\Phi$  est le prolongement de l'application de carte  $\varphi : \Phi = d\varphi$ . Le prolongement vérifie de plus les propriétés suivantes

- Le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

c'est-à-dire  $F \circ \pi = \pi \circ dF$ .

- La restriction de  $dF$  aux fibres est linéaire car  $dF|_{T_pM} = dF_p$ .
- Si  $F : M \rightarrow W$  et  $G : W \rightarrow N$  sont des applications différentiables, alors  $d(G \circ F) = dG \circ dF$ .
- Si  $F : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme, alors le prolongement  $dF : TM \rightarrow TN$  est un difféomorphisme également et  $(dF)^{-1} = d(F^{-1})$ .

La preuve des deux dernières propriétés est laissée en exercice : il s'agit essentiellement de passer dans des cartes et d'utiliser la preuve du théorème 3.1.

## 3.2 Champs de vecteurs

Considérons une variété  $M$  de dimension  $n$ .

**Définition.** Un *champ de vecteurs différentiable* (ou champ de vecteurs) sur  $M$  est une application différentiable  $X : M \rightarrow TM$  qui, à un point  $p \in M$ , associe un couple formé de  $p$  et d'un vecteur tangent à  $M$  en  $p$  :  $X(p) = (p, X_p)$ . Autrement dit,  $\pi \circ X = \text{id}_M$ .

On notera  $\mathcal{X}(M)$  l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur  $M$ .

De même qu'un vecteur tangent en  $p$  définit une dérivation sur l'ensemble des germes  $C^\infty(p)$ , un champ de vecteur définit une dérivation sur l'ensemble  $C^\infty(M)$  des fonctions de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ . En effet l'application

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ g &\mapsto X \cdot g, \text{ t.q. } X \cdot g(p) = X_p \cdot g \end{aligned}$$

définie par un champ de vecteurs  $X$  est linéaire et vérifie la règle de Leibniz. L'ensemble  $\mathcal{X}(M)$  s'identifiera donc avec l'espace vectoriel de dimension infinie des dérivations sur  $C^\infty(M)$ .

*Exemple* (Champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$ ). En utilisant la base naturelle de  $T_x\mathbb{R}^n$ , tout champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$  s'écrit comme

$$X(x) = \left( x, \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right), \quad (3.1)$$

où  $X^i$  est une fonction différentiable de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . En particulier, pour  $i = 1, \dots, n$ , l'application

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : x \mapsto \left( x, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right)$$

est un champ de vecteur sur  $\mathbb{R}^n$ . Bien entendu, en tant que dérivation, ce champ est tout simplement la dérivée partielle par rapport à  $x^i$ , c'est-à-dire l'application  $g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x^i}$ . On pourra donc réécrire le champ de vecteur  $X$  donné en (3.1) comme la dérivation

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} : g \mapsto \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

Enfin un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$  peut aussi être considéré comme une application de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en l'identifiant à  $x \mapsto (X^1(x), \dots, X^n(x))$ .

Considérons maintenant une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$ , avec  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ . Sur le domaine  $U$  de la carte, tout champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  s'écrit

$$X : p \in U \mapsto \left( p, \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right), \quad (3.2)$$

où  $X^i = X \cdot x^i \in C^\infty(M)$ .

En particulier, comme  $U$  est lui-même une variété, l'application de  $U$  sur  $\pi^{-1}(U)$  :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \stackrel{M}{=} d\varphi^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \varphi : p \mapsto \left( p, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \in T_p M = T_p U$$

définit un champ de vecteurs sur  $U$ . On l'appelle *champ de coordonnées*.

En utilisant les champs de coordonnées, le champ  $X$  donné par (3.2) s'écrit également, en tant que dérivation sur  $C^\infty(M)$ ,

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \stackrel{M}{=} + \cdots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} \stackrel{M}{=} : g \mapsto \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \stackrel{M}{=} \cdot g.$$

Définissons le champ  $X$  lu dans la carte  $\varphi$  comme le champ de vecteur sur  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$

$$X^\varphi(x) = d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}(x) = X^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X^n(x) \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Considérons alors d'autres coordonnées locales  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ , dans lesquelles le champ  $X$  se lit

$$X^\psi(y) = Y^1(y) \frac{\partial}{\partial y^1} + \cdots + Y^n(y) \frac{\partial}{\partial y^n}.$$

Alors, en notant  $y(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$ , on obtient la formule suivante pour le changement de coordonnées :

$$Y^j(y) = X^\varphi \cdot y_j(\varphi \circ \psi^{-1})(y).$$

*Exemple.* Champ de gravité d'un objet de masse  $m$  : la variété est ici  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  et le champ de vecteurs est

$$X(x) = \frac{m}{r^3} \left( x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

où  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ .

Comment trouver d'autres champs de vecteurs ? Une première possibilité est de restreindre les champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$  aux sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . Le résultat suivant indique sous quelle condition une telle restriction est possible.

**Lemme 3.2.** Soient  $N$  une sous-variété de  $M$  et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$  tel que,

$$\forall p \in N, X(p) \in T_p N.$$

Alors la restriction  $X|_N$  de  $X$  à  $N$  est un champ de vecteurs sur  $N$ .

**Preuve.** La restriction  $X|_N : p \in N \mapsto X(p) \in T_p N$  est une application de  $N$  dans  $TN$ . Il suffit donc de montrer qu'elle est différentiable.

Comme  $N$  est une sous-variété de  $M$ , on peut choisir des cartes  $(U, \varphi)$  sur  $M$  ( $\dim M = n$ ) et  $(V, \psi)$  sur  $N$  ( $\dim N = k$ ) telles que  $V = U \cap N$ ,  $\psi(V) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k$  et  $\psi = \varpi \circ \varphi|_V$ , où  $\varpi$  est la projection canonique de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^k$ .

On obtient alors une carte  $(\pi^{-1}(U), d\varphi)$  sur  $TM$  et une carte  $(\pi^{-1}(V), d\psi)$  sur  $TN$ , telles que  $\pi^{-1}(V) \subset \pi^{-1}(U)$  et  $d\psi = d\varpi \circ d\varphi|_{\pi^{-1}(V)}$ . Notons  $d\varphi = (x^1, \dots, x^n, \alpha^1, \dots, \alpha^n)$ . Un couple  $(p, Y_p)$  appartient à  $\pi^{-1}(V)$  si et seulement si

$$d\varphi(p, Y_p) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0, \alpha^1, \dots, \alpha^k, 0, \dots, 0),$$

et dans ce cas  $d\psi(p, Y_p) = (x^1, \dots, x^k, \alpha^1, \dots, \alpha^k)$ .

Ainsi, si  $d\varphi(X) = (x, \alpha^1(x), \dots, \alpha^n(x))$  sont les composantes du champ de vecteurs  $X$ , on a  $\alpha^{k+1}(x) = \dots = \alpha^n(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ , puisque  $p = \varphi^{-1}(x) \in N$  et  $X(p) \in T_p N$ . Ceci implique que  $X|_N$  a pour coordonnées

$$d\psi(X|_N) = (x^1, \dots, x^k, \alpha^1(x), \dots, \alpha^k(x))$$

et est différentiable puisque les  $\alpha^i$  le sont. ■

*Exercice 3.1.* On définit des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^4$  :

$$\begin{aligned} X &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ Y &= -x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^4 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ Z &= -x^4 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

Montrer que leurs restrictions à  $S^3$  sont des champs de vecteurs sur  $S^3$  dont les valeurs en tout point forment une base orthonormée de l'espace tangent.

*Remarque.* Il est rare en général qu'il existe une famille de champs de vecteurs sur une variété dont les valeurs en tout point forment une base de l'espace tangent. Une variété possédant cette propriété est dite *parallélisable*. Les seules sphères parallélisables sont  $S^1$ ,  $S^3$  et  $S^7$ . Aucune sphère de dimension paire ne peut l'être puisque tout champ de vecteurs s'y annule au moins une fois ("on ne peut pas peigner la sphère"). En revanche tout ouvert de carte est parallélisable (avec les champs de coordonnées). Notons enfin qu'une variété est parallélisable si et seulement si son fibré tangent admet une trivialisations.

On peut enfin se demander si il est possible de "transporter" un champ de vecteurs : étant donnée une application différentiable  $F : M \rightarrow N$  et un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ , existe-t-il un champ de vecteurs sur  $N$  dont les valeurs soient les images de celles de  $X$  par  $dF$  ?

En général la réponse est non (prendre par exemple  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $N = \mathbb{R}$ ,  $F$  = la projection sur la première coordonnée et  $X(x) = (x^2, 0)$ ). Ce n'est possible que dans certains cas, en particulier quand  $F$  est un difféomorphisme.

**Définition.** Soient  $F : M \rightarrow N$  un difféomorphisme et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ . Alors le *transport de  $X$  par  $F$* , noté  $F_*X$ , est le champ de vecteurs sur  $N$  défini par

$$F_*X = dF(X) \circ F^{-1} \quad \text{ou} \quad F_*X(q) = dF_{F^{-1}(q)}(X(F^{-1}(q))).$$

*Exemple.* Les champs de coordonnées s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial x^i}{}^M = \varphi^{-1}{}_* \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

### 3.3 Équations différentielles

Nous allons maintenant étudier le mouvement sur une variété.

**Définition.** On appelle *équation différentielle* sur la variété  $M$  une équation de la forme

$$\dot{q} = X(q), \quad q \in M,$$

où  $X$  est un champ de vecteurs sur  $M$ .

La donnée d'une équation différentielle est ainsi équivalente à celle du champ de vecteurs  $X$ . Une solution de l'équation différentielle, c'est-à-dire une *courbe intégrale* du champ  $X$ , est une courbe  $c(t) \in M$ , définie sur un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$ , telle que

$$\frac{dc}{dt}(t) = X(c(t)), \quad \forall t \in J.$$

Comme pour les équations différentielles dans les espaces vectoriels normés (voir le cours AO102), nous allons avoir des résultats d'existence et d'unicité pour les solutions et une dépendance différentiable par rapport aux conditions initiales.

**Théorème 3.3** (Existence et unicité des solutions). *Soit  $\dot{q} = X(q)$ ,  $q \in M$ , une équation différentielle sur  $M$ . Pour tout point  $p \in M$ , si  $\eta > 0$  est suffisamment petit il existe une unique courbe intégrale  $c_p(t)$  de  $X$ , définie pour  $t \in ]-\eta, \eta[$ , satisfaisant la condition initiale  $c_p(0) = p$ .*

**Preuve.** Le résultat est local : il suffit donc de le prouver dans une carte, c'est-à-dire dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . C'est alors un résultat classique (voir le cours AO102 [3]). ■

Dans la suite, nous parlerons de la courbe intégrale de  $X$  issue de  $p$  : il s'agit de la solution  $c_p(t)$  pour laquelle l'intervalle de définition  $]a, b[ \supset ]-\eta, \eta[$  est maximal.

Mentionnons ici une conséquence du théorème d'existence et d'unicité qui sera utile pour les sous-variétés.

**Corollaire 3.4.** Soient  $\dot{q} = X(q)$  une équation différentielle sur  $M$  et  $N \subset M$  une sous-variété de  $M$  tels que, pour tout  $q \in N$ ,  $X(q) \in T_q N$ . Alors la courbe intégrale de  $X$  issue d'un point  $p \in N$  est incluse dans  $N$  pour  $t$  suffisamment petit.

**Preuve.** D'après le lemme 3.2, la restriction  $X|_N$  est un champ de vecteurs sur  $N$ . L'équation différentielle  $\dot{q} = X|_N(q)$ ,  $q \in N$ , a donc une solution  $c_p(t) \subset N$  pour  $p \in N$  et  $t$  suffisamment petit.

Or cette courbe est aussi solution de l'équation différentielle  $\dot{q} = X(q)$  sur  $M$ , pour la condition initiale  $p$ . Le théorème d'unicité montre que c'est bien une courbe intégrale de  $X$ . ■

**Théorème 3.5** (Dépendance par rapport aux conditions initiales). La solution d'une équation différentielle  $\dot{q} = X(q)$  sur  $M$  dépend de façon différentiable de la condition initiale : pour tout  $p \in M$ , il existe un voisinage  $U_p \subset M$  de  $p$  et un intervalle  $I = \{|t| < \varepsilon_p\}$  tels que l'application

$$\begin{aligned} \phi : I \times U_p &\rightarrow M \\ (t, q) &\mapsto \phi(t, q) = c_q(t) \end{aligned}$$

est différentiable, ainsi que  $p \mapsto \varepsilon_p$ .

**Preuve.** Comme pour le théorème 3.3, il suffit de se restreindre à une carte et d'utiliser les résultats sur  $\mathbb{R}^n$ . ■

## 3.4 Flots et groupes de difféomorphismes

Étant donné un point  $p \in M$ , on peut définir pour chaque  $t \in I$  une application

$$\begin{aligned} \phi_t : U_p &\rightarrow M \\ q &\mapsto \phi_t(q) = \phi(t, q). \end{aligned}$$

Il résulte des deux précédents théorèmes que pour chaque  $t$  l'application  $\phi_t$  est un difféomorphisme sur  $U_p$ , autrement dit un difféomorphisme local sur  $M$ . La famille de ces difféomorphismes locaux  $\phi_t$  est appelée le *flot* de  $X$ .

*Remarque.* Il est parfois pratique de se représenter  $X$  comme le champ de vitesse d'un fluide se déplaçant sur  $M$ . Le flot transporte alors une particule de liquide de la position  $q$  au temps 0 à la position  $\phi_t(q)$  au temps  $t$ .

Par définition de  $\phi$ , et donc de  $\phi_t$ , le flot peut également être caractérisé comme la famille de difféomorphismes locaux solution de

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = X \circ \phi_t, \quad \phi_0 = \text{id}.$$

Cette caractérisation permet de montrer que les flots se transportent par conjugaison.

**Lemme 3.6.** Soient  $F : M \rightarrow N$  un difféomorphisme et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ , de flot  $\phi_t$ . Le flot du transport  $F_*X$  de  $X$  par  $F$  est  $F \circ \phi_t \circ F^{-1}$ , c'est-à-dire le conjugué du flot de  $X$ .

**Preuve.** Posons  $\phi'_t = F \circ \phi_t \circ F^{-1}$ . Comme  $\phi'_0 = \text{id}_N$ , il suffit de vérifier que

$$\frac{\partial \phi'_t}{\partial t} = F_*X \circ \phi'_t.$$

Avec les notations du théorème 3.5,  $\phi'_t(q) = F \circ \phi(t, F^{-1}(q))$ , et la dérivée partielle par rapport à  $t$  s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi'_t}{\partial t}(q) &= dF \circ \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, F^{-1}(q)) \\ &= dF \circ X \circ \phi_t \circ F^{-1}(q) \\ &= dF \circ X \circ F^{-1} \circ F \circ \phi_t \circ F^{-1}(q) = F_*X \circ \phi'_t(q). \end{aligned}$$

■

Le flot forme un groupe local à un paramètre de difféomorphismes de  $M$ . Un tel groupe est défini par les propriétés suivantes :

- (i)  $\phi_t$  est un difféomorphisme local  $\forall t \in I$  ;
- (ii)  $t \mapsto \phi_t$  est différentiable ;
- (iii)  $\phi_0 = \text{id}$  ;
- (iv)  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t = \phi_{t+s}$ ,  $\forall t, s, t+s \in I$ .

Pour le flot, les trois premières propriétés viennent des théorèmes 3.3 et 3.5. Pour la quatrième, on remarque que  $c(t) = \phi_{t+s}(q)$  et  $c'(t) = \phi_t(\phi_s(q))$  sont solutions de la même équation différentielle avec la condition initiale  $c(0) = c'(0) = \phi_s(q)$ , ce qui montre l'égalité. Résumons ceci dans une proposition.

**Proposition 3.7.** Tout champ de vecteurs sur  $M$  engendre un groupe local à un paramètre de difféomorphismes sur  $M$ .

### Champs de vecteurs complets.

**Définition.** Un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est *complet* si, pour tout  $p \in M$ , la courbe intégrale de  $X$  issue de  $p$  est définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

*Remarque.* Même dans  $\mathbb{R}$  tous les champs ne sont pas complets. Par exemple  $X(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  est complet mais  $X(x) = x^2$  ne l'est pas (la solution est de la forme  $x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0}$ ).

Un champ de vecteurs complet engendre un flot constitué de difféomorphismes (globaux) de  $M$ . Ce flot forme un groupe à un paramètre de difféomorphismes sur  $M$  (défini comme un groupe local par les propriétés (i)–(iv) dans lesquelles on remplace local par global et  $I$  par  $\mathbb{R}$ ).

Dans la suite de ce cours nous ferons souvent l'hypothèse de complétude pour simplifier les résultats et les preuves. Il est généralement aisé de retrouver le résultat sans cette hypothèse. Il faut remarquer toutefois qu'en mécanique la plupart des champs de vecteurs hamiltoniens ne sont pas complets. On peut également noter qu'il existe une condition suffisante simple : si  $M$  est une variété compacte, tout champ sur  $M$  est complet.

On se pose maintenant la question de la réciproque de la proposition 3.7 : étant donné un groupe à un paramètre de difféomorphismes sur  $M$ , est-ce le flot d'un champ de vecteurs ?

**Lemme\* 3.8.** *Tout groupe à un paramètre de difféomorphismes  $\phi_t$  sur  $M$  est le flot d'un champ de vecteurs, appelé générateur infinitésimal du groupe et obtenu comme*

$$X = \left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

**Preuve.** Notons  $\phi_t$  les difféomorphismes de ce groupe. En tout point  $p \in M$ , on définit un vecteur tangent à  $M$  :

$$X(p) = \left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(p) \right|_{t=0} \in T_p M.$$

Comme la famille  $\phi_t$  dépend de façon différentiable de  $t$  et de  $p$  (propriétés (i) et (ii) des groupes à un paramètre),  $p \mapsto X(p)$  définit bien un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ .

Montrons maintenant que le flot de  $X$  est  $\phi_t$ . Comme  $\phi_0 = \text{id}$  (propriété (iii)), il suffit de montrer que  $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = X \circ \phi_t$ . Or, d'après la propriété (iv),

$$\frac{\partial \phi_{t+s}}{\partial t}(p) = \frac{\partial \phi_{t+s}}{\partial s}(p) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \phi_s(\phi_t(p)) \right).$$

En choisissant  $s = 0$  dans cette relation, on obtient

$$\left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(p) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial s} \left( \phi_s(\phi_t(p)) \right) \right|_{s=0} = X(\phi_t(p)),$$

ce qui prouve le lemme. ■

Le tableau ci-dessous résume les relations entre les champs de vecteurs et les groupes de difféomorphismes.

Champ de vecteurs	$\implies$	Groupe local à 1 paramètre
	$\not\implies$	Groupe global à 1 paramètre
Champ de vecteurs complet	$\iff$	Groupe global à 1 paramètre



*Exemples.*

- Dans  $M = \mathbb{R}^3$  : soient  $a \in \mathbb{R}^3$  et le groupe de translations à 1 paramètre  $\phi_t(x) = x + ta$ .

Le générateur infinitésimal de ce groupe est  $X(x) = a$ , ou plus exactement

$$X(x) = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + a^3 \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Inversement, considérons l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^3$  :  $\dot{x} = X(x) = a$ . La courbe intégrale issue d'un point  $x_0$  est  $\phi_t(x_0) = x_0 + ta$ .

- Dans  $M = GL_2(\mathbb{R})$ , on considère les applications

$$\phi_t(A) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble de ces applications forme un groupe à un paramètre de difféomorphismes sur  $GL_2(\mathbb{R})$  (le montrer). Le générateur infinitésimal de ce groupe est

$$X(A) = \frac{d}{dt} \phi_t(A) \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A.$$

Inversement, l'équation différentielle sur  $GL_2(\mathbb{R})$

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A$$

est linéaire et a donc pour solution issue de  $A_0$  :

$$A(t) = \exp \left[ t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] A_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_0.$$

- Plus généralement, si  $M = \mathbb{R}^n$  (ou un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) et si le champ de vecteurs  $X$  est linéaire, c'est-à-dire  $X(x) = Ax$ , alors  $X$  est complet et son flot est  $\phi_t(x) = \exp(tA)x$  (voir le cours AO102 [3]).



# Chapitre 4

## Familles de champs de vecteurs

Nous avons vu que, pour un système dynamique, c'est-à-dire un système dont la loi d'évolution ou dynamique est donnée par une équation différentielle, le futur  $\phi(t, p)$ ,  $t > 0$ , est complètement déterminé par l'état présent  $p = \phi(0, p)$ .

Nous allons maintenant étudier des systèmes dont la dynamique est certes contrainte, mais possède un certain nombre de degrés de libertés. Comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant, nous considérons que l'espace des configurations est une variété  $M$  et nous supposons qu'à partir de chaque configuration, le système peut suivre un certain nombre de directions de l'espace tangent. Ces directions peuvent être vues comme les valeurs d'une famille de champs de vecteurs (en supposant bien entendu qu'elles soient suffisamment régulières) ou, en introduisant une paramétrisation de cette famille, comme un système commandé.

### 4.1 Systèmes commandés

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ .

**Définition.** Un *système commandé* est une famille d'équations différentielles

$$\dot{q} = X_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U, \quad (4.1)$$

où

- l'ensemble de commande  $U$  est un sous-ensemble (quelconque) de  $\mathbb{R}^m$ ;  $m$  est donc la taille de la commande  $u$ , ou encore le nombre de commandes scalaires  $u_i$ ;
- les  $X_u$  forment une famille de champs de vecteurs sur  $M$  paramétrés par  $u$ ; autrement dit, on a une application  $X : M \times U \rightarrow TM$  telle que, pour  $u \in U$  fixé,  $X_u(q) = X(q, u)$  est un champ de vecteurs sur  $M$ .

On peut également représenter un système commandé sans faire apparaître explicitement les commandes, en insistant au contraire sur la famille de champs de vecteurs. Pour

cela, on définit la famille  $\mathcal{F}$  de champs de vecteurs associée au système commandé

$$\mathcal{F} = \{X_u, u \in U\}.$$

Le système commandé s'écrit alors  $\dot{q} \in \mathcal{F}$ . Il est important de noter que cette notation ici est strictement équivalente à l'équation (4.1). Elle sera cependant plus pratique pour énoncer un certain nombre de résultats et elle peut de plus prendre un sens plus général (voir § 4.3).

*Exemple* (La voiture (modèle simplifié)). Nous prenons comme exemple type tout au long de ce cours un modèle simplifié de la voiture. Dans ce modèle, la voiture est constituée d'un seul essieu se déplaçant dans le plan. Une configuration est donnée par les coordonnées planaires  $(x^1, x^2)$  du milieu de l'essieu et par l'angle  $\theta$  que fait la voiture avec l'axe  $0x^1$ . L'espace des configurations est donc la variété tridimensionnelle  $M = \mathbb{R}^2 \times S^1$ .

Les deux commandes sont la vitesse tangentielle  $u^1$  et la vitesse angulaire  $u^2$ . Nous supposons pour l'instant que l'ensemble de commande est  $\mathbb{R}^2$  tout entier (nous verrons au chapitre 5 d'autres possibilités pour  $U$ ).

Le système commandé prend alors la forme

$$\dot{q} = X_u(q) = u^1 X_1 + u^2 X_2, \quad q = (x, y, \theta) \in M, \quad u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2,$$

où  $X_1$  et  $X_2$ , qui correspondent respectivement aux déplacements rectilignes et aux rotations sur place, sont donnés en coordonnées par

$$X_1(q) = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

La famille de champs de vecteurs associée à ce système commandé est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients constants de  $X_1$  et  $X_2$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F} = \text{Vect}\{X_1, X_2\}$ .

On appellera *loi de commande* une fonction  $u(t) : J \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ . Dans ce cours nous limiterons aux lois de commande constantes par morceaux : nous obtiendrons ainsi une bonne formulation géométrique tout en évitant des considérations techniques délicates sur les mesures.

Une *trajectoire* du système commandé est une solution de la famille d'équations différentielles (4.1), c'est-à-dire une courbe  $c(t)$  dans  $M$ , définie sur un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$ , pour laquelle il existe une loi de commande  $u(t)$ ,  $t \in J$ , constante par morceaux et telle que

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{u(t)}(c(t)),$$

pour tout  $t \in J$  excepté aux points de discontinuité de  $u(t)$ .

On peut écrire une trajectoire du système en fonction des flots des champs de vecteurs  $X_u$ . En effet, soient  $p$  un point de  $M$  et  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , une loi de commande constante par morceaux, caractérisée par ses points de discontinuité  $0 < t_1 < \dots < t_s < T$  et sa

valeur  $u_i \in U$  sur chacun des intervalles  $]t_i, t_{i+1}[$ ,  $i = 0, \dots, s$  (on pose  $t_0 = 0$  et  $t_{s+1} = T$ ). Quand elle existe (problème de complétude), la trajectoire issue de  $p$  et correspondant à la loi de commande  $u(t)$  est donnée par

$$c(t) = \phi_{t-t_i}^{u_i} \circ \phi_{t_i-t_{i-1}}^{u_{i-1}} \circ \dots \circ \phi_{t_1-t_0}^{u_0}(p), \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}],$$

où  $\phi_t^{u_i}$  désigne le flot du champ de vecteurs  $X_{u_i}$ .

Dans ce cours nous nous intéresserons essentiellement au problème de l'atteignabilité : quelle est la structure de l'ensemble des configurations atteignables à partir d'une configuration donnée ? L'écriture des trajectoire en fonction des flots permet de bien définir cet ensemble.

**Définition.** Pour un système commandé  $\dot{q} = X_u(q)$ ,  $u \in U$ , sur  $M$ , l'ensemble atteignable à partir d'un point  $p \in M$ , noté  $\mathcal{A}_p$  (ou  $\mathcal{A}_p(\mathcal{F})$ ), est l'ensemble des points pouvant être atteints par une trajectoire issue de  $p$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{A}_p = \{ \phi_{t_k}^{u_k} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{u_1}(p) \mid t_i \geq 0, u_i \in U, k \in \mathbb{N} \}.$$

Essayons de comprendre quelle est la nature de cet ensemble.

Considérons d'abord le cas où l'ensemble  $U$  ne contient qu'une commande : le système se réduit alors à une équation différentielle et l'ensemble atteignable à partir de  $p$  est la demi-trajectoire  $\{\phi_t(p), t \geq 0\}$ . Ainsi  $\mathcal{A}_p$  est contenu dans une variété de dimension 1 (voir § 4.3).

Prenons ensuite le cas où la commande ne peut prendre que deux valeurs,  $U = \{1, 2\}$ . On a alors

$$\mathcal{A}_p = \{ \phi_{t_{2k}}^2 \circ \phi_{t_{2k-1}}^1 \circ \dots \circ \phi_{t_2}^2 \circ \phi_{t_1}^1(p) \mid t_i \geq 0, k \in \mathbb{N} \}.$$

La commutativité des flots  $\phi_t^1$  et  $\phi_s^2$  va alors jouer un rôle essentiel.

Supposons en effet que ces flots commutent, ce qui s'écrit  $\phi_t^1 \circ \phi_s^2 = \phi_s^2 \circ \phi_t^1$  pour tous  $t, s$ . Dans l'expression de  $\mathcal{A}_p$ , on peut alors regrouper tous les flots  $\phi^1$  d'un côté et tous les flots  $\phi^2$  de l'autre, ce qui donne

$$\mathcal{A}_p = \{ \phi_s^2 \circ \phi_t^1(p) \mid t, s \geq 0 \}.$$

Dans ce cas l'ensemble atteignable est donc un morceau de variété de dimension 2.

Que se passe-t-il quand les flots ne commutent pas (ce qui est généralement le cas) ? A-t-on encore un résultat du type " $k$  valeurs pour la commande  $\Rightarrow \mathcal{A}_p$  inclus dans une variété de dimension  $k$ " ? Évidemment non, comme le montre l'exemple suivant.

*Exemple.* Reprenons l'exemple de la voiture. Le système commandé est donné ici par deux champs de vecteurs sur la variété tridimensionnelle  $M = \mathbb{R}^2 \times S^1$ . Il est cependant clair que l'on peut joindre toute paire de points de  $M$  en alternant les flots de  $X_1$  et de  $X_2$  (on peut s'en convaincre sur un dessin). En particulier  $\mathcal{A}_p = M$  pour tout point  $p$ .

Ceci est possible parce que les flots de  $X_1$  et de  $X_2$  ne commutent pas. On peut en effet montrer que  $\phi_t^1 \circ \phi_t^2 \neq \phi_t^2 \circ \phi_t^1$  en calculant directement la composée  $\phi_{-t}^2 \circ \phi_{-t}^1 \circ \phi_t^2 \circ \phi_t^1$ , par exemple à partir de 0 :

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{\phi_t^1} (t, 0, 0) \xrightarrow{\phi_t^2} (t, 0, t) \xrightarrow{\phi_{-t}^1} (t(1 - \cos t), -t \sin t, t) \\ &\xrightarrow{\phi_{-t}^2} (t(1 - \cos t), -t \sin t, 0) = \gamma(t). \end{aligned}$$

Cette courbe  $\gamma(t)$  est bien différente de 0, ce qui montre la non commutativité des flots. On constate de plus que, pour  $t$  petit,

$$\gamma(t) = (0, -t^2, 0) + o(t^2).$$

Ainsi le vecteur tangent  $\dot{c}(0)$  à la courbe  $c(t) = \gamma(\sqrt{t})$ ,  $t \geq 0$ , est la direction transverse au plan engendré par  $X_1(0), X_2(0)$ .

Pour pouvoir continuer l'étude des ensembles atteignables, il est nécessaire de caractériser la commutation des flots. C'est ce que nous allons faire dans la section suivante. L'objectif est de faire cette caractérisation à partir des champs de vecteurs, sans avoir à calculer les flots. C'est un des principes essentiels de l'étude des équations différentielles et des systèmes commandés (voir le cours AO102) : il faut caractériser le comportement des solutions à partir des équations elles-mêmes, c'est-à-dire à partir des champs de vecteurs qui les constituent, sans calculer les solutions (ce que l'on ne sait généralement pas faire).

## 4.2 Crochets et algèbre de Lie

Rappelons (§ 3.2) qu'un champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(M)$  peut être considéré comme une dérivation sur l'ensemble  $C^\infty(M)$  des fonctions à valeurs réelles sur  $M$  :

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ g &\mapsto X \cdot g. \end{aligned}$$

On définit alors le produit de deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  comme l'opérateur

$$\begin{aligned} XY : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ g &\mapsto (XY) \cdot g = X \cdot (Y \cdot g). \end{aligned}$$

Cet opérateur n'est pas une dérivation,  $XY$  n'est donc pas un champ de vecteurs. En effet, il ne vérifie pas la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned} XY \cdot (fg) &= X \cdot (fY \cdot g + gY \cdot f) \\ &= fXY \cdot g + gXY \cdot f + \underbrace{(X \cdot f)(Y \cdot g) + (X \cdot g)(Y \cdot f)}_{\text{termes en trop}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Il s'agit en fait d'un opérateur du second ordre.

*Exemple.* Dans  $\mathbb{R}^n$ , avec  $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$  et  $Y = \frac{\partial}{\partial x^2}$ , on a  $XY \cdot g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^1 \partial x^2}$ .

Il est cependant possible de définir un champ de vecteurs à partir du produit.

**Définition.** Le *crochet de Lie* de deux champs de vecteurs  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  est le champ de vecteurs

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Pour que cette définition soit correcte il faut montrer que  $XY - YX$  est bien un champ de vecteurs, c'est-à-dire une dérivation sur  $C^\infty(M)$ . Or la linéarité est évidente et la règle de Leibniz se déduit du calcul (4.2) :

$$\begin{aligned} [X, Y] \cdot (fg) &= XY \cdot (fg) - YX \cdot (fg) \\ &= fXY \cdot g + gXY \cdot f - fYX \cdot g - gYX \cdot f \\ &= f[X, Y] \cdot g + g[X, Y] \cdot f. \end{aligned}$$

En coordonnées locales, un champ de vecteurs étant donné sous la forme  $X(x) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ , les composantes du crochet de Lie  $[X, Y](x)$  sont

$$[X, Y]^i(x) = \sum_{j=1}^n \left( X^j(x) \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(x) - Y^j(x) \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x) \right) = X \cdot Y^i(x) - Y \cdot X^i(x).$$

Matriciellement, en notant  $JX(x) = \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x) \right)$  la matrice jacobienne du vecteur des composantes de  $X$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} [X, Y]^1(x) \\ \vdots \\ [X, Y]^n(x) \end{pmatrix} = JY(x) \begin{pmatrix} X^1(x) \\ \vdots \\ X^n(x) \end{pmatrix} - JX(x) \begin{pmatrix} Y^1(x) \\ \vdots \\ Y^n(x) \end{pmatrix}.$$

*Exemples.*

- Si  $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ , alors  $[X, Y] = 0$ . Plus généralement si  $X$  et  $Y$  sont constants dans un système de coordonnées, c'est-à-dire  $X^1(x), \dots, X^n(x)$  et  $Y^1(x), \dots, Y^n(x)$  tous constants, alors  $[X, Y] = 0$  sur le domaine des coordonnées.
- Dans  $\mathbb{R}^n$ , considérons des champs de vecteurs linéaires, c'est-à-dire que, dans la base des  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , ils s'écrivent matriciellement comme

$$X(x) = Ax \text{ et } Y(x) = Bx, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$A$  et  $B$  étant des matrices ( $n \times n$ ) à coefficients constants. Le crochet de Lie de ces champs s'écrit alors

$$[X, Y](x) = JY(x)X(x) - JX(x)Y(x) = (BA - AB)x.$$

Autrement dit le crochet de Lie s'écrit en fonction du commutateur  $BA - AB$  des matrices  $A$  et  $B$ .

*Exercice 4.1.* Calculer  $[X_1, X_2]$  pour les champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  du système commandé correspondant à la voiture. Comparer la valeur  $[X_1, X_2](0)$  avec le vecteur tangent à la courbe  $c(t) = \gamma(\sqrt{t})$  définie page 42.

Comme nous venons de le voir pour la voiture, le commutateur des flots peut être relié au crochet de Lie des champs de vecteurs correspondants.

**Proposition 4.1.** Soient  $X_1, X_2$  des champs de vecteurs sur  $M$  de flots respectifs  $\phi_t^1, \phi_s^2$  et  $p$  un point de  $M$ . On considère la courbe

$$\gamma(t) = \phi_{-t}^2 \circ \phi_{-t}^1 \circ \phi_t^2 \circ \phi_t^1(p)$$

pour  $t$  suffisamment petit.

Alors, dans des coordonnées locales  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  centrées en  $p$ ,

$$\gamma^\varphi(t) = t^2[X_1, X_2]^\varphi(p) + o(t^2),$$

où l'on a identifié le champ  $[X_1, X_2]^\varphi$  sur  $\mathbb{R}^n$  avec le vecteur de ses coordonnées.

**Preuve.** Pour  $t$  suffisamment petit, on peut se placer dans un système local de coordonnées centré en  $p$  (c'est-à-dire que  $p$  a pour coordonnées 0), et on identifie vecteurs tangents et champs de vecteurs aux vecteurs colonnes de leurs composantes. On va faire un développement limité de  $\gamma(t)$  et montrer que

$$\gamma(t) = t^2[X_1, X_2](p) + o(t^2),$$

ce qui prouvera la proposition.

Nous commençons par calculer

$$\phi_t^1 \circ \phi_t^2(\gamma(t)) = \phi_t^2 \circ \phi_t^1(p) - \phi_t^1 \circ \phi_t^2(p).$$

Remarquons tout d'abord que, si  $\phi_t$  désigne le flot d'un champ de vecteurs  $X$ ,

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= x + t \frac{d\phi_t}{dt}(x) \Big|_{t=0} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2\phi_t}{dt^2}(x) \Big|_{t=0} + o(t^2) \\ &= x + tX(x) + \frac{t^2}{2} JX(x)X(x) + o(t^2). \end{aligned}$$

En choisissant  $\phi = \phi^1$  et  $x = 0$  puis  $\phi = \phi^2$  et  $x = \phi_t^1(p)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \phi_t^2 \circ \phi_t^1(p) &= tX_1(p) + \frac{t^2}{2} JX_1(p)X_1(p) + t(X_2(p) + tJX_2(p)X_1(p)) + \\ &\quad + \frac{t^2}{2} JX_2(p)X_2(p) + o(t^2). \end{aligned}$$



On peut faire le même calcul en échangeant les rôles de  $X_1$  et de  $X_2$ , ce qui nous conduit à

$$\begin{aligned}\phi_t^2 \circ \phi_t^1(p) - \phi_t^1 \circ \phi_t^2(p) &= t^2(JX_2(p)X_1(p) - JX_1(p)X_2(p)) + o(t^2) \\ &= t^2[X_1, X_2](p) + o(t^2),\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \phi_{-t}^2 \circ \phi_{-t}^1(\phi_t^2 \circ \phi_t^1(p) - \phi_t^1 \circ \phi_t^2(p)) \\ &= t^2[X_1, X_2](p) + o(t^2).\end{aligned}$$

■

Cette proposition met en évidence le lien entre le crochet et la non-commutation des flots (ce qui est le but de cette section!). Nous avons en fait la caractérisation suivante, dont la preuve est donnée un peu plus loin page 47.

**Lemme 4.2.** *Deux champs de vecteurs  $X_1, X_2$  sur  $M$  satisfont  $[X_1, X_2] \equiv 0$  si et seulement si leurs flots  $\phi_t^1, \phi_s^2$  commutent pour tous  $t, s$  suffisamment petits.*

Une autre propriété importante du crochet de Lie est qu'il est préservé par transport par un difféomorphisme.

**Lemme 4.3.** *Soient  $F : M \rightarrow N$  un difféomorphisme entre variétés et  $X, Y$  des champs de vecteurs sur  $M$ . Alors*

$$F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y].$$

**Preuve.** Rappelons que, en tant que dérivation, le champ  $F_*X$  s'écrit

$$\begin{aligned}F_*X : C^\infty(N) &\rightarrow C^\infty(N) \\ g &\mapsto X \cdot (g \circ F) \circ F^{-1}.\end{aligned}$$

Le transport par  $F$  du crochet  $[X, Y]$  vérifie donc

$$\begin{aligned}F_*[X, Y] \cdot g &= [X, Y] \cdot (g \circ F) \circ F^{-1}, \quad \forall g \in C^\infty(N) \\ &= \left( X \cdot (Y \cdot (g \circ F)) - Y \cdot (X \cdot (g \circ F)) \right) \circ F^{-1}, \quad \forall g \in C^\infty(N).\end{aligned}$$

Or  $Y \cdot (g \circ F)$  est égal à  $F_*Y \cdot g$  (de même avec  $X$ ). L'égalité ci-dessus devient donc, pour toute fonction  $g \in C^\infty(N)$ ,

$$F_*[X, Y] \cdot g = F_*X \cdot (F_*Y \cdot g) - F_*Y \cdot (F_*X \cdot g) = [F_*X, F_*Y] \cdot g,$$

ce qui montre que les champs de vecteurs  $F_*[X, Y]$  et  $[F_*X, F_*Y]$  sont égaux. ■

**Dérivées de Lie.\*** Le crochet de Lie est un cas particulier d'une notion plus générale, la dérivée de Lie. Cette notion prolonge celle de dérivée directionnelle.

**Définition.** Soient  $g \in C^\infty(M)$  une fonction et  $X \in \mathcal{X}(M)$  un champ de vecteurs sur  $M$ , de flot  $\phi_t$ . La *dérivée de Lie de  $g$  par rapport à  $X$* , notée  $L_X g$ , est la fonction sur  $M$  dont la valeur en un point  $p$  est

$$L_X g(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(\phi_t(p)) - g(p)).$$

Cette dérivée de Lie  $L_X g$  n'est en fait rien d'autre que l'action de l'opérateur de dérivation  $X$  sur  $g$ ,

$$L_X g = X \cdot g.$$

En effet, par définition,

$$L_X g(p) = \left. \frac{d}{dt} (g \circ \phi_t(p)) \right|_{t=0}.$$

Comme le vecteur tangent en 0 de la courbe  $c(t) = \phi_t(p)$  est  $X(p) = X_p$ , il résulte des propositions 2.3 et 2.4 que  $L_X g(p) = X_p \cdot g$ .

On peut de la même façon définir la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs  $Y$ . L'idée ici est de comparer les valeurs de  $Y$  le long du flot  $\phi_t$  de  $X$  avec la valeur en  $p$ . Cette comparaison ne pouvant se faire qu'entre des objets appartenant au même espace vectoriel, on utilise la différentielle du flot pour ramener les valeurs  $Y(\phi_t(p))$  dans  $T_p M$ . D'où la définition suivante.

**Définition.** Soient  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  des champs de vecteurs sur  $M$  et  $\phi_t$  le flot de  $X$ . La *dérivée de Lie de  $Y$  par rapport à  $X$* , notée  $L_X Y$ , est le champ de vecteurs sur  $M$  dont la valeur en un point  $p$  est

$$L_X Y(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\phi_{-t}(Y(\phi_t(p))) - Y(p)] = \left. \frac{d}{dt} (\phi_{-t*} Y)(p) \right|_{t=0}.$$

*Remarque.* On peut aussi écrire  $L_X Y(p)$  comme :

$$L_X Y(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y(p) - d\phi_t(Y(\phi_{-t}(p)))] = \left. -\frac{d}{dt} (\phi_{t*} Y)(p) \right|_{t=0}.$$

La dérivée de Lie coïncide avec le crochet de Lie de  $X$  et  $Y$ .

**Lemme 4.4.** Pour tous  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,  $L_X Y = [X, Y]$ .

**Preuve.** Faisons au préalable la remarque suivante, qui généralise le lemme d'Hadamard (lemme 2.1) :

si  $g : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable satisfaisant  $g(0, p) = 0$  pour tout  $p \in M$ , il existe une fonction différentiable  $h : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$g(t, p) = th(t, p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial t}(0, p) = h(0, p).$$

Il suffit en effet de poser

$$h(t, p) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s}(st, p) ds.$$

Venons-en à la preuve du lemme. Considérons  $g \in C^\infty(M)$ . D'après la remarque précédente, il existe une fonction  $h(t, x)$  telle que

$$g \circ \phi_{-t}(q) = g(q) + th(t, q) \quad \text{et} \quad h(0, q) = \left. \frac{\partial (g \circ \phi_{-t})}{\partial t}(q) \right|_{t=0} = -X \cdot g(q).$$

Ainsi,

$$d\phi_{-t}(Y(\phi_t(p))) \cdot g = Y \cdot (g \circ \phi_{-t})(\phi_t(p)) = Y \cdot g(\phi_t(p)) + tY \cdot h(t, \phi_t(p)),$$

et

$$\begin{aligned} L_X Y(p) \cdot g &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\phi_{-t}(Y(\phi_t(p))) - Y(p)] \cdot g \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y \cdot g(\phi_t(p)) - Y \cdot g(p)] + \lim_{t \rightarrow 0} Y \cdot h(t, \phi_t(p)) \\ &= L_X(Y \cdot g)(p) - Y \cdot (X \cdot g)(p) = [X, Y](p) \cdot g. \end{aligned}$$

■

*Remarque.* Comme nous l'avons vu dans la preuve précédente, la valeur en un point de la dérivée de Lie d'une fonction peut être représentée, selon le contexte, par l'une des notations suivantes :  $L_X g(p)$ ,  $X \cdot g(p)$ ,  $X(p) \cdot g$  ou  $X_p \cdot g$ . Ces notations sont bien entendu toutes équivalentes mais mettent l'accent sur des propriétés différentes de l'expression.

L'interprétation du crochet de Lie comme une dérivée de Lie permet de prouver le lemme de la page 45 sur la commutation des flots.

**Preuve** (du lemme 4.2). Soient  $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$  et  $\phi_t^1, \phi_s^2$  leurs flots respectifs. Ces deux flots commutent si et seulement si, pour tous  $t, s$  suffisamment petits,

$$\phi_{-t}^1 \circ \phi_s^2 \circ \phi_t^1 = \phi_s^2.$$

Posons  $\theta_s = \phi_{-t}^1 \circ \phi_s^2 \circ \phi_t^1$ . C'est un groupe local à un paramètre de difféomorphismes. Il existe donc localement un champ  $Z_t$  générateur infinitésimal de ce groupe :

$$\begin{aligned} Z_t &= \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial}{\partial s} (\phi_{-t}^1 \circ \phi_s^2) \right|_{s=0} \circ \phi_t^1 \\ &= d\phi_{-t}^1 \circ X_2 \circ \phi_t^1 = \phi_{-t*}^1 X_2. \end{aligned}$$

Ainsi les flots commutent si et seulement si ce champ  $Z_t$  est indépendant de  $t$ , c'est-à-dire  $Z_t = Z_0 = X_2$ . Or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z_t &= \frac{d}{dt}(\phi_{-t*}^1 X_2) = \frac{d}{ds}(\phi_{-t-s*}^1 X_2) \Big|_{s=0} \\ &= d\phi_{-t*}^1 \frac{d}{ds}(\phi_{-s*}^1 X_2) \Big|_{s=0} = d\phi_{-t*}^1 L_{X_1} X_2, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $Z_t$  est indépendant de  $t$  si et seulement si  $L_{X_1} X_2 = [X_1, X_2] = 0$ . ■

**Algèbres de Lie.** On a déjà vu que l'ensemble  $\mathcal{X}(M)$  des champs de vecteurs sur  $M$  est un espace vectoriel pour l'addition point par point :

$$(\alpha X + \beta Y)(q) = \alpha X(q) + \beta Y(q), \quad \forall q \in M, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

En fait  $\mathcal{X}(M)$ , muni de cette addition et de la loi interne (ou produit) défini par le crochet de Lie est une algèbre<sup>1</sup> sur  $\mathbb{R}$ .

De plus le crochet de Lie satisfait les deux propriétés suivantes :

(a) l'anti-symétrie :  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,

(b) l'identité de Jacobi :  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ .

Toute algèbre sur  $\mathbb{R}$  dont la loi interne satisfait ces deux propriétés est appelée une *algèbre de Lie*. Ainsi  $\mathcal{X}(M)$  est une algèbre de Lie.

*Exercice 4.2.* Vérifier que  $M_n(\mathbb{R})$  muni de la loi interne  $[A, B] = BA - AB$  est une algèbre de Lie.

Une *sous-algèbre de Lie* de  $\mathcal{X}(M)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{X}(M)$  qui est stable par le crochet de Lie. C'est donc également une algèbre de Lie. En particulier, si  $\mathcal{F}$  une famille de champs de vecteurs sur  $M$ , on appelle (*sous-*)*algèbre de Lie engendrée par  $\mathcal{F}$* , notée  $\text{Lie}(\mathcal{F})$ , le plus petit sous-espace vectoriel  $S$  de  $\mathcal{X}(M)$  qui contient  $\mathcal{F}$  et qui est stable par le crochet de Lie, c'est-à-dire  $[X, Y] \in S$  pour tout  $X, Y \in S$ .

Prenons par exemple une famille à deux éléments,  $\mathcal{F} = \{X_1, X_2\}$ . Les champs  $X_1$  et  $X_2$  appartiennent à  $\text{Lie}(X_1, X_2)$ , donc leur crochet  $[X_1, X_2]$  aussi, ainsi que leurs crochets avec le crochet  $[X_1, [X_1, X_2]]$ ,  $[X_2, [X_1, X_2]]$ , etc... et finalement

$$\text{Vect}\{[X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \dots]], k \geq 1, i_j = 1 \text{ ou } 2\} \subset \text{Lie}(X_1, X_2)$$

(la relation de Jacobi permet de montrer que l'on a en fait égalité entre ces deux espaces).

Il est clair qu'en général  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{X}(M)$  de dimension infinie, même si  $\mathcal{F}$  ne contient que deux champs. En revanche si  $\mathcal{F}$  ne contient qu'un élément,  $\mathcal{F} = \{X\}$ , alors  $\text{Lie}(X) = \text{Vect}\{X\}$  car  $[X, X] = 0$ .

1. Rappelons qu'une algèbre sur  $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'une application bilinéaire de  $E \times E \rightarrow E$ .

En un point  $p \in M$ , on note

$$\text{Lie}_p(\mathcal{F}) = \{X(p), X \in \text{Lie}(\mathcal{F})\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent  $T_pM$ , c'est donc un espace vectoriel de dimension finie.

*Exemples.*

- Soit  $\mathcal{F} = \{X_1, X_2\}$  sur  $M = \mathbb{R}^2$ , avec  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$ ,  $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$ . Leur crochet de Lie est  $[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial x^2}$  et tous les autres crochets sont nuls. Ainsi

$$\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{Vect}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}\right\},$$

est de dimension 3 et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Lie}_x(X_1, X_2) = T_x\mathbb{R}^2$  est de dimension 2.

- Prenons la même famille que dans l'exemple précédent avec  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$ ,  $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^1} + f(x^1) \frac{\partial}{\partial x^2}$ , où  $f(t) = e^{-1/t^2}$ . Cette fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  et toutes ses dérivées sont nulles en 0. En calculant les crochets successifs, on obtient

$$\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{Vect}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, f^{(k)}(x^1) \frac{\partial}{\partial x^2}, k \geq 0\right\},$$

qui est de dimension infinie. En revanche, si  $x^1 \neq 0$ ,  $\text{Lie}_x(X_1, X_2) = T_x\mathbb{R}^2$  est de dimension 2 alors que, si  $x^1 = 0$ ,  $\text{Lie}_x(\mathcal{F}) = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x^1}$  est de dimension 1.

*Exercice 4.3.* Calculer  $\text{Lie}(X_1, X_2)$  dans les cas suivants :

- $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$  et  $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}$  dans  $\mathbb{R}^3$  ;
- $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$  et  $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + (x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^3}$  dans  $\mathbb{R}^3$  ;
- $X_1$  et  $X_2$  champs de vecteurs du système commandé de la voiture.

## 4.3 Orbite d'une famille de champs de vecteurs

Nous allons maintenant généraliser les notions de flot et de courbe intégrale d'un champ de vecteurs et les définir pour des familles de champs de vecteurs. Ces notions sont primordiales pour l'étude de l'ensemble atteignable d'un système commandé, comme nous le verrons au chapitre 5.

Considérons donc une famille  $\mathcal{F}$  de champs de vecteurs sur  $M$ . C'est un sous-ensemble, a priori quelconque, de  $\mathcal{X}(M)$ .

*Remarque.* Les champs de vecteurs de  $\mathcal{F}$ , ainsi que tous les champs que nous rencontrerons dans cette section, seront supposés complets. Cette hypothèse ne modifie pas fondamentalement les résultats (ni les preuves) mais permet en revanche de simplifier leur énoncé. Pour retrouver les résultats généraux, il faudra systématiquement remplacer les définitions et résultats globaux utilisant les flots par les équivalents locaux et vérifier que les preuves restent valables (ce sera toujours le cas).

**Définition.** Le groupe de difféomorphismes engendré par  $\mathcal{F}$ , noté  $G(\mathcal{F})$ , est le groupe engendré par les flots des éléments de  $\mathcal{F}$  :

$$G(\mathcal{F}) = \left\{ \phi_{t_k}^{X_k} \circ \cdots \circ \phi_{t_1}^{X_1} \mid t_i \in \mathbb{R}, X_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N} \right\},$$

où  $\phi_t^X$  désigne le flot du champ de vecteurs  $X$ .

**Définition.** Soit  $p \in M$ . L'orbite de  $\mathcal{F}$  issue de  $p$  est l'ensemble

$$\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \left\{ \phi_{t_k}^{X_k} \circ \cdots \circ \phi_{t_1}^{X_1}(p) \mid t_i \in \mathbb{R}, X_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N} \right\},$$

ou encore  $\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \{\varphi(p), \varphi \in G(\mathcal{F})\}$ .

Quand  $\mathcal{F} = \{X_u, u \in U\}$  est la famille de champs associée à un système commandé (4.1), l'orbite  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  ressemble beaucoup à l'ensemble atteignable  $\mathcal{A}_p(\mathcal{F})$ , avec une différence importante : dans l'orbite, il est permis de se déplacer en avant et en arrière dans chaque direction  $X_u \in \mathcal{F}$  alors que dans  $\mathcal{A}_p(\mathcal{F})$ , seul le mouvement en avant (c'est-à-dire pour un temps positif) est autorisé. On a donc  $\mathcal{A}_p(\mathcal{F}) \subset \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ .

Bien entendu les deux notions coïncident si les champs  $-X_u$  appartiennent aussi à  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 4.5.** Soit  $\mathcal{F}$  la famille associée à un système commandé. Si  $\mathcal{F}$  est une famille symétrique, c'est-à-dire si

$$X \in \mathcal{F} \Rightarrow -X \in \mathcal{F},$$

l'orbite de  $\mathcal{F}$  et l'ensemble atteignable par le système commandé coïncident pour tout point  $p \in M$  :  $\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_p(\mathcal{F})$ .

Nous nous intéressons maintenant à la nature des orbites. Est-ce que ce sont des sous-variétés de  $M$  ? ou au moins des variétés ? Commençons par le cas le plus simple, celui d'une famille à un élément  $X$ .

Dans ce cas, le groupe engendré par  $\mathcal{F}$  est simplement le flot de  $X$  et l'orbite issue d'un point  $p$  est la courbe intégrale de  $X$  issue de ce point  $p$  :  $\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \{\phi_t(p), t \in \mathbb{R}\}$ . Cette orbite peut être :

- soit réduite à un point : si  $X(p) = 0$ ,  $\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \{p\}$  ;
- soit une sous-variété de  $M$  difféomorphe à  $S^1$  (si  $X(p) \neq 0$  et  $t \mapsto \phi_t(p)$  n'est pas injective) ;
- soit une sous-variété immergée de dimension 1 (si  $X(p) \neq 0$  et  $t \mapsto \phi_t(p)$  est injective) : en effet, dans ce cas  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est l'image de l'application  $t \mapsto \phi_t(p)$ , qui est une immersion injective (car  $\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(p) = X(\phi_t(p)) \neq 0$ )

(la preuve de ces résultats est laissée en exercice). Dans les trois cas,  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est une sous-variété immergée. Est-ce une sous-variété ? En général non, comme le montre l'exemple ci-dessous (rappelons qu'une sous-variété est l'image d'un plongement alors qu'une sous-variété immergée est l'image d'une immersion injective, voir § 1.3).

*Exemple* (Enroulements denses sur le tore). Sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , représenté ici comme  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , on considère le champ de vecteurs (donné dans les coordonnées locales induites par  $\mathbb{R}^2$ )

$$X(x) = \alpha \frac{\partial}{\partial x^1} + \beta \frac{\partial}{\partial x^2}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels dont le rapport  $\beta/\alpha$  est irrationnel. L'orbite de  $X$  issue d'un point quelconque  $x_0$  s'écrit en coordonnées locales  $x^1(t) = x_0^1 + \alpha t$ ,  $x^2(t) = x_0^2 + \beta t$ ; cette orbite est dense dans le tore. Il n'est donc pas possible que ce soit une sous-variété de  $\mathbb{T}^2$ .

Ainsi, pour une famille  $\mathcal{F}$  quelconque, le meilleur résultat qu'on puisse espérer pour les orbites est qu'elles soient des sous-variétés immergées (c'est déjà beaucoup, puisque ça implique une structure de variété). C'est ce que nous allons montrer dans le reste de cette section.

**Théorème 4.6** (Théorème de l'orbite). *Les orbites d'une famille  $\mathcal{F}$  de champs de vecteurs sur  $M$  sont des sous-variétés immergées connexes de  $M$ .*

*L'espace tangent à une orbite est*

$$T_q \text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \text{Vect} \{ \varphi_* X(q) \mid X \in \mathcal{F}, \varphi \in G(\mathcal{F}) \}, \quad \text{pour } q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F}).$$

**Preuve\***. La preuve<sup>2</sup> de ce théorème est longue et, parfois, difficile... On y développe cependant des outils qui seront utiles par ailleurs, tout particulièrement la construction de coordonnées locales. Pour plus de clarté, nous allons présenter cette preuve en plusieurs étapes.

Fixons un point  $p \in M$  et son orbite  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ . Pour  $q \in M$ , on désigne par  $\Pi_q$  le sous-espace vectoriel de  $T_q M$  :

$$\Pi_q = \text{Vect} \{ \varphi_* X(q) \mid X \in \mathcal{F}, \varphi \in G(\mathcal{F}) \}.$$

Voici le plan de la démonstration.

- (i) **Immersion locale** Pour chaque point  $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , on construit une application  $G_q : \mathbb{R}^m \rightarrow M$ , où  $m = \dim \Pi_q$ , à valeurs dans  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , qui est une immersion sur un voisinage  $U_q \subset \mathbb{R}^m$  de 0.
- (ii) **Topologie** On munit  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  d'une topologie  $\mathcal{T}$  dont la base est formée des  $G_q(U)$ ,  $U \subset U_q$  ouvert de  $\mathbb{R}^m$ .
- (iii) **Structure différentiable** L'ensemble des cartes  $(G_q(U), G_q^{-1})$  forme un atlas et définit donc une structure différentiable sur  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ .
- (iv) **Variété connexe**  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est un espace topologique connexe, séparé et à base dénombrable. Muni de la structure différentiable du (iii), il forme donc une variété connexe, dont l'espace tangent en un point  $q$  est  $\Pi_q$ .
- (v) **Sous-variété immergée** L'inclusion  $i : \text{Orb}_p(\mathcal{F}) \rightarrow M$  est une immersion, ce qui fait de la variété  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  une sous-variété immergée de  $M$ .

Nous allons maintenant détailler ces différents points.

2. Il y a plusieurs façons différentes de prouver le théorème de l'orbite. La preuve que nous donnons ici est, à peu de choses près, celle établie par A. Grachev et Y. Sachkov [1].

(i) **Immersion locale** Commençons par montrer que  $\Pi_q$ , le candidat à l'espace tangent, est de dimension constante sur une orbite.

**Lemme 4.7.** *Pour tout  $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ ,  $\dim \Pi_q = \dim \Pi_p$ .*

**Preuve.** Soit  $q$  un point de  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ . Il existe donc un difféomorphisme  $\psi \in G(\mathcal{F})$  tel que  $q = \psi(p)$ . Considérons d'autre part un élément  $\varphi_*X(p)$  de l'espace vectoriel  $\Pi_p$ .

Comme  $\psi$  est un difféomorphisme,  $d\psi_p : T_pM \rightarrow T_qM$  est un isomorphisme et

$$d\psi_p(\varphi_*X(p)) = d\psi \circ d\varphi(X) \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(q) = (\psi \circ \varphi)_*X(q) \in \Pi_q.$$

Ainsi  $d\psi_p(\Pi_p) \subset \Pi_q$ , ce qui implique que  $\dim \Pi_p \leq \dim \Pi_q$ .

Comme  $\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \text{Orb}_q(\mathcal{F})$ , on peut échanger les rôles de  $p$  et de  $q$  dans ce raisonnement et donc  $\dim \Pi_p = \dim \Pi_q$ . ■

Notons  $m = \dim \Pi_p$ . Étant donné un point  $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , il est possible de choisir des champs de vecteurs  $Y_1, \dots, Y_m$ , tous de la forme  $\psi_*X$ , dont les valeurs en  $q$  engendrent  $\Pi_q$ , c'est-à-dire

$$\text{Vect}\langle Y_1(q), \dots, Y_m(q) \rangle = \Pi_q.$$

On considère alors l'application

$$G_q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \rightarrow & M \\ (t_1, \dots, t_m) & \mapsto & \phi_{t_m}^m \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1(q) \end{array}$$

où  $\phi_t^i$  est le flot du champ de vecteurs  $Y_i$ .

Montrons d'abord que  $G_q$  est une immersion locale autour de 0, c'est-à-dire que sa différentielle en 0 est de rang  $m$ . Pour cela, on calcule l'image de la base canonique de  $T\mathbb{R}^m$  par la différentielle de  $G_q$  :

$$d_t G_q \left( \frac{\partial}{\partial t_i} \right) = \frac{\partial G_q}{\partial t_i}(t) = d\phi_{t_m}^m \circ \dots \circ d\phi_{t_{i+1}}^{i+1}(Y_i) \circ \phi_{t_{i-1}}^{i-1} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1(q).$$

Comme chaque flot vérifie  $\phi_0^j = \text{id}$  et  $d\phi_0^j = \text{Id}$ , on obtient

$$\frac{\partial G_q}{\partial t_i}(t=0) = Y_i(q).$$

Les vecteurs tangents  $Y_1(q), \dots, Y_m(q)$  étant linéairement indépendants, l'application  $d_0 G_q : T_0\mathbb{R}^m \rightarrow T_qM$  est de rang  $m$ , donc injective. Il existe ainsi un voisinage  $U_q \subset \mathbb{R}^m$  de 0 sur lequel  $dG_q$  est injective, ce qui implique que  $G_q|_{U_q}$  est une immersion. Autrement dit,  $G_q(U_q)$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $m$ .

De plus cette sous-variété  $G_q(U_q)$  est incluse dans  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ . En effet, chaque champ  $Y_i$  est de la forme  $\psi_*X$ , avec  $X \in \mathcal{F}$  et  $\psi \in G(\mathcal{F})$  et son flot  $\phi_t^i = \psi \circ \phi_t^X \circ \psi^{-1}$  appartient au groupe  $G(\mathcal{F})$ . La composition de tels flots appartient également au groupe  $G(\mathcal{F})$  et, pour tout  $t$ ,  $G_q(t) \in \text{Orb}_q(\mathcal{F}) = \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ .



On peut enfin déterminer l'espace tangent à la sous-variété  $G_q(U_q)$  de  $M$ . Nous allons montrer pour cela que  $d_t G_q(T_t \mathbb{R}^m) = \Pi_{G_q(t)}$  pour tout  $t \in U_q$ .

Remarquons d'abord que, comme  $G_q(t) \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , il résulte du lemme 4.7 que l'espace vectoriel  $\Pi_{G_q(t)}$  est de dimension  $m$ , qui est également le rang de  $d_t G_q$ . Il suffit donc de montrer que, pour  $i = 1, \dots, m$ ,  $d_t G_q\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \in \Pi_{G_q(t)}$ . Or

$$\begin{aligned} d_t G_q\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) &= d\phi_{t_m}^m \circ \dots \circ d\phi_{t_{i+1}}^{i+1}(Y_i) \circ \phi_{t_{i-1}}^{i-1} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1(q) \\ &= d\phi_{t_m}^m \circ \dots \circ d\phi_{t_{i+1}}^{i+1}(Y_i) \circ \phi_{-t_{i+1}}^{i+1} \circ \phi_{-t_m}^m \circ \phi_{t_m}^m \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1(q) \\ &= \phi_* Y_i(G_q(t)) \in \Pi_{G_q(t)} \end{aligned}$$

puisque  $\phi = \phi_{t_m}^m \circ \dots \circ \phi_{t_{i+1}}^{i+1}$  appartient au groupe  $G(\mathcal{F})$ . Ainsi,

$$T_{q'} G_q(U_q) = \Pi_{q'} \quad \forall q' \in G_q(U_q).$$

En résumé, nous avons montré que  $G_q(U_q)$  est une sous-variété de  $M$  qui est incluse dans  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  et dont l'espace tangent en un point  $q'$  est  $\Pi_{q'}$ .

**(ii) Topologie** Rappelons d'abord quelques définitions. Une *topologie* sur un espace  $E$  est un ensemble de parties de  $E$ , les *ouverts*, qui satisfont les trois propriétés suivantes :

- toute réunion d'ouverts est un ouvert ;
- toute intersection finie d'ouverts est un ouvert ;
- $E$  et  $\emptyset$  sont des ouverts.

Une *base* d'une topologie est une famille d'ouverts telle que tout ouvert de la topologie est réunion d'éléments de la base. Une base est donc caractérisée par les deux propriétés suivantes :

- l'intersection finie d'éléments de la base est égale à la réunion d'éléments de la base ;
- $E$  et  $\emptyset$  sont inclus dans la réunion des éléments de la base.

Il nous faut donc montrer que les parties  $G_q(U)$ ,  $U \subset U_q$  ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , forment la base d'une topologie de  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ .

La deuxième propriété d'une base est trivialement vérifiée :  $\emptyset = G_q(\emptyset)$  et  $\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \bigcup_{q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})} G_q(U_q)$ . Pour établir la première propriété, il suffit de montrer que, pour tout point  $\bar{q}$  appartenant à un élément  $G_q(U)$ , il existe un autre élément  $G_{\bar{q}}(\bar{U})$  inclus dans  $G_q(U)$ . En effet on pourra alors écrire toute intersection finie comme réunion d'éléments de la base :

$$\bigcap_{j=1}^k G_{q_j}(U_j) = \bigcup_{\bar{q} \in \cap} G_{\bar{q}}(\bar{U}).$$

Fixons  $\bar{q} \in G_q(U)$ . On choisit des champs  $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$  de la forme  $\varphi_* X$  dont les valeurs en  $\bar{q}$  forment une base de  $\Pi_{\bar{q}}$  et on définit l'application  $G_{\bar{q}} : t \mapsto \bar{\phi}_{t_m}^m \circ \dots \circ \bar{\phi}_{t_1}^1(\bar{q})$ , où  $\bar{\phi}_{t_i}^i$  est le flot de  $\bar{Y}_i$ .

Pour tout point  $q' \in G_q(U)$ , on a  $\bar{Y}_1(q') \in \Pi_{q'} = T_{q'}G_q(U)$ . Il résulte alors du corollaire 3.4 que  $\bar{\phi}_{t_1}^1(\bar{q})$  appartient à  $G_q(U)$  pour  $t_1$  suffisamment petit. En répétant cet argument, on montre que  $\bar{\phi}_{t_2}^2(\bar{\phi}_{t_1}^1(\bar{q}))$  appartient à  $G_q(U)$  pour  $t_1, t_2$  suffisamment petits, ... et ainsi que  $G_{\bar{q}}(t) \in G_q(U)$  pour  $t$  suffisamment petit. En notant  $\bar{U}$  le voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^m$  correspondant à “ $t$  suffisamment petit”, on a bien  $G_{\bar{q}}(\bar{U}) \subset G_q(U)$ .

Ainsi les  $G_q(U)$ ,  $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ ,  $U \subset U_q$  voisinage de 0, définissent une topologie  $\mathcal{T}$  sur  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ . On supposera dorénavant que l'orbite  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est munie de cette topologie.

**(iii) Structure différentiable** Considérons l'ensemble des couples  $(G_q(U), G_q^{-1})$ , pour  $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$  et  $U \subset U_q$ . Chacun de ces couples est une carte sur  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , les applications  $G_q^{-1}$  étant clairement des homéomorphismes. Ces cartes sont de plus compatibles entre elles puisque  $G_q^{-1} \circ G_{q'}$  est un difféomorphisme sur  $U \cap U'$ . Ces couples forment donc un atlas et définissent une structure différentiable sur  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ .

**(iv) Variété connexe** Étudions maintenant les propriétés de  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  en tant qu'espace topologique (rappelons que  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est munie de la topologie  $\mathcal{T}$  définie au point (ii)).

Tout d'abord,  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est connexe, et même connexe par arcs. En effet, si  $q_1$  et  $q_2$  sont des points de  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , on peut écrire  $q_2$  sous la forme  $q_2 = \phi_{t_k}^{X_k} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{X_1}(q_1)$ , ce qui implique que  $q_1$  et  $q_2$  peuvent être joints par le chemin constitué de la trajectoire de  $X_1$  issue de  $q_1$  suivie pendant un temps  $t_1$ , puis de la trajectoire de  $X_2$  pendant un temps  $t_2$ , etc. De plus, chacun des flots  $t \mapsto \phi_t^X$ ,  $X \in \mathcal{F}$ , étant une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , le chemin ainsi construit est continu, ce qui prouve la connexité par arcs.

D'autre part, il est clair que  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est un espace topologique séparé. Muni de la structure différentiable du (iii), il forme donc une variété généralisée (voir le commentaire page 3), c'est-à-dire une variété différentiable dont la topologie n'est pas forcément à base dénombrable. Or nous venons de voir que  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est connexe. Pour montrer que c'est une variété il suffit donc de montrer que c'est un espace métrisable (voir encore page 3).

Rappelons d'abord que la variété  $M$  elle-même est métrisable : en effet, toute variété différentiable peut être munie d'une métrique riemannienne. On peut donc choisir une distance  $d_M$  sur  $M$ , les boules ouvertes  $B_M(q, \varepsilon)$  associées à cette distance étant des ouverts de  $M$ . Cette distance induit une notion de longueur : si  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , est un chemin continu de  $M$ , la *longueur* de  $\gamma$ , notée  $\ell(\gamma)$ , est définie comme le supremum de toutes les sommes de la forme  $\sum_{i=0}^N d_M(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$  où  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{N+1} = b$  est une partition finie de  $[a, b]$  (de façon équivalente, si  $d_M$  est une distance riemannienne,  $\ell(\gamma)$  est la longueur riemannienne de  $\gamma$ ).

Définissons alors une distance  $d$  sur  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  en posant, pour  $q_1, q_2 \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ ,

$$d(q_1, q_2) = \inf \ell(\gamma),$$

l'infimum étant pris sur tous chemins  $\gamma$  reliant  $q_1$  à  $q_2$  et contenus dans  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ . L'orbite

étant connexe par arcs,  $d$  est à valeurs finies et on vérifie aisément que  $c$ 'est une distance<sup>3</sup>. Il reste à montrer que  $d$  induit la topologie  $\mathcal{T}$ , ce qui revient à montrer que toute boule (définie par  $d$ ) suffisamment petite contient un ouvert de  $\mathcal{T}$  et que tout ouvert suffisamment petit de  $\mathcal{T}$  contient une boule. Il suffit de montrer ces propriétés au voisinage d'un point quelconque de l'orbite.

Soit donc  $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$  et  $G_q(U_q)$  un voisinage de  $q$  dans  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  qui est une sous-variété de  $M$  (nous avons vu au point (i) qu'il existait de tels voisinages).

Considérons une boule  $B(q, \varepsilon)$ , avec  $\varepsilon > 0$ . Remarquons que tout point de  $G_q(U_q)$  s'écrit  $\phi_{t_m}^m \circ \cdots \circ \phi_{t_1}^1(q)$  et peut donc être vu comme le point final d'un chemin dont le paramètre évolue de 0 à  $|t_1| + \cdots + |t_m|$ . Or il existe une constante  $C$  telle que la longueur de tout chemin de ce type soit inférieure à  $C\|t\|$ , où  $t = (t_1, \dots, t_m)$  (c'est une conséquence triviale du lemme de Gronwall). On peut donc choisir un réel  $\eta > 0$  tel que  $\|t\| < \eta$  implique  $d(q, G_q(t)) < \varepsilon$ . Autrement dit, en posant  $U = \{\|t\| < \eta\} \subset \mathbb{R}^m$ , la boule  $B(q, \varepsilon)$  contient l'ouvert  $G_q(U)$  de la topologie  $\mathcal{T}$ .

Inversement, puisque  $G_q(U_q)$  est une sous-variété (plongée) de  $M$ , les voisinages ouverts de  $q$  pour la topologie  $\mathcal{T}$  suffisamment petits sont engendrés par les intersections  $B_M(q, \varepsilon) \cap G_q(U_q)$ , avec  $\varepsilon$  suffisamment petit. Il suffit donc de montrer qu'un tel ouvert  $B_M(q, \varepsilon) \cap G_q(U_q)$  contient une boule pour la distance  $d$ . Quitte à réduire  $\varepsilon$ , on suppose de plus  $d(q, \partial G_q(U_q)) > \varepsilon$ . Tout chemin sur  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  de longueur inférieure à  $\varepsilon$  issu de  $q$  est donc contenu dans  $G_q(U_q)$ . D'autre part, puisque  $d \geq d_M$ , la boule  $B(q, \varepsilon)$  est incluse dans  $B_M(q, \varepsilon)$ . Par conséquent l'ouvert  $B_M(q, \varepsilon) \cap G_q(U_q)$  contient la boule  $B(q, \varepsilon)$ .

En conclusion, nous avons montré que  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  était métrisable. C'est donc une variété différentiable. Elle est également connexe et son espace tangent en un point  $q$  est  $\Pi_q$ .

**(v) Sous-variété immergée** L'inclusion  $i : \text{Orb}_p(\mathcal{F}) \rightarrow M$  est une immersion, car, sur chaque ouvert de carte  $G_q(U_q)$  de  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , la restriction de  $i$  s'écrit

$$i|_{G_q(U_q)} = G_q \circ G_q^{-1}|_{G_q(U_q)},$$

c'est-à-dire comme composition d'une immersion et d'un difféomorphisme. Finalement la variété  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est bien une sous-variété immergée de  $M$ . ■

*Remarque.* Il est important de noter que les orbites ne sont pas toutes de même dimension. C'était déjà clair pour les orbites d'un champ de vecteurs qui peuvent être de dimension 0 ou 1.

## 4.4 Espace tangent à une orbite

Quand la famille  $\mathcal{F}$  est réduite à un unique champ de vecteurs  $X$ , l'espace tangent à une orbite  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est simplement la droite vectorielle  $\mathbb{R}X(p) \subset T_pM$ . En revanche

3. Rappelons qu'une distance sur un ensemble  $N$  est une fonction  $d : N \times N \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ , qui est symétrique et qui vérifie l'inégalité triangulaire.

quand  $\mathcal{F}$  est constituée de plusieurs champs de vecteurs, il devient difficile de déterminer la structure de l'espace tangent  $T_p\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  en terme de champs de vecteurs de  $\mathcal{F}$  : la principale raison est que cet espace n'est pas, en général, déterminé par les propriétés locales des éléments de  $\mathcal{F}$  (voir ci-dessous l'exemple page 57).

Le but de cette section est d'étudier  $T_p\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  et de voir dans quels cas – et comment – il dépend des champs de vecteurs de  $\mathcal{F}$ .

Il est déjà clair que tout champ de vecteurs de  $\mathcal{F}$  est tangent aux orbites de  $\mathcal{F}$ . En général il y en a d'autres : les combinaisons linéaires à coefficients constants de ces champs bien sûr, mais également leurs crochets de Lie.

**Lemme 4.8.** *Si  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs tangents à une sous-variété  $N$  de  $M$ , leur crochet de Lie  $[X, Y]$  est aussi tangent à  $N$ .*

**Preuve.** D'après le lemme 3.2, les restrictions  $X|_N$  et  $Y|_N$  de  $X$  et  $Y$  à  $N$  sont des champs de vecteurs sur  $N$ . De plus  $\phi_s^X(p)$  est contenu dans  $N$  pour tout  $p \in N$  et est égal à  $\phi_s^{X|_N}(p)$  (corollaire 3.4). Écrivons alors le crochet de Lie comme une dérivée de Lie :

$$[X, Y](p) = L_X Y(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\phi_{-t}^X \circ (Y(\phi_t^X(p))) - Y(p)].$$

Dans cette expression,  $\phi_t^X(p)$  peut être remplacé par  $\phi_s^{X|_N}(p)$  et  $Y$  par  $Y|_N$ , car  $Y$  n'est évalué qu'en des points  $\phi_t^X(p) \in N$ . Ainsi,  $[X, Y](p) = [X|_N, Y|_N](p)$  est un vecteur tangent à  $N$ . ■

**Corollaire 4.9.** *Pour tout  $q \in \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ ,  $\text{Lie}_q \mathcal{F} \subset T_q \text{Orb}_p(\mathcal{F})$ .*

Cette inclusion donne déjà un premier résultat sur les orbites dans un cas particulier qui sera très utile pour l'étude des systèmes commandés (voir théorème 5.5).

**Lemme 4.10.** *Soient  $M$  une variété connexe et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}(M)$  une famille de champs de vecteurs telle que, pour tout  $q \in M$ ,  $\text{Lie}_q \mathcal{F} = T_q M$ . Alors  $\mathcal{F}$  a une unique orbite  $\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = M$ .*

**Preuve.** Comme  $\dim \text{Lie}_q \mathcal{F} = \dim M$ , chaque orbite est une variété de même dimension que  $M$ , et est donc ouverte dans  $M$ . Or  $M$  est l'union des orbites disjointes et  $M$  est connexe : il y a donc une unique orbite égale à  $M$  tout entière. ■

Plus généralement, à quelle condition les espaces tangents aux orbites sont donnés par les valeurs de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de  $\mathcal{F}$ ? Le lemme suivant donne une condition nécessaire et suffisante.

**Lemme\* 4.11.**  *$T_p \text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \text{Lie}_p(\mathcal{F})$  pour tout  $p \in M$  si et seulement si  $\phi_t^X Y(p) \in \text{Lie}_p(\mathcal{F})$  pour tout flot  $\phi_t^X$  d'un élément  $X$  de  $\mathcal{F}$ , tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout élément  $Y$  de  $\text{Lie}(\mathcal{F})$ .*

**Preuve.** Rappelons que  $\text{Lie}_p(\mathcal{F}) \subset T_p\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , l'égalité est donc équivalente à l'inclusion dans l'autre sens. Nous allons montrer d'abord que la condition énoncée dans le lemme est nécessaire puis qu'elle est suffisante.

$\implies$ : Supposons que,  $\forall p \in M$ ,  $T_p\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \text{Lie}_p(\mathcal{F})$  et considérons  $Y \in \text{Lie}(\mathcal{F})$ ,  $X \in \mathcal{F}$  et  $p \in M$ . Comme  $Y$  est tangent aux orbites, la courbe  $\sigma_t(s) = \phi_t^X \circ \phi_s^Y \circ \phi_{-t}^X(p)$  est incluse dans l'orbite  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  de  $p$ . Son vecteur tangent en  $s = 0$  appartient donc à l'espace tangent  $T_p\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , égal à  $\text{Lie}_p(\mathcal{F})$  par hypothèse, c'est-à-dire

$$\frac{d\sigma_t}{ds}(s=0) = \phi_t^X * Y(p) \in T_p\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \text{Lie}_p(\mathcal{F}).$$

$\impliedby$ : Supposons maintenant que  $\phi_t^X * Y(q) \in \text{Lie}_q(\mathcal{F})$  pour tout  $q \in M$ ,  $X \in \mathcal{F}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $Y \in \text{Lie}(\mathcal{F})$  et considérons  $\phi_* X(p)$  un élément de  $T_p\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ , où  $X \in \mathcal{F}$  et  $\phi = \phi_{t_k}^k \circ \dots \circ \phi_{t_1}^1$  appartient à  $G(\mathcal{F})$  (c'est-à-dire que chaque  $\phi_t^i$  est le flot d'un champ  $X_i \in \mathcal{F}$ ).

Comme  $X \in \text{Lie}(\mathcal{F})$ , il résulte de l'hypothèse que  $\phi_{t_1}^1 * X(q) \in \text{Lie}_q(\mathcal{F})$  pour tout  $q$ . Par conséquent,  $\phi_{t_2}^2 * (\phi_{t_1}^1 * X)(q)$  appartient aussi à  $\text{Lie}_q(\mathcal{F})$ , et, en itérant,  $\phi_* X(q)$  également. L'espace tangent à l'orbite  $T_p\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  est donc inclus dans  $\text{Lie}_p(\mathcal{F})$ , ce qui conclut la preuve.  $\blacksquare$

*Exemple.* Donnons un exemple de famille pour laquelle  $\text{Lie}_p(\mathcal{F}) \neq T_p\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ . Prenons la famille  $\mathcal{F} = \{X_1, X_2\}$  dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$  et  $X_2 = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$  où

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Il est clair (faire un dessin) que  $\mathcal{F}$  a une unique orbite égale à  $\mathbb{R}^2$  tout entier. En revanche, en  $q = (x, y)$  avec  $x \leq 0$ , l'algèbre de Lie de  $\mathcal{F}$  est  $\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x}$ , et est de dimension 1.

La condition énoncée dans le lemme 4.11 permet d'obtenir un théorème qui a des implications importantes, tant du point de vue théorique (voir le théorème de Frobenius dans la section suivante) que pour les applications aux systèmes commandés.

**Théorème 4.12.** *Soit  $\mathcal{F}$  une famille de champs de vecteurs telle que la dimension de  $\text{Lie}_p(\mathcal{F})$  est une constante  $k$  indépendante du point  $p \in M$ .*

*Alors toutes les orbites de  $\mathcal{F}$  sont des sous-variétés immergées de dimension  $k$  et leur espace tangent en tout point est  $T_p\text{Orb}_p(\mathcal{F}) = \text{Lie}_p(\mathcal{F})$ .*

**Preuve\*.** La seule chose à montrer est que, sous les hypothèses du théorème, la condition énoncée dans le lemme 4.11 est vérifiée. On considère donc un champ  $X \in \mathcal{F}$ , de flot  $\phi$ , un point  $p \in M$  et on va montrer que,  $\forall Y \in \text{Lie}(\mathcal{F})$  et  $\forall t$ , on a  $\phi_t * Y(p) \in \text{Lie}_p(\mathcal{F})$ .

Choisissons  $k$  champs de vecteurs  $Y_1, \dots, Y_k$  dans  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  dont les valeurs en  $p$  forment une base de  $\text{Lie}_p(\mathcal{F})$ . Comme la dimension de  $\text{Lie}_q(\mathcal{F})$  est constante,  $Y_1(q), \dots, Y_k(q)$  forment une base de  $\text{Lie}_q(\mathcal{F})$  pour tout point  $q$  dans un voisinage  $U$  de  $p$ .

Remarquons alors que, pour  $t$  suffisamment petit, le point  $q_t = \phi_{-t}(p)$  appartient à  $U$  et que le vecteur tangent  $Y(q_t)$  est combinaison linéaire des vecteurs  $Y_i(q_t)$ . Comme  $\phi_{t*}Y(p) = d\phi_t(Y(q_t))$ , ceci implique que  $\phi_{t*}Y(p)$  est combinaison linéaire des  $\phi_{t*}Y_i(p)$ . Ainsi, pour  $t$  suffisamment petit, il suffit de montrer que  $\phi_{t*}Y_i(p) \in \text{Lie}_p(\mathcal{F})$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

Considérons la courbe  $W_i(t) = \phi_{t*}Y_i(p)$  dans  $T_pM$ . Nous allons montrer qu'elle est solution d'une équation différentielle linéaire dans  $T_pM$ . En effet :

$$\frac{dW_i}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(\phi_{t*}Y_i)(p) = \phi_{t*}L_X Y_i(p) = \phi_{t*}[X, Y_i](p).$$

Comme  $[X, Y_i]$  est un élément de  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  et que  $\phi_{-t}(p)$  appartient à  $U$ , il existe des fonctions différentiables  $f_i^j$  sur  $M$  telles que

$$[X, Y_i](\phi_{-t}(p)) = \sum_{j=1}^k f_i^j(\phi_{-t}(p)) Y_j(\phi_{-t}(p)).$$

Par conséquent

$$\frac{dW_i}{dt}(t) = \sum_{j=1}^k f_i^j(\phi_{-t}(p)) \phi_{t*}Y_j(p),$$

ou encore  $\dot{W}_i(t) = \sum_{j=1}^k a_i^j(t) W_j(t)$ .

Notons  $A(t)$  la matrice  $k \times k$  de composantes  $a_i^j(t)$  et  $M(t) = (m_i^j(t))$  la matrice  $k \times k$  solution de l'équation différentielle linéaire matricielle

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t)M(t), \\ M(0) = I_k \end{cases}$$

(autrement dit  $M(t) = R_A(t, 0)$ , où  $R_A(t, 0)$  est la résolvante de l'équation  $x'(t) = A(t)x(t)$  dans  $\mathbb{R}^k$ ). On a alors, pour tout  $i$ ,  $W_i(t) = \sum_j m_i^j(t) W_j(0) = \sum_j m_i^j(t) Y_j(p)$ , ce qui implique que tous les  $W_i(t)$  appartiennent à  $\text{Lie}_p(\mathcal{F})$  pour  $t$  suffisamment petit.

On a donc montré que, pour tous  $X \in \mathcal{F}$ ,  $Y \in \text{Lie}(\mathcal{F})$  et  $p \in M$ ,  $\phi_{t*}^X Y(p) \in \text{Lie}_p(\mathcal{F})$  pour  $t$  suffisamment petit.

Pour  $t$  quelconque, la conclusion s'obtient en utilisant la compacité de la courbe  $\phi_s^X(p)$ ,  $0 \leq s \leq t$ , et en écrivant  $\phi_{t*}^X Y(p)$  sous la forme

$$\phi_{t*}^X Y(p) = \phi_{t_i*}^X (\dots (\phi_{t_1*}^X Y)) (p).$$

■

## 4.5 Distributions et mécanique non-holonome\*

**Définition.** Une *distribution*  $\Delta \subset TM$  sur  $M$  est une famille de sous-espaces vectoriels  $\Delta_q \subset T_qM$  dépendant de façon différentiable de  $q \in M$ .

Autrement dit, on peut toujours trouver localement des champs de vecteurs formant une base de  $\Delta$ . Ce qui implique que la dimension des sous-espaces  $\Delta_q$  est constante sur  $M$ . Cette dimension  $\dim \Delta_q$  est appelée le *rang de la distribution*. On parle parfois d'une distribution comme d'un champ de sous-espaces vectoriels tangents à  $M$ .

*Exemples.*

- Le fibré tangent  $TM$  est l'unique distribution de rang  $n$ .
- Un champ de vecteurs sur  $M$  définit une distribution de rang 1 si il ne s'annule jamais sur  $M$ .
- Plus généralement, une famille  $\mathcal{F}$  de champs de vecteurs peut engendrer une distribution si les sous-espaces  $\mathcal{F}_q = \text{Vect}\{X(q), X \in \mathcal{F}\}$  sont de dimension constante sur  $M$ .

Inversement, on peut associer à toute distribution  $\Delta$  la famille des champs de vecteurs qui y sont tangents

$$\mathcal{F}_\Delta = \{X \in \mathcal{X}(M), X(q) \in \Delta_q \forall q \in M\}$$

Étant donnée une distribution, il est naturel de se demander si elle n'est pas l'espace tangent à une variété.

**Définition.** Une distribution  $\Delta \subset TM$  est *intégrable* si, pour tout point  $p \in M$ , il existe une sous-variété immergée  $N_p \subset M$  contenant  $p$  et telle que  $T_q N_p = \Delta_q$  pour tout point  $q \in N_p$ . On appelle  $N_p$  une *variété intégrale* de  $\Delta$  en  $p$ .

Si  $\Delta$  est une distribution intégrable, tout champ de  $\mathcal{F}_\Delta$  est tangent aux variétés intégrales  $N_p$ . Ainsi, localement, l'orbite de  $\mathcal{F}_\Delta$  par  $p$  est incluse dans  $N_p$ . Vu le corollaire 4.9, ceci implique que  $\text{Lie}_p(\mathcal{F}_\Delta) = \Delta_p$ . Cette propriété est l'involutivité.

**Définition.** Une distribution  $\Delta$  est *involutive* si, pour tous champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{F}_\Delta$ , on a  $[X, Y](p) \in \Delta_p$  pour tout  $p \in M$ .

Cette propriété est en fait équivalente à l'intégrabilité, comme l'indique le théorème suivant.

**Théorème 4.13** (Théorème de Frobenius). *Une distribution est intégrable si et seulement si elle est involutive.*

**Preuve.** Nous venons de montrer que l'intégrabilité implique l'involutivité. Inversement, supposons que  $\Delta$  est une distribution involutive. Alors l'algèbre de Lie  $\text{Lie}_q(\mathcal{F}_\Delta) = \Delta_q$  est de rang constant sur  $M$ . Vu le théorème 4.12, ceci implique que toutes les orbites de  $\mathcal{F}_\Delta$  sont des variétés intégrales de  $\Delta$ , ce qui achève la preuve. ■

*Remarques.*

- Notons que les théorèmes de Frobenius et 4.12 sont équivalents puisque, sous les hypothèses de ce dernier, l'algèbre de Lie  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  est une distribution involutive.

- Le théorème de Frobenius apparaît ici comme une conséquence (ou plutôt un cas particulier) du théorème de l'orbite. Historiquement, ces deux théorèmes sont apparus dans l'ordre inverse, puisque le théorème de l'orbite date des années 70 alors que le théorème de Frobenius est un résultat classique de la géométrie différentielle et date du début du 20ème siècle. La preuve classique de ce dernier théorème est nettement plus simple que celle du théorème de l'orbite et a son intérêt propre : elle fait intervenir les propriétés des familles de champs de vecteurs formant localement des champs de coordonnées (voir l'exercice A.1).

**Application à la mécanique non-holonome** La théorie des distributions a des applications importantes en mécanique lagrangienne (voir les cours AOT11 et AOT12). Dans notre contexte, un système lagrangien est un couple  $(M, L)$  composé de :

- un *espace des configurations*, noté  $M$  : c'est une variété différentiable et son fibré tangent  $TM$  est appelé *l'espace des phases* ;
- un *lagrangien*  $L \in C^\infty(TM)$ , c'est-à-dire une fonction différentiable de  $TM$  dans  $\mathbb{R}$ .

Rappelons que des coordonnées locales  $q \mapsto (x^1, \dots, x^n)$  sur  $M$  induisent une base  $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_q)$  sur  $T_qM$  et donc des coordonnées locales sur  $TM$

$$(q, v) \mapsto (x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n).$$

On appelle *mouvement* du système lagrangien une courbe  $q(t) \in M$  qui satisfait le principe de d'Alembert-Lagrange, que l'on écrit localement : pour tout  $t$  et pour tout  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in T_{q(t)}M$ ,

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) \right] \xi^i = 0.$$

Comme  $\xi$  est arbitraire ici, le principe de d'Alembert-Lagrange est équivalent à l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Considérons maintenant un système lagrangien sous contraintes : la vitesse des mouvements du système lagrangien appartient à un sous-ensemble  $\Delta_q$  de  $T_qM$  en tout point. Pour simplifier, on suppose que  $\Delta$  forme une distribution de rang  $m$  sur  $M$ . On distingue alors deux cas.

- Si  $\Delta$  est intégrable (c'est-à-dire involutive par le théorème de Frobenius), on dit que les contraintes sont *holonomes*. Dans ce cas, tout point  $q \in M$  est inclus dans une unique sous-variété intégrale  $N_q$  de dimension  $m$  avec  $TN_q = \Delta|_{N_q}$  et chaque mouvement du système lagrangien reste dans une variété intégrale.



- Si  $\Delta$  n'est pas intégrable, on dit que les contraintes sont *non-holonomes*. Chaque mouvement du système reste alors dans une orbite de la distribution (c'est-à-dire une orbite de la famille  $\mathcal{F}_\Delta$ ), qui est une variété de dimension  $k > m$ .

Supposons de plus que  $\text{Lie}(\mathcal{F}_\Delta)$  soit une distribution (c'est-à-dire qu'elle est de rang constant), ce qui est automatiquement vérifiée pour les contraintes holonomes. Nous pouvons alors écrire les contraintes en coordonnées locales.

Soit  $k$  la dimension des orbites de  $\mathcal{F}_\Delta$  (cette dimension ne dépend pas de l'orbite d'après le théorème 4.12) :  $k = m$  si les contraintes sont holonomes,  $m < k \leq n$  sinon. Il existe alors (voir exercice A.1) un système local de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  et des fonctions  $f_{m+1}, \dots, f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$  tels que :

- le plan tangent à l'orbite  $T_x \text{Orb}_x(\mathcal{F}_\Delta)$  a pour équation

$$\dot{x}^{k+1} = \dots = \dot{x}^n = 0;$$

- la distribution  $\Delta$  a localement pour équation :

$$\begin{cases} \dot{x}^{m+1} = f_{m+1}(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^m) \\ \vdots \\ \dot{x}^k = f_k(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^m) \\ \dot{x}^{k+1} = \dots = \dot{x}^n = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,  $\Delta_x$  est paramétré par  $\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^m$ .

Dans ces coordonnées, le principe de d'Alembert-Lagrange s'écrit : pour tout  $t$  et pour tout  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ ,

$$\sum_{i=1}^m \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) \right] \xi^i + \sum_{i=m+1}^k \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) \right] f_i(x, \xi) = 0.$$

Quand les contraintes sont holonomes ( $m = k$ ), ceci implique que les mouvements du systèmes satisfont

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \left( q(t), \frac{dq}{dt}(t) \right) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m, \\ q(t) \in N_{q(0)} = \{x^{m+1} = \dots = x^n = 0\}. \end{cases}$$

Le principe de d'Alembert-Lagrange reste alors équivalent à l'équation d'Euler-Lagrange sur chaque variété intégrale de la distribution des contraintes.

En revanche, pour les contraintes non-holonomes, l'équation d'Euler-Lagrange n'est plus valable.



# Chapitre 5

## Systèmes commandés affines\*

### 5.1 Introduction

Nous allons utiliser les outils de géométrie différentielle que nous avons introduits pour analyser les systèmes dynamiques commandés, et plus particulièrement ceux provenant de la robotique.

Nous nous limiterons dans ce cours aux systèmes commandés dits affines.

**Définition.** Un *système commandé affine*, ou simplement *système affine*, est un système commandé de la forme

$$\dot{q} = X_0(q) + u_1 X_1(q) + \cdots + u_m X_m(q), \quad q \in M, \quad u \in U, \quad (5.1)$$

où  $X_0, \dots, X_m$  sont des champs de vecteurs sur la variété  $M$  et  $U$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^m$  (a priori quelconque). Le champ  $X_0$  est appelé *la dérive* du système.

Ces systèmes représentent une classe très générale de systèmes commandés. En effet :

- on peut considérer un système de commandé comme une contrainte sur la vitesse du type  $\dot{q} \in V_q$ , où  $V_q \subset T_q M$ . Si les sous-ensembles  $V_q$  forment une distribution (voir § 4.5), ou plus généralement un champ de sous-espaces affines, choisir des champs de vecteurs engendrant  $V_q$  donne une caractérisation du type (5.1).
- Du point de vue de la mécanique classique, qui est généralement celui utilisé en robotique, toute commande résulte de l'action d'une force ou d'un couple. Elle agit donc linéairement sur l'accélération du système. Le système commandé doit alors s'écrire dans l'espace des phases et prend la forme (5.1). Par exemple, le système  $\ddot{x} = u$  dans  $\mathbb{R}$  se réécrit dans  $T\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$  sous la forme :

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_0(q) + u X_1(q).$$

- Un autre point de vue, typique de la robotique, est de considérer que l'on dispose de  $m$  actionneurs, l'action de chacun d'eux sur le système étant décrite par  $\dot{q} = X_i(q)$ .

En les combinant et en tenant compte de la vitesse  $X_0(q)$  du système, on obtient à nouveau un système affine.

- Enfin, prenons un système commandé quelconque (dans  $\mathbb{R}^n$  ou en coordonnées locales)  $\dot{x} = f(x, u)$  utilisant des lois de commande dérivables. En posant  $v = \dot{u}$  et  $y = (x, u)$ , on retrouve un système affine  $\dot{y} = X_0(y) + vX_1(y)$ .

Dans tout le chapitre nous nous appuyerons sur les conventions et notations introduites dans la section 4.1. Ainsi, nous considérerons des lois de commande constantes par morceaux. L'ensemble des points atteignables par le système à partir de  $p$  à l'aide de ces lois de commande est noté  $\mathcal{A}_p$ . Notons cependant que cette hypothèse sur la classe des lois de commande n'est pas restrictive : pour un système affine, tout point atteignable à partir de  $p$  au moyen de commandes mesurables l'est aussi au moyen de commandes constantes par morceaux (nous ne montrerons pas ce résultat dans ce cours, sa preuve sort du cadre de la géométrie différentielle étudié ici).

**Définition.** Un système commandé est dit *commandable* si  $\mathcal{A}_p = M$  quel que soit le point  $p \in M$ .

Le but de ce chapitre est d'étudier les ensembles atteignables des systèmes affines et d'en déduire des conditions de commandabilité.

## 5.2 Ensembles atteignables

Considérons donc un système affine de la forme (5.1). Ce système correspond à une famille de champs de vecteurs

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ X_0 + \sum_{i=1}^m u_i X_i, \quad u \in U \right\}.$$

L'ensemble atteignable  $\mathcal{A}_p$  est alors un sous-ensemble de l'orbite de  $\mathcal{F}(U)$  passant par  $p$ .

Dans ce chapitre nous supposons toujours que  $\mathcal{F}(U)$  est *Lie-déterminée*, c'est-à-dire que l'algèbre  $\text{Lie}_p(\mathcal{F}(U))$  a une dimension constante sur  $M$ . D'après le théorème 4.12, cette hypothèse assure que toutes les orbites de la famille  $\mathcal{F}(U)$  sont des sous-variétés immergées de même dimension dont l'espace tangent est  $\text{Lie}_p(\mathcal{F}(U))$ .

Quitte à se restreindre à une orbite  $\text{Orb}_p(\mathcal{F})$  et à considérer la famille  $\mathcal{F}(U)|_{\text{Orb}_p(\mathcal{F})}$ , nous supposons dorénavant que la dimension de  $\text{Lie}_p(\mathcal{F}(U))$  est égale à la dimension de  $M$  en tout point (l'orbite de tout point est donc la variété  $M$  tout entière).

La propriété fondamentale du sous-ensemble  $\mathcal{A}_p$  de  $M$  est la suivante.

**Théorème 5.1.** *Soit un système affine tel que  $\text{Lie}_p(\mathcal{F}(U)) = T_p M$  en tout point  $p \in M$ . Alors,  $\forall p \in M$ ,*

$$\mathcal{A}_p \subset \overline{\text{int} \mathcal{A}_p}.$$

Autrement dit l'ensemble atteignable a un intérieur non vide. Il peut être :

- un ensemble ouvert, donc une variété de dimension  $n$  ;
- une variété à bord :  $\text{int}\mathcal{A}_p$  est une variété de dimension  $n$  et  $\partial\mathcal{A}_p$  une variété de dimension  $n - 1$  ;
- une variété de dimension  $n$  avec un bord ayant des singularités (coins, cusps).

En revanche  $\mathcal{A}_p$  ne peut pas être :

- un sous-ensemble d'une variété de plus petite dimension ;
- un ensemble dont les points du bord sont isolés des points intérieurs.

*Exercice 5.1.* Quelle est la structure de l'ensemble atteignable  $\mathcal{A}_0$  pour les systèmes affines dans  $\mathbb{R}^2$  définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = y \frac{\partial}{\partial x} \\ X_1 = \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 = \frac{\partial}{\partial x} \\ X_1 = \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 = \frac{\partial}{\partial x} \\ X_1 = x \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right. , \quad \text{avec } U = [-1, 1].$$

**Preuve** (du théorème 5.1). Fixons  $p \in M$  et notons  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(U)$ . Prenons un point  $q' \in \mathcal{A}_p$  et montrons qu'il appartient aussi à  $\overline{\text{int}\mathcal{A}_p}$ .

- Si  $\dim M = \dim \text{Lie}_{q'}(\mathcal{F}) \neq 0$ , il existe  $Y_1 \in \mathcal{F}$  tel que  $Y_1(q') \neq 0$ . Soit  $\phi_{s_1}^1$  le flot de  $Y_1$ . La courbe  $s_1 \mapsto \phi_{s_1}^1(q')$ ,  $s_1 \in ]0, \varepsilon[$ , est une variété de dimension 1 pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit et est incluse dans  $\mathcal{A}_p$ .  
Si  $\dim M = 1$ , alors  $\phi_{s_1}^1(q') \in \text{int}\mathcal{A}_p$  pour  $s_1 > 0$  suffisamment petit, d'où le théorème.
- Si  $\dim M = \dim \text{Lie}_{q'}(\mathcal{F}) > 1$ , alors, arbitrairement près de  $q'$ , on peut trouver un point  $q_1$  sur la courbe  $\phi_{s_1}^1(q')$  et un champ  $Y_2 \in \mathcal{F}$  tels que  $Y_2(q_1)$  n'est pas tangent à la courbe  $\phi_{s_1}^1(q')$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \phi_{t_1}^1(q'), \quad t_1 \text{ suffisamment petit,} \\ Y_1(q_1) \text{ et } Y_2(q_1) \text{ linéairement indépendants} \end{array} \right.$$

(en effet, sinon tous les champs de  $\mathcal{F}$  sont tangents à la courbe pour  $s_1$  petit, donc tous leurs crochets aussi, ce qui entraînerait  $\dim \text{Lie}(\mathcal{F})|_{\text{courbe}} = 1$ ).

Il existe donc un voisinage  $V(t_1^1, 0)$  de  $(t_1^1, 0)$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^2 \cap V(t_1^1, 0) & \rightarrow & \mathcal{A}_p \\ (s_1, s_2) & \mapsto & \phi_{s_2}^2 \circ \phi_{s_1}^1(q') \end{array}$$

est une immersion. Son image est donc une surface (une sous-variété de dimension 2) de  $M$ . Si  $\dim M = 2$ , la preuve est terminée.

- Si  $\dim M > 2$ , par le même raisonnement que précédemment, on peut trouver un point  $q_2 = \phi_{t_2}^2 \circ \phi_{t_1}^1(q')$  arbitrairement proche de  $q'$  sur la surface et  $Y_3 \in \mathcal{F}$  tels que  $Y_3(q_2)$  ne soit pas tangent à la surface. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^3 \cap V(t_1^1, t_2^2, 0) & \rightarrow & \mathcal{A}_p \\ (s_1, s_2, s_3) & \mapsto & \phi_{s_3}^3 \circ \phi_{s_2}^2 \circ \phi_{s_1}^1(q') \end{array}$$

est une immersion et son image une sous-variété de dimension 3.

Ainsi, par récurrence, on construit une sous-variété de  $M$  de dimension  $n$  – c'est-à-dire un ouvert – incluse dans  $\mathcal{A}_p$  et arbitrairement proche de  $q'$ . Ceci montre bien que  $q' \in \overline{\text{int}\mathcal{A}_p}$ . ■

*Remarque.* Cette preuve montre également que, pour tout ouvert  $\Omega \subset M$  et tout point  $p \in \Omega$ ,  $\mathcal{A}_p \cap \Omega$  contient un ouvert.

**Corollaire 5.2.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, si  $\overline{\mathcal{A}_p} = M$  pour un point  $p \in M$ , alors  $\mathcal{A}_p = M$ .*

**Preuve.** Fixons  $q_0 \in M$ . Nous allons montrer qu'il appartient à  $\mathcal{A}_p$ . Considérons pour cela la famille de champs de vecteurs

$$-\mathcal{F} = \{-X, X \in \mathcal{F}\}.$$

Comme  $-\mathcal{F}$  satisfait les mêmes propriétés que  $\mathcal{F}$ , son ensemble atteignable vérifie, pour tout  $q \in M$ ,

$$\mathcal{A}_q(-\mathcal{F}) \subset \overline{\text{int}\mathcal{A}_q(-\mathcal{F})}.$$

Prenons alors un point quelconque  $q \in \text{int}\mathcal{A}_{q_0}(-\mathcal{F})$  et un voisinage de ce point  $V(q) \subset \mathcal{A}_{q_0}(-\mathcal{F})$ . Comme  $\mathcal{A}_p$  est dense dans  $M$ , l'intersection de  $\mathcal{A}_p$  et de  $V(q)$  est non vide, ce qui implique que celle de  $\mathcal{A}_p$  et de  $\mathcal{A}_{q_0}(-\mathcal{F})$  est non vide également. Il existe donc un point  $q'$  dans cette intersection, qui peut s'écrire de deux façons différentes :

$$\begin{aligned} q' &= \phi_{t_k}^{Y_k} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{Y_1}(p), \quad Y_i \in \mathcal{F}, \quad t_i > 0, \\ &= \phi_{s_1}^{-W_1} \circ \dots \circ \phi_{s_l}^{-W_l}(q_0), \quad W_i \in \mathcal{F}, \quad s_i > 0. \end{aligned}$$

Comme  $\phi_{s_i}^{-W_i} = (\phi_{s_i}^{W_i})^{-1}$ , cette égalité s'écrit

$$q_0 = \phi_{s_1}^{W_1} \circ \dots \circ \phi_{s_l}^{W_l} \circ \phi_{t_k}^{Y_k} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{Y_1}(p)$$

ce qui implique  $q_0 \in \mathcal{A}_p$ . ■

Ce corollaire est important pour l'étude de la commandabilité, puisqu'il permet de remplacer  $\mathcal{A}_p$  par son adhérence.

Enfin, nous allons expliciter la dépendance de  $\overline{\mathcal{A}_p}$  par rapport à la famille  $\mathcal{F}$ . Énonçons d'abord un résultat sur l'approximation d'un flot.

**Théorème 5.3.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs sur une variété  $M$ ,  $p$  un point de  $M$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  des réels positifs et  $T > 0$  tel que le flot  $\phi_t(p)$  du champ  $\lambda X + \mu Y$  soit défini sur l'intervalle  $[0, T]$ .*

*Alors il existe une suite  $\gamma^N(t)$  de trajectoires de la famille  $\{X, Y\}$ , avec  $\gamma^N(0) = p$ , qui converge uniformément vers  $\phi_t(p)$  sur  $[0, T]$  quand  $N \rightarrow +\infty$ .*

Nous admettrons ce résultat ici, sa preuve sort du cadre de ce cours (on peut la trouver dans [1, 4]).

Ce théorème implique que l'on peut ajouter à  $\mathcal{F}$  toute combinaison linéaire positive de ses éléments sans changer la adhérence de  $\mathcal{A}_p$ .

**Lemme 5.4.** *Pour un système affine Lie-déterminé,*

$$\overline{\mathcal{A}_p(\mathcal{F})} = \overline{\mathcal{A}_p(\text{cone}(\mathcal{F}))},$$

où  $\text{cone}(\mathcal{F})$  est le cône convexe positif engendré par  $\mathcal{F}$  :

$$\text{cone}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i, \lambda_i \in C^\infty(M), \lambda_i \geq 0, X_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathcal{X}(M).$$

## 5.3 Systèmes sans dérive

Un cas particulier important est celui des systèmes affines sans dérive :

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + \cdots + u_m X_m(q), \quad q \in M, \quad u \in U.$$

La famille associée à ce système est  $\mathcal{F}(U) = \{\sum_{i=1}^m u_i X_i, u \in U\}$ .

### 5.3.1 Conditions suffisantes de commandabilité

Pour les systèmes affines sans dérive, la commandabilité se déduit essentiellement du théorème suivant, qui est une conséquence directe du lemme 4.10.

**Théorème 5.5** (Théorème de Chow). *Soit  $\mathcal{F} = \{X_u, u \in U\}$  une famille symétrique telle que*

$$\dim \text{Lie}_q \mathcal{F} = \dim M, \quad \text{pour tout } q \in M. \quad (5.2)$$

*Alors, pour le système commandé correspondant, l'ensemble atteignable à partir d'un point  $p$  est la composante connexe de son espace de configuration contenant  $p$ .*

*Remarque.* Ce théorème a été établi en 1938 indépendamment par Chow et Rashevsky. Nous avons choisi de le présenter ici comme une conséquence du théorème de l'orbite (qui date de 1973) mais il en serait plutôt le précurseur. La preuve originale du théorème de l'orbite s'appuie d'ailleurs sur la preuve du théorème de Chow.

La condition (5.2) est appelée *condition du rang* (ou condition de Chow). Notons qu'une famille qui satisfait la condition du rang est Lie-déterminée. Inversement, on a vu au § 5.2 que, quitte à se restreindre à une orbite, on peut toujours supposer qu'une famille Lie-déterminée satisfait la condition du rang.

Le théorème de Chow donne directement une condition de commandabilité pour les systèmes sans dérive quand  $U$  est  $\mathbb{R}^m$  tout entier.

**Proposition 5.6.** *Soit un système affine sans dérive sur une variété  $M$  connexe et dont l'ensemble de commande est  $U = \mathbb{R}^m$ . Alors, si  $\dim \text{Lie}_p(X_1, \dots, X_m) = \dim M$  pour tout  $p \in M$ , le système est commandable.*

**Preuve.** La famille associée au système est ici  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m) = \text{Vect}(X_1, \dots, X_m)$  et son algèbre de Lie est égale à l'algèbre de Lie engendrée par  $X_1, \dots, X_m$ . Ainsi  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$  est symétrique et satisfait la condition du rang, et on obtient la conclusion par le théorème de Chow. ■

Ce résultat reste valable avec des hypothèses beaucoup moins restrictives sur l'ensemble de commande.

**Théorème 5.7.** *Soit un système affine sans dérive sur une variété connexe  $M$ . Supposons que les deux conditions suivantes sont vérifiées*

- l'enveloppe convexe de l'ensemble de commande  $U$  contient un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^m$ ,
- $\dim \text{Lie}_p(X_1, \dots, X_m) = \dim M$  pour tout  $p \in M$ .

*Alors le système est commandable.*

**Preuve.** Quitte à restreindre  $U$ , on peut supposer que  $U$  est une boule  $B(0, \varepsilon)$  dans  $\mathbb{R}^m$ . La famille  $\mathcal{F}(U)$  est alors symétrique et satisfait la condition du rang puisque les algèbres  $\text{Lie}(\mathcal{F}(U))$  et  $\text{Lie}(X_1, \dots, X_m)$  sont égales. La commandabilité résulte alors du théorème de Chow. ■

*Exemple.* Reprenons l'exemple de la voiture (voir page 40), en autorisant maintenant seulement 4 commandes,  $(\pm 1, 0)$  et  $(0, \pm 1)$ . L'enveloppe convexe de cet ensemble de commande étant  $[-1, 1]^2$  et  $\text{Lie}(X_1, X_2)$  étant toujours de dimension 3, le système est commandable.

### 5.3.2 Problème de la sphère en roulement

Intéressons-nous à un problème de manipulation d'objet (c'est une classe de problèmes classique en robotique). On pose une balle de tennis sur une table et on la fait rouler entre la table et la paume de la main ouverte (on peut aussi imaginer une bille posée sur la paume de la main que l'on fait rouler avec le pouce). On suppose que la balle roule sans glisser ni pivoter. Peut-on amener la balle n'importe où sur la table avec n'importe quelle orientation ?

Commençons par formaliser cette question comme un problème de commandabilité. On considère la balle comme la sphère unité et la table comme un plan horizontal dans l'espace euclidien  $\mathbb{E}^3$ . Soit  $O$  un point fixe quelconque du plan et  $C$  le centre de la sphère. On choisit deux repères dans  $\mathbb{E}^3$  :

- $(O, e_1, e_2, e_3)$  est un repère orthonormé fixe, où  $(e_1, e_2)$  sont horizontaux et  $e_3$  est dirigé vers le haut ;



—  $(C, a_1, a_2, a_3)$  est un repère orthonormé mobile lié à la sphère.

Nous noterons en minuscule les coordonnées d'un point dans la base fixe ( $p \in \mathbb{R}^3$  représente donc les coordonnées du point  $P \in \mathbb{E}^3$ ).

Une configuration (position et orientation) de la sphère est caractérisée par :

- la matrice orthogonale  $R$  de transition entre la base fixe  $(e_1, e_2, e_3)$  et la base mobile  $(a_1, a_2, a_3)$ , c'est-à-dire  $R = (a_1 a_2 a_3)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  ;
- le centre  $C$  de la sphère, appartenant à un plan horizontal  $\mathbb{E}^2$ .

L'espace des configurations est donc la variété de dimension 5

$$M = \mathbb{E}^2 \times SO(3).$$

Écrivons maintenant les équations du mouvement. Soit  $P$  le point de contact de la sphère et du plan à l'instant  $t$ . La condition du roulement sans glissement se traduit en coordonnées fixes par  $\dot{p}(t) = 0$ . Comme  $p = c + \overrightarrow{CP}$ , on obtient

$$\dot{c}(t) + \frac{d\overrightarrow{CP}}{dt}(t) = 0.$$

D'autre part,  $P$  étant un point de la sphère,  $\overrightarrow{CP}(t) = R(t)p_0$ , et l'équation du mouvement s'écrit

$$\dot{c}(t) = -\dot{R}(t)p_0.$$

Avant de continuer le calcul, détaillons la structure de  $TM$ . Comme  $M$  est un produit de variété, son espace tangent est le produit des espaces tangents :  $T_{(C,R)}M = T_C\mathbb{E}^2 \times T_RSO(3)$ , et, d'après l'exercice 2.2,

$$T_RSO(3) = \{\Omega R, \Omega \text{ matrice anti-symétrique } 3 \times 3\}.$$

Puisque  $\dot{R} \in T_RSO(3)$ , il existe une courbe  $\Omega(t)$  de matrices antisymétriques telle que  $\dot{R}(t) = \Omega(t)R(t)$ .

L'équation du mouvement devient donc

$$\dot{c}(t) = -\Omega(t)R(t)p_0 = -\Omega(t)\overrightarrow{CP}(t).$$

Enfin,  $\overrightarrow{CP}(t) = -e_3$  puisque  $P$  est le point de contact à l'instant  $t$ , ce qui donne

$$\dot{c}(t) = \Omega(t)e_3.$$

Pour mettre cette équation sous la forme d'un système commandé, choisissons une base  $(A_1, A_2, A_3)$  de l'ensemble des matrices anti-symétriques :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les champs de vecteurs  $A_1R, A_2R, A_3R$  sur  $SO(3)$  forment une base de  $T_R SO(3)$  en tout point. Définissons maintenant des champs de vecteurs sur  $M$  :

$$\begin{aligned} X_1(c, R) &= A_1e_3 \oplus A_1R = -e_2 \oplus A_1R \\ X_2(c, R) &= A_2e_3 \oplus A_2R = e_1 \oplus A_2R \\ X_3(c, R) &= A_3e_3 \oplus A_3R = 0 \oplus A_3R \end{aligned}$$

En notant  $q = (c, R)$  les points de  $M$ , on en déduit que tout mouvement de la sphère satisfait la contrainte

$$\dot{q} \in \text{Vect}\{X_1(q), X_2(q), X_3(q)\}$$

ou, de façon équivalente,

$$\dot{q} = u^1 X_1(q) + u^2 X_2(q) + u^3 X_3(q), \quad u \in \mathbb{R}^3.$$

On obtient ainsi un système commandé affine sans dérive.

Nous n'avons tenu compte pour le moment que de la contrainte de roulement sans glissement. Il faut rajouter celle de non pivotement qui s'écrit tout simplement  $u^3 = 0$ . Le système commandé décrivant le roulement de la sphère sur un plan est donc :

$$\dot{q} = u^1 X_1(q) + u^2 X_2(q), \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad (5.3)$$

et la question initiale devient : est-ce que ce système est commandable ?

D'après la proposition 5.6, si l'algèbre de Lie engendrée par  $X_1$  et  $X_2$  est partout de dimension 5, le système (5.3) sera commandable. C'est ce que nous allons montrer.

Commençons par calculer le crochet de Lie de  $X_1$  et  $X_2$  :

$$[X_1, X_2]_M = -[e_2, e_1]_{\mathbb{E}^2} \oplus [A_1R, A_2R]_{SO(3)}.$$

Comme les champs  $e_1$  et  $e_2$  sont constants, leur crochet est nul :  $[e_2, e_1] = 0$ . D'autre part, pour le crochet dans  $SO(3)$  des champs  $\xi_i = A_iR$ ,

$$[\xi_1, \xi_2] = L_{\xi_1} \xi_2 = \left. \frac{d}{dt} (\phi_{-t*}^{\xi_1} \xi_2) \right|_{t=0}.$$

Comme  $\xi_1 = A_1R$  est linéaire, son flot  $\phi_s^{\xi_1} = \exp(sA_1)R$  est également linéaire. Sa différentielle est  $d\phi_s^{\xi_1} \cdot \Omega = \exp(sA_1)\Omega$  et donc

$$\phi_{-t*}^{\xi_1} \xi_2 = \exp(-tA_1)A_2 \exp(tA_1)R,$$

ce qui implique que

$$[A_1R, A_2R] = (-A_1A_2 + A_2A_1)R = -[A_1, A_2]R$$

où  $[A, B] = AB - BA$  désigne le commutateur des matrices (c'est en fait un résultat très général sur les *groupes de Lie*).

Or les commutateurs des matrices  $A_i$  sont :

$$[A_1, A_2] = A_3, \quad [A_3, A_1] = A_2, \quad [A_2, A_3] = A_1,$$

ce qui donne finalement

$$[X_1, X_2] = 0 \ominus A_3 R = -X_3.$$

Le même calcul montre immédiatement que

$$\begin{aligned} [X_1, [X_1, X_2]] &= 0 \oplus A_2 R \\ [X_2, [X_1, X_2]] &= 0 \ominus A_1 R. \end{aligned}$$

Il est clair que les champs  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $[X_1, X_2]$ ,  $[X_1, [X_1, X_2]]$  et  $[X_2, [X_1, X_2]]$  engendrent toujours un espace de dimension 5, ce qui montre que  $\dim \text{Lie}_q(X_1, X_2) = 5$  pour tout  $q \in M$ .

Ainsi le système (5.3) est commandable : il est toujours possible d'amener la balle dans une position donnée avec une orientation donnée.

### 5.3.3 Autres notions de commandabilité

Les systèmes sans dérive ont des propriétés de commandabilité plus fortes que la propriété habituelle  $\mathcal{A}_p = M$ .

Étant donné un système commandé sur  $M$ , un point  $p \in M$  et un réel  $T > 0$ , on note  $\mathcal{A}_{p,T}$  l'ensemble des points atteignables à partir de  $p$  en temps inférieur ou égal à  $T$ . Le système est dit *fortement commandable* si, pour tous  $p \in M$  et  $T > 0$ , on a  $\mathcal{A}_{p,T} = M$ .

Alors un système affine sans dérive

- est fortement commandable si l'enveloppe convexe de  $U$  est égale à  $\mathbb{R}^m$  tout entier ;
- n'est pas fortement commandable quand  $U$  est borné.

(La preuve de ces deux résultats est laissée en exercice).

Une autre propriété des systèmes affines sans dérive est la commandabilité locale : on peut joindre deux points d'un ouvert sans sortir de l'ouvert.

**Lemme 5.8.** *Soit  $\dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i X_i$ ,  $q \in M$ ,  $u \in U$ , un système affine sans dérive satisfaisant les hypothèses du théorème 5.7.*

*Alors, pour tout ouvert connexe  $\Omega \subset M$ , deux points quelconques de  $\Omega$  peuvent être joints par une trajectoire du système qui reste dans  $\Omega$ .*

**Preuve.** L'ouvert  $\Omega$  est une sous-variété ouverte et connexe de  $M$ . Les restrictions  $X_i|_\Omega$  sont donc des champs de vecteurs sur  $\Omega$  qui satisfont, pour tout  $p \in \Omega$ ,

$$\text{Lie}_p(X_1|_\Omega, \dots, X_m|_\Omega) = \text{Lie}_p(X_1, \dots, X_m).$$

Donc le système affine sans dérive  $\dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i X_i|_\Omega$ ,  $q \in \Omega$ ,  $u \in U$  vérifie les hypothèses du théorème 5.7 : il est donc commandable, ce qui montre le résultat. ■

**Application à la planification des mouvements** Imaginons un robot – par exemple une voiture – évoluant au milieu d’obstacles, ou plus généralement un système localement commandable placé dans un milieu encombré. On se demande à quelle condition sur les obstacles le système reste commandable, et, le cas échéant, comment trouver une trajectoire reliant deux configurations données.

On commence d’abord par représenter les obstacles comme des zones interdites de l’espace des configurations du robot, c’est-à-dire un fermé  $\mathcal{O} \subset M$  (fermé car on n’autorise pas les configurations au contact des obstacles).

Puisque notre système est localement commandable, il suffit que  $M \setminus \mathcal{O}$  soit connexe pour que deux configurations  $q_0$  et  $q_1 \in M \setminus \mathcal{O}$  quelconques soient joignables sans entrer en collision avec un obstacle. Trouver une trajectoire reliant  $q_0$  et  $q_1$  se fait alors en deux temps :

- trouver un arc dans  $M \setminus \mathcal{O}$  reliant  $q_0$  à  $q_1$  (ce n’est en général pas une trajectoire du système) ;
- approcher cet arc par une trajectoire, c’est-à-dire trouver une trajectoire restant dans un voisinage tubulaire de l’arc et joignant  $q_0$  et  $q_1$ .

Cette méthode est toujours réalisable. En effet, la première étape est possible dès que  $M \setminus \mathcal{O}$  est connexe (rappelons qu’un ouvert connexe est connexe par arcs). Pour la seconde étape, comme  $M \setminus \mathcal{O}$  est ouvert, il existe un voisinage  $\Omega$  de l’arc contenu dans  $M \setminus \mathcal{O}$ . Comme le système est supposé localement commandable et que  $\Omega$  peut être supposé connexe (il contient l’arc),  $q_0$  et  $q_1$  sont joignables par une trajectoire restant dans  $\Omega$ .

*Remarque.* Comparer avec le cas de la voiture de Dubins, page 75.

## 5.4 Systèmes affines commandables

Revenons maintenant au cas général d’un système affine avec dérive :

$$\dot{q} = X_0(q) + u_1 X_1(q) + \cdots + u_m X_m(q), \quad q \in M, \quad u \in U.$$

Nous allons voir différentes conditions de commandabilité pour ces systèmes.

### 5.4.1 Commandes non bornées

**Lemme 5.9.** *Soit un système affine sur une variété connexe  $M$ . Supposons que les deux conditions suivantes sont vérifiées*

- $U = \mathbb{R}^m$  (pas de restriction sur les commandes),
- $\dim \text{Lie}_p(X_1, \dots, X_m) = \dim M$  pour tout  $p \in M$ .

*Alors le système est commandable (et même fortement commandable).*

**Preuve.** Commençons par remarquer que, si  $\overline{\mathcal{F}}$  désigne l’adhérence d’une famille  $\mathcal{F}$  de champs de vecteurs, on a :

$$\mathcal{A}_p(\overline{\mathcal{F}}) \subset \overline{\mathcal{A}_p(\mathcal{F})}.$$

Ce résultat est en fait la conséquence d'une version de la dépendance continue par rapport aux paramètres pour les équations différentielles : soit  $\{X^N\}$  une suite de champs de vecteurs sur  $M$  qui converge vers  $X$  quand  $N \rightarrow +\infty$  et  $\phi_t^X(p)$  le flot de  $X$  à partir de  $p$  défini pour  $t \in [0, T]$ ; alors les flots  $\phi_t^{X^N}(p)$  sont définis et convergent uniformément vers  $\phi_t^X(p)$  sur  $[0, T]$ .

Revenons maintenant à  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(U) = \{X_0 + \sum_i u_i X_i, u \in \mathbb{R}^m\}$ . Pour tout  $\lambda > 0$ , les champs de vecteurs  $\lambda X_0 + \sum_i \lambda u_i X_i$  appartiennent au cône  $\text{cone}(\mathcal{F})$ , donc les champs  $\lambda X_0 + \sum_i v_i X_i$  aussi : il suffit de prendre  $u_i = v_i/\lambda$ , ce qui est toujours possible puisque les  $u_i$  ne sont pas bornés. En faisant tendre  $\lambda$  vers 0, on obtient que les champs  $\sum_i v_i X_i$ ,  $v \in \mathbb{R}^m$ , appartiennent à  $\overline{\text{cone}(\mathcal{F})}$ .

Ainsi  $\text{cone}(\mathcal{F})$  est la famille associée à un système sans dérive dont l'algèbre de Lie est de dimension  $n = \dim M$  partout. Ceci implique  $\mathcal{A}_p(\text{cone}(\mathcal{F})) = M$  (proposition 5.6).

Nous avons remarqué au début de cette preuve que  $\mathcal{A}_p(\text{cone}(\mathcal{F}))$  est inclus dans  $\overline{\mathcal{A}_p(\text{cone}(\mathcal{F}))}$ , qui est lui-même égal à  $\overline{\mathcal{A}_p(\mathcal{F})}$  d'après le lemme 5.4. On a donc  $\overline{\mathcal{A}_p(\mathcal{F})} = M$  ce qui implique la commandabilité par le corollaire 5.2.

La preuve de la commandabilité forte est laissée en exercice. ■

*Remarque.* Le résultat n'est bien entendu plus valable si il y a des restrictions sur les commandes. Considérons par exemple dans  $\mathbb{R}$  le système commandé

$$\dot{x} = x + u, \quad u \geq -1.$$

Dès que  $x > 1$ , on a  $\dot{x} > 0$  et donc  $x$  ne fait qu'augmenter. Ce système n'est pas commandable.

*Exemple* (Sphère sur un plateau en rotation). Reprenons l'exemple de la sphère mais supposons maintenant qu'elle est posée sur un plateau en mouvement. Prenons par exemple le cas où le plateau est en rotation autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

En reprenant les équations du mouvement du § 5.3.2, on obtient

$$\dot{p}(t) = \omega A_3 p(t).$$

Or  $A_3 p(t) = A_3 c(t)$  puisque  $p = c - e_3$  et  $A_3 e_3 = 0$ . Ainsi,

$$\dot{c}(t) = \omega A_3 c(t) + \Omega(t) e_3.$$

On pose  $X_0(c, R) = \omega A_3 c \oplus 0$  et on obtient le système commandé suivant, décrivant une sphère roulant sans glisser ni pivoter sur un plateau en rotation :

$$\dot{q} = X_0(q) + u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q \in \mathbb{E}^2 \times SO(3), \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

Comme on a déjà montré que  $X_1$  et  $X_2$  engendrent une algèbre de Lie de dimension 5 partout, il résulte du lemme 5.9 que le système est commandable, et ce indépendamment de la vitesse de rotation  $\omega$  du plateau.

### 5.4.2 Champs récurrents

D'après la section précédente, la commandabilité dépend des tailles comparées de la dérive et des champs commandés (penser à un bateau avançant dans le courant). Il arrive cependant que, malgré une “forte dérive”, on arrive à commander le système.

L'idée est la suivante : pour obtenir la commandabilité il faut être capable de “remonter le flot” de la dérive, c'est-à-dire d'atteindre les points situés sur le flot de  $-X_0$ . Cela peut se faire localement quand les commandes ne sont pas bornées (section précédente), mais également par un détour. L'exemple le plus simple est le cas où le flot de la dérive est périodique, car on a alors  $\phi_t^{-X_0}(p) = \phi_{T-t}^{X_0}(p)$ .

Pour mettre en œuvre cette idée, nous allons introduire quelques définitions.

**Définition.** Soit  $X$  un champ de vecteurs complet sur  $M$ . Un point  $p \in M$  est dit *récurrent pour  $X$*  si, pour tout  $t > 0$  et tout voisinage  $V(p)$  de  $p$ , il existe  $q \in V(p)$  et  $t' > t$  tels que  $\phi_{t'}^X(q) \in V_p$ .

Autrement dit, toutes les trajectoires de  $X$  ne peuvent quitter le voisinage d'un point récurrent, certaines doivent revenir dans le voisinage pour des temps arbitrairement grands. Bien entendu, si  $\phi_t^X(p)$  est périodique,  $p$  est récurrent pour  $X$ .

**Définition.** On dit qu'un champ de vecteurs complet  $X$  est *récurrent* si tous les points de  $M$  sont récurrents pour  $X$ .

Bien que cette propriété paraisse restrictive, il y a en fait beaucoup de champs de vecteurs récurrents dans les applications, en particulier en mécanique<sup>1</sup>.

**Théorème 5.10.** *Soit un système commandé affine sur une variété connexe  $M$ . Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

1. *l'enveloppe convexe de l'ensemble de commande  $U$  contient un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^m$  ;*
2.  *$\dim \text{Lie}_p(X_0, \dots, X_m) = \dim M$  pour tout  $p \in M$  ;*
3. *la dérive  $X_0$  est un champ récurrent.*

*Alors le système est commandable.*

*Remarque.* Quitte à faire une translation de l'ensemble de commande, on peut remplacer l'hypothèse que  $X_0$  est récurrent par la propriété suivante : il existe une commande  $\bar{u} \in U$  appartenant à l'intérieur de l'enveloppe convexe de  $U$  telle que le champ correspondant  $X_0 + \sum_i \bar{u}_i X_i$  est récurrent.

---

1. D'après un théorème de Poincaré, sur une variété orientée de volume borné, tous les champs de vecteurs dont le flot préserve la forme volume sont récurrents (voir par exemple [1]).

**Preuve.** Notons  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(U) = \{X_0 + \sum_i u_i X_i, u \in U\}$ . Nous allons d'abord montrer que

$$\overline{\mathcal{A}_p(\mathcal{F} \cup -X_0)} = \overline{\mathcal{A}_p(\mathcal{F})} \quad (5.4)$$

Pour cela, il suffit de montrer que,  $\forall p \in M$  et  $t > 0$ ,  $\phi_t^{-X_0}(p)$  est la limite d'une suite de points atteignables à partir de  $p$ .

Choisissons un ouvert  $V \subset \text{int}\mathcal{A}_p$  arbitrairement proche de  $p$ . L'ouvert  $\phi_t^{-X_0}(V)$  est donc arbitrairement proche de  $\phi_t^{-X_0}(p)$ . Comme  $X_0$  est récurrent, il existe  $t' > t$  et  $q' \in \phi_t^{-X_0}(V)$  tels que  $\phi_{t'}^{X_0}(q') \in \phi_t^{-X_0}(V)$ .

Or  $q' = \phi_t^{-X_0}(q)$ , où  $q \in V \subset \text{int}\mathcal{A}_p$ , donc  $\phi_{t'}^{X_0}(q') = \phi_{t'-t}^{X_0}(q)$  appartient à  $\mathcal{A}_p$  (rappelons que  $t' - t > 0$ ). Ainsi, dans tout voisinage de  $\phi_t^{-X_0}(p)$  il y a un point atteignable, d'où la relation (5.4).

En appliquant maintenant le lemme 5.4 à  $\mathcal{F} \cup -X_0$ , (5.4) devient

$$\overline{\mathcal{A}_p(\mathcal{F})} = \overline{\mathcal{A}_p(\text{cone}(\mathcal{F} \cup -X_0))}.$$

Or le cône  $\text{cone}(\mathcal{F} \cup -X_0)$  contient toutes les combinaisons linéaires des champs  $X_0, \dots, X_m$ . Comme  $\text{Vect}\{X_0, \dots, X_m\}$  est une famille symétrique qui satisfait la condition du rang, on a

$$\overline{\mathcal{A}_p(\text{cone}(\mathcal{F} \cup -X_0))} = M$$

et on conclut grâce au corollaire 5.2. ■

*Exemple (Voiture de Dubins).* La *voiture de Dubins* est une voiture ne pouvant aller qu'en marche avant, à une vitesse fixée  $v$ , et dont le rayon de braquage est borné par  $\rho > 0$ . Ses mouvements sont donc gouvernés par le système affine

$$\dot{q} = X_1 + uX_2, \quad q \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad |u| \leq v/\rho,$$

où

$$X_1(q) = v \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + v \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

On a déjà vu au Chapitre 4 que  $\text{Lie}_q(X_1, X_2)$  est de dimension 3 en tout point. De plus l'ensemble de commande  $U = [-v/\rho, v/\rho]$  contient un voisinage de l'origine. Enfin, pour tout  $\bar{u} \in ]0, v/\rho[$ , le champ de vecteurs

$$X_{\bar{u}} = X_1 + \bar{u}X_2 \in \mathcal{F}(U)$$

est récurrent car toutes ses trajectoires sont des cercles de rayon  $v/\bar{u} > \rho$ .

En appliquant la remarque suivant le théorème 5.10, on obtient que la voiture de Dubins est commandable.

### 5.4.3 Satellite à un rotor

On considère ici un satellite dont l'orbite est fixée et nous cherchons à commander son orientation. Le système dynamique associé est donc celui d'un solide dont le centre de gravité est fixé.

L'état du système est déterminé par sa position, une matrice de  $SO(3)$ , et par sa vitesse, un élément de  $TSO(3)$ . Seule la vitesse nous intéresse ici.

Rappelons que, si on note  $so(3)$  l'ensemble des matrices symétriques  $3 \times 3$ , on a

$$T_R SO(3) = \{R\Omega, \Omega \in so(3)\} \quad \text{et} \quad T_I SO(3) = so(3).$$

D'autre part, à toute matrice  $\Omega \in so(3)$  on peut associer le vecteur de  $\mathbb{R}^3$  composé de ses coordonnées dans la base  $(A_1, A_2, A_3)$  :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \omega = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$

L'action de l'opérateur  $\Omega$  sur un vecteur de  $x \in \mathbb{R}^3$  s'écrit alors

$$\Omega x = \omega \wedge x.$$

Le vecteur  $\omega$  associé à la vitesse  $\Omega = R^{-1}\dot{R}$  du satellite est appelé *vitesse angulaire* (le mouvement correspond alors à une rotation autour de l'axe  $\omega$  à une vitesse angulaire  $\|\omega\|$ ).

En terme de vitesse angulaire, les équations du satellite sont données par les équations d'Euler :

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}^1 = (I_2 - I_3) \omega^2 \omega^3 \\ I_2 \dot{\omega}^2 = (I_3 - I_1) \omega^3 \omega^1 \\ I_3 \dot{\omega}^3 = (I_1 - I_2) \omega^1 \omega^2 \end{cases}$$

où  $I_1, I_2, I_3$  sont les moments principaux d'inertie du satellite. Cette équation s'écrit de façon plus compacte en fonction du moment angulaire  $\mu = (\mu^1, \mu^2, \mu^3)$ , avec  $\mu^i = I_i \omega^i$  :

$$\dot{\mu} = \mu \wedge \omega.$$

Rajoutons maintenant une action extérieure, exercée au moyen d'un moment  $Q$ . L'équation sur le moment angulaire devient :

$$\dot{\mu} = \mu \wedge \omega + Q.$$

Dans le cas du satellite, l'action se fait par le biais de 3 paires de réacteurs situés à l'extérieur du satellite. Chaque paire exerce un moment d'amplitude constante que l'on peut diriger dans un sens ou dans l'autre ou bien annuler (commandes du type *bang-bang*). Autrement dit, pour  $i = 1, 2, 3$ ,

$$Q_i = u_i b_i, \quad b_i \in \mathbb{R}^3, \quad u_i = -1, 0 \text{ ou } 1.$$



Le système commandé prend finalement la forme

$$\dot{\mu} = X_0(\mu) + u_1 X_1(\mu) + u_2 X_2(\mu) + u_3 X_3(\mu), \quad \mu \in \mathbb{R}^3, \quad u \in U,$$

où

$$X_0(\mu) = \begin{pmatrix} a_1 \mu^2 \mu^3 \\ a_2 \mu^1 \mu^3 \\ a_3 \mu^1 \mu^2 \end{pmatrix}, \quad X_i(\mu) = b_i, \quad U = \{-1, 0, 1\}^3$$

où on a posé  $a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}$ ,  $a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1}$ ,  $a_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}$ .

Cas trivial : si le satellite est une sphère de densité uniforme, les constantes  $a_i$  sont toutes nulles. Le système est alors affine sans dérive, et tous les champs de vecteurs sont constants. Il est commandable si et seulement si  $b_1, b_2, b_3$  sont linéairement indépendants. Il faut donc au minimum 3 paires de réacteurs pour commander le satellite.

Dans le cas général, on cherche quel est le nombre minimal de paires de réacteurs nécessaires pour rendre le système commandable.

Remarquons tout d'abord que la dérive est un champ de vecteurs récurrent de  $\mathbb{R}^3$ . En effet,  $X_0$  a deux intégrales de mouvement :

— la norme du moment angulaire :

$$(\mu^1)^2 + (\mu^2)^2 + (\mu^3)^2 = cte;$$

— l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2} \left( \frac{(\mu^1)^2}{I_1} + \frac{(\mu^2)^2}{I_2} + \frac{(\mu^3)^2}{I_3} \right) = cte.$$

Une trajectoire  $\mu(t)$  de  $X_0$  est donc contenue dans l'intersection de la sphère  $\|\mu(t)\|^2 = cte$  et de l'ellipsoïde d'énergie constante. En traçant les trajectoires pour une énergie donnée, on constate que par tout ouvert passe une trajectoire périodique, ce qui implique que  $X_0$  est un champ récurrent.

Pour montrer la commandabilité, il reste donc à montrer que l'algèbre de Lie engendrée par  $X_0$  et les champs commandés est de dimension 3.

Nous allons montrer qu'une seule paire de réacteurs suffit. On s'intéresse donc au système :

$$\dot{\mu} = X_0(\mu) + u X_1, \quad X_1 = b.$$

La preuve se déroule en deux étapes.

**1er point** Si le plan  $\text{Vect}(b, X_0(b))$  est de dimension 2 et non invariant par  $X_0$ , alors  $\text{Lie}_\mu(X_0, X_1)$  est de dimension 3 pour tout  $\mu$ .

En effet, puisque le plan est non invariant, il existe un vecteur  $c = \alpha b + \beta X_0(b)$  tel que  $X_0(c)$ ,  $b$  et  $X_0(b)$  sont linéairement indépendants. Or  $b = X_1$  et  $X_0(b) = \frac{1}{2}[X_1, [X_1, X_0]]$ . Le vecteur  $c$  est donc un champ de vecteurs (constant)  $X_2$  appartenant à  $\text{Lie}(X_0, X_1)$ , et  $X_0(c) = \frac{1}{2}[X_2, [X_2, X_0]]$  aussi. Les 3 champs de vecteurs constants  $b$ ,  $X_0(b)$  et  $X_0(c)$  sont ainsi linéairement indépendants et appartiennent à  $\text{Lie}(X_0, X_1)$ .

**2ème point** *Si au moins 2 coordonnées de  $a = (a_1, a_2, a_3)$  sont non nulles, il existe  $b$  tel que  $\text{Lie}(X_0, X_1)$  soit de dimension 3 partout.*

En effet, si  $c = \alpha b + \beta X_0(b)$ , on a  $X_0(c) = \alpha^2 X_0(b) + \beta^2 (a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3) b + \alpha \beta d$  où  $d$  est le vecteur

$$d = \begin{pmatrix} a_1(a_2 b_3^2 b_1 + a_3 b_1 b_2^2) \\ a_2(a_3 b_1^2 b_2 + a_1 b_2 b_3^2) \\ a_3(a_1 b_2^2 b_3 + a_2 b_1^2 b_3) \end{pmatrix}.$$

La dimension de  $\text{Lie}(X_0, X_1)$  est égale à 3 partout si  $b$ ,  $X_0(b)$  et  $d$  sont des vecteurs linéairement indépendants, c'est-à-dire si

$$\Delta = \det(b, X_0(b), d) \neq 0.$$

Il suffit alors de calculer  $\Delta$  et de vérifier que si au moins deux  $a_i$  sont non nuls, il existe  $b$  tel que  $\Delta \neq 0$ .

Finalement, si le satellite n'est pas une sphère, les moments d'inertie ne sont pas tous égaux, donc au moins deux  $a_i$  sont non nuls. Les deux points précédents montrent alors que la vitesse du satellite est commandable avec une seule paire de réacteurs.

# Annexe A

## Exercices

### A.1 Champs de coordonnées

Soient  $M$  une variété de dimension  $n$ ,  $p$  un point de  $M$  et  $X_1, \dots, X_n$  des champs de vecteurs sur  $M$  dont les valeurs en  $p$  sont linéairement indépendantes. On note  $\phi_t^i$  le flot de  $X_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ .

Sur un voisinage  $V_0$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ , on définit l'application

$$\begin{aligned} \psi : \quad V_0 \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow M \\ x = (x^1, \dots, x^n) &\mapsto \phi_{x^1}^1 \circ \dots \circ \phi_{x^n}^n(p) \end{aligned}$$

Le but de ce problème est d'étudier les relations entre deux familles de champs de vecteurs sur  $M$  : les champs  $X_i$  et les champs de coordonnées  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ .

1. Rappeler pourquoi  $\psi^{-1}$  définit des coordonnées (c'est-à-dire une carte) sur un voisinage  $U \subset M$  de  $p$ . On notera  $V = \psi^{-1}(U)$  dans la suite.
2. Rappeler pourquoi les champs de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  définis sur  $U$  vérifient :

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(q) = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(\psi^{-1}(q)), \quad \forall q \in U.$$

3. Montrer que, pour tout  $x \in V$ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1}(x) = X_1(\psi(x)).$$

En déduire le résultat suivant :

**Redressement d'un champ de vecteurs.** Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ . Si  $X(p) \neq 0$ , il existe des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  autour de  $p$  telles que

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

4. Montrer que, si  $[X_1, X_2] = 0$ , alors, pour tout  $x \in V$ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^2}(x) = X_2(\psi(x)).$$

5. En utilisant la question 4, montrer le résultat suivant :

**Redressement d'une famille de champs de vecteurs.**

Soient  $X_1, \dots, X_k$  des champs de vecteurs sur la variété  $M$  dont les valeurs en  $p$  sont linéairement indépendantes ( $k \leq n$ ). Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $[X_i, X_j] = 0$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  sur un voisinage de  $p$  ;
- il existe des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  autour de  $p$  pour lesquelles les champs  $X_1, \dots, X_k$  sont des champs de coordonnées (c'est-à-dire  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  pour  $i = 1, \dots, k$ ).

On considère maintenant la famille de champs de vecteurs  $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_m\}$ ,  $m \leq n$ , et on note  $\text{Orb}(q)$  l'orbite de  $\mathcal{F}$  passant par un point  $q \in M$ . On suppose également que,  $\forall q \in M$ ,  $\text{Lie}_q(\mathcal{F})$  est de dimension constante  $k \geq m$  et que

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{Vect}\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}.$$

6. Montrer que, pour tout  $x \in V$ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x) = \phi_* X_i(\psi(x)),$$

où  $\phi$  est un difféomorphisme de  $M$ .

7. Montrer que, pour  $i = 1, \dots, k$  et  $x \in V$ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x) \in \text{Vect}\{X_1(\psi(x)), \dots, X_k(\psi(x))\}.$$

8. Montrer que, pour  $q \in U$ ,

$$\text{Vect}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}(q), \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}(q)\right\} = \text{Vect}\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}.$$

9. Montrer que, dans les coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$ , l'orbite  $\text{Orb}(p)$  a pour équation

$$\{x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

10. Soit  $\Delta$  la distribution sur  $M$  définie par  $\Delta_q = \text{Vect}\{X_1(q), \dots, X_m(q)\}$ . Quelle est l'équation de cette distribution en coordonnées locales ?

## A.2 Véhicule articulé

On considère un véhicule formé de 2 essieux reliés l'un à l'autre par une barre articulée. On note  $d$  (resp.  $\ell$ ) la distance entre l'articulation et le milieu de l'essieu avant (resp. arrière). Le véhicule est une "traction-avant", c'est-à-dire que l'on commande la vitesse tangentielle  $v_0$  et la vitesse angulaire  $\omega_0$  de l'essieu avant. La vitesse et le rayon de braquage de l'essieu avant sont bornés, ce qui s'écrit

$$\rho|\omega_0| \leq |v_0| \leq v_{max}.$$

Le véhicule se déplace dans un plan. Ses configurations sont donc déterminées par :

- $(x, y)$  les coordonnées planaires du centre de l'essieu avant ;
- $\theta$  l'angle entre l'axe des  $x$  et la direction de l'essieu avant ;
- $\varphi$  l'angle entre les directions des essieux.

L'équation du mouvement pour ce véhicule est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \theta \\ \dot{y} = v_0 \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega_0 \\ \dot{\varphi} = -v_0 \sin \varphi - \omega_0 \left(1 + \frac{d}{\ell} \cos \varphi\right) \end{cases}$$

Le but du problème est de déterminer l'ensemble des configurations atteignables à partir d'une configuration donnée en fonction des paramètres  $d$  et  $\ell$ .

1. Déterminer l'espace des configurations  $M$  du problème et montrer que c'est une variété.
2. Donner un atlas de  $M$ . Montrer que les champs de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  sont définis dans toutes les cartes de l'atlas.
3. Écrire l'équation du mouvement comme un système commandé dans  $M$ . Préciser l'ensemble  $U$  de commande. Expliquer pourquoi les champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  apparaissant dans ce système sont définis globalement sur  $M$ .
4. Montrer, que pour toute configuration  $q \in M$ , l'ensemble  $\mathcal{A}_q$  des configurations atteignables à partir de  $q$  est une variété. À quelle condition le système est-il commandable ?
5. Calculez les crochets de Lie de  $X_1$  et  $X_2$  de longueur inférieure à 3 :  $[X_1, X_2]$ ,  $[X_1, [X_1, X_2]]$  et  $[X_2, [X_1, X_2]]$ .
6. En distinguant les cas  $d = \ell$  et  $d \neq \ell$ , montrer que, en tout point  $q \in M$ ,  $\text{Lie}_q(X_1, X_2)$  est égal à

$$\text{Vect} \{X_1(q), X_2(q), [X_1, X_2](q), [X_1, [X_1, X_2]](q), [X_2, [X_1, X_2]](q)\}.$$

7. Déterminer les différents ensembles atteignables  $\mathcal{A}_q$  selon les valeurs de  $d$  et  $\ell$ .
8. Le système est-il commandable ? Donnez une explication "mécanique" des résultats.

### A.3 Sphère roulant sur une sphère

L'objet de ce problème est d'étudier l'ensemble des configurations atteignables par une sphère roulant sur une autre sphère. Après avoir établi un résultat théorique en préliminaire (Partie I), nous étudierons le cas du roulement sans glissement dans la partie II puis celui du roulement sans glissement ni pivotement dans la partie III.

#### Partie I : Préliminaires

Soient  $N$  et  $\tilde{N}$  deux variétés différentiables de dimensions respectives  $n$  et  $\tilde{n}$ ,  $n \leq \tilde{n}$ , et  $F : \tilde{N} \rightarrow N$  une application différentiable et surjective. On dit que des champs de vecteurs  $\tilde{X} \in \mathcal{X}(\tilde{N})$  et  $X \in \mathcal{X}(N)$  sont **reliés par**  $F$  si, pour tout  $q \in N$  et tout  $p \in F^{-1}(q) \subset \tilde{N}$ , on a  $dF \circ \tilde{X}(p) = X(q)$ .<sup>1</sup>

Soient  $\tilde{X} \in \mathcal{X}(\tilde{N})$  et  $X \in \mathcal{X}(N)$  deux champs reliés par  $F$ , de flots respectifs  $\tilde{\phi}_t$  et  $\phi_t$ .

- 1<sup>o</sup>** Montrer que la courbe  $t \mapsto F(\tilde{\phi}_t(p))$  est solution de l'équation différentielle dans  $N$   $\dot{q} = X(q)$ . En déduire  $\phi_t \circ F = F \circ \tilde{\phi}_t$ .

Considérons maintenant les systèmes commandés  $(\Sigma)$  et  $(\tilde{\Sigma})$ ,

$$(\Sigma) : \dot{q} = X_u(q), \quad q \in N, \quad u \in U \quad \text{et} \quad (\tilde{\Sigma}) : \dot{p} = \tilde{X}_u(p), \quad p \in \tilde{N}, \quad u \in U,$$

où  $\tilde{X}_u \in \mathcal{X}(\tilde{N})$  et  $X_u \in \mathcal{X}(N)$  sont des champs paramétrés par  $u \in U$ . On suppose que, pour tout  $u$  fixé,  $\tilde{X}_u$  et  $X_u$  sont reliés par  $F$ .

- 2<sup>o</sup>** Soit  $\tilde{c}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , une trajectoire de  $(\tilde{\Sigma})$  correspondant à une loi de commande  $u(t)$  (constante par morceaux). Montrer que  $F(\tilde{c}(t))$  est une trajectoire de  $(\Sigma)$  correspondant à la même loi de commande  $u(t)$ .
- 3<sup>o</sup>** Inversement, montrer que si  $c(t)$  est une trajectoire de  $(\Sigma)$ , il existe une trajectoire  $\tilde{c}(t)$  de  $(\tilde{\Sigma})$  correspondant à la même loi de commande et telle que  $c(t) = F(\tilde{c}(t))$ .
- 4<sup>o</sup>** Notons  $\mathcal{A}_q \subset N$  (resp.  $\tilde{\mathcal{A}}_p \subset \tilde{N}$ ) les ensembles atteignables pour le système  $(\Sigma)$  (resp.  $(\tilde{\Sigma})$ ). Soit  $q \in N$ . Montrer que, quel que soit  $p \in F^{-1}(q)$ ,  $\mathcal{A}_q = F(\tilde{\mathcal{A}}_p)$ . En déduire que, si le système  $(\tilde{\Sigma})$  est commandable, alors  $(\Sigma)$  l'est aussi.
- 5<sup>o</sup>** Montrer que la réciproque de cette dernière implication est fautive (on donnera un contre-exemple avec  $\tilde{N} = \mathbb{R}^3$  et  $N = \mathbb{R}^2$ ). Donner l'exemple d'une propriété des ensembles  $\tilde{\mathcal{A}}_p$  qui impliquerait la non commandabilité de  $(\Sigma)$ .

#### Partie II : Sphère en roulement sans glissement sur une autre sphère

Dans l'espace euclidien  $\mathbb{E}^3$ , on considère une sphère fixe de rayon  $\rho > 0$  et de centre  $O$ . Le choix d'un repère orthonormé fixe  $(O, e_1, e_2, e_3)$  définit des coordonnées sur  $\mathbb{E}^3$  : on notera  $m$  (en minuscules) les coordonnées d'un point  $M$ .

1. Si  $\tilde{n} = n$  et si  $F$  est un difféomorphisme, ceci implique  $X = F_*\tilde{X}$ .

Une sphère mobile de rayon 1 et de centre  $C$  roule sur la sphère fixe. On choisit un repère orthonormé mobile  $(C, a_1, a_2, a_3)$  attaché à cette sphère.

Une configuration du système est un couple  $(x, R)$  où

- $x \in S^2$ ,  $x = \frac{1}{\rho+1}c$ , où  $c$  désigne les coordonnées du centre  $C$  de la sphère mobile ;
- $R \in SO(3)$  est la matrice de transition entre le repère fixe et le repère mobile.

On note  $M = S^2 \times SO(3)$  l'espace des configurations et on identifie  $T_q M$ , le sous-espace tangent à  $M$  en  $q$ , avec un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3 \times M_3(\mathbb{R})$ .

Enfin,  $so(3)$  désigne l'ensemble des matrices antisymétriques  $3 \times 3$  et  $(A_1, A_2, A_3)$  est la base de  $so(3)$  définie par

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera  $\Omega_u$  la matrice de  $so(3)$  ayant pour coordonnées  $u = (u^1, u^2, u^3)$ , c'est-à-dire  $\Omega_u = u^1 A_1 + u^2 A_2 + u^3 A_3$ .

**6<sup>o</sup>**) Montrer que les mouvements de la sphère mobile roulant sans glisser sur la sphère fixe sont solutions du système commandé

$$(\dot{x}, \dot{R}) = X_u(x, R), \quad u \in \mathbb{R}^3, \quad (x, R) \in M, \quad (\text{A.1})$$

avec  $X_u(x, R) = (\alpha \Omega_u x, \Omega_u R)$  et  $\alpha = \frac{1}{\rho+1} \in ]0, 1[$ .

Sur la variété  $\widetilde{M} = SO(3) \times SO(3)$ , on considère le système commandé

$$(\dot{T}, \dot{R}) = \widetilde{X}_u(T, R), \quad u \in \mathbb{R}^3, \quad (T, R) \in \widetilde{M}, \quad (\text{A.2})$$

avec  $\widetilde{X}_u(T, R) = (\alpha \Omega_u T, \Omega_u R)$ .

**7<sup>o</sup>**) Montrer que, si le système (A.2) est commandable, alors le système (A.1) l'est aussi.

**Indication :** utiliser l'application  $T \mapsto T e_3$  de  $SO(3)$  dans  $S^2$  et appliquer les résultats de la partie I, question 4.

### Intermède : Champs de vecteurs sur $\widetilde{M}$

L'étude du système (A.2) requiert l'analyse de champs de vecteurs sur  $\widetilde{M}$  dits "invariants à droite".

Notons  $e = (I, I)$  l'identité de  $\widetilde{M}$ . L'espace tangent à  $\widetilde{M}$  en l'identité est  $T_e \widetilde{M} = so(3) \times so(3)$ . C'est une algèbre de Lie pour le crochet de Lie

$$[(A, B), (C, D)]_{T_e \widetilde{M}} = (AC - CA, BD - DB).$$

Pour  $q = (P, Q) \in \widetilde{M}$ , on définit la *multiplication à droite*  $r_q : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$  ( $r$  pour "right") par

$$r_q(T, R) = (TP, RQ).$$

8<sup>o</sup>) Montrer que  $r_q$  est un difféomorphisme. Expliciter  $r_q^{-1}$ .

On dit qu'un champ de vecteurs  $X$  sur  $\widetilde{M}$  est *invariant à droite* si, pour tout  $q \in \widetilde{M}$ ,  $r_{q*}X = X$ .

9<sup>o</sup>) Montrer que si deux champs  $X, Y \in \mathcal{X}(\widetilde{M})$  sont invariants à droite, leur crochet de Lie  $[X, Y]$  l'est aussi.

10<sup>o</sup>) Montrer qu'un champ invariant à droite est déterminé de façon unique par sa valeur en  $e$ . En déduire que l'application  $\varphi : X \mapsto X(e)$  est un isomorphisme entre l'ensemble des champs de vecteurs invariants à droite et  $T_e\widetilde{M}$ .

11<sup>o</sup>) Montrer à l'aide de la question précédente que, si  $X$  est un champ invariant à droite, il existe  $(A, B) \in T_e\widetilde{M}$  tel que

$$X(T, R) = (AT, BR).$$

12<sup>o</sup>) Calculer le crochet de Lie  $[X, Y]$  de deux champs  $X$  et  $Y$  invariants à droite et montrer que

$$\varphi([X, Y]) = -[\varphi(X), \varphi(Y)]_{T_e\widetilde{M}}.$$

Considérons maintenant une famille  $\mathcal{F}$  de champs invariants à droite.

13<sup>o</sup>) Montrer que  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  est isomorphe à  $\text{Lie}(\varphi(\mathcal{F}))$ , la sous-algèbre de Lie de  $T_e\widetilde{M}$  engendrée par les éléments  $\varphi(X)$ ,  $X \in \mathcal{F}$ .

14<sup>o</sup>) En conclure que  $\text{Orb}_q(\mathcal{F}) = \widetilde{M}$  si et seulement si  $\dim \text{Lie}(\varphi(\mathcal{F})) = 6$ .

### Retour au problème de la sphère (suite de la question 7).

15<sup>o</sup>) Montrer à l'aide de la question 14 que le système (A.2) est commandable si et seulement si l'algèbre de Lie

$$\text{Lie}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \subset T_e\widetilde{M} \tag{A.3}$$

engendrée par les éléments  $\xi_i = (\alpha A_i, A_i)$  de  $T_e\widetilde{M}$  est de dimension 6.

16<sup>o</sup>) Calculer les crochets de Lie  $[\xi_i, \xi_j]_{T_e\widetilde{M}}$  et donner une base de l'algèbre de Lie (A.3). Conclure pour le problème de la sphère roulant sans glisser sur une autre sphère.

### Partie III : Roulement sans glissement ni pivotement

Supposons maintenant que la sphère mobile roule sans glisser ni pivoter sur la sphère fixe. La contrainte de non pivotement se traduit dans le système commandé (A.1) par une condition sur la commande :  $u \perp x$ . Les mouvements de la sphère mobile roulant sans glissement ni pivotement sur la sphère fixe sont donc solution du système commandé :

$$(\dot{x}, \dot{R}) = X_u(x, R), \quad u \in (\mathbb{R}x)^\perp \subset \mathbb{R}^3, \quad (x, R) \in M. \tag{A.4}$$

Rappelons que  $X_u(x, R) = (\alpha \Omega_u x, \Omega_u R)$  et que  $\alpha = \frac{1}{\rho+1} \in ]0, 1[$ .



**17<sup>o</sup>**) Soit  $F^1 : SO(3) \rightarrow S^2$  l'application définie par  $F^1(T) = Te_3$ . Montrer que, pour tout  $u \in (\mathbb{R}x)^\perp$ , il existe  $v = v(u) \in (\mathbb{R}e_3)^\perp$  tel que le champ  $\tilde{Y}_v(T) = \alpha T\Omega_v$  sur  $SO(3)$  et le champ  $Y_u(x) = \alpha\Omega_u x$  sont reliés par  $F^1$  (voir la partie A.3 pour la définition de champs reliés).

**Indication :** on utilisera l'égalité  $\Omega_{Tv} = T\Omega_v T^{-1}$  que l'on démontrera.

**18<sup>o</sup>**) Soient  $F : \tilde{M} \rightarrow M$  l'application définie par  $F(T, S) = (Te_3, TS^{-1})$  et  $\tilde{X}_v$  le champ de vecteurs sur  $\tilde{M}$  défini par

$$\tilde{X}_v(T, S) = (\alpha T\Omega_v, (\alpha - 1)S\Omega_v).$$

Montrer que, pour tout  $u \in (\mathbb{R}x)^\perp$ , il existe  $v \in (\mathbb{R}e_3)^\perp$  tel que les champs  $\tilde{X}_v(T, S)$  et  $X_u$  sont reliés par  $F$  ( $v = v(u)$  est le même que dans la question précédente).

**19<sup>o</sup>**) Montrer que,  $v$  étant fixé,  $\tilde{X}_v$  est un champ invariant à gauche sur  $\tilde{M}$ , c'est-à-dire que, pour tout  $q \in \tilde{M}$ , on a  $l_{q*}\tilde{X}_v = \tilde{X}_v$ , où  $l_q$  désigne la multiplication à gauche ( $l$  pour "left") :

$$l_{(P,Q)}(T, R) = (PT, QR).$$

Nous admettrons que le résultat de la question 13 est valable également pour les champs invariants à gauche (la preuve est la réplique exacte de celle faite pour les champs invariants à droite) : si  $\mathcal{F}$  est une famille de champs invariants à gauche,  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  est isomorphe à  $\text{Lie}(\varphi(\mathcal{F}))$ , la sous-algèbre de Lie de  $T_e\tilde{M}$  engendrée par les éléments  $\varphi(X)$ ,  $X \in \mathcal{F}$ .

**20<sup>o</sup>**) En déduire que toutes les orbites de la famille  $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{X}_v : v \in (\mathbb{R}e_3)^\perp\}$  sont des variétés de même dimension  $k$ , où  $k$  est la dimension de l'algèbre de Lie

$$\mathcal{L} = \text{Lie}(\zeta_1, \zeta_2) \subset T_e\tilde{M}$$

engendrée par les éléments  $\zeta_i = (\alpha A_i, (\alpha - 1)A_i)$  de  $T_e\tilde{M}$ .

**Cas  $\rho \neq 1$  : les deux sphères ont un rayon différent.**

**21<sup>o</sup>**) Montrer que  $k = 6$ . En déduire que le système (A.4) est commandable.

**Cas  $\rho = 1$  : les deux sphères ont même rayon.**

**22<sup>o</sup>**) Montrer que  $k = 3$ . En déduire que le système (A.4) n'est pas commandable (utiliser les questions 4 et 5).

**23<sup>o</sup>**) Déterminer  $\text{Orb}_e(\tilde{\mathcal{F}})$  et montrer qu'elle est difféomorphe à  $SO(3)$ .

**24<sup>o</sup>**) Donner la forme de l'ensemble atteignable  $\mathcal{A}_{(x,R)}$  du système (A.4). Interprétez.

## A.4 Transfert de population par laser pour des systèmes quantiques

*Cet exercice est tiré de l'article "Optimal Control in laser-induced population transfer for two- and three-level quantum systems", de Ugo Boscain, Gregoire Charlot, Jean-Paul Gauthier, Stephane Guerin et Hans-Rudolf Jausslin, Journal of Mathematical Physics, n. 43, pp. 2107–2132 (2002). Cet article est disponible sur la page personnelle de l'un des auteurs, à l'adresse <http://www.sissa.it/boscain/publications.html>.*

On s'intéresse à un système quantique à 3 niveaux d'énergie  $E_1, E_2, E_3$ . La dynamique du système est gouvernée par l'équation de Schrödinger suivante (dans un système d'unités où  $\hbar = 1$ ) :

$$i \frac{d\psi}{dt}(t) = H\psi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \psi \in \mathbb{C}^3,$$

où  $H$  est le hamiltonien du système. Le vecteur d'état  $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)) \in \mathbb{C}^3$  satisfait de plus  $|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2 + |\psi_3(t)|^2 = 1$ ,  $|\psi_i(t)|^2$  étant la probabilité de mesurer l'énergie  $E_i$  à l'instant  $t$ .

Ce système quantique est commandé au moyen de deux lasers, c'est-à-dire au moyen de deux champs monochromatiques de fréquence  $\omega_1 = E_2 - E_1$  et  $\omega_2 = E_3 - E_2$  commençant à l'instant  $t_0$  et finissant à l'instant  $t_1$ . Le hamiltonien du système est alors

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & u_1(t)e^{i\omega_1 t} & 0 \\ u_1(t)e^{-i\omega_1 t} & E_2 & u_2(t)e^{i\omega_2 t} \\ 0 & u_2(t)e^{-i\omega_2 t} & E_3 \end{pmatrix},$$

où les lois de commande  $u_1(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u_2(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues par morceaux ( $u_1$  et  $u_2$  dépendent en fait des enveloppes des champs monochromatiques et des coefficients de couplage entre les niveaux d'énergie dans le système quantique). Les commandes  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  sont nulles pour  $t < t_0$  et  $t > t_1$ . En particulier, pour ces valeurs de  $t$ , les probabilités  $|\psi_i(t)|^2$  sont constantes.

Le problème du transfert de population est d'amener le système d'un niveau d'énergie donné à un autre. Nous le formulons de la façon suivante :

*Supposons  $|\psi_1(t)|^2 = 1$  pour  $t < t_0$ .  
Trouver  $u_1(\cdot)$  et  $u_2(\cdot)$  tels que  $|\psi_3(t)|^2 = 1$  pour  $t > t_1$ .*

### Preliminaire : élimination de la dérive

La dynamique que l'on vient de décrire apparaît comme un système commandé affine dépendant du temps. Nous allons commencer par le rendre autonome et sans dérive.

1. Vérifier que la fonction  $\varphi(t) = (e^{iE_1t}\psi_1(t), e^{iE_2t}\psi_2(t), e^{iE_3t}\psi_3(t))$  est solution de

$$i\frac{d\varphi}{dt}(t) = \bar{H}\varphi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & u_1(t) & 0 \\ u_1(t) & 0 & u_2(t) \\ 0 & u_2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que  $|\varphi_i(t)|^2 = |\psi_i(t)|^2$  est aussi la probabilité de mesurer l'énergie  $E_i$  à l'instant  $t$ .

2. En posant  $\varphi_1 = x_1 + ix_2$ ,  $\varphi_2 = x_3 + ix_4$ ,  $\varphi_3 = x_5 + ix_6$ , réécrire le système sous la forme

$$\dot{x} = u_1X_1(x) + u_2X_2(x), \quad x \in S^5, u \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{A.5})$$

#### Problème réduit dans $S^5$

Le problème du transfert de population prend maintenant la forme suivante :

*Partant d'une condition initiale quelconque dans le cercle*

$$S_{in}^1 = \{x \in S^5 : x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

*trouver une trajectoire du système (A.5) atteignant le cercle*

$$S_{but}^1 = \{x \in S^5 : x_5^2 + x_6^2 = 1\}.$$

On s'intéresse surtout à l'existence d'une telle trajectoire. On va donc chercher à montrer que l'intersection  $\mathcal{A}_x \cap S_{but}^1$  est non-vide pour tout  $x \in S_{in}^1$  ( $\mathcal{A}_x$  est l'ensemble atteignable à partir de  $x$  pour le système (A.5)). Pour cela, il faut commencer par déterminer les ensembles  $\mathcal{A}_x$ .

3. Déterminer  $\text{Lie}(X_1, X_2)$ .  
 4. Montrer que la dimension de  $\text{Lie}_x(X_1, X_2)$  est donnée par

$$\begin{cases} \dim \text{Lie}_x(X_1, X_2) = 3 & \text{si } x \in S^5 \setminus Q \\ \dim \text{Lie}_x(X_1, X_2) = 2 & \text{si } x \in Q \end{cases},$$

où  $Q = \{x \in S^5 : F(x) = 0\}$ , avec

$$F(x) = (x_4x_6 + x_3x_5, x_1x_6 - x_2x_5, x_1x_3 + x_2x_4)$$

(ne pas détailler les calculs).

Remarquons que  $S_{in}^1$  et  $S_{but}^1$  sont contenus dans  $Q$ . Nous allons donc maintenant nous intéresser plus particulièrement à cet ensemble.

5. L'application  $F : S^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est-elle une submersion ? Peut-on en conclure quelque chose sur  $Q$  ?
6. Soit  $U_1 = \{x \in S^5 : x_1 \neq 0\}$ . Montrer qu'il existe une submersion  $g_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $Q \cap U_1 = g_1^{-1}(0)$ .
7. Montrer, à l'aide de la question précédente, que  $Q$  est une sous-variété de dimension 3 de  $S^5$ .
8. Montrer que les restrictions  $X_1|_Q$  et  $X_2|_Q$  de  $X_1$  et  $X_2$  à  $Q$  sont des champs de vecteurs sur  $Q$ .
9. Montrer que, pour tout  $x \in S^5$ , l'ensemble atteignable  $\mathcal{A}_x$  est une sous-variété immergée de  $S^5$  et préciser sa dimension selon que  $x$  appartient ou non à  $Q$ . Peut-on conclure sur la faisabilité du transfert de population ?

Considérons maintenant la sphère

$$S_0^2 = \{x \in S^5 : x_1^2 + x_4^2 + x_6^2 = 1\}.$$

10. Montrer que les restrictions  $X_1|_{S_0^2}$  et  $X_2|_{S_0^2}$  sont des champs de vecteurs sur  $S_0^2$ .
11. En déduire que  $\mathcal{A}_x = S_0^2$  pour tout  $x \in S_0^2$ , et que le problème du transfert de population a une solution si la condition initiale est dans  $S_0^2 \cap S_{in}^1$ . Quels sont les vecteurs d'états que l'on peut atteindre avec de telles conditions initiales ?

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on définit l'application  $\phi_\alpha : S^5 \rightarrow S^5$  par

$$\phi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} R_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & R_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & R_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \text{où } R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

12. Montrer que  $\{\phi_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$  est un groupe de difféomorphismes à un paramètre dont on précisera le générateur infinitésimal.
13. Montrer que  $\phi_\alpha$  commute avec les flots de  $X_1$  et de  $X_2$ .
14. Pour  $\alpha$  fixé, on pose  $x^\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0, 0, 0, 0)$ . Déduire de ce qui précède que

$$\mathcal{A}_{x^\alpha} = \phi_\alpha(\mathcal{A}_{x^0}).$$

15. Déterminer  $\mathcal{A}_x \cap S_{but}^1$  pour  $x \in S_{in}^1$ . En conclure que le problème de transfert de population a toujours une solution (en supposant  $|\psi_1(t)|^2 = 1$  pour  $t < t_0$ ).

Questions complémentaires

16. Supposons maintenant que, pour  $t < t_0$ , la probabilité de mesurer l'énergie  $E_1$  est  $1 - \varepsilon^2$ , et celle de mesurer  $E_2$  est  $\varepsilon^2$ . Est-il toujours possible de transférer toute la population sur le niveau d'énergie  $E_3$ ? Si non, à quelle condition sur  $\varphi(t_0)$  un vecteur d'état particulier peut-il être transféré sur le niveau d'énergie  $E_3$ ?
17. Proposer une loi de commande constante par morceaux permettant de réaliser le transfert de population (dans le cas où  $|\psi_1(t)|^2 = 1$  pour  $t < t_0$ ).
18. Montrer que  $Q$  est localement difféomorphe à  $S^1 \times S^2$  ( $Q$  est ce que l'on appelle un fibré en sphères de  $S^1$ ).

**A.5 Application du lemme de Gauss**

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne,  $d$  la distance riemannienne associée et  $p$  un point de  $M$ . Pour  $\lambda > 0$ , on note  $S_\lambda = S(p, \lambda)$  la sphère de rayon  $\lambda$  centrée en  $p$ , c'est-à-dire

$$S_\lambda = \{q \in M : d(p, q) = \lambda\}.$$

1. Montrez que, pour  $\lambda$  suffisamment petit,  $S_\lambda$  est une sous-variété de dimension  $n - 1$  de  $M$  (utiliser l'application  $\exp_p$ ).
2. Soient  $q \in S_\lambda$  et  $\gamma$  la géodésique issue de  $p$  telle que  $\gamma(1) = q$  ( $\lambda$  est supposé arbitrairement petit). Montrez que  $\dot{\gamma}(1)$  est orthogonal à  $S_\lambda$ , c'est-à-dire que

$$\forall w_q \in T_q S_\lambda, \quad g_q(\dot{\gamma}(1), w_q) = 0.$$

**A.6 La sphère imaginaire**

Dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  on considère la forme bilinéaire (appelée *métrique de Minkowski*)

$$h(x, y) = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n - x^{n+1} y^{n+1}$$

et l'espace

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : h(x, x) = -1\},$$

appelé *espace hyperbolique* ou *sphère imaginaire* (c'est en quelque sorte la sphère de rayon  $i$ ).

1. Montrez que  $\mathbb{H}^n$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimension  $n$  et montrer que  $T_x \mathbb{H}^n$  est l'ensemble des vecteurs  $v$  tels que  $h(x, v) = 0$ .
2. Pour  $x \in \mathbb{H}^n$  et  $u, v \in T_x \mathbb{H}^n$ , on pose

$$g_x(u, v) = h(u, v).$$

Montrez que  $g$  est une métrique riemannienne sur  $\mathbb{H}^n$ .

On se restreint maintenant au cas  $n = 2$  et on ne considère que la composante connexe supérieure de  $\mathbb{H}^2$ , c'est-à-dire

$$\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^3 : h(x, x) = -1 \text{ et } x^3 > 0\}.$$

Le but du reste de l'exercice est de trouver les géodésiques de  $(\mathbb{H}, g)$ . On va procéder exactement comme on l'a fait en cours pour la sphère  $S^n$  : montrer d'abord que la dérivée covariante est une sorte de projection orthogonale de la dérivée usuelle sur l'espace tangent, puis en déduire une équation des géodésiques facile à résoudre.

Fixons un point  $\bar{x} \in \mathbb{H}$ . On peut alors écrire  $\mathbb{R}^3 = T_{\bar{x}}\mathbb{H} \oplus \mathbb{R}\bar{x}$ . Dans cette décomposition, tout  $w \in \mathbb{R}^3$  s'écrit

$$w = v - h(\bar{x}, w)\bar{x}, \quad \text{où } v \in T_{\bar{x}}\mathbb{H}.$$

Enfin, on choisit une base orthonormée  $(v_1, v_2)$  de  $T_{\bar{x}}\mathbb{H}$  (muni du produit scalaire  $g_{\bar{x}}$ ) et on appelle  $y$  les coordonnées de  $\mathbb{R}^3$  dans la base  $(v_1, v_2, \bar{x})$ , *i.e.*

$$w = y^1 v_1 + y^2 v_2 + y^3 \bar{x}.$$

3. Montrez que l'application

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ w = (y^1, y^2, y^3) &\mapsto (y^1, y^2) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme local en  $\bar{x}$ .

L'application  $\pi$  définit donc des coordonnées  $(y^1, y^2)$  sur  $\mathbb{H}$ .

4. Calculez les champs de coordonnées  $\frac{\partial}{\partial y^1}$  et  $\frac{\partial}{\partial y^2}$  sur  $\mathbb{H}$ .
5. Montrez que  $\Gamma_{ij}^k(\bar{x}) = 0 \forall i, j, k$ , où les  $\Gamma_{ij}^k$  sont les symboles de Christoffel associés aux coordonnées  $(y^1, y^2)$ .
6. Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{H}$  une courbe dans  $\mathbb{H}$  et  $Y$  un champ le long de  $c$ . Montrez à l'aide des questions précédentes que, pour tout  $t \in I$ ,

$$\nabla_{\dot{c}} Y(t) = \frac{dY}{dt}(t) + h(c(t), \frac{dY}{dt}(t))c(t).$$

7. Écrivez l'équation des géodésiques de  $\mathbb{H}$  (sans coordonnées, comme on l'a fait pour  $S^n$ ).
8. Soit  $(x, v) \in T\mathbb{H}$ . Montrez que la courbe

$$\gamma_v(t) = \cosh(\|v\|t)x + \sinh(\|v\|t)\frac{v}{\|v\|}$$

est la géodésique issue de  $(x, v)$  (on suppose  $v \neq 0$ ).

Commentaires.

- Les géodésiques sont donc les intersections de  $\mathbb{H}$  avec des plans passant par l'origine, exactement comme le sont les grands cercles pour  $S^2$ .
- La projection stéréographique

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{D}^2 \\ x &\mapsto \left( \frac{x^1}{1+x^3}, \frac{x^2}{1+x^3} \right)\end{aligned}$$

est une isométrie de  $(\mathbb{H}, g)$  dans le disque hyperbolique  $(\mathbb{D}^2, \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2} \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , qui est lui-même isométrique au demi-plan de Lobatchevski. Montrez-le si vous avez le temps et donnez l'équation des géodésiques dans  $\mathbb{D}^2$ .





# Bibliographie

- [1] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Springer-Verlag, 2004.
- [2] W. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.
- [3] F. Jean. Systèmes dynamiques. Stabilité et commande. Cours AO102, ENSTA.
- [4] V. Jurdjevic. *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press, 1997.
- [5] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Inc., second edition, 1979.
- [6] Y. Talpaert. *Geo Diff*. Cépaduès-Editions, 1993.

# Index

## Notations

$\mathcal{A}_p$ .....	41	$X_u$ .....	39
$C^\infty(p)$ .....	15	$\mathcal{X}(M)$ .....	30
$C^\infty(M)$ .....	30	$[X, Y]$ .....	43
$\text{cone}(\mathcal{F})$ .....	67	<b>A</b>	
$c^\varphi$ .....	5	algèbre de Lie .....	48, 56, 57
$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big _p$ .....	20	application	
$\frac{\partial}{\partial x^i}$ .....	31	différentiable .....	5
$dF$ .....	29	linéaire tangente ... <i>voir</i> différentielle	
$dF_p$ .....	18	lue dans des cartes .....	5, 21, 24
$\mathcal{D}(p)$ .....	15	réciproque .....	25
$\mathcal{F}$ .....	40	atlas .....	2
$\mathcal{F}_\Delta$ .....	59	de $TM$ .....	28
$F^*\omega_{F(p)}$ .....	25	maximal .....	3
$F^*g$ .....	18	<b>B</b>	
$F_*X$ .....	33	base	
$F^\varphi\psi$ .....	5	naturelle .....	20
$G(\mathcal{F})$ .....	50	base dénombrable <i>voir</i> espace topologique	
$g^\varphi$ .....	5	<b>C</b>	
$\text{int}\mathcal{A}_p$ .....	64	cône engendré par $\mathcal{F}$ .....	67
$\text{Lie}(\mathcal{F})$ .....	48	carte .....	1, 6
$\text{Lie}_p(\mathcal{F})$ .....	49	adaptée .....	11
$L_Xg$ .....	46	centrée .....	15
$L_XY$ .....	46	compatibles .....	1
$\text{Orb}_p(\mathcal{F})$ .....	50	domaine de .....	1
$\phi_t(q)$ .....	34	sur $TM$ .....	28
$\phi(t, q)$ .....	34	champ	
$\text{rg}_p F$ .....	6	d'espaces vectoriels .....	59
$T^*M$ .....	27	de coordonnées .....	79
$T_p^*M$ .....	24	de coordonnées .....	31
$TM$ .....	27	de vecteurs .....	30, 79
$T_pM$ .....	14	de vecteurs complet .....	35
$X_p \cdot g$ .....	16	récurrent .....	74
$X^\varphi$ .....	31	commandable .....	64

- fortement ..... 71  
 localement ..... 71  
 commande ..... 39  
   bang-bang ..... 76  
   ensemble de ..... 39  
   loi de ..... 40  
 condition du rang ..... 67  
 conjugué ..... 35  
 coordonnées ..... 1, 79  
 coordonnées ..... 19  
   changement de ..... 20, 24, 31  
   de  $dF_p$  ..... 21  
   pour une distribution ..... 61  
   sur  $T_pM$  ..... 20  
   sur  $TM$  ..... 29, 60  
 courbes  
   intégrales ..... 33  
   tangentes ..... 14  
 covecteur ..... 24  
 crochet de Lie ..... 43
- D**
- dérivée  
 de Lie ..... 46  
 directionnelle ..... 16, 46  
 dérivation ..... 30, 42  
   en un point ..... 15  
   ensemble des ..... 15  
 dérive ..... 63  
 difféomorphisme ..... 1, 6, 7  
 difféomorphisme ..... 19  
   groupe de ..... 35  
   local ..... 19  
 différentielle ..... 18, 29  
 distribution ..... 59, 80
- E**
- ensemble  
 atteignable ..... 41, 64  
 de commande ..... *voir* commande  
 équation  
 d'Euler ..... 76  
 d'Euler-Lagrange ..... 60
- différentielle ..... 33  
 espace  
   cotangent ..... 24  
   des configurations ..... 60  
   des phases ..... 60  
   euclidien ..... 3  
   tangent ..... 14, 17  
   topologique ..... 1, 3, 54
- F**
- famille  
 associée ..... 40  
 symétrique ..... 50, 67  
 fibré  
   cotangent ..... 27  
   tangent ..... 27  
 fibre ..... 28  
 flot ..... 34  
   approximation ..... 66  
   commutation ..... 45  
 1-forme ..... 24
- G**
- générateur infinitésimal ..... 36  
 germe ..... 15  
 groupe  
   de difféomorphismes ..... *voir*  
   difféomorphismes  
   orthogonal ..... *voir*  $O(n)$   
   spécial linéaire ..... *voir*  $SL_n(\mathbb{R})$
- H**
- Hadamard  
 lemme ..... 15  
 holonome ..... 60  
 homéomorphisme ..... 1
- I**
- identification canonique ..... 19  
 immersion ..... 7  
   locale ..... 52  
 intégrable ..... 59  
 involutive ..... 59

- J**  
jacobienne ..... 7
- L**  
lagrangien ..... 60  
Leibniz  
  règle de ..... 15  
Lie-déterminée ..... 64
- M**  
moment angulaire ..... 76
- N**  
non-holonome ..... 61
- O**  
 $O(n)$  ..... 11  
orbite ..... 50  
  espace tangent ..... 51, 56
- P**  
planification des mouvements ..... 72  
plongement ..... 7  
  de Whitney ..... 12  
  image d'un ..... 8, 11  
point récurrent ..... 74  
principe de d'Alembert-Lagrange ..... 60  
projection  
  canonique ..... 27  
  stéréographique ..... 4  
prolongement ..... 29
- R**  
rang ..... 6, 22  
  d'une application linéaire ..... 6  
  d'une distribution ..... 59
- S**  
 $S^n$  ..... 4, 23  
 $S^1$  ..... 3, 29  
 $S^2$  ..... 4, 29  
séparé ..... *voir* espace topologique  
 $SL_n(\mathbb{R})$  ..... 11  
 $SO(3)$  ..... 69
- $so(3)$  ..... 76  
sous-variété  
  de  $\mathbb{R}^n$  ..... 8  
  de variété ..... 10  
  immergée ..... 11  
  ouverte ..... 4  
  plongée ..... 8  
  sous-variété  
    espace tangent ..... 22  
    immergée ..... 50  
sphère en roulement ..... 68, 73  
structure différentiable ..... 2  
structure différentiable  
  d'une orbite ..... 54  
  de  $TM$  ..... 28  
submersion ..... 7  
  pré-image de ..... 9, 11  
système  
  affine ..... 63, 72  
  commandé ..... 39  
  de coordonnées ..... *voir* coordonnées  
  lagrangien ..... 60  
  sans dérive ..... 67
- T**  
théorème  
  d'existence et d'unicité ..... 33  
  d'inversion locale ..... 19  
  de Chow ..... 67  
  de composition ..... 18  
  de dépendance etc ..... 34  
  de Frobenius ..... 59  
  de l'orbite ..... 51  
topologie ..... 53  
  base d'une ..... 1, 53  
  d'une orbite ..... 51  
  de  $TM$  ..... 28  
  induite ..... 8, 11  
 $T\mathbb{R}^n$  ..... 29  
 $T_x\mathbb{R}^n$  ..... 14, 19  
trajectoire ..... 40, 72  
transport ..... 33, 45

flot du ..... 35  
trivialisation ..... 28

**V**

variété ..... 2, 12  
  de classe  $C^k$  ..... 2  
variété  
  à bord ..... 65  
  intégrale ..... 59  
  parallélisable ..... 32  
vecteur tangent ..... 14, 17, 27  
  en coordonnées ..... 19  
vitesse angulaire ..... 76  
voiture ..... 5  
  de Dubins ..... 75  
  modèle simplifié ..... 40, 41, 68