Analyse numérique d'une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour l'équation des ondes

Francis Collino, Thierry Fouquet, Patrick Joly

▶ **To cite this version:**

Francis Collino, Thierry Fouquet, Patrick Joly. Analyse numérique d'une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour l'équation des ondes. [Rapport de recherche] RR-3474, INRIA. 1998. inria-00073215

HAL Id: inria-00073215
https://inria.hal.science/inria-00073215

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Analyse numérique d'une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour l'équation des ondes.

F. Collino, T. Fouquet et P. Joly

N° 3474

Août 1998

THÈME 4

ISSN 0249-6399

INRIA
ROCQUENCOURT

Analyse numérique d'une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour l'équation des ondes.

F. Collino, T. Fouquet et P. Joly*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Ondes

Rapport de recherche n° 3474 — Août 1998 — 115 pages

Résumé : L'objet de ce rapport est d'analyser des raffinements de grille spatio-temporels pour l'équation des ondes 1-D discrétisée par le schéma classique à 5 points. Le raccord entre les grilles est réalisé par interpolation temporelle centrée. On montre à l'aide d'expériences numériques et d'une analyse par ondes planes que la précision de ces schémas est d'ordre 1. Dans le cas de deux milieux infinis, on démontre la stabilité sous la condition CFL usuelle au moyen d'une analyse de Fourier-Laplace. Dans le cas d'une bande raffinée, on démontre que des instabilités fortes peuvent exister sous la condition CFL usuelle. Des expériences numériques laissent supposer que ce résultat négatif s'étend aux équations de Maxwell 1-D et 2-D.

Mots-clé : Raffinement spatio-temporel, FDTD, Stabilité, Équation des ondes, Équations de Maxwell

(Abstract: pto)

* Francis.Collino@inria.fr, Thierry.Fouquet@inria.fr Patrick.Joly@inria.fr

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : 01 39 63 55 11 - International : +33 1 39 63 55 11
Télécopie : (33) 01 39 63 53 30 - International : +33 1 39 63 53 30

Numerical analysis of a space-time mesh refinement in the FDTD approximation of the waves equation

Abstract: We analyze space-time mesh refinements in the 1D wave equation discretized by the classical 5 points scheme. The gluing between the meshes is obtained by centered temporal interpolation. By means of both numerical experiments and a plane wave analysis, the scheme is proved to be of first order. In the case of a single interface, we demonstrate, with the help of a Fourier-Laplace analysis, that the scheme is stable under the usual CFL condition. In the case of a refined layer, one proves that strong instabilities may occur under the same CFL condition. Numerical experiments strongly suggest that this negative result extends to the case of the 1-D and 2-D Maxwell's equations.

Key-words: Space-time refinement, FDTD, Stability, Waves equation, Maxwell's equations

Introduction

0.1 Position du problème et motivation

Les techniques de différences finies ou d'éléments finis avec condensation de masse sont largement utilisées pour la simulation de la propagation des ondes. Les domaines d'application sont nombreux qui vont de d'acoustique à l'électromagnétisme en passant par la sismique en géophysique. La méthode se ramène à des équations discrètes dont les inconnues sont les valeurs du ou des champs en des points d'une grille de calcul, grille qui est le plus souvent régulière. Le schéma numérique consiste simplement à appliquer une formule explicite permettant d'évaluer en des temps échantillonnés et progressivement l'inconnue en fonction du temps. Le coût de calcul de ces méthodes est bien sûr lié à la taille de la grille et augmente avec l'inverse du pas. Ce pas de grille doit être suffisamment fin pour que la précision obtenue sur la solution soit acceptable. L'erreur sur la solution peut provenir de causes diverses. La plus connue est le phénomène de dispersion: les hautes fréquences qui composent l'onde numérique ont tendance à aller moins vite que les plus basses entraînant une décohérence du signal d'autant plus grande que la longueur parcourue augmente. On maîtrise ce phénomène en prenant suffisamment de points de grille par longueur d'onde pour toutes les longueurs d'onde composant le signal que l'on veut approcher. Typiquement pour les schémas d'ordre 2, qui sont les plus utilisés, on est conduit à prendre 10 à 15 points par longueur d'ondes si l'on veut une bonne précision au bout de 10 longueurs d'ondes parcourues.

La dispersion étant contrôlée, une autre cause d'erreur, liée à des aspects géométriques, peut survenir. Dans les problèmes de diffraction on doit imposer des conditions aux limites appropriées sur la frontière de l'obstacle. Par exemple, pour les équations de Maxwell, on impose que le champ électrique tangent est nul. Or la frontière de l'objet ne suit pas nécessairement la grille de calcul et on est amené à considérer une frontière approchée en marches d'escalier. Et ces marches engendrent

des diffractions numériques parasites qui peuvent entacher d'une erreur significative le résultat du calcul. D'autres problèmes de géométrie peuvent se poser dans le cas où l'objet diffractant présente une section très faible par rapport aux longueurs d'ondes impliquées (cas des antennes filaires en électromagnétisme). La modélisation du fil conduit à choisir un pas très petit pour bien tenir compte de sa géométrie. Si l'on travaille avec une grille régulière, on imagine alors les conséquences désastreuses de la présence du moindre brin de fil. Une des idées pour traiter la difficulté consiste à distinguer deux zones pour le calcul. Une zone (la plus importante) où le calcul se fait sur une grille principale et une ou plusieurs zones où l'on utilise des morceaux de grilles raffinées, c'est à dire dont le pas de discrétisation est une fraction du pas de la grille principale. La propagation de l'onde est réalisée principalement dans la grille grossière tandis que les grilles raffinées, localisées au voisinage des aspérités des objets diffractants permettent de bien rendre compte de l'interaction complexe entre l'onde et la structure. Le point délicat est le traitement de la frontière entre les grilles. On utilise en général des interpolations spatiales ou spatio-temporelles dans le cas où le pas de temps est également raffiné. On peut avoir en effet avantage à raffiner à la fois le pas d'espace et le pas de temps car on montre que la précision du calcul, du point de vue de la dispersion, est une fonction du rapport des pas de discrétisation. En raffinant les pas d'un même facteur, on peut conserver le rapport optimal dans les deux grilles.

0.2 Un survol non exhaustif de la bibliographie sur le raffinement de maillage spatio-temporel pour l'électromagnétisme

Mis à part l'article pionnier de Kunz et Simpson de 1981, [9], c'est au début des années 1990 que sont apparus les premiers travaux sur le raffinement de maillage spatio-temporel. La modélisation des phénomènes électromagnétiques à l'aide du schéma saute-mouton de Yee ou FDTD, [16], était depuis une vingtaine d'année très couramment pratiquée aussi bien dans les laboratoires de recherche que pour les applications industrielles. La complexité croissantes des structures rayonnantes calculées a posé le problème de l'erreur due à la géométrie de manière de plus en plus aiguë et la méthode de raffinement de grille a semblé toute indiquée. On a ainsi vu paraître une série de travaux, surtout dans des revues comme *IEEE Transaction on Antennas and Propagation* ou encore *IEEE Transaction on Microwave Theory and Technology*, qui en gros suivait le même schéma. Dans un premier temps, on choisit de

façon assez arbitraire un rapport de pas de grille (1:2,1:3 voire 1:4), un schéma d'interpolation (centré ou non) puis on code la méthode et on la teste sur des exemples d'intérêt pratique. Le premier article de ce genre a été publié en 1990 par Kim et Hoefer, [7]. Les auteurs retiennent un raffinement spatio-temporel de 1:4. Le schéma consiste à utiliser la formule explicite de Yee 4 fois sur la grille fine pour une seule fois sur la grille grossière. Des formules d'interpolation portant sur les deux champs sont utilisées pour clore le système d'équations[1] (ce schéma n'est d'ailleurs pas donné de manière très claire dans l'article). Les conclusions sont que la méthode marche (gain de 73 en temps de calcul) mais les auteurs signalent deux difficultés. Tout d'abord, que des réflexions parasites sont présentes et qu'il faut utiliser une interpolation ''conforme au comportement de la solution 3474''. Ensuite, dans le cas de sandwichs (grilles grossière-grille fine- grille grossière) des phénomènes indésirables (''a serious interaction'') peuvent apparaître. Parallèlement en 1991 Zivanovic *et al.* proposent un schéma d'interpolation pour un raffinement 1:2 puis 1:3. L'interpolation est là encore effectuée sur les champs électriques et magnétiques. Deux exemples, difficiles à interpréter, sont donnés qui semblent montrer que la méthode "*marche*". On peut reprocher à ce papier son côté un peu péremptoire "*... The technique is shown to be numerically stable and does not entail any extra numerical error .*"(sic). Les résultats ne semblent pourtant pas toujours très bons, surtout pour la grille 1:2 où, pour une expérience numérique particulière, le raffinement entraîne une détérioration des résultats. Les conditions d'interpolation pour la grille 1:3 sont particulièrement sophistiquées (utilisation d'un schéma d'équations d'ondes pour l'interpolation du champ électrique). Elles semblent donner de meilleurs résultats que le raffinement 1:2. Nulle mention de problèmes de stabilité n'est signalée. Dans une communication, Prescott et Shulley, [12], propose une version légèrement modifiée des équations d'interpolation. Leur méthode est testée sur un calcul de coefficient de réflexion pour un guide d'onde 2-D. Des résultats d'erreur de moins de 0.65 % sont donnés sur une large plage de fréquences, mais il est difficile d'interpréter ces résultats car le rapport de ces fréquences avec le pas de discrétisation n'est pas donné. Un travail similaire est effectué par Shimizu et al., [13]. De nouveau, les auteurs proposent un schéma d'interpolation original et portant à la fois sur le champ électrique et le champ magnétique. Le coefficient de réflexion dû au changement de grille est déterminé expérimentalement sur un exemple de simulation d'un guide d'ondes cylindrique. Ils obtiennent une erreur de moins de 0,6 % pour des fréquences allant jusqu'à 21 points de grilles grossières, Le papier qui nous a semblé le plus abouti est celui de Cheva-

1. rappelons que le schéma de Yee utilise comme inconnues le champ électrique et le champ magnétique

lier, Luebbers et Cable, [3] à propos d'un raffinement de grille 1:3. Son originalité est double. D'une part, l'interpolation entre les grilles ne porte que sur le champ magnétique. Cela permet de traiter convenablement les cas où l'interface entre grille fine et grille principale est traversée par des milieux de permitivité diélectrique variable, c'est à dire des cas où le champ électrique n'est plus une fonction continue de l'espace. D'autre part, ce papier est le premier à exprimer clairement l'existence de difficultés liées à la stabilité du schéma. A deux dimensions d'espace, une diminution d'un facteur 1.2 du pas de temps s'avère indispensable pour avoir la stabilité. Un autre problème est signalé et qui se manifeste par la présence d'un bruit constitué d'oscillations hautes fréquences sur la solution numérique. Les auteurs proposent une méthode pour diminuer ce bruit qui consiste à pondérer leur formules d'interpolation posées sur plusieurs interfaces décalées: au voisinage de l'interface, certains nœuds du maillage sont alors vus comme appartenant à la fois à la grille fine et à la grille grossière. Trois expériences numériques sont présentées, le calcul d'un dipôle puis d'une sphère conductrice et enfin d'un guide d'onde. Les résultats montrent une erreur de l'ordre de 0.5 % pour 10 points par longueurs d'onde par rapport aux résultats des mêmes calculs utilisant la grille fine. Si l'on accepte cette marge d'erreur, le gain en temps de calcul et en occupation mémoire est impressionnant (facteur 10). Les mêmes calculs effectués sur la seule grille grossière aboutissent à plus de 100 % d'erreur pour un temps de calcul uniquement divisé par 2.

La première conclusion de ce bref survol est que le raffinement de maillage spatio-temporel a surtout été étudié d'un point de vue expérimental (analyse de résultats d'expériences numériques). Les résultats des calculs montrent la grande potentialité de la méthode, lorsqu'elle est convenablement utilisée. Le papier de Chevalier et al excepté, le choix de la formule d'interpolation (interpolation spatiale, temporelle, spatio-temporelle) est toujours assez arbitraire. Des problèmes d'instabilités fortes (explosion au bout de quelques pas de temps) ou faible (explosion à la suite de multiples allez-retours de l'onde à l'intérieur de la boîte de calcul) ont été signalés par certains auteurs sans qu'aucune analyse mathématique ne soit donnée.

Nous n'avons pas trouvé de papiers de nature vraiment mathématique sur la question précise du raffinement spatio-temporel pour Maxwell. Néanmoins, il existe des articles sur des sujets connexes comme celui de Tran et Glowinski, [1] ou encore Monk, [10], qui traitent du raffinement uniquement spatial pour, respectivement, l'équation des ondes et l'équation de Maxwell instationnaire, Une analyse assez complète est présentée par M. Berger dans [2] qui traite du raffinement de grille 1:n pour l'équation de transport scalaire 1D. Cette analyse est menée à partir d'une formule explicite de la solution du schéma via une transformation de Fourier-Laplace

en temps. Elle obtient la stabilité d'un schéma s'appuyant sur un même schéma dissipatif posé sur deux grilles dont les pas sont en rapport de 1 à n, les deux grilles étant couplées par des formules ad hoc. L'équation de transport scalaire est toutefois un modèle plus simple que l'équation des ondes. En effet, sa solution se propageant toujours dans une direction privilégiée ne peut rencontrer chaque interface entre grilles fines et grilles grossières qu'une seule fois. Ce n'est pas le cas pour l'équation des ondes ou le système de Maxwell à cause des phénomènes de réflexion.

0.3 Présentation du plan de travail et des principaux résultats obtenus

L'objet de ce rapport est d'effectuer une analyse mathématique assez complète du raffinement de grille spatio-temporel sur un cas simple, à savoir l'équation des ondes 1-D discrétisée par le schéma aux différences finies le plus classique

$$\frac{u_j^{\ell+1} - 2u_j^{\ell} + u_j^{\ell-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^{\ell} - 2u_j^{\ell} + u_{j-1}^{\ell}}{h^2} = 0. \tag{1}$$

Ce modèle est suffisamment élémentaire pour se prêter à des calculs explicites et assez riche pour contenir beaucoup des caractéristiques et des difficultés du modèle plus complexe du schéma de Yee pour les équations de Maxwell en 2 ou 3 dimensions.

La section § 1.1, traite du raffinement de grille 1:2. On suppose que la grille de calcul spatio-temporelle à droite est deux fois plus raffinée que celle de gauche. Si $(h, \Delta t)$ sont les pas de la grille fine, $(2h, 2\Delta t)$ seront les pas pour la grille grossière. On remarque que l'équation du schéma est alors inchangée, puisque ne dépendant que du nombre de Courant $\frac{\Delta t}{h}$ (seule change l'interprétation des indices j et ℓ). Le raccord entre les grilles est effectué en imposant qu'elles se juxtaposent aux points $(0, 2\ell\Delta t)$ et $(2h, 2\ell\Delta t)$. Cela fournit naturellement 2 équations de raccord en identifiant les valeurs des champs aux instants $2\ell\Delta t$. Manque une équation, que l'on construit en identifiant les valeurs du champ sur la grille fine aux points $(0, (2\ell+1)\Delta t)$ avec la demi somme du champ relatif à la grille grossière aux points $(0, (2\ell)\Delta t)$ et $(0, (2\ell + 2)\Delta t)$.

Pour analyser ce schéma on suit la démarche de M. Berger. On explicite la solution générale du problème à l'aide de la transformation de Fourier-Laplace. La solution s'exprime dans chaque grille au moyen d'une intégrale portant sur toute les fréquences contenues dans le champ incident. À partir de cette expression, on démontre la stabilité du schéma: le schéma est stable sous la condition $\Delta t \leq h$, c'est

à dire sous la même contrainte que celle relative au schéma posé dans une seule grille.

Une fois la stabilité assurée, on s'intéresse à la précision de la méthode au moyen d'une analyse harmonique, On montre que toute onde harmonique incidente solution du schéma dans la grille grossière donne naissance au contact de l'interface à deux ondes transmises dans la grille raffinée et une onde réfléchie dans la grille grossière. Le fait qu'il y ait deux ondes transmises s'explique par le phénomène de repliement du spectre: une onde de pulsation ω est indistingable dans la grille grossière d'une onde de pulsation $\omega + \frac{2\pi}{2\Delta t}$. Ce n'est pas le cas dans la grille fine ce qui induit un couplage entre les ondes de pulsation ω et $\omega + \frac{\pi}{\Delta t}$. Ce phénomène est un des points clés pour comprendre les phénomènes d'oscillations parasites (c.à.d. hautes fréquences) que l'on peut observer dans les cas bi et tri-dimensionnels.

L'étude de précision est menée à partir des expressions du coefficient de réflexion et des deux coefficients de transmission. On trouve que deux de ces coefficients sont d'ordre 1. (mis à part l'un des coefficients de transmission) En particulier, le coefficient de réflexion tend vers 0 comme $\omega\Delta t$. La méthode est donc d'ordre 1, résultat qui n'était pas évident a priori compte tenu du caractère centré du schéma. Cette propriété sera confirmée par les expériences numériques. Néanmoins cette erreur d'ordre 1 s'avère de fait beaucoup moins gênante que l'erreur liée à la dispersion dans des conditions usuelles d'utilisation du schéma. La raison en est que l'erreur de dispersion, quoique d'ordre 2, augmente linéairement avec le nombre de longueurs d'ondes parcourues. L'erreur due aux réflexions n'étant que proportionnelle au nombre de celles-ci.

Dans la section § 2, on étend le schéma aux cas d'un raffinement de grilles $1 : n$. Les calculs sont un peu plus complexes mais les résultats sont, pour la plupart, tout à fait similaires. Dans le cas d'un milieu infini, on a toujours stabilité [2] sous la condition $\Delta t \leq h$. L'analyse par ondes planes révèle l'existence d'un couplage entre les fréquences $\omega + \frac{2\pi p}{n\Delta t}$, $p = 0..,n-1$ par l'interface. Une onde incidente dans la grille grossière donnera ainsi naissance à une onde réfléchie et n ondes transmises. On montre que le coefficient de réflexion tend vers 0 comme $\omega\Delta t$ tandis que l'un des coefficients de transmission (celui correspondant à l'onde physique) tend vers 1 avec cette même vitesse de convergence. Les $n-1$ autres coefficients de réflexion tendent vers 0 comme $(\omega\Delta t)^2$.

Tous ces résultats ont trait au couplage de deux grilles semi-infinies. Notons que ces premiers résultats sont plutôt positifs: le schéma est stable sous la condition CFL

2. si $n > 2$, la démonstration repose toutefois sur un calcul numérique du maximum d'une fonction sur un intervalle

usuelle et les réflexions parasites sont faibles et bien maîtrisées. En fait, la situation se révèle changée radicalement lorsque l'on se place en milieu borné. Dans la section § 3 on s'intéresse au cas d'une bande raffinée et connectée à sa frontière à deux grilles grossières. On construit les solutions générales par superposition de combinaisons d'ondes planes piégées dans la couche raffinée puis transmises à la grille grossière. On montre alors que la stabilité n'est plus assurée sous la condition usuelle mais dépend de l'occurence d'un zéro d'une fonction d'une variable complexe, paramétrée par le nombre de mailles de la couche et par le nombre de Courant. Un résultat important est que des instabilités fortes au sens de Kreiss peuvent survenir même si l'on respecte la CFL usuelle. Ceci est confirmé par des expériences numériques où l'on observe des instabilités de type exponentiel qui se développent, quelque fois tardivement, et font exploser les résultats du calcul.

Ces phénomènes d'instabilités sont très gênants car la nouvelle CFL dépend de façon complexe du nombre de maille dans la couches et ce, bien que l'on se soit placé en dimension 1. On s'attend alors à ce que l'extension de ces schémas à des cas plus compliqués tels les équations de Maxwell 2-D, ne nous permette plus de maîtriser cette instabilité. Ceci est confirmé par les quelques expériences numériques rapidement présentées dans la section § 4.

En conclusion, cette méthode d'interpolation nous semble trop incertaine pour être utilisée dans le cas de raffinement spatio-temporelle, il semble plus judicieux de se tourner vers des méthodes garantissant la stabilité de manière plus systématique.

Chapitre 1

Etude d'un schéma de raffinement moitié pour l'équation des ondes. Cas de deux milieux infinis

1.1 Description d'un schéma de raffinement moitié pour l'équation des ondes.

Dans le cas de raffinement spatio-temporelle, la difficulté est le traitement des points à l'interface. Nous présentons dans cette section un schéma trés simple, permettant de résoudre cette difficulté, couplant deux grilles de calcul dont le rapport des pas de discrétisation est 2. L'idée est d'utiliser des interpolations en temps pour compléter le calcul sur la grille la plus fine.

On distingue la partie droite de la grille de discrétisation (indicée $j > 0$) maillée deux fois plus finement que la partie gauche (indicée $j < 0$) On construit le schéma à l'aide des approximations suivantes

$$\begin{cases} g_{2j}^{2k} \approx u(2jh, 2k\Delta t) & j \leq 0 \\ d_j^k \approx u(jh, k\Delta t) & j > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

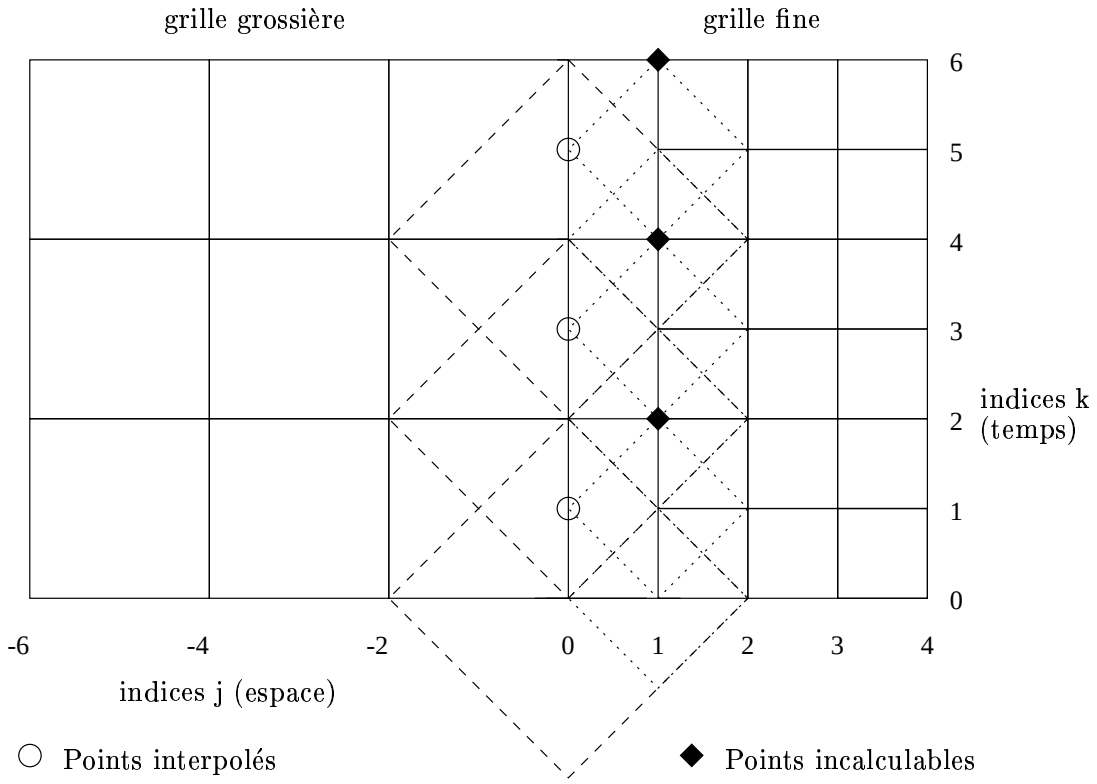


FIG. 1.1 – *Schéma de l'interpolation sur la grille*

où h est le pas d'espace, Δt le pas de temps et u vérifie l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad x \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

En $x < 0$ l'équation est approchée par

$$\frac{g_{2j}^{2k+2} - 2g_{2j}^{2k} + g_{2j}^{2k-2}}{4\Delta t^2} - \frac{g_{2j+2}^{2k} - 2g_{2j}^{2k} + g_{2j-2}^{2k}}{4h^2} = 0 \qquad \text{pour } j < 0. \tag{1.3}$$

En $x > 0$ l'équation est approchée par

$$\frac{d_j^{k+1} - 2d_j^k + d_j^{k-1}}{\Delta t^2} - \frac{d_{j+1}^k - 2d_j^k + d_{j-1}^k}{h^2} = 0 \qquad \text{pour } j > 1. \tag{1.4}$$

On remarque, qu'avec ce choix le rapport du pas de temps sur le pas d'espace reste constant d'une grille de calcul à l'autre: le nombre de Courant est inchangé entre les deux grilles.

Restent à définir les approximations de l'équation à l'interface des deux grilles car chaque schéma fait appel aux valeurs de la grille voisine à l'interface.

En j=0, l'équation (1.3) devient

$$\frac{g_{2j}^{2k+2} - 2g_{2j}^{2k} + g_{2j}^{2k-2}}{4\Delta t^2} - \frac{d_{2j+2}^{2k} - 2g_{2j}^{2k} + g_{2j-2}^{2k}}{4h^2} = 0 \qquad \text{pour } j = 0. \tag{1.5}$$

En j=1, l'approximation dépendra de l'itération en temps car les éléments de la grille grossière ne sont calculés qu'une fois sur deux. Ainsi en j=1 pour les itérations impaires l'équation (1.4) devient

$$\frac{d_j^{2k+1} - 2d_j^{2k} + d_j^{2k-1}}{\Delta t^2} - \frac{d_{j+1}^{2k} - 2d_j^{2k} + g_{j-1}^{2k}}{h^2} = 0 \qquad \text{pour } j = 1, \tag{1.6}$$

alors que pour les itérations paires, on approche $g_{j-1}^{2k+1} \approx \frac{1}{2}(g_{j-1}^{2k+2} + g_{j-1}^{2k})$ et on obtient

$$\frac{d_j^{2k+2} - 2d_j^{2k+1} + d_j^{2k}}{\Delta t^2} - \frac{d_{j+1}^{2k+1} - 2d_j^{2k+1} + \frac{1}{2}(g_{j-1}^{2k+2} + g_{j-1}^{2k})}{h^2} = 0 \qquad \text{pour } j = 1. \tag{1.7}$$

La figure 1.1 récapitule les schémas à l'interface entre les deux grilles.

Pour compléter le schéma, il nous faut préciser le schéma de démarrage aux premiers pas de temps: il nous faut initialiser le schéma avec des conditions initiales en k=0 et 1 pour d_j^k et k=0 et 1 pour g_{2j}^{2k}.

Le premier pas de temps est simplement initialisé par la valeur aux noeuds de fonction initiale u_0 choisie.

Pour le deuxième pas de temps on utilise un développement de Taylor à l'ordre 2 ainsi que la condition de vitesse nulle $\frac{du}{dt}_{/t=0} = 0$ et l'équation des ondes satisfaite par u pour écrire

$$u(jh, \Delta t) \approx d_j^1 = u_0(jh) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u_0((j+1)h) - 2u_0(jh) + u_0((j-1)h)}{h^2} \tag{1.8}$$

et

$$u(2jh, 2\Delta t) \approx g_j^1 = u_0(2jh) + \frac{4\Delta t^2}{2} \frac{u_0(2(j+1)h) - 2u_0(2jh) + u_0(2(j-1)h)}{4h^2} \tag{1.9}$$

Cette manière de faire est classique et permet d'approcher les conditions initiales à l'ordre 2.

Il est bien connu (cf. [4] par exemple) que le schéma utilisé sur chacune des grilles est stable dès que Δt est inférieur à Δx. En d'autres termes, le nombre de Courant $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ doit être inférieur ou égal à 1. Si cette condition n'est pas remplie le schéma explose au bout d'un nombre fini d'itérations. Le schéma aux caractéristiques qui correspond au cas limite $\Delta t = \Delta x$ est intéressant car il n'induit aucune dispersion. Malheureusement ce schéma ne peut se généraliser aux dimensions d'espace supérieures à 1. Les autres schémas possèdent tous un caractère dispersif qui se traduit par une variation de la vitesse de propagation des ondes en fonction des fréquences composant l'onde. Au fur et à mesure de la progression de l'onde, la partie haute fréquence du signal a tendance à trainer en oscillant derrière le front principal. Si l'on veut que cet effet soit faible, il convient de choisir un pas de grille suffisamment fin par rapport aux longueurs d'ondes qui constituent le signal.

Dans ce contexte, la question posée est de voir l'effet induit par le changement de grille sur le schéma: as-t-on toujours stabilité si le nombre de Courant est inférieur à 1?, détériore-t-on la précision du schéma?, comment se compare l'erreur due au changement de grille au phénomène de dispersion? Ces questions seront successivement abordées dans les sections suivantes.

1.2 Analyse de la stabilité par Fourier-Laplace

Nous proposons dans cette section de résoudre explicitement les équations du schéma à l'aide de la transformation de Fourier-Laplace et d'analyser ainsi théoriquement sa stabilité. Cette méthode est en effet particulièrement bien adaptée à l'étude du couplage de deux schémas d'équations d'ondes. Il s'agit d'une technique à la Kreiss comme pour l'étude des schémas de discrétisation des problèmes hyperboliques aux limites (cf. [8], [15] par exemple).

1.2.1 Transformées de Fourier-Laplace : définition et résolution

Pour simplifier, on suppose que les conditions initiales sont à support dans $x < 0$, on cherche la solution sous la forme

$$g_{2j}^{2k} = u_{2j}^{2k} + \tilde{g}_{2j}^{2k}, \tag{1.10}$$

où u_{2j}^{2k} est l'onde numérique incidente, c'est à dire celle qui vérifie le schéma (1.3) pour $j \in \mathbf{Z}$ avec les mêmes conditions initiales que g en $k = 0$ et $k = 1$. On introduit alors les transformées de Fourier-Laplace discrètes des suites $\tilde{g}_{2j}^{2k}$, u_{2j}^{2k}, d_j^{2k} et d_j^{2k+1}.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{\mathrm{g}}_{2j}(\omega) & = & 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}_{2j}^{2k} \exp(i\omega 2k\Delta t) \\ \hat{\mathrm{u}}_{2j}(\omega) & = & 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} u_{2j}^{2k} \exp(i\omega 2k\Delta t) \\ \hat{\mathrm{d}}_j^P(\omega) & = & 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} d_j^{2k} \exp(i\omega 2k\Delta t) \\ \hat{\mathrm{d}}_j^I(\omega) & = & 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} d_j^{2k+1} \exp(i\omega (2k+1)\Delta t). \end{array} \right. \tag{1.11}$$

où ω est l'argument complexe de ces suites.

On pose

$$\hat{\mathrm{D}}_j = \left[\begin{array}{c} \hat{\mathrm{d}}_j^P \\ \hat{\mathrm{d}}_j^I \end{array} \right]. \tag{1.12}$$

On peut justifier l'existence et même l'analycité des fonctions définies ci-dessus au moins pour $\Im(\omega)$ assez grand, car les équations du schéma nous montrent qu'il

existe un M ne dépendant que de du rapport des pas de discrétisation tel que

$$\left(\sum_{j\leq 0}|g_{2j}^{2k}|^2+\sum_{j>0}\|D_j^k\|^2\right) \leq (M(\alpha))^{2k} \left(\sum_{j\leq 0}|g_{2j}^{0}|^2+\sum_{j\leq 0}|g_{2j}^{2}|^2+\sum_{j>0}\|D_j^0\|^2\right),$$
$$\text{avec } \|D_j^k\|^2=|d_j^{2k}|^2+|d_j^{2k-1}|^2 \text{ et } \alpha=\frac{h^2}{\Delta t^2}. \tag{1.13}$$

En effet, une majoration à la baïonnette nous donne que pour tout $j>0$

$$|d_j^{2k+1}|^2 \leq 4\left(4(1-\frac{1}{\alpha})^2|d_j^{2k}|^2+|d_j^{2k-1}|^2+\frac{1}{\alpha^2}(|d_{j-1}^{2k}|^2+|d_{j+1}^{2k}|^2)\right)$$

avec $d_{j-1}^{2k}=g_0^{2k}$ lorsque $j=1$, et donc

$$\sum_{j>0}|d_j^{2k+1}|^2 \leq C(\alpha)\left(\sum_{j>0}|d_j^{2k}|^2+\sum_{j>0}|d_j^{2k-1}|^2+\sum_{j\leq 0}|g_{2j}^{2k}|^2\right)$$

avec, par exemple, $C(\alpha)=16((1-\frac{1}{\alpha})^2+\frac{8}{\alpha^2}+4$. De même, on montre que

$$\sum_{j>0}|g_{2j}^{2k+2}|^2 \leq C(\alpha)\left(\sum_{j\leq 0}|g_{2j}^{2k}|^2+\sum_{j\geq 0}|g_{2j}^{2k-2}|^2+\sum_{j>0}|d_j^{2k}|^2\right).$$

Enfin,

$$\sum_{j>0}|d_j^{2k+2}|^2 \leq$$
$$\left(16(1-\frac{1}{\alpha})^2+\frac{8}{\alpha^2}\right)\sum_{j>0}|d_j^{2k+1}|^2+4\sum_{j>0}|d_j^{2k}|^2+\frac{2}{\alpha^2}\sum_{j\leq 0}|g_{2j}^{2k+2}|^2+\frac{2}{\alpha^2}\sum_{j\leq 0}|g_{2j}^{2k}|^2$$
$$\leq C'(\alpha)\left(\sum_{j\leq 0}|g_{2j}^{2k}|^2+\sum_{j\geq 0}|g_{2j}^{2k-2}|^2+\sum_{j>0}|d_j^{2k-1}|^2+\sum_{j>0}|d_j^{2k}|^2\right).$$

où $C'(\alpha)=\left(4+\frac{2}{\alpha^2}+C(\alpha)(16(1-\frac{1}{\alpha})^2+\frac{10}{\alpha^2})\right)$. et $M(\alpha)=2C(\alpha)+C'(\alpha)+1$ convient.

Les séries intervenant dans (1.11) sont donc absoluement convergente dès que $\Im\omega > \log(M(\alpha)/\Delta t)$. On en déduit que les transformées de Fourier Laplace sont bien définies et analytiques, au moins sur un demi-plan de la forme $\Im\omega > P$ pour P assez grand. De plus, on vérifie facilement que ces fonctions doivent être bornées à l'infini, $\Im\omega \to \infty$.

Une fois ces définitions posées, on va utiliser les équations du schéma pour établir des relations entre les transformations de Fourier-Laplace des fonctions inconnues. Nous venons de voir que tous les calculs qui vont suivre se justifient au moins lorsque la partie imaginaire de ω est assez grande.

On multiplie les équations (1.3) et (1.5) par $e^{-i2k\omega\Delta t}$ puis on somme sur les indices k, on obtient alors les relations classiques pour le schéma intérieur

$$\begin{cases} 4\dfrac{\sin^2(\omega\Delta t)}{\Delta t^2}\hat{\mathrm{g}}_{2j} + \dfrac{1}{h^2}(\hat{\mathrm{g}}_{2j+2} - 2\hat{\mathrm{g}}_{2j} + \hat{\mathrm{g}}_{2j-2}) = 0 \\ \text{pour } j < 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} \dfrac{A_D\hat{\mathrm{D}}_j}{\Delta t^2} + \dfrac{1}{h^2}(\hat{\mathrm{D}}_{j+1} - 2\hat{\mathrm{D}}_j + \hat{\mathrm{D}}_{j-1}) = 0 \\ \text{pour } j > 1, \end{cases} \tag{1.15}$$

où

$$A_D = \begin{bmatrix} 2 & -2\cos(\omega\Delta t) \\ -2\cos(\omega\Delta t) & 2 \end{bmatrix}.$$

les équations (1.4), (1.6) et (1.7) multipliée respectivement par $e^{-i2k\omega\Delta t}$,$e^{-i2k\omega\Delta t}$ et $e^{-i(2k+1)\omega\Delta t}$, puis sommées nous donnent les relations liant les transformées à l'interface.

$$\begin{cases} 4\dfrac{\sin^2(\omega\Delta t)}{\Delta t^2}\hat{\mathrm{g}}_{2j} + \dfrac{1}{h^2}(\hat{\mathrm{g}}_{2j-2} - 2\hat{\mathrm{g}}_{2j} + \hat{\mathrm{d}}^P_{2j+2} - \hat{\mathrm{u}}_{2j+2}) = 0 \\ \text{pour } j = 0, \end{cases} \tag{1.16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{A_D\hat{\mathrm{D}}_j}{\Delta t^2} + \dfrac{1}{h^2}(\hat{\mathrm{D}}_{j+1} - 2\hat{\mathrm{D}}_j + \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{g}}_0 + \hat{\mathrm{u}}_0 \\ \cos(\omega\Delta t)(\hat{\mathrm{g}}_0 + \hat{\mathrm{u}}_0) \end{bmatrix}) = 0 \\ \text{pour } j = 1, \end{cases} \tag{1.17}$$

Toutes ces relations sont des récurrences à deux niveaux que l'on sait résoudre à l'aide des solutions du polynôme caractéristique

$$\begin{cases} r^2(\omega) - 2A(\omega)r(\omega) + 1 = 0 \\ \text{avec } A(\omega) = 1 - 2\dfrac{h^2}{\Delta t^2}\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2}). \end{cases} \tag{1.18}$$

Ce polynôme possède deux racines dont le produit est 1 et qui sont données par

$$r^{\pm}(\omega) = A(\omega) \pm A(\omega)\sqrt{1 - \frac{1}{A^2(\omega)}}. \tag{1.19}$$

Par exemple, la solution de (1.14) s'écrit

$$\hat{g}_{2j} = C^{+}(\omega)\left(r^{+}(2\omega)\right)^{j} + C^{-}(\omega)\left(r^{-}(2\omega)\right)^{j}. \tag{1.20}$$

Il y a donc a priori deux constantes à déterminer. En fait, les estimations a priori qui ont été données plus haut vont nous permettre d'en éliminer une. En effet, on recherche des fonctions qui restent bornées lorsque la partie imaginaire de ω tend vers plus l'infini. Or, si la partie imaginaire de ω tend vers l'infini, $A(\omega)$ tend vers l'infini et l'une des deux racines tend vers 0 tandis que l'autre tend vers l'infini. On conclut que l'un des coefficients doit être nul.

On va préciser tout ceci en donnant une définition rigoureuse de "la racine de module plus petite que 1 de (1.18)".

1.2.2 Définition et analyse de $r(\omega)$

On commence par choisir une détermination de la racine carrée. On prend $\sqrt{z} = \exp^{\frac{1}{2}\log z}$ où $\log z = \log|z| + i\arg(z)$ avec $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$ (détermination principale du logarithme). La fonction $\sqrt{z}$ est définie analytique sur $\mathbf{C}$ privé de la coupure $]-\infty, 0]$. Si on utilise cette définition, on vérifie que les fonctions $r^{\pm}(\omega)$ données par (1.19) sont analytiques en tous points tels que $A(\omega)$ ne soit pas un réel de $[-1, 1]$. Supposons le pas de temps plus petit que le pas d'espace, soit α plus grand que 1, un calcul simple montre que la coupure en ω pour $r^{\pm}$ est alors constituée d'une famille de segments de la forme $[-\theta/\Delta t, \theta/\Delta t] + 2\pi\mathrm{Z}/\Delta t$ où $\theta = 2\arcsin(\frac{\Delta t}{\Delta x})$. Une propriété remarquable est que ces segments correspondent précisément aux valeurs de ω pour lesquelles les deux racines sont de module 1. En effet, si (1.18) admet deux racines de modules 1, soient $e^{i\phi}$ et $e^{-i\phi}$ avec ϕ réel on trouve que $\cos\phi = A$, A est un réel de $[-1, 1]$ et ω est sur la coupure de $r(\omega)$. En utilisant un argument de continuité, on en déduit que (1.19) définit deux racines de (1.18) dont le module est, globalement sur son domaine, soit plus petit soit plus grand que 1. Comme $\sqrt{1 - 1/A^2} \sim 1 - 1/(2A^2)$, $|A| \to \infty$, il est facile de voir que c'est r^{+} qui correspond à la racine de module inférieur à 1. On résume tout ceci dans la

Proposition 1 *Supposons Δt plus petit que Δx, La fonction*

$$\begin{aligned} r(\omega) &= A(\omega) - A(\omega)\sqrt{1 - \frac{1}{A^2(\omega)}}. \\ A(\omega) &= 1 - 2\frac{h^2}{\Delta t^2}\sin^2(\tfrac{\omega\Delta t}{2}), \end{aligned} \tag{1.21}$$

est définie, $2\pi/\Delta t$ périodique et analytique sur

$$C \quad \backslash \quad \left([-\frac{2}{\Delta t}\arcsin\frac{\Delta t}{\Delta x}, \frac{2}{\Delta t}\arcsin\frac{\Delta t}{\Delta x}] + \frac{2\pi}{\Delta t}Z\right),$$

où elle vérifie

$$r(\omega)^2 - 2A(\omega)r(\omega) + 1 = 0, \quad |r(\omega)| < 1. \tag{1.22}$$

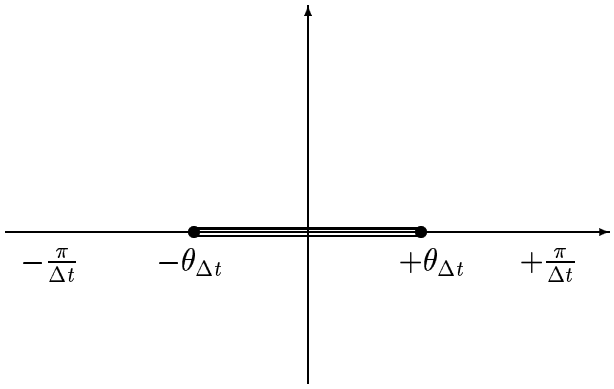


FIG. 1.2 – *Représentation du domaine d'analycité de la fonctions $r(\omega)$ sur une période. A la traversée de la coupure $[-\theta/\Delta t, \theta/\Delta t]$, la fonction $r(\omega)$ admet un saut et échange les deux racines du polynôme.*

Il est intéressant de regarder le comportement de cette racine lorsque l'on s'approche de l'axe réel. On voit qu'alors l'expression A va tendre vers un réel, et de

même pour $1 - A^{-2}$. Si cette dernière quantité est positive ($|A| \geq 1$), il y a continuité de $r(A)$ et on trouve la racine de module plus petit que 1 du polynôme qui est donnée par $A + \sqrt{A^2 - 1}$ puisque A est négatif (cf. la formule donnant A).

Si $1 - A^{-2}$ est négatif, à la limite, on a deux racines conjuguées de module 1 et il faut faire attention au signe de la partie imaginaire de ω au moment du passage à la limite. Plus précisément, on a

$$\left(1 - \frac{1}{(A + i\epsilon)^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{A^2}\right) + \frac{2i}{A^3}\epsilon + O(\epsilon^2)$$

et donc si $|A| < 1$)

$$\begin{aligned} r(A + i\epsilon) &\sim A - A\left[\left(1 - \frac{1}{A^2}\right) + \frac{2i}{A^3}\epsilon\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\sim A - iASigne(A)\,Signe(\epsilon)\left[\left(-1 + \frac{1}{A^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\sim A - iSigne(\epsilon)\sqrt{1 - A^2} \quad (\epsilon \to 0) \end{aligned}$$

Maintenant reste à trouver le bon signe pour $\Im A(\omega)$ lorsque ω tend vers 0 avec une partie imaginaire positive. On a

$$A(\omega + i\eta) = A(\omega) - i\sin(\omega\Delta t)\eta + O(\eta^2)$$

On a tous les éléments pour comprendre ce qui se passe : lorsque ω parcourt le segment $[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$ au dessus de l'axe imaginaire nul, $A(\omega)$ part d'un point réel négatif plus petit que -1 rejoint le point -1 ($\omega\Delta t$ vaut alors $-\theta$) puis contourne le segment $[-1, 1]$ par au-dessus. Le point 1 est alors atteint en $\omega = 0$. Ensuite, $A(\omega)$ rebrousse chemin vers -1 mais par en-dessous cette fois-ci. De -1, ($\omega\Delta t$ est alors égal à θ), $A(\omega)$ revient à son point de départ.

Il est alors facile de déduire l'expression de $r(A)$, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{\Im\omega\downarrow 0^+} r(\omega) = A(\omega) - i\sqrt{1 - A(\omega)^2}, \quad \omega\Delta t \in [-\theta, 0] \\ &\lim_{\Im\omega\downarrow 0^+} r(\omega) = A(\omega) + i\sqrt{1 - A(\omega)^2}, \quad \omega\Delta t \in [0, \theta] \\ &\lim_{\Im\omega\downarrow 0^+} r(\omega) = A(\omega) + \sqrt{A(\omega)^2 - 1}, \quad \omega\Delta t \in [-\pi, -\theta] \cup [\theta, \pi] \end{aligned} \tag{1.23}$$

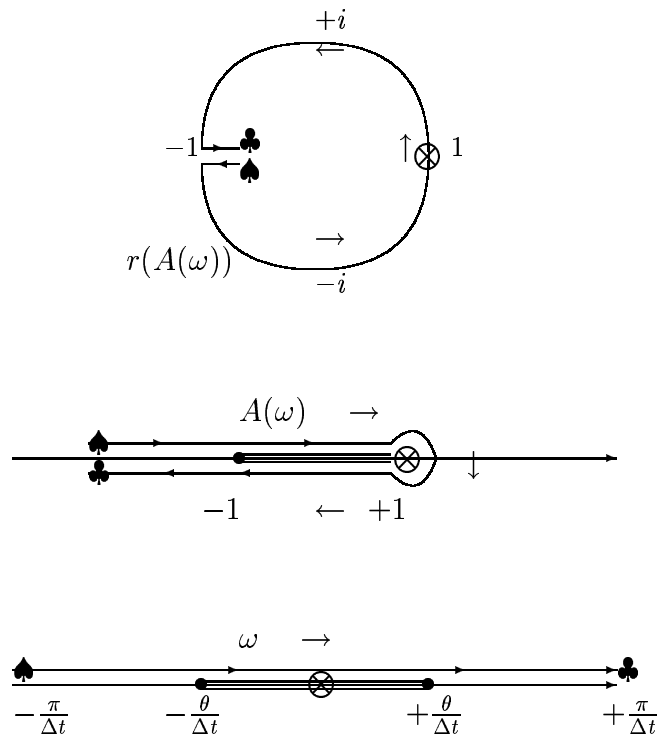


FIG. 1.3 – *Représentation des chemins parcourus par $A(\omega)$ et $r(\omega)$ lorsque ω parcourt le contour dessiné sur l'axe réèl.*

En remplaçant $A(\omega)$ par sa valeur, on obtient des expressions fonction de ω :

$$\begin{aligned} &\text{si } \omega\Delta t \in [-\theta,\theta], \quad \lim_{\Im\omega\downarrow 0^+} r(\omega) = \\ &1-2\frac{h^2}{\Delta t^2}\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})+2i\frac{h}{\Delta t}\sin(\frac{\omega\Delta t}{2})\sqrt{1-\frac{h^2}{\Delta t^2}\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})} \\ &\text{si } \omega\Delta t \notin [-\theta,\theta], \quad \lim_{\Im\omega\downarrow 0^+} r(\omega) = \\ &1-2\frac{h^2}{\Delta t^2}\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})+2\frac{h}{\Delta t}\sin(\frac{\omega\Delta t}{2})\sqrt{\frac{h^2}{\Delta t^2}\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})-1} \end{aligned} \tag{1.24}$$

L'image de l'axe collé au dessus de l'axe réel est alors la réunion du cercle parcouru dans le sens trigonométrique et du segment, parcouru deux fois, joignant le point $r(-\frac{\pi}{\Delta t})$ qui est un nombre réel compris entre -1 et 0.

La figure (1.3) schématise le comportement de $A(\omega)$ et de $r(\omega)$.

1.2.3 Résolution du problème

Nous avons tous les éléments pour poursuivre la résolution. La solution de (1.14) non exponentiellement croissante est

$$\hat{\mathrm{g}}_{2j} = R\, r(2\omega)^{-j} \hat{\mathrm{u}}_0 \qquad j \leq 0 \tag{1.25}$$

Pour trouver la solution de (1.15) remarquons que la matrice A_D a pour valeurs propres $2(1-\cos(\omega\Delta t)) = 4\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})$ et $2(1+\cos(\omega\Delta t)) = 4\sin^2(\frac{\omega\Delta t+\pi}{2})$ avec respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propres. On trouve alors la solution de (1.15)

$$\hat{\mathrm{D}}_j = \hat{\mathrm{u}}_0 T\, r(\omega)^j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{\mathrm{u}}_0 T_p\, r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad j \geq 0. \tag{1.26}$$

L'onde transmise possède donc 2 composantes une composante 'principale' de pulsation ω et une composante 'parasite' de pulsation $\omega + \frac{\pi}{\Delta t}$. En d'autres termes, le raffinement des grilles a pour effet de coupler lors de la transmission chaque fréquence présente dans le signal incident à une fréquence plus haute de $\pi/\Delta t$. Ce couplage est un des phénomènes clé pour comprendre l'effet du raffinement de maillage espace-temps sur les solutions du schéma.

Pour que (1.16) et (1.17) soient vérifiées c'est à dire pour que les deux grilles se raccordent il suffit de s'assurer de

$$\hat{\mathrm{d}}_2^P = \hat{\mathrm{g}}_2 + \hat{\mathrm{u}}_2 \qquad \hat{\mathrm{d}}_0^P = \hat{\mathrm{g}}_0 + \hat{\mathrm{u}}_0 \qquad \hat{\mathrm{d}}_0^I = \cos(\omega\Delta t)(\hat{\mathrm{g}}_0 + \hat{\mathrm{u}}_0). \tag{1.27}$$

Ces dernières relations sont simplement obtenues en prenant les transformées de Fourier des formules de recollement ou d'interpolation à l'interface. Par exemple, dans la troisième égalité, $\cos(\omega\Delta t)$ vient du fait que d_0^{2k+1} est une interpolation en temps de g_0^{2k+2} et g_0^{2k}.

On peut éliminer la quantité $\hat{u}_2$ si l'on suppose que les sources générant l'onde incidence sont en amont de l'interface. On a alors en absence de source

$$\begin{cases} 4\dfrac{\sin^2(\omega\Delta t)}{\Delta t^2}\hat{\mathrm{u}}_{2j} + \dfrac{1}{h^2}(\hat{\mathrm{u}}_{2j+2} - 2\hat{\mathrm{u}}_{2j} + \hat{\mathrm{u}}_{2j-2}) = 0 \\ \text{pour } j \geq 0, \end{cases} \tag{1.28}$$

et le champ incident vérifie

$$\hat{u}_{2j} = r(2\omega)^j \, \hat{u}_0 \quad \forall j \geq 0 \tag{1.29}$$

On aboutit alors à un système linéaire donnant R, T ,T_p

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} & T & + & & T_p & - & & R & = & 1 \\ & T & - & & T_p & - & \cos(\omega\Delta t) & R & = & \cos(\omega\Delta t) \\ r^2(\omega) & T & + & r^2(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) & T_p & - & r(2\omega)^{-1} & R & = & r(2\omega) \end{array} \right. \tag{1.30}$$

Le déterminant δ de ce système est appelé déterminant de Kreiss. Ce déterminant va jouer un rôle crucial dans l'analyse de stabilité

$$\begin{aligned} \delta(\omega) &= \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -\cos(\omega\Delta t) \\ r^2(\omega) & r^2(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) & -r(2\omega)^{-1} \end{array} \right| \\ &= 2r(2\omega)^{-1} - r^2(\omega)(1 + \cos(\omega\Delta t)) - r^2(\omega + \tfrac{\pi}{\Delta t})(1 - \cos(\omega\Delta t)). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Les principales propriété du déterminant de Kreiss sont résumées dans la proposition suivante

Proposition 2 *Supposons $\Delta t \leq \Delta x$,la fonction $\delta(\omega)$ donnée par (1.31) est analytique sur un domaine, noté Ω, formé du plan complexe privé de coupures localisées sur l'axe réel. Elle ne s'annule qu'en $\omega \in \pi Z$ et vérifie*

$$\exists M > 0, \quad \left| (\frac{1}{r(2\omega)} - r(2\omega)) \, \frac{1}{\delta(\omega)} \right| \leq M, \quad \textit{sur } \Omega \tag{1.32}$$

où M ne dépend que de $\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Admettons pour le moment cette proposition, on résout le système (1.30) en

$$\begin{aligned} T &= \frac{(1+\cos(\omega\Delta t))(\frac{1}{r(2\omega)} - r(2\omega))}{\delta} \\ T_p &= \frac{(1-\cos(\omega\Delta t))(\frac{1}{r(2\omega)} - r(2\omega))}{\delta} \\ R &= 2(\frac{1}{r(2\omega)} - r(2\omega))\frac{1}{\delta} - 1 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Considérons les formules d'inversion de Laplace inverse

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{2j}^{2k} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}+iP}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}+iP} \hat{g}_{2j}(\omega)e^{-2i\omega k\Delta t}d\omega \\ d_j^{2k} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}+iP}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}+iP} \hat{d}_j^P(\omega)e^{-2i\omega k\Delta t}d\omega \\ d_j^{2k+1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}+iP}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}+iP} \hat{d}_j^I(\omega)e^{-i(2\omega k+1)\Delta t}d\omega \end{aligned} \tag{1.34}$$

valables pour P assez grand et positif. On obtient

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{2j}^{2k} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}+iP}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}+iP} \hat{u}_0(\omega)R(\omega)r(2\omega)^{-j}e^{-2i\omega k\Delta t}d\omega \\ d_j^k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}+iP}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}+iP} \hat{u}_0(\omega)\left(T(\omega)r(\omega)^j + T_p(\omega)r(\omega+\frac{\pi}{\Delta t})^j\right)e^{-2i\omega k\Delta t}d\omega \end{aligned} \tag{1.35}$$

Les intégrales intervenant dans ces expressions s'interprètent comme des intégrales de contour dans le plan complexe. Or d'après (1.32), on voit que (1.33) définit $R(\omega)$, $T(\omega)$ et $T_p(\omega)$ comme des fonctions analytiques et bornées uniformément en la variable ω sur $\Im\omega \neq 0$. Comme on a de plus la périodicité des fonctions impliquées, la formule de Cauchy nous donne que l'on peut remplacer l'intégrale sur $\Im\omega = P$ par une intégrale sur le segment localisé sur l'axe réel. Par exemple

$$\tilde{g}_{2j}^{2k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} \lim_{\Im\omega=0^+}\left(\hat{u}_0(\omega)R(\omega)r(2\omega)^{-j}\right)e^{-2i\omega k\Delta t}d\omega \tag{1.36}$$

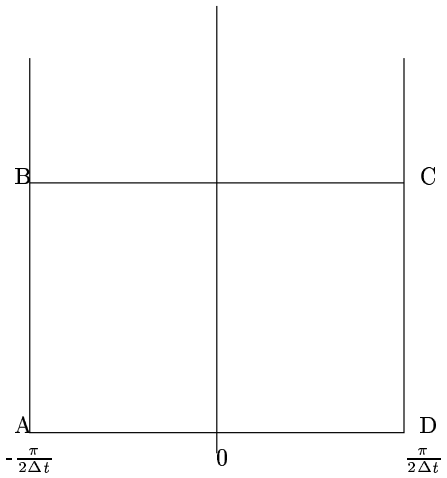


FIG. 1.4 – *contour d'intégration*

On a alors l'estimation (non optimale)

$$|\tilde{g}_{2j}^{2k}| \leq \frac{2M+1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{2\pi}{\Delta t}} |\hat{u}_0(\omega)| d\omega \tag{1.37}$$

qui montre que la solution est bornée en tout $k\Delta t$ par une norme de l'onde incidente pour peu que celle-ci soit suffisamment régulière. C'est une façon de dire que le schéma est stable.

Une autre manière est d'interpréter l'équation (1.36) à partir de (1.29) et d'écrire

$$\tilde{g}_{2j}^{2k} = \hat{u}_{-2j}^{2k} \star_k R^{2k},$$

c'est à dire que la réflexion apparaît comme la convolution de l'image du champ incident par rapport à l'interface (le signe - de $-2j$) et d'une fonction discrète coefficient de reflexion. Cette fonction a une transformée de Fourier uniformément bornée en ω (on peut d'ailleurs montrer qu'elle est causale) et on a la stabilité.

On peut bien sûr utiliser les mêmes arguments pour ce qui concerne l'onde numérique dans la grille fine d_j^k, on pourra borner la solution par des normes appropriées de l'onde incidente.

Notons que le point important et qui fait marcher l'affaire est tout d'abord l'absence de zéro pour le déterminant de Kreiss dans le plan complexe $\Im\omega > 0$.

En effet, la présence d'un tel zéro aurait entraîné l'existence d'un résidu dans notre formule de Cauchy. Or, ce résidu, s'il existait, serait un terme qui exploserait comme A^k, avec $A = |exp^{-i2\omega(pole)\Delta t}| > 1$ et le schéma s'avérerait fortement instable. Un deuxième ingrédient pour l'obtention de l'estimation (1.37) est que l'on peut borner les coefficients de réflexion et de transmission jusque sur l'axe réel. Remarquez qu'il s'agit là d'une condition moins forte que celle dite du critère de Kreiss qui demande à ce que le déterminant de Kreiss ne s'annule pas sur l'axe réel. Cette condition n'est pas remplie pour notre schéma: on ne peut pas dire que le schéma est GKS-stable (cf [8]).

Pour clore cette section, il reste à démontrer l'inégalité sur laquelle repose l'estimation. Il s'agit de calculs essentiellement techniques et qui peuvent être sautés, au moins, à la première lecture. Pour les lecteurs courageux, voilà donc la

1.2.4 Preuve de l'inégalité (1.32)

On remarque tout d'abord que

$$|\delta(\omega)| \geq \left|2|r^{-1}(\omega)| - |F(\omega)|\right|$$

où

$$F(\omega) = r^2(\omega)(1+\cos(\omega\Delta t)) + r^2(\omega+\pi/\Delta t)(1+\cos(\omega\Delta t+\pi))$$

comme $|r^{-1}(\omega)| > 1$ sur $\Im\omega > 0$, si l'on réussit à montrer que $|F(\omega)| \leq 2$ sur $\Im\omega > 0$ on aura que δ ne peut s'annuler sur ce domaine. Pour cela, on montre que

$$1: \quad \lim_{\Im\omega\to+\infty} |F(\omega)| = 0$$

$$2: \quad \lim_{\Im\omega\to 0} |F(\omega)| = 2$$

car comme $F(\omega)$ est analytique, le principe du maximum [11] s'applique et $\sup_\omega |F(\omega)| = 2$.

Le point 1 se démontre sans trop de difficulté car si $\Im\omega \to \infty$, $A(\omega) \sim$ Constante $\cos(\omega\Delta t)$ qui tend vers l'infini et $r(\omega) \sim 1/2A$ qui tend vers 0. Finalement $r^2(\omega)(1+\cos(\omega\Delta t)) \sim$ Constante $/\cos(\omega\Delta t)$ tend vers 0. Le même résultat appliqué en $\omega + \pi/\Delta t$ fournit la limite pour $|F|$ à l'infini.

Le point 2 est immédiat car sur l'axe réel on a

$$\begin{aligned} |F(\omega)| &\leq |r(\omega)|^2(1+\cos(\omega\Delta t)) + |r(\omega+\pi/\Delta t)|^2(1-\cos(\omega\Delta t)) \\ &\leq (1+\cos(\omega\Delta t)) + (1-\cos(\omega\Delta t)) \leq 2. \end{aligned}$$

avec égalité lorsque $\omega = 0$.

On a donc démontré que $\delta(\omega)$ ne peut s'annuler qu'à la limite, sur l'axe réel. La deuxième étape va consister à trouver les zéros de $\tilde{\delta}(\omega) = \lim_{\Im\omega\to 0^+} \delta(\omega)$ sur cet axe. On peut également se restreindre à un segment de longueur $\pi/\Delta t$ car les fonctions impliquées ont cette périodicité (d'après $\delta(\omega + \pi/\Delta t) = \delta(\omega)$ et $r(2(\omega + \pi/\Delta t)) = r(2\omega)$).

Tout d'abord si $\lim_{\Im\omega\to 0} |r(\omega)|$ est strictement plus petit que 1 et $\cos(\omega\Delta t) \neq 1$ ou bien $\lim_{\Im\omega\to 0} |r(\omega+\pi/\Delta t)| < 1$ et $\cos(\omega\Delta t) \neq -1$ les inégalités ci-dessus montrent que $|F(\omega)| < 2$ car l'une des inégalités utilisées est stricte. La fonction $\tilde{\delta}$ ne peut s'annuler pour de tels ω, $\lim_{\Im\omega\to 0} |r^{-1}(2\omega)|$ étant toujours plus grand ou égal à 2.

Maintenant si $\lim_{\Im\omega\to 0^+} r(\omega) = e^{i\phi}$ et $\lim_{\Im\omega\to 0^+} r(\omega + \pi/\Delta t) = e^{i\phi^*}$, un calcul élémentaire montre que

$$|F(\omega)|^2 = 2(1 + \cos^2(\omega\Delta t)) + 2(1 - \cos^2(\omega\Delta t))\cos(2(\Phi - \Phi^*))$$

et $|F(\omega)|$ ne peut valoir 2 que si

1 $\cos^2(\omega\Delta t) = 1$
2 $2\Phi = 2\Phi^* + 2\pi\mathrm{Z} \Leftrightarrow \Phi = \Phi^* + 2\pi\mathrm{Z},\ \Phi = \Phi^* + \pi + 2\pi\mathrm{Z}$

Il ne reste donc que les deux seules possibilités décrites ci-dessus pour obtenir un éventuel zéro de $\tilde{\delta}$.

Éliminons le deuxième cas: si $\cos(\Phi) = \cos(\Phi^*)$ nécessairement $\cos(\omega\Delta t)$ est nul et la fonction $|F(\omega = \pi/2\Delta t)|$ est bien égale à 2 mais c'est $|r^{-1}(2\omega = \pi/\Delta t)|$ qui est strictement plus grand que 1 et qui empêche l'annulation de $\tilde{\delta}$. Le cas $\cos(\Phi) = -\cos(\Phi^*)$ s'avère impossible au vue de

$$\cos(\Phi) = 1 - \frac{h^2}{\Delta t^2}(1 - \cos(\omega\Delta t))$$
$$\cos(\Phi^*) = 1 - \frac{h^2}{\Delta t^2}(1 + \cos(\omega\Delta t))$$

Finalement le seul zéro de $\tilde{\delta}$ dans $]-\frac{\pi}{2\Delta t}, \frac{\pi}{2\Delta t}[$ est $\omega = 0$ On remarque que cette valeur de ω annule également $r(2\omega) - 1/r(2\omega)$. En travaillant sur les développement de Taylor, on obtient que

$$
\begin{aligned}
& r(2\omega) - r^{-1}(2\omega) = 4i\frac{h}{\Delta t}\sin(\omega\Delta t) + O(\sin(\omega\Delta t)^2) \\
& (1+\cos(\omega\Delta t))r^2(\omega) = 2(1+2i\sin(\omega\Delta t)\frac{h}{\Delta t}) + O(\sin(\omega\Delta t)^2) \\
& (1-\cos(\omega\Delta t))r^2(\omega+\frac{\pi}{\Delta t}) = O(\sin(\omega\Delta t)^2) \\
& r^{-1}(2\omega) = 1 - 2i\frac{h}{\Delta t}\sin(\omega\Delta t) + O(\sin(\omega\Delta t)^2)
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

Et on a,

$$
\begin{aligned}
& \text{si } G(\omega) = \left(r(2\omega\Delta t) - r(2\omega\Delta t)^{-1}\right)\frac{1}{\delta(\omega)} \\
& G(\omega) = -\frac{1}{2} + O(\sin(\omega\Delta t))
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

La fonction $G(\omega)$ est d'après ce qui précède analytique sur $\Im\omega > 0$ continue (puisque δ ne possède que 0 pour zéro dans le demi-plan $\Im\omega \geq 0$) et continue sur $\Im\omega \geq 0$ (d'après (1.39). Comme elle est bornée à l'infini

$$\delta(\omega) \sim 2r^{-1}(2\omega), \quad \Im\omega \to \infty$$

$$\Rightarrow G(\omega) \sim -\tfrac{1}{2}, \quad \Im\omega \to \infty,$$

on en déduit qu'elle est uniformément bornée sur $\Im\omega \geq 0$. Ce qui établit le résultat recherché.

1.3 Étude de Précision

1.3.1 Calcul par développements limités de l'ordre du schéma

En utilisant le développement en série de Taylor de u, on voit aisément que le schéma de discrétisation de l'équation des ondes sur chacune des deux grilles est centré et donc d'ordre 2 en espace et en temps: on a

$$u(x+\Delta x,t) = u(x,t) + \Delta x u^{'}(x,t) + \frac{\Delta x^2}{2} u^{''}(x,t) + \frac{\Delta x^3}{3} u^{(3)}(x) + O(\Delta x^4)$$

$$\Rightarrow \quad u^{''}(x,t) = \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

et une formule analogue pour l'approximation de la dérivée seconde en temps.

L'interpolation temporelle utilisée à l'interface est elle aussi d'ordre 2. En effet, on a remplacé $g(0,2k+1)$ par $0.5(g(0,2k)+g(0,2k+2))$. Or,

$$g(0,2k+2) = g(0,2k+1) + \Delta t g^{'}(0,2k+1) + O(\Delta t^2)$$
$$g(0,2k) = g(0,2k+1) - \Delta t g^{'}(0,2k+1) + O(\Delta t^2)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{g(0,2k)+g(0,2k+2)}{2} = g(0,2k+1) + O(\Delta t^2).$$

Toutes les formules étant centrées, il est légitime d'espérer un schéma d'ordre 2. On va montrer sur des expériences numériques puis sur un calcul théorique de coefficient de réflexion que cette attente est vaine: la méthode est d'ordre 1. Toutefois, cette erreur d'ordre 1, due au changement de grille, et qui n'augmente pas avec le nombre de longueurs d'ondes parcourues, s'avère de fait moins gênante que l'erreur de dispersion inhérent à chaque grille.

1.3.2 Expériences numériques

Un programme utilisant le schéma a été mis en oeuvre et validé. On simule la propagation d'une onde sur un segment de longueur fixée. Le schéma est complété aux extrémités par des conditions absorbantes, soient une version discrétisée de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \tag{1.40}$$

où n est la normale extérieure au milieu, (x à droite et $-x$ à gauche). Signalons que ces conditions n'interviendront pas dans cette section les temps considérés étant trop courts pour que les bords soient atteints.

Dans l'expérience que nous simulons ici, la vitesse initiale est nulle et l'onde est générée par la valeur du champ à l'instant $t = 0$. On a construit cette condition initiale à l'aide de la fonction dite de Harris (cf. [6]) dont l'expression est

$$H(x) = \begin{cases} A_0 - A_1 \cos(2\pi x) + A_2 \cos(4\pi x) - A_3 \cos(6\pi x) & \text{pour } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.41}$$

Avec $A_0 = 0.35875 \quad A_1 = 0.48829 \quad A_2 = 0.14128 \quad A_3 = 0.01168$

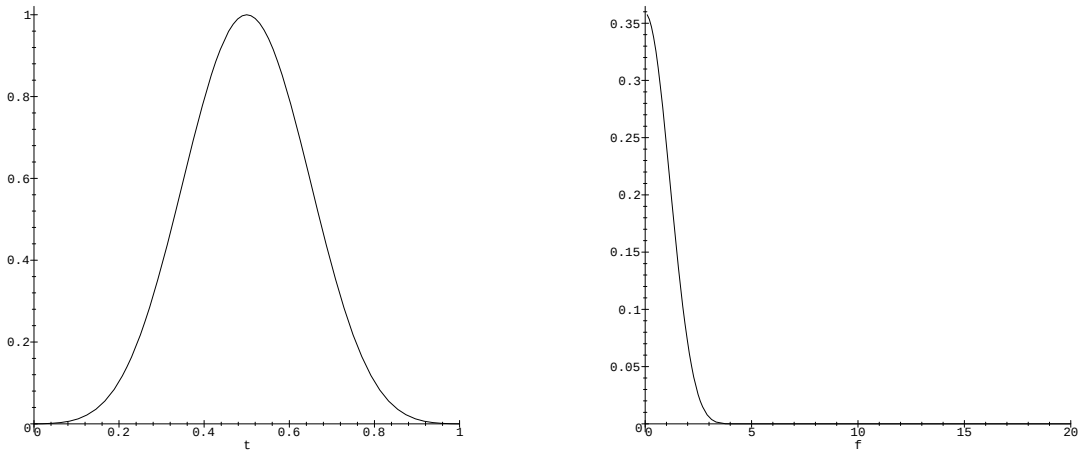


FIG. 1.5 – *Fonction de Harris (à gauche) et sa transformée de fourier (à droite)*

La figure 1.5 montre les variations de la fonction de Harris ainsi que celles de son spectre. On voit que les fréquences supérieures à $F_c = 3.25$ peuvent être considérées comme quasiment inexistantes (amplitude inférieure à 1%). On a donc construit une fonction à support compact et à spectre quasiment compact.

En fait nous allons utiliser cette fonction translatée et dilatée; nous considérerons comme condition initiale la fonction u_o centrée en x_0 et de support de taille L

$$u_o(x) = H(\frac{x - x_0}{L}), \tag{1.42}$$

et dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{u}_0(k) = Le^{2i\pi k x_0}\hat{H}(Lk). \tag{1.43}$$

La fréquence de coupure de u est donc $F = F_c/L$. Comme la longueur d'onde Λ est reliée à la fréquence via $\frac{2\pi}{F}$, la relation entre N_Λ le nombre de points par longueur d'onde de coupure et h le pas de discrétisation en espace sera

$$N_\Lambda = \frac{L}{F_c h}. \tag{1.44}$$

Dans les expériences présentées, on prend L=15; ce qui donne $N_\Lambda \approx 20$ pour une grille de pas de discrétisation de 0.25. Le point x_0 est localisé à 25 unités de l'interface grille grossière-grille fine. Enfin, on choisit arbitrairement un pas de temps tel que

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1.45}$$

Rappelons que la solution du problème continu est constituée de deux ondes s'éloignant l'une de l'autre, de même forme que la condition initiale mais d'amplitude moitié. C'est bien ce que l'on observe sur la figure 1.6 où quatre instantanés de la simulation pour une expérience à 20 points de grille grossière par longueur d'onde sont représentées. Du point de vue qualitatif, on remarque que l'interface, matérialisée par une ligne pointillée n'a qu'une influence très peu visible sur l'onde transmise. À vue d'oeil, le champ apparaît bien symétrique et la réflexion à l'interface est quasiment imperceptible. De plus, lorsque l'on poursuit les itérations en temps, on n'observe aucune explosion de la solution: le schéma semble stable.

Afin de tester l'ordre du schéma, on réalise cette même expérience pour des maillages de plus en plus fins, tout en respectant le rapport des pas de 2 entre la grille grossière et la grille fine. Pour effectuer une analyse quantitative des résultats, on retient la dernière photographie de la solution et on subdivise l'espace en cinq parties comme montré sur la figure 1.6 en bas à droite. Les premières et cinquièmes parties correspondent à des zones où l'onde n'est pas encore arrivée. Dans la deuxième, l'onde n'a pas traversé l'interface et la restriction de la solution correspond alors à la propagation classique d'une onde calculée avec le schéma sur la grille grossière. Dans la troisième partie se trouve l'onde réfléchie par l'interface grille fine-grille grossière. Enfin, la quatrième partie correspond à l'onde transmise qui se propage tranquillement dans la grille fine. Ces différentes zones vont nous aider à distinguer les erreurs de réflexion, de transmission et de dispersion et à analyser l'ordre de chacunes d'elles.

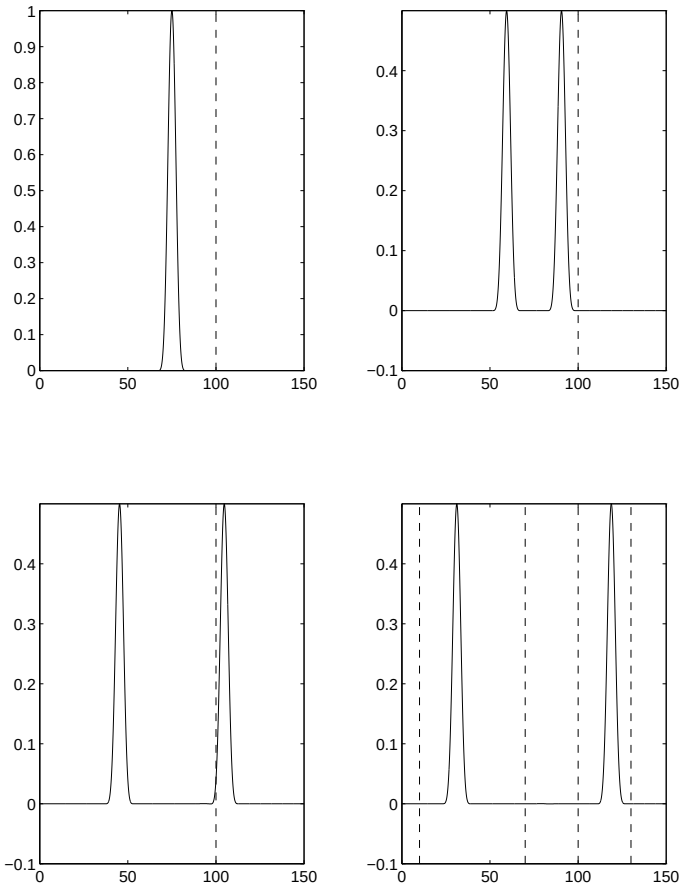


FIG. 1.6 – *Solution numérique correspondant à $\Delta x = 0.25$ à quatre instants distincts ($t = 0, 20/\sqrt{2}, 40/\sqrt{2}, 60/\sqrt{2}$). L'abscisse de chaque courbe est x, l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical. Sur la figure en bas à droite est représenté le zonage utilisé pour le calcul d'erreur.*

La figure 1.8 visualise les différences obtenues entre 2 raffinements successifs: de bas en haut, on part d'un pas de 1 dans la grille grossière (donc 0.5 dans la grille fine) et on divise ces pas par 2 puis 4, 8 et 16. Le nombre de points par longueur d'ondes de coupure passe donc de 5 à 80 dans la grille grossière et de 10 à 160 dans la grille fine. Le maillage le plus fin est 16 fois plus fin que le maillage original, ensuite

les erreurs numériques dues à la machine ne sont plus négligeables. On commence effectivement à remarquer sur la dernière ligne de la figure les hautes fréquences, caractéristiques de l'erreur machine.

Rappelons qu'un schéma est dit d'ordre p si la solution numérique pour un pas h s'écrit

$$u_h = u + h^p e_h \ , \qquad |e_h(x)| < C$$

où u est la solution exact et C une constante indépendante de h. Dans notre cas, on écrit

$$u_{2h} - u_h = C(2h)^p - Ch^p = (2^p - 1)Ch^p.$$

Notre schéma sera donc d'ordre p, si les différences entre 2 raffinements successifs sont divisées par 2^p.

La colonne de gauche montre l'erreur dans la zone 2, c'est à dire celle qui correspond à la dispersion du schéma classique sans changement de grille; on observe bien une diminution quadratique de l'erreur, celle-ci étant asymptotiquement proportionnelle à l'opposé de la dérivée troisième de l'onde incidente (cf. figure 1.7). On a en effet cf. annexe A,

$$u_h(jh, n\Delta t) \approx \frac{1}{2}\left(u_o(jh - n\Delta t) - \frac{n\Delta t}{48}h^2 u_o'''(jh + n\Delta t)\right).$$

La colonne du milieu montre l'erreur dans la zone où est localisée la réflexion due au changement de grille (zone 3). L'amplitude de cette réflexion diminue cette fois linéairement. Le schéma est d'ordre 1!. Enfin celle de droite représente l'erreur dans la zone 4 qui cumule erreur de transmission mais également erreur de dispersion. Cette erreur est plus faible que celle relative à la zone 1 mais est plus difficile à analyser car elle mélange des effets de dispersion et de réflexion.

Toutefois, on remarquera que les effets de dispersion (bien que d'ordre 2) sont beaucoup plus importants en valeur absolue que l'erreur due au changement de grille. Les deux effets ne sont comparables que pour l'expérience correspondant aux pas les plus fins. Il est facile d'expliquer ceci en rappelant que l'erreur de dispersion est à peu près proportionelle au temps de parcourt par l'onde, ce qui n'est pas le cas de l'erreur due au changement de grille.

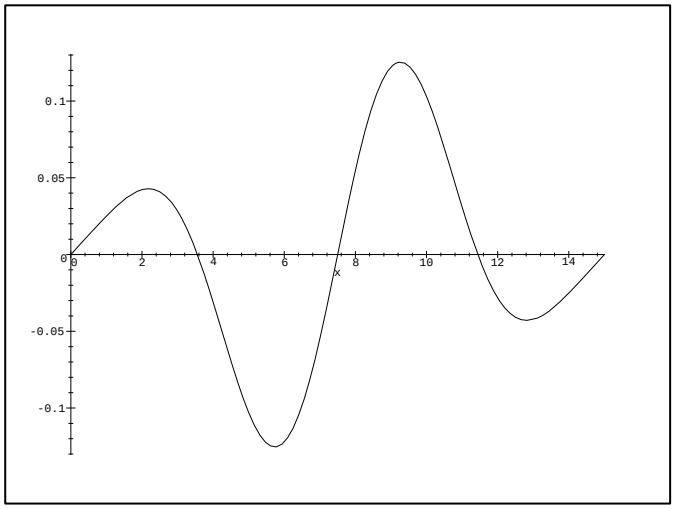


FIG. 1.7 – *Dérivée troisième de la fonction de Harris étalée sur une longueur de 15 unités*

On a ensuite calculé la norme L^2 sur chacune des zones de la différence entre 2 maillages successifs afin de quantifier la décroissance de l'erreur. On obtient les résultats présentés sur la figure 1.9. La pente moyenne de dispersion est de -2, celle de réflexion de -1.13, tandis que l'erreur sur l'onde transmise de -2.17. Toutefois, il convient de retenir ces chiffres avec précaution car comme nous l'avons vu plus haut, les deux dernières erreurs mélangent l'erreur de dispersion (qui est d'ordre 2) avec l'erreur due au changement de grille. Sur les essais présentés ici, ce n'est qu'à partir de la dernière expérience (80 points par longueur d'onde dans la grille grossière) que ces effets sont de la même grandeur. Pour obtenir l'ordre du schéma, il conviendrait de raffiner encore pour que l'effet de la disparité de grille l'emporte sur l'effet de dispersion (on ne l'a pas fait ici à cause des effets d'erreurs d'arrondi). Toutefois, une des conclusions importantes de ces expériences est que malgré un schéma d'interpolation centré, le terme de réflexion n'est pas d'ordre 2. On verra dans une section suivante que ceci est confirmé par l'analyse par ondes planes qui montre une erreur d'ordre 1.

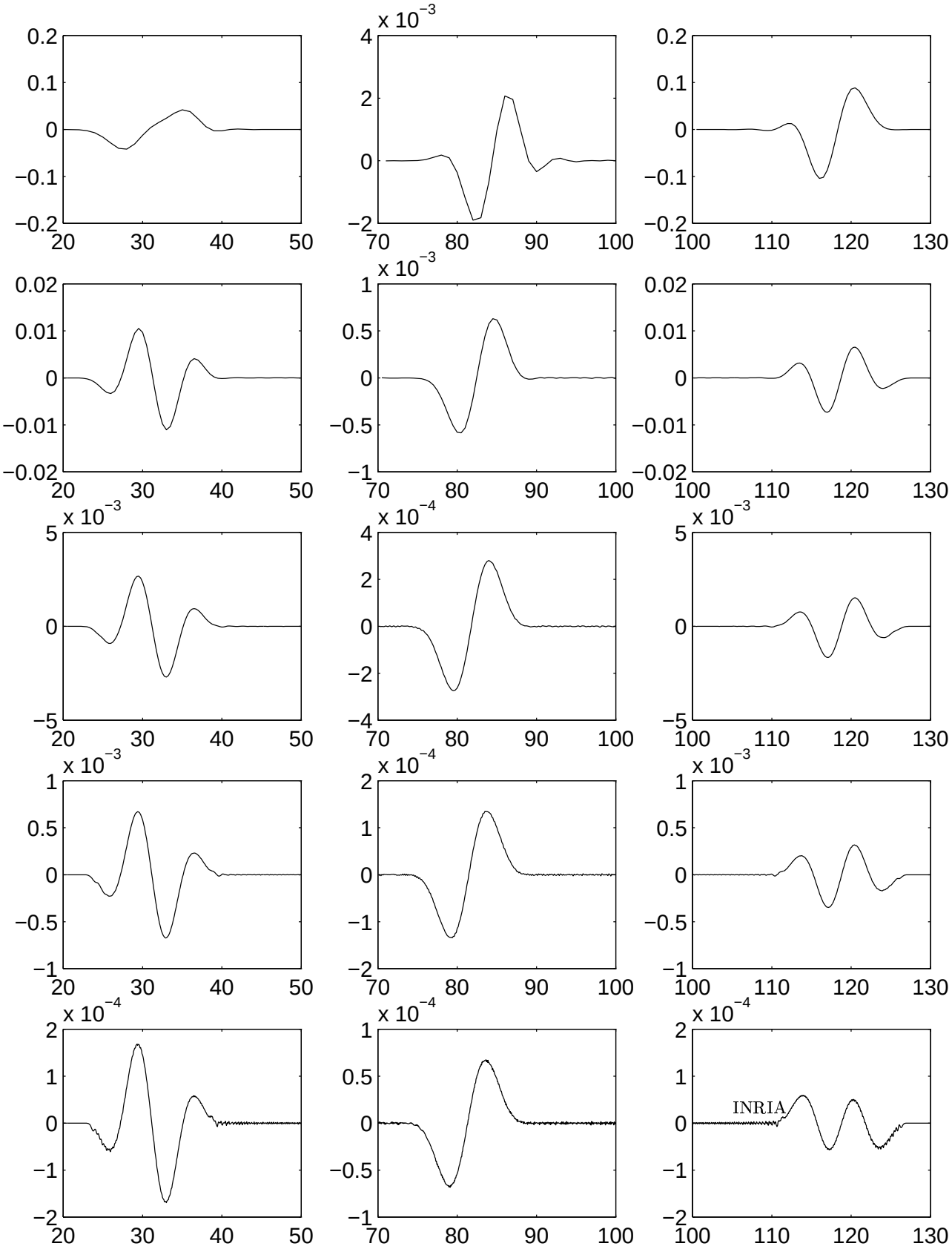


FIG. 1.8 – *Tracé des différences entre 2 raffinements successifs*

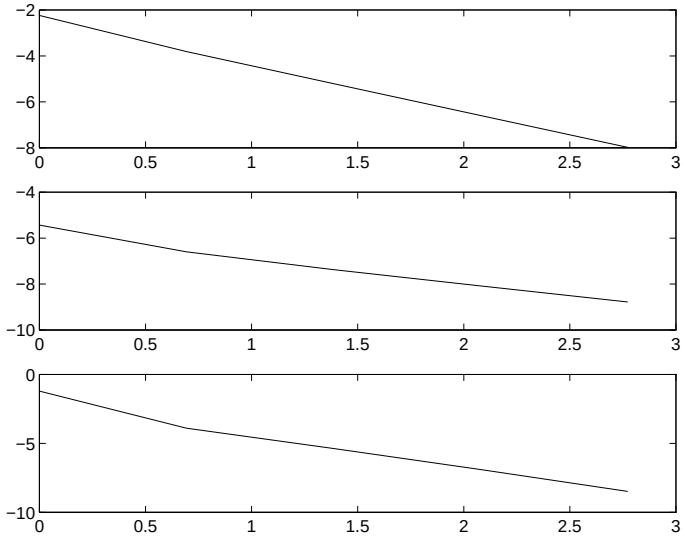


FIG. 1.9 – *Tracé des logarithmes de chaque erreur en fonction du logarithme du raffinement*

1.3.3 Réinterprétation du schéma : Approximation du Dirac

Ces observations numériques nous montrent que le calcul par développements limités de l'ordre du schéma menait à des conclusions inexactes. Nous avons démontré que le schéma était d'ordre 2 dans chaque grille et le raccord une interpolation d'ordre 2. En fait, on constate que modulo un changement de notation évident, l'équation d'interface (1.7) se réécrit

$$\frac{u_1^{2k+2}-2u_1^{2k+1}+u_1^{2k}}{\Delta t^2}-\frac{u_2^{2k+1}-2u_1^{2k+1}+u_0^{2k+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2\frac{u_0^{2k+2}-2u_0^{2k+1}+u_0^{2k}}{\Delta t^2}=0.$$

On reconnait l'approximation de l'équation des ondes à l'ordre 2 dans les deux premiers termes avec un terme supplémentaire $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2\frac{u_0^{2k+2}-2u_0^{2k+1}+u_0^{2k}}{\Delta t^2}$. Ce terme correctif étant supporté par un seul noeud ($j=0$) peut être vu comme équivalent au terme $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta(x)$.

Le schéma apparaît alors comme une approximation à l'ordre 2 de "l'équation modifiée"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h}{2}\alpha^2 \delta(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1.46}$$

qui est une approximation d'ordre 1 (terme en $\frac{h}{2}$) de l'équation des ondes initiales. Remarque : On a ici un phénomène analogue à celui du schéma de Dufort-Frankel pour l'équation de la Chaleur [5].

1.3.4 Étude de réflexion et transmission : application à l'ordre du schéma

Nous allons, dans cette partie donner une signification aux coefficients calculés dans l'étude de stabilité (cf. 1.2) ainsi que tenter de faire le lien entre théorie et expériences numériques.

Nous pouvons reprendre les calculs de la section 1.2 pour réinterpréter la solution comme superposition d'ondes : Une onde incidente dans la grille grossière donnant naissance à une onde réflechie et des ondes transmises dans la grille fine.

Supposons que la condition initiale soit éloignée de l'interface entre les deux grilles. On a vu que le champ incident au voisinage de l'interface s'écrivait

$$u_{2j}^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} \hat{u}_0(\omega) r(2\omega + i0^+)^j e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega, \tag{1.47}$$

cette expression étant valable au moins au delà du support des conditions initiales en temps.

A ce champ, se rajoute dans la grille grossière un champ réfléchi dont l'expression est

$$\tilde{g}_{2j}^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} \hat{u}_0(\omega) R(\omega + i0^+) r(2\omega + i0^+)^{-j} e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega. \tag{1.48}$$

Enfin, l'onde incidente génère dans la grille fine le champ

$$d_j^k = \tilde{d}_j^k + \check{d}_j^k, \tag{1.49}$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_j^k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} \hat{u}_0(\omega)T(\omega+i0^+)r(\omega+i0^+)^j e^{-i\omega k\Delta t}d\omega \\
\check{d}_j^k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} \hat{u}_0(\omega)T_p(\omega+i0^+)r(\omega+i0^+ + \frac{\pi}{\Delta t})^j e^{-i\omega k\Delta t}d\omega.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Dans toutes ces formules, les notations sont celles de la section précédente : la fonction $r(\omega+i0^+)$ est définie par (1.21) et passage à la limite ou, plus explicitement par les formules (1.24), tandis que les coefficients R, T et T_p sont solutions du système (1.30) et sont donnés par (1.33). Dans la suite, on omet $+i0^+$ pour alléger l'écriture.

Rappelons que $k_h(\omega)$ le nombre d'onde numérique, est lié à $r(\omega)$ par la relation

$$r(\omega) = e^{ik_h(\omega)h}. \tag{1.51}$$

Un calcul simple montre que l'on a

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{\Delta t}{h}\sin\left(\frac{k_h(\omega)h}{2}\right), \tag{1.52}$$

relation, classiquement appelée relation de dispersion.

Ces nouvelles définitions permettent d'expliciter la solution sous forme d'une superposition d'ondes planes numériques. Plus précisément, fixons ω et posons

$$\begin{aligned}
G_{2j}^{2k} &= \left(e^{ik_h(2\omega)jh} + R(\omega)e^{-ik_h(2\omega)jh}\right)\ e^{-i\omega 2k\Delta t} \\
D_j^k &= T(\omega)e^{i(k_h(\omega)jh-\omega k\Delta t)} + T_p(\omega)e^{i(k_h(\omega+\frac{\pi}{\Delta t})jh-(\omega+\frac{\pi}{\Delta t})k\Delta t)}
\end{aligned} \tag{1.53}$$

On vérifie que (G, D) est une solution particulière du schéma. Elle est représentée de manière schématique sur la figure 1.10. La partie gauche, G, est composée d'une onde plane numérique incidente et d'une onde plane numérique réfléchie tandis que la partie droite est composée de deux ondes planes transmises, l'une associée à la fréquence ω, l'autre à la fréquence $\omega + \frac{\pi}{\Delta t}$. Dans ce contexte, les nombres R, T et T_p s'interprètent comme les coefficients de réflexion et de transmission. À partir de cette famille de solutions, on peut recomposer la solution générale par superposition

$$g_{2j}^{2k} = \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} \hat{u}_0(\omega)G_{2j}^{2k}d\omega, \quad , d_j^k = \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} \hat{u}_0(\omega)D_j^k d\omega,$$

Sur ces formules, on voit que la solution numérique diffère de celle du cas continu par différents aspects. Tout d'abord il existe toujours un effet de dispersion: le

nombre d'onde numérique diffère de ω par un terme qui, sauf dans le cas du schéma aux caractéristiques, est d'ordre 2 (i.e. $k_h(\omega) = \omega + O(\omega^2 h^2)$). Ensuite, la présence de l'interface génère une onde réfléchie et deux ondes transmises au lieu d'une unique onde transmise dans le cas continu (pour lequel l'interface n'existe pas). Chacune de ces ondes est caractérisée par leur coefficient. La mesure de cet effet est donc liée à l'étude de ces coefficients. En particulier on peut évaluer l'ordre de l'approximation en regardant les développements de Taylor des coefficients au voisinage de $\omega\Delta t = 0$.

Cas d'une onde incidente dans la grille grossière : étude analytique

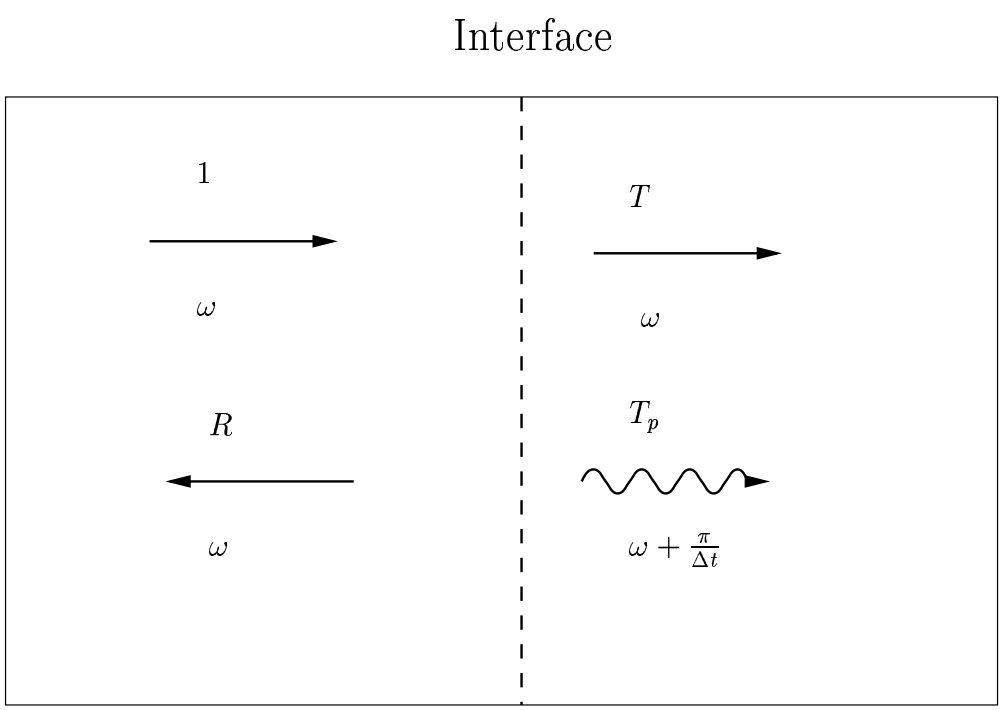


FIG. 1.10 – *Schéma représentatif des parties incidente, réfléchie et transmises à l'interface*

Prenons $\Delta t < h$, on effectue un développement limité des équations (1.33) autour de $\omega\Delta t = 0$, on trouve

$$\begin{cases} T = 1 + \left(\left(1 - 2\,\alpha - (1-2\,\alpha)\sqrt{1-(1-2\,\alpha)^{-2}} \right)^2 - 1 \right) \dfrac{i\omega\Delta t}{16\sqrt{\alpha}} + O\left((\omega\Delta t)^2\right) \\ T_p = \dfrac{1}{4}(\omega\Delta t)^2 + O\left((\omega\Delta t)^3\right) \\ R = \left(\left(1 - 2\,\alpha - (1-2\,\alpha)\sqrt{1-(1-2\,\alpha)^{-2}} \right)^2 - 1 \right) \dfrac{i\omega\Delta t}{16\sqrt{\alpha}} + O\left((\omega\Delta t)^2\right) \end{cases} \tag{1.54}$$

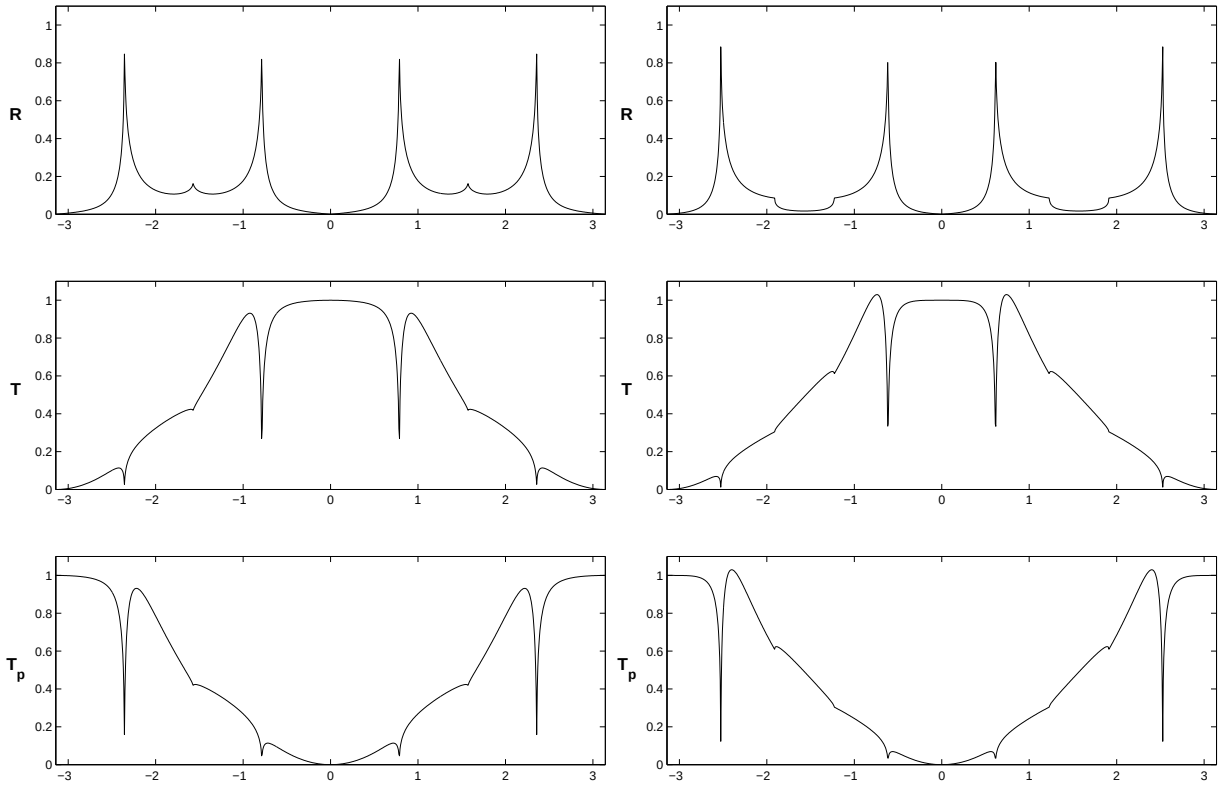
Par exemple dans le cas $\frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (qui est le nombre de Courant maximal utilisé pour un schéma 2D) le développement donne alors :

$$\begin{cases} T = 1 + \dfrac{i\left(-4+3\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{8}\omega\Delta t + O\left((\omega\Delta t)^2\right) \\ T_p = \dfrac{1}{4}(\omega\Delta t)^2 + O\left((\omega\Delta t)^3\right) \\ R = \dfrac{i\left(-4+3\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{8}\omega\Delta t + O\left((\omega\Delta t)^2\right) \end{cases} \tag{1.55}$$

Comme nous l'avions remarqué dans les expériences numériques, malgré des formules d'interpolations centrées, la réflexion et la transmission sont d'ordre 1. On remarquera toutefois que le coefficient devant chaque terme d'ordre 1 est petit lorsque le nombre de Courant n'est pas trop éloigné de 1.

Sur la figure 1.11, on a représenté le module des coefficients de réflexion-transmission pour les deux nombres de Courant $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en fonction de $\omega\Delta t$ sur $[-\pi, \pi]$. On retrouve sur ces courbes la période π pour le coefficient de réflexion ainsi que la formule $T_p(\omega) = T(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})$ qui implique que la courbe du coefficient de transmission parasite est simplement translatée de π par rapport à celle du coefficient de transmission physique. D'un point de vue global, la réflexion et la transmission sont toujours plus petites que 1. Tandis qu'au voisinage de $\omega\Delta t = 0$, les courbes font apparaître une bonne précision (coefficients de réflexion et d'onde transmise parasite proche de 0 et coefficient de transmission proche de 1) pour les pulsations proches de zéro. Il semble même, au vu de ces figures, que les courbes aient un comportement parabolique au voisinage de $\omega = 0$. En fait, il n'en est rien: même si les courbes semblent être d'ordre 2 au voisinage de 0, un zoom (figure (1.12))fait apparaître une portion linéaire synonyme de l'ordre 1.

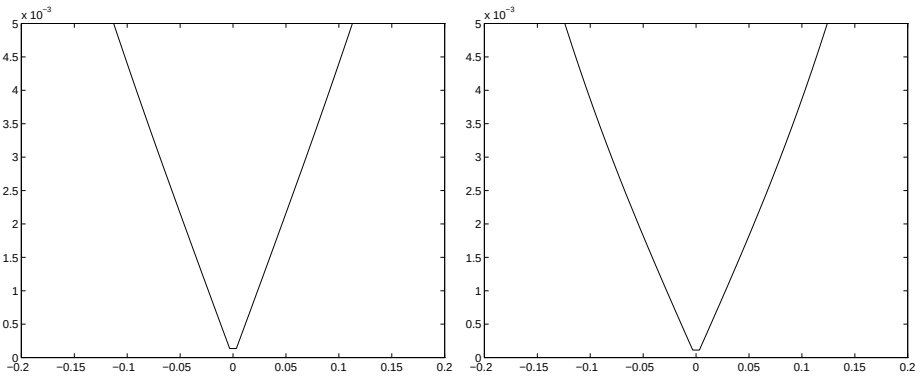
FIG. 1.11 – *Coefficients de réflexion-transmission. En abscisse la pulsation adimensionnée ($\omega\Delta t = 2\pi/N$ où N est le nombre de points par période), de haut en bas, le coefficient de réflexion, la transmission et la transmission parasite, à gauche $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, à droite $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.*



Pour finir, intéressons nous au cas très particulier du schéma aux caractéristiques pour lequel le paramètre $\alpha = \frac{h}{\Delta t}$ est égal à 1. Pour ce schéma il n'y a pas de dispersion ($k_h(\omega) = \omega$). Avec les notations de la section précédente, on trouve $A(\omega) = \cos(\omega\Delta t)$, $r(\omega) = e^{i\omega\Delta t} = r$, $r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) = -r$ et $r(2\omega) = r^2$ On obtient alors

$$\delta(\omega) = 2(\frac{1}{r^2} - r^2) \tag{1.56}$$

FIG. 1.12 – *Zoom de la réflexion pour des nombres de courants de* $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *(à gauche) et* $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *(à droite).*



et

$$\begin{cases} T &= \dfrac{1+\cos(\omega\Delta t)}{2} \\ T_p &= \dfrac{1-\cos(\omega\Delta t)}{2} \\ R &= 0 \end{cases} \tag{1.57}$$

Dans ce cas on a donc une réflexion nulle, la transmission parasite est d'ordre 2 et la transmission vaut 1 à l'ordre 2.

Cas d'un train d'ondes dans la grille grossière : une étude numérique de réflexion

Afin de tester la validité des calculs précédents, des expériences numériques cherchant à mettre en évidence la réflexion pour différentes pulsation sont effectuées. Nous nous sommes restreint à un nombre de Courant de $\sqrt{2}$. L'onde plane est approchée par une onde envoyée dans la grille grossière par l'intermédiaire du bord gauche. C'est une fonction harmonique de pulsation ω_0 supportée par la fonction de 'Harris' de support de longueur $L = \frac{50}{\sqrt{2}}$ (cf. 1.3.2). On aura donc

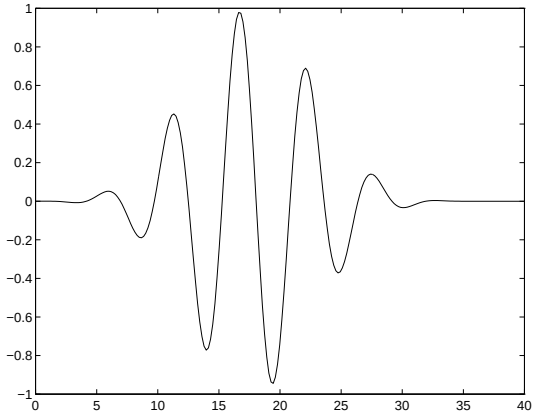
$$u(0,t) = e^{i\omega_0 t} H(\frac{t}{L})$$

Cette fonction a son spectre localisé dans une bande étroite autour de ω_0. Avec un L suffisament grand, par exemple $L = \frac{50}{\sqrt{2}}$, l'onde incidente a un support fréquentiel essentiellement sur $[f_0 - \Delta f; f_0 + \Delta f]$ où $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et Δf est la fréquence de coupure de H soit $\Delta f \simeq 0.09$ pour $L = \frac{50}{\sqrt{2}}$.

La figure 1.13 représente la partie réelle de cette fonction en fonction du temps pour $\omega_0 \Delta t = 0.2$. Le nombre d'oscillations augmentera en même temps que $\omega_0 \Delta t$

Pour la première expérience, nous tracerons la partie réelle des résultats afin que le lecteur se rende compte du caractère oscillant de l'onde employée. Mais sur les figures suivantes, afin de mieux observer les amplitudes, nous représenterons les modules des ondes résultantes que nous appellerons enveloppe.

FIG. 1.13 – *Tracé de u(0,t) pour une pulsation* $\omega_0 \Delta t = 0.2$



La première expérience présente les résultats pour une pulsation relativement basse celle-ci correspond à un coefficient de réflexion théorique faible et une onde transmise théorique proche de 1 (cf. figure 1.11). C'est effectivement ce qu'on observe sur la figure 1.14 puisque l'onde ne semble quasiment pas perturbée par l'interface. On peut remarquer que cette pulsation correspond à un nombre de point par longueur d'onde de 20 qui est une valeur généralement utilisée.

Les deuxième et troisième expériences correspondent à des pulsations respectives de $\frac{3\pi}{8\Delta t}$ et $\frac{\pi}{2\Delta t} - \frac{0.1}{\Delta t}$ soient des nombres de points par longueur d'onde inférieurs à 4. Rappelons, en effet qu'à $\omega \Delta t = \frac{\pi}{2}$, l'onde n'est plus propagative dans la grille fine. Les figures 1.15 et 1.16 nous montrent que malgré des conditions extrêmement défavorables les résultats de réflexion et transmission restent acceptables.

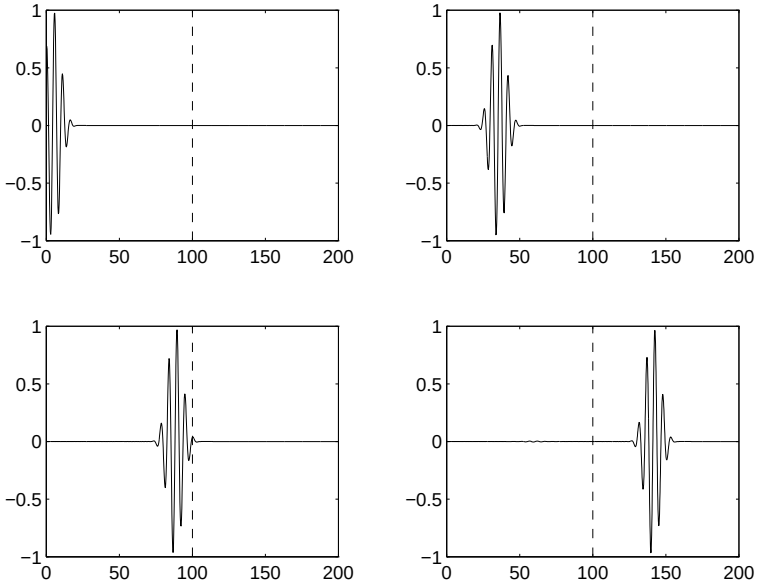


FIG. 1.14 – *Solution numérique correspondant à* $\omega_0\Delta t = 0.2$, Δx*= 0.25 à quatre instants distincts* ($t = 18.75/\sqrt{2}, \quad 75/\sqrt{2}, \quad 150/\sqrt{2}, \quad 225/\sqrt{2}$)*. L'abscisse de chaque courbe est* x*, l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.*

Le tableau ci-dessous montre une bonne corrélation entre les calculs théoriques et les résultats numériques puisqu'il fait apparaître des différences inférieures à 2%.

Remarque : Les coefficients T_p numériques ne sont pas observables car ils correspondent à des ondes évanescentes

Ces premiers résultats de réflexion et de transmission sont encourageants puisqu'ils

$\omega\Delta t$	R théorique	R numérique	T théorique	T numérique	T_p théorique
0.2	0.0044	0.0044	0.9994	0.9989	0.0025
$\frac{3\pi}{8}$	0.0752	0.0749	0.9443	0.9422	0.0869
$\frac{\pi}{2} - 0.1$	0.2670	0.2627	0.7570	0.7494	0.1123

TAB. 1.1 – *Tableau récapitulatif des coefficients*

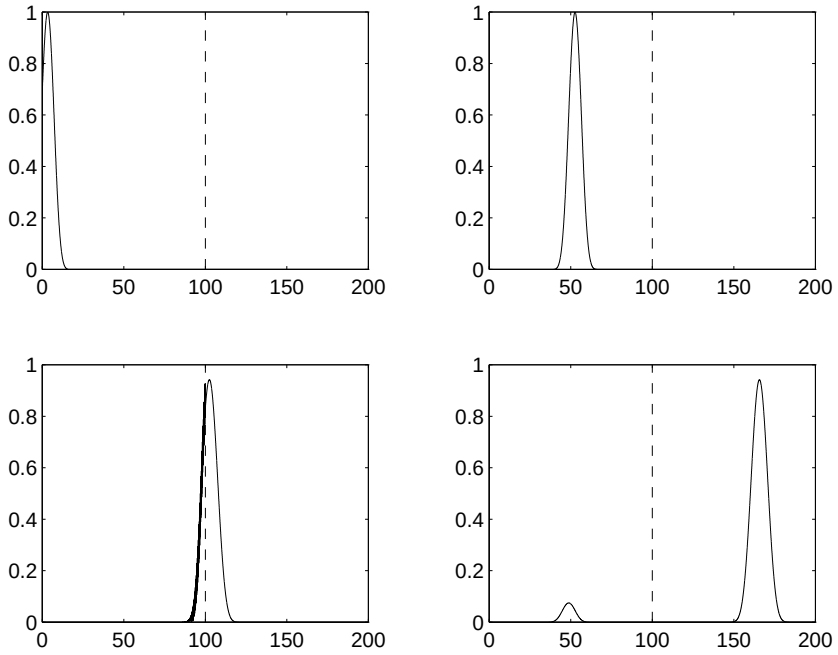


FIG. 1.15 – *Enveloppe de la solution correspondant à* $\omega_0 \Delta t = \frac{3\pi}{8}$, $\Delta x = 0.3125$ *à quatre instants distincts* ($t = 18.75/\sqrt{2}, \quad 125/\sqrt{2}, \quad 218.75/\sqrt{2}, \quad 312.5/\sqrt{2}$).

montrent que l'interface n'a qu'une influence limitée sur une onde venant de la grille grossière.

Nous allons maintenant compléter notre étude du schéma 1/2 en nous intéressant à une onde incidente dans la grille fine. En effet, a l'aide de ces deux cas, on pourra alors comprendre ce qui se passe dans le cas d'une bande raffinée.

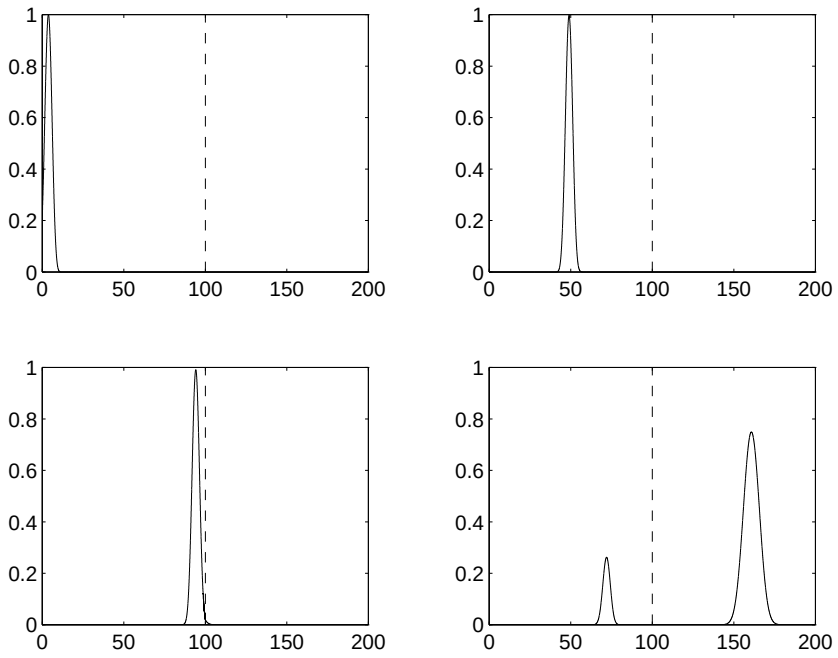


FIG. 1.16 – *Enveloppe de la solution correspondant à* $\omega_0 \Delta t = \frac{\pi}{2} - 0.1$, $\Delta x = \frac{1}{128}$ *à quatre instants distincts* ($t = 37.5/\sqrt{2}, \quad 187.5/\sqrt{2}, \quad 337.5/\sqrt{2}, \quad 450/\sqrt{2}$).

Cas d'une onde incidente dans la grille fine : une étude analytique

On considère ici le cas où l'onde incidente est dans la grille fine c'est à dire à droite dans l'exemple choisi. Nous allons ici nous contenter d'effectuer le calcul des coefficients de réflexion et de transmission. L'analyse de la stabilité est la même que dans le cas précédent.

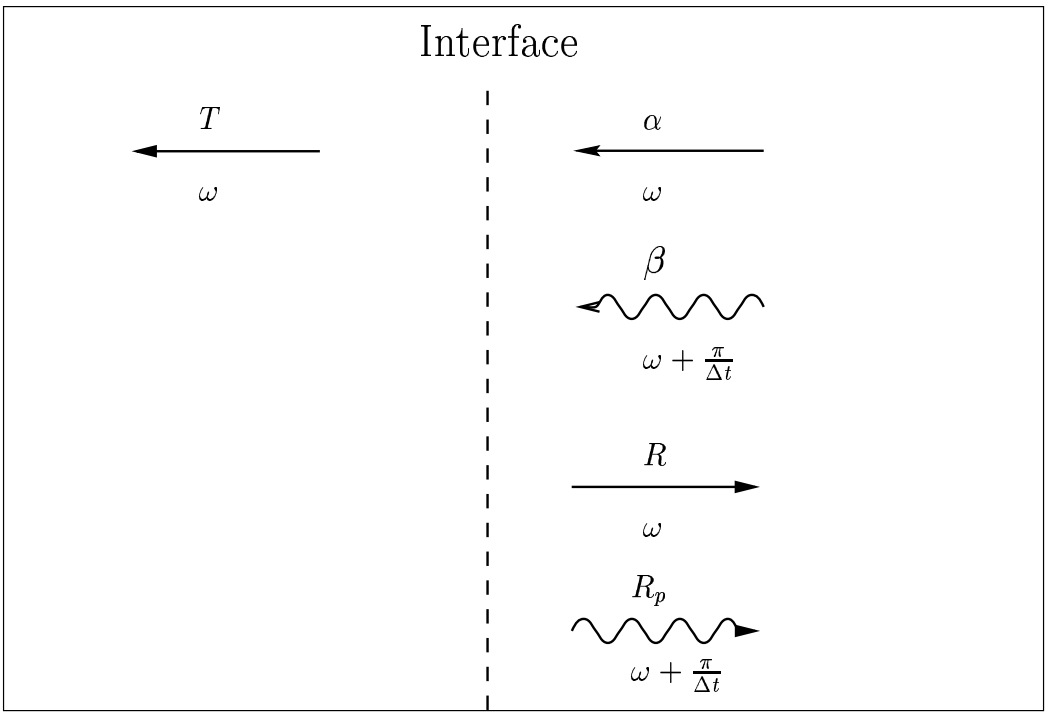


FIG. 1.17 – *Schéma représentatif des parties incidentes, réfléchies et transmise à l'interface dans le cas d'une onde incidente dans la grille fine*

On doit ici, par analogie avec l'analyse précédente, considérer une onde incidente a deux composantes : une principale et une parasite. Ainsi nous n'avons pas ici 1 coefficient de transmission et 2 de réflexions mais une matrice 2x2 de réflexion donnant l'onde réfléchie (partie principale et partie parasite) et une matrice 2x1 donnant l'onde transmise . Comme l'onde incidente est à droite on va donc poser

$$d_j^k = u_j^k + \tilde{d}_j^k \tag{1.58}$$

où u_{nj}^{nk} est l'onde numérique incidente, c'est à dire celle qui vérifie le schéma pour $j \in \mathbf{Z}$ avec les mêmes conditions initiales que d en $k = 0$ et $k = 1$.

Des calculs analogues à ceux de la partie précédente nous conduisent aux formules suivantes

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{U}}_j = \alpha\, r(\omega)^{-j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\, r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^{-j} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathrm{D}}_j = R\, r(\omega)^{j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + R_p\, r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^{j} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathrm{g}}_{2j} = T\, r(2\omega)^{-j} \end{cases} \tag{1.59}$$

$$\hat{\mathrm{D}}_j = \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{d}}_j^P \\ \hat{\mathrm{d}}_j^I \end{bmatrix} \quad \hat{\mathrm{U}}_j = \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{u}}_j^P \\ \hat{\mathrm{u}}_j^I \end{bmatrix} \tag{1.60}$$

En écrivant les conditions aux interfaces

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{d}}_0^P + \hat{\mathrm{u}}_0^P = \hat{\mathrm{g}}_0 \\ \hat{\mathrm{d}}_0^I + \hat{\mathrm{u}}_0^I = \hat{\mathrm{g}}_0 \cos(\omega \Delta t) \\ \hat{\mathrm{d}}_2^P + \hat{\mathrm{u}}_2^P = \hat{\mathrm{g}}_2 \end{cases} \tag{1.61}$$

On aboutit au système

$$\begin{cases} R & +R_p & -T = & -\alpha - \beta \\ R & -R_p & -\cos(\omega \Delta t) T = & -\alpha + \beta \\ r^2(\omega) R & +r^2(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) R_p & -r^{-1}(2\omega) T = & -\alpha r^{-2}(\omega) - \beta r^{-2}(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) \end{cases} \tag{1.62}$$

En posant

$$\delta = (1 + cos(\omega \Delta t)) r(\omega)^2 + (1 - cos(\omega \Delta t)) r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^2 - r(2\omega)^{-1}, \tag{1.63}$$

On trouve alors les coefficients R, R_p et T

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \dfrac{\alpha(r(\omega)^2 - r(\omega)^{-2}) + \beta(r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^2 - r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^{-2})}{\delta} \\ R = -\alpha + \dfrac{1 + cos(\omega \Delta t)}{2} T \\ R_p = -\beta + \dfrac{1 - cos(\omega \Delta t)}{2} T \end{array} \right. \tag{1.64}$$

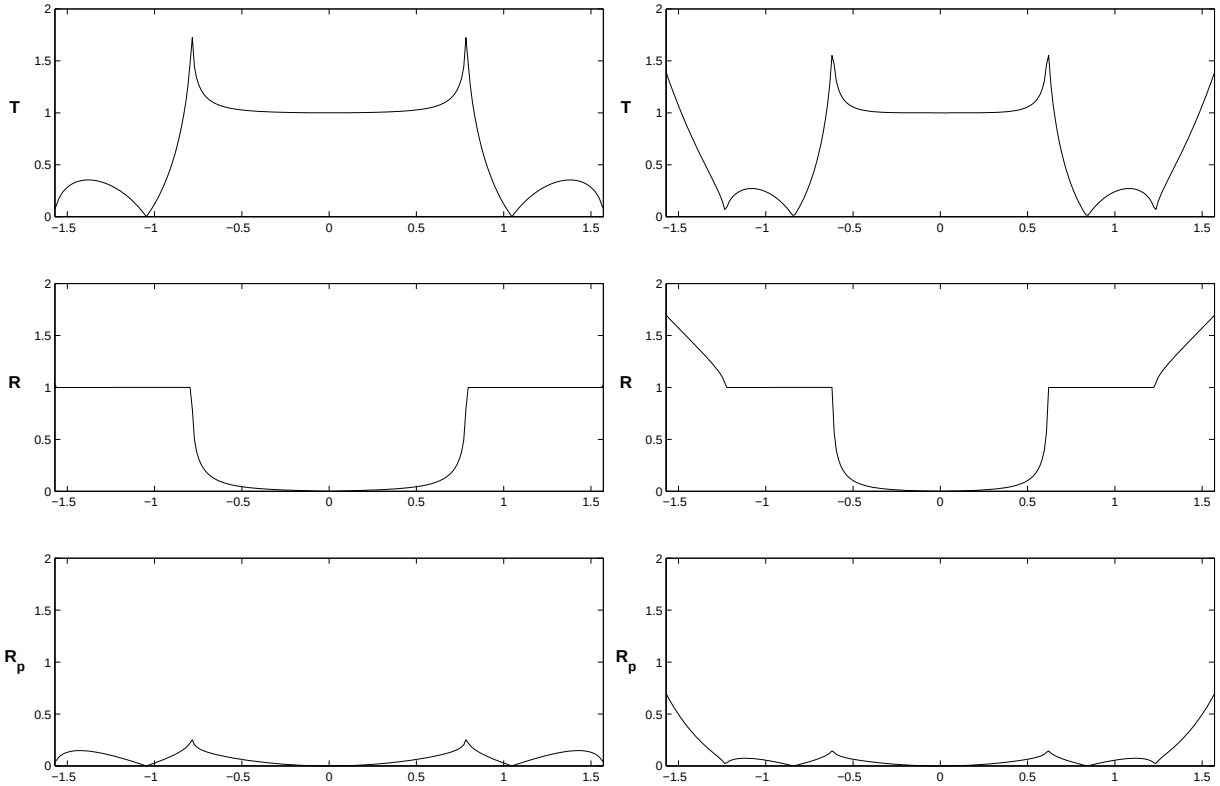
Remarquons que δ, le déterminant du système, est le même que pour une onde incidente dans la grille grossière.

La résolution de ce système pour $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ et $(1, 0)$ nous donne une matrice de réflexion

$$\begin{pmatrix} R \\ R_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{1*} \\ R_{*1} & R_{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{1.65}$$

Le calcul de ces coefficients, représentés figure 1.18, nous montre des coefficients bornés pour $\omega \Delta t \in [-\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}]$. Ici, le coefficient de réflexion n'est plus inférieur à 1 ce qui risque de poser des problèmes dans le cas de réflexions multiples.

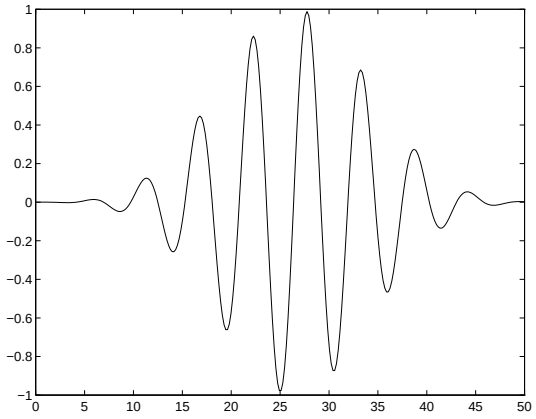
FIG. 1.18 – *Coefficients de réflexion-transmission pour une onde incidente dans la grille fine. En abscisse la pulsation adimensionnée ($\omega\Delta t = 2\pi/N$ où N est le nombre de points par période), de haut en bas, le coefficient de transmission, la réflexion et la réflexion parasite, à gauche $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, à droite $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.*



Cas d'un train d'ondes dans la grille fine : une étude numérique de réflexion

On présente ici des expériences numériques permettant de corroborer le calcul des coefficients précédents. Une onde est envoyée dans la grille raffinée par l'intermédiaire du bord droit. Cette onde a la même structure que dans les exemples de la section 1.3.4. La figure 1.19 représente la partie réelle de cette fonction en fonction du temps pour $\omega_0 \Delta t_f = 0.2$; rappelons que le nombre d'oscillations augmente avec $\omega_0 \Delta t_f$. Sur les figures 1.20, 1.21, 1.22 et 1.23, la partie harmonique de l'onde n'est pas visible sur les courbes car afin de mieux observer les amplitudes on a représenté les modules de ces nombres complexes ; nous parlerons donc d'enveloppe de solution.

FIG. 1.19 – *Tracé de u(L,t) (bord droit) pour une pulsation* $\omega_0 \Delta t_f = 0.2$



La figure 1.20 présente quelques instantanés de la valeur absolue de l'onde propagée. Pour la première pulsation ($\omega_0 \Delta t_f = 0.2$), on remarque que l'onde réfléchie est quasiment nulle, l'onde transmise étant elle, très proche de l'onde incidente. Cette expérience numérique nous donne un coefficient de transmission de T=1.0019 et un coefficient de réflexion R=0.0096 alors que les coefficients théoriques nous donnent R=0.0095 et T=1.0027. La figure 1.21 présente les résultats avec une onde incidente $\frac{3\pi}{8}$. Dans cette expérience, on remarque une légère réflexion à l'interface puisqu'on observe un coefficient de réflexion R=0.0763 pour un R théorique de 0.0752. Le coefficient de Transmission observé vaut 1.037 pour un coefficient théorique de 1.053.

La figure 1.22 présente des instantanés pour une expérience avec une onde incidente de pulsation $\frac{3\pi}{8}$. On remarque qu'ici la réflexion à l'interface est quasiment totale. Numériquement on trouve un coefficient de réflexion $R = 0.96$ et un coef-

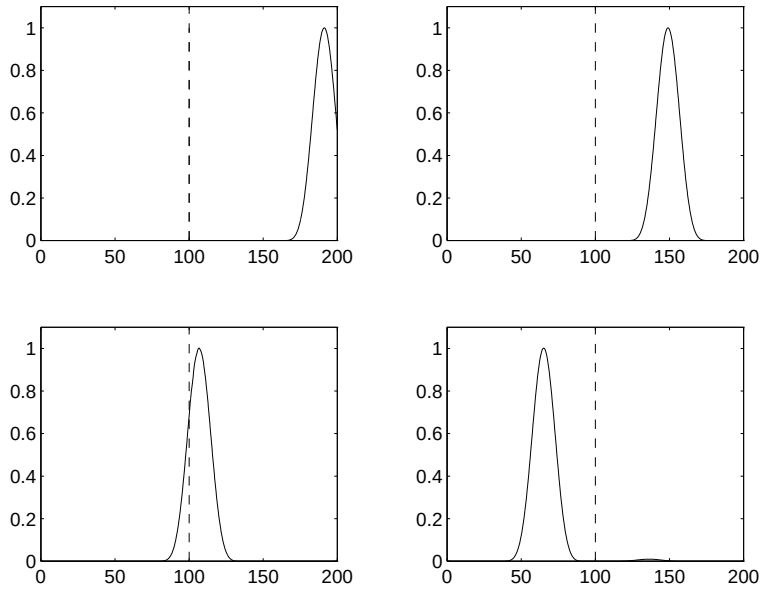


FIG. 1.20 – *Enveloppe de la solution correspondant à* $\omega_0 \Delta t_f = 0.2$, $\Delta x = 0.25$ *à quatre instants distincts (*$t = 50/\sqrt{2},\quad 110/\sqrt{2},\quad 170/\sqrt{2},\quad 230/\sqrt{2}$*). L'abscisse de chaque courbe est x, l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.*

ficient de transmission $T = 5.6\,10^{-6}$, alors que les résultats théoriques prévoyaient une réflexion $R = 1$ et une transmission $T = 0.07$. La différence entre le coefficient de transmission théorique et celui observé s'explique par le fait que l'onde transmise dans la grille grossière n'est pas propagative et donc T ne peut être observé convenablement. En effet, le calcul théorique nous donne $|r(2\frac{3\pi}{8\Delta t})| < 1$ synonyme d'une onde évanescente.

L'oscillation observée sur la troisième image est simplement due au fait que le cosinus et le sinus (c'est à dire la partie réelle de l'onde et sa partie imaginaire) sont déphasés pendant la réflexion puisque la partie réfléchie rencontre au retour la partie incidente de l'onde. On remarque que pour obtenir l'onde à des positions comparables, nous avons dû choisir des instants plus grands pour les pulsations plus grandes. Ceci est dû au fait que la propagation ne se fait pas a la même vitesse pour toutes les fréquences (cf. Annexe B).

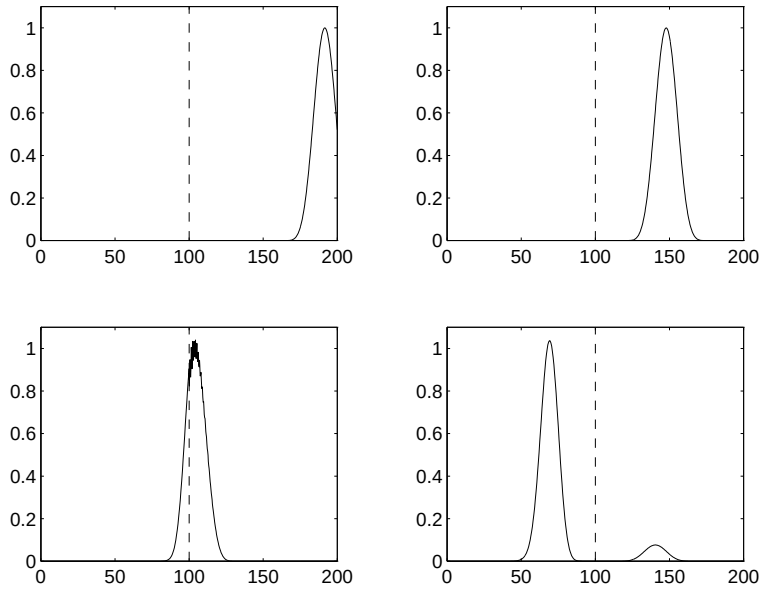


FIG. 1.21 – *Enveloppe de la solution correspondant à* $\omega_0 \Delta t_f = \frac{3\pi}{16}$, $\Delta x = 0.25$ *à quatre instants distincts (*$t = 50/\sqrt{2},\quad 115/\sqrt{2},\quad 180/\sqrt{2},\quad 245/\sqrt{2}$*). L'abscisse de chaque courbe est x, l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.*

Ces trois expériences nous permettent de valider le calcul des coefficients de réflexion-transmission. En effet, elles mettent en évidence la croissance de la réflexion avec la pulsation ainsi que la bonne représentativité des coefficients de réflexion. De plus, la première expérience nous montre la précision de notre schéma pour les pulsations généralement utilisées. En effet, des pulsations supérieures à $\frac{0.5}{\Delta t}$ (c'est à dire 2 points par longueur d'onde) ne sont généralement pas utilisées en pratique. Toutefois, ces fréquences sont présentes dans le bruit numérique, et il peut être important de voir leur évolution. Ainsi l'expérience suivante nous présente une anomalie mais elle ne peut être observée que pour des cas limites d'utilisation du schéma.

Remarque

Pour $\omega \Delta t = \frac{\pi}{4}$, un nombre de Courant de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, l'expérience nous montre une réflexion mais aussi une traînée ; l'onde transmise est également déformée. On présente

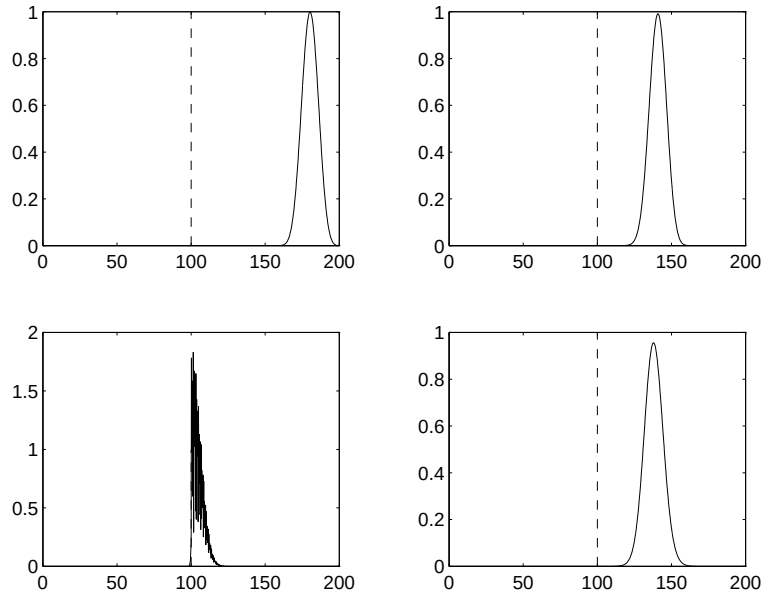


FIG. 1.22 – *Enveloppe de la solution correspondant à* $\omega_0 \Delta t_f = \frac{3\pi}{8}$, $\Delta x = 0.25$ *à quatre instants distincts* ($t = 75/\sqrt{2},\quad 150/\sqrt{2},\quad 225/\sqrt{2},\quad 300/\sqrt{2}$). *L'abscisse de chaque courbe est x, l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.*

$\omega\Delta t$	R théorique	R numérique	T théorique	T numérique
0.2	0.0095	0.0096	1.0027	1.0019
$\frac{3\pi}{16}$	0.0752	0.0763	1.053	1.037
$\frac{3\pi}{8}$	1	0.96	0.07	5.6e-6

TAB. 1.2 – *Tableau récapitulatif des coefficients*

ici (figure 1.23) l'expérience révélant ce phénomène. Ce comportement très particu-

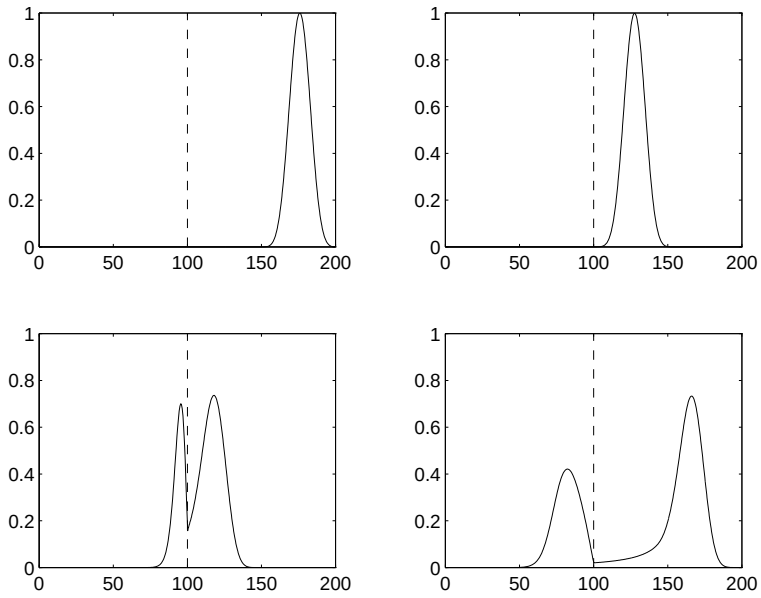


FIG. 1.23 – *Enveloppe de la solution correspondant à* $\omega_0 \Delta t_f = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = 0.25$ *à quatre instants distincts* ($t = 75/\sqrt{2},\quad 150/\sqrt{2},\quad 225/\sqrt{2},\quad 300/\sqrt{2}$). *L'abscisse de chaque courbe est x, l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.*

lier s'explique en effectuant un développement en séries des coefficients de réflexion et de transmission au voisinage de $\frac{\pi}{4\Delta t}$, en effet,

$$\begin{aligned} R(\tfrac{\pi}{4}+\epsilon) &= R_0 + R_1\sqrt{\epsilon} + O(\epsilon) \\ T(\tfrac{\pi}{4}+\epsilon) &= T_0 + T_1\sqrt{\epsilon} + O(\epsilon) \end{aligned} \tag{1.66}$$

C'est le terme en $\sqrt{\epsilon}$ qui est responsable de cette traînée. En effet, on montre que la partie réfléchie de l'onde s'écrit

$$u_h(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{\mathrm{G}}_{\omega_0}(\omega)\hat{\mathrm{R}}(\omega)e^{i(\omega t - k_h(\omega)x)}d\omega \tag{1.67}$$

où $\hat{\mathrm{G}}_{\omega_0}(\omega) = \hat{\mathrm{G}}_0(\omega-\omega_0)$ est l'onde incidente, $G_0(t)$est la fonction de Harris dilatée, et $k_h(\omega)$ le nombre d 'onde. Les développements en séries de l'équation (1.66) ainsi

qu'une approximation de $k_h(\omega) = k_h(\omega_0) + \nabla_{\omega_h} k(\omega_0)(\omega - \omega_0)$ nous donne alors

$$\begin{aligned} u_h(x,t) \simeq e^{i(\omega_0 t - k_h(\omega_0)x)} \quad & (\frac{R_0}{2\pi}(\int \hat{\mathrm{G}}_{\omega_0} e^{i(t-\nabla_{\omega_h} kx)(\omega-\omega_0)} d\omega) \\ & + \frac{R_1}{2\pi} \int (\hat{\mathrm{G}}_{\omega_0}(i(\omega-\omega_0))^{\frac{1}{2}} e^{i(t-\nabla_{\omega_h} kx)(\omega-\omega_0)} d\omega)). \end{aligned} \tag{1.68}$$

soit

$$u_h(x,t) \simeq e^{i(\omega_0 t - k_h(\omega_0)x)}(R_0 G_0 + R_1 G_{1/2})(t - \nabla_{\omega_h} kx) \tag{1.69}$$

où

$$G_{1/2}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\mathrm{G}}_0(\omega)\sqrt{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \tag{1.70}$$

est la demi dérivée de l'onde incidente; elle est représentée sur la figure 1.24. La présence de cette demi dérivée explique donc le phénomène de traînée observé puisqu'elle n'est pas à support compact. La même explication peut être fournie pour l'onde transmise qui de la même façon s'écrira

$$u_h(x,t) \simeq e^{i(\omega_0 t - k_h(\omega_0)x)}(T_0 G_0 + T_1 G_{1/2})(t - \nabla_{\omega_h} kx). \tag{1.71}$$

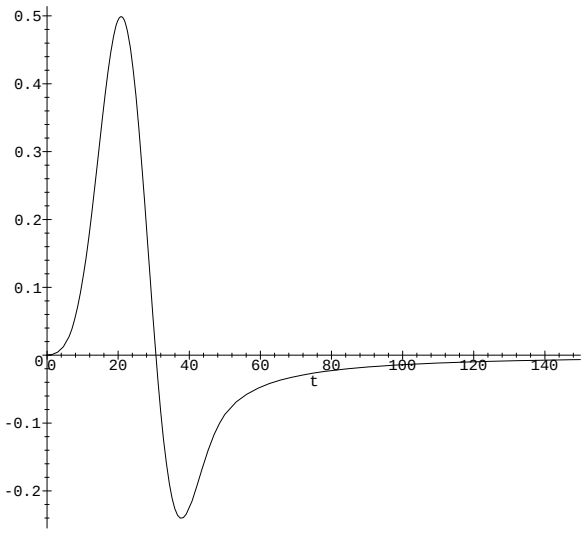


FIG. 1.24 – $G_{1/2}$

Chapitre 2

Extension à un raffinement plus fort. Cas de 2 milieux infinis

Il peut être intéressant, lors du raffinement de passer directement d'une grille grossière à une grille raffinée n fois, notamment pour des raisons d'économie ou de simplicité de mise en oeuvre, cf. [3] par exemple. On présente ici, un schéma sur le modèle du précédent permettant un raffinement plus important. On décrit également les calculs de stabilité et de coefficients de réflexion analogues à ceux du schéma précédent.

2.1 Description du schéma

Le schéma est une simple généralisation du schéma précédent, avec des interpolations temporelles légèrement plus compliquées. On a représenté figure 2.1 un exemple dans le cas $n = 4$.

On approche ici u, solution de l'équation (1.2) par

$$\begin{cases} g_{nj}^{nk} \approx u(njh, nk\Delta t) & j \leq 0 \\ d_j^k \approx u(jh, k\Delta t) & j > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Les équations à gauche de l'interface (1.3) et (1.5) deviennent alors

$$\frac{g_{nj}^{nk+n} - 2g_{nj}^{nk} + g_{nj}^{nk-n}}{n^2\Delta t^2} - \frac{g_{nj+n}^{nk} - 2g_{nj}^{nk} + g_{nj-n}^{nk}}{n^2h^2} = 0 \qquad \text{pour } j < 0 \tag{2.2}$$

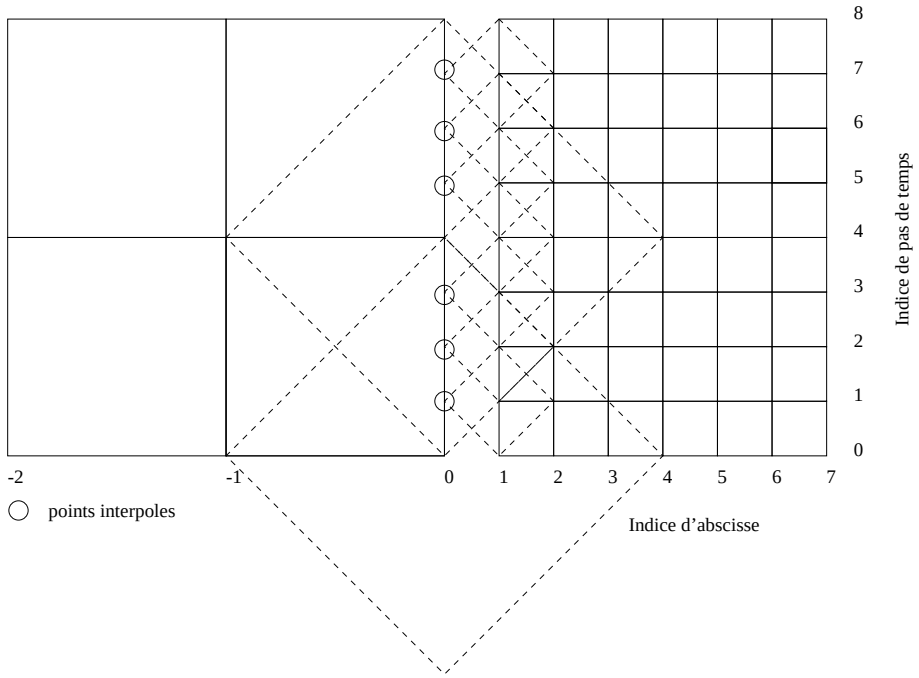


FIG. 2.1 – *Schéma de l'interpolation sur la grille 1/4*

et

$$\frac{g_{nj}^{nk+n} - 2g_{nj}^{nk} + g_{nj}^{nk-n}}{n^2\Delta t^2} - \frac{d_{nj+n}^{nk} - 2g_{nj}^{nk} + g_{nj-n}^{nk}}{n^2 h^2} = 0 \qquad \text{pour } j = 0 \tag{2.3}$$

Tandis que Les équations à droite de l'interface (1.4), (1.6) et (1.7) donnent

$$\frac{d_j^{k+1} - 2d_j^k + d_j^{k-1}}{\Delta t^2} - \frac{d_{j+1}^k - 2d_j^k + d_{j-1}^k}{h^2} = 0 \qquad \text{pour } j > 1 \tag{2.4}$$

et

$$\begin{cases} \frac{d_j^{nk+m+1} - 2d_j^{nk+m} + d_j^{nk+m-1}}{\Delta t^2} \\ \qquad - \quad \frac{d_{j+1}^{nk+m} - 2d_j^{nk+m} + \frac{1}{n}((n-m)g_0^{nk} + mg_0^{nk+n})}{h^2} = 0 \\ \text{pour } j = 1 \text{ et } m = 0,...,\text{n-1} \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2 Analyse de la stabilité par Fourier-Laplace

Nous allons ici appliquer la même méthode d'analyse de stabilité que celle décrite dans la section 1.2. Nous ne démontrerons pas ici la stabilité avec la même rigueur, mais présenterons simplement les grandes lignes des calculs. Ces derniers sont un peu plus compliqués mais le raisonnement est le même.

Utilisant les mêmes notations, on pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{\mathrm{g}}_{nj} & = & n\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}_{nj}^{nk} e^{(i\omega nk\Delta t)} \\ \hat{\mathrm{u}}_{nj} & = & n\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} u_{nj}^{nk} e^{(i\omega nk\Delta t)} \\ \hat{\mathrm{d}}_j^m & = & n\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} d_j^{nk+m} e^{(i\omega(nk+m)\Delta t)} \quad \text{pour } m = 0,...,\text{n-1}. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

et

$$\hat{D}_j = \left[\begin{array}{c} \hat{\mathrm{d}}_j^0 \\ \cdots \\ \hat{\mathrm{d}}_j^m \\ \cdots \\ \hat{\mathrm{d}}_j^{n-1} \end{array} \right]. \tag{2.7}$$

On trouve alors les équations satisfaites par $\hat{\mathrm{g}}$ et $\hat{D}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{\Delta t^2} \sin^2(\frac{n\omega\Delta t}{2}) \hat{\mathrm{g}}_{nj} + \frac{1}{h^2}(\hat{\mathrm{g}}_{nj+n} - 2\hat{\mathrm{g}}_{nj} + \hat{\mathrm{g}}_{nj-n}) = 0 \\ \text{pour } j < 0 \end{array} \right. \tag{2.8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{\Delta t^2} \sin^2(\frac{n\omega\Delta t}{2}) \hat{\mathrm{g}}_{nj} + \frac{1}{h^2}(\hat{\mathrm{d}}_{nj+n}^0 - \hat{\mathrm{u}}_{nj+n} - 2\hat{\mathrm{g}}_{nj} + \hat{\mathrm{g}}_{nj-n}) = 0 \\ \text{pour } j = 0 \end{array} \right. \tag{2.9}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_{nD}\hat{D}_j}{\Delta t^2} + \frac{1}{h^2}(\hat{D}_{j+1} - 2\hat{D}_j + \hat{D}_{j-1}) = 0 \\ \text{pour } j > 1 \end{array} \right. \tag{2.10}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_{nD}\hat{D}_j}{\Delta t^2} + \frac{1}{h^2}(\hat{D}_{j+1} - 2\hat{D}_j + \mathrm{G}\ (\hat{\mathrm{g}}_0 + \hat{\mathrm{u}}_0)) = 0 \\ \text{pour } j = 1 \end{array} \right. \tag{2.11}$$

où

$$A_{nD} = \begin{bmatrix} 2 & -e^{-i\omega\Delta t} & 0 & ... & 0 & -e^{i\omega\Delta t} \\ -e^{i\omega\Delta t} & 2 & -e^{-i\omega\Delta t} & 0 & ... & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & ... & 0 & -e^{i\omega\Delta t} & 2 & -e^{-i\omega\Delta t} \\ -e^{-i\omega\Delta t} & 0 & ... & 0 & -e^{i\omega\Delta t} & 2 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{e^{i\omega\Delta t}}{n}((n-1) + e^{-in\omega\Delta t}) \\ \cdots \\ \frac{e^{im\omega\Delta t}}{n}((n-m) + me^{-in\omega\Delta t}) \\ \cdots \\ \frac{e^{i(n-1)\omega\Delta t}}{n}(1 + (n-1)e^{-in\omega\Delta t}) \end{pmatrix}$$

La partie grille grossière étant identique à celle de la section 1.2, on utilise le même polynôme caractéristique pour résoudre (2.8). Avec $r(\omega)$ défini par 1.32, la solution est

$$\hat{\mathrm{g}}_{nj} = R_0\, r(n\omega)^{-j}\hat{\mathrm{u}}_0 \qquad j \leq 0 \tag{2.12}$$

Par définition, nous dirons que R_0 est le coefficient de réflexion grossier-fin du schéma.

Pour trouver la solution de (2.10), il nous faut diagonaliser la matrice A_{nD}. Pour cela remarquons que chaque ligne de cette matrice appliquée à un vecteur propre u^l peut d'écrire sous la forme

$$2u^l_j - e^{-i\omega\Delta t}u^l_{j+1} - e^{i\omega\Delta t}u^l_{j-1} = \lambda u_j$$

Ce genre de matrice est appelée matrice tournante ou circulante. Ses vecteurs propres sont de la forme

$$u^l = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ e^{\frac{i2\pi jl}{n}} \\ \dots \\ e^{\frac{i2\pi(n-1)l}{n}} \end{bmatrix}$$

associé à la valeur propre

$$\begin{aligned} \lambda^l &= 2(1-\cos(\tfrac{2\pi l}{n}-\omega\Delta t)) \\ &= 4\sin^2(\tfrac{1}{2}(\omega\Delta t-\tfrac{2\pi l}{n\Delta t})) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Afin de résoudre (2.10) pour chaque composante de $\hat{\mathrm{D}}_j$, $\hat{\mathrm{d}}^l$, on est donc amené à considérer la solution à ω fixé de

$$\begin{cases} r_l^2(\omega)+(\frac{h^2}{\Delta t^2}\lambda^l-2)r_l(\omega)+1=0 \\ \\ |r_l(\omega)|<1 \end{cases} \tag{2.14}$$

soit

$$r_l(\omega) = r(\omega-\frac{2\pi l}{n\Delta t}) \tag{2.15}$$

La solution de (2.10) s'écrit donc

$$\hat{\mathrm{D}}_j = \sum_{l=0}^{n-1} \hat{\mathrm{u}}_0 k_l r_l(\omega)^j \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2i\pi l}{n}} \\ \vdots \\ e^{\frac{2ij\pi l}{n}} \\ \vdots \\ e^{\frac{2i(n-1)\pi l}{n}} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Par définition, nous dirons que les nombres k_l sont les coefficients de transmission grossier-fin du schéma et nous appellerons vecteur de transmission grossier-fin le vecteur K de composantes k_l. Ces constantes sont déterminées grâce aux équations (2.9) et (2.11) soit

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{d}}_0^m = G_m\,(\hat{\mathrm{u}}_0 + \hat{\mathrm{g}}_0) & \text{pour } m = 0,..,n-1 \\ \hat{\mathrm{d}}_n^0 = \hat{\mathrm{u}}_n + \hat{\mathrm{g}}_n \end{cases} \tag{2.17}$$

On aboutit au système suivant

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{n-1} k_l & = & G_0\,(1+R_0) \\ \dots & & \\ \sum_{l=0}^{n-1} e^{\frac{2ij\pi l}{n}} k_l & = & G_j\,(1+R_0) \\ \dots & & \\ \sum_{l=0}^{n-1} e^{\frac{2i(n-1)\pi l}{n}} k_l & = & G_{n-1}\,(1+R_0) \\ \hline \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) k_l & = & r(n\omega) + r^{-1}(n\omega)\,R_0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Afin de résoudre ce système nous allons appliquer une transformée de Fourier inverse discrète aux équations. Posons

$$\hat{\mathrm{G}}_p = \sum_{m=0}^{n-1} G_m\, e^{-\frac{2i\pi pm}{n}} = \frac{1}{n} \frac{\sin(\frac{n\omega\Delta t}{2})^2}{\sin(\frac{\omega\Delta t}{2} - \frac{p\pi}{n})^2} \qquad \text{pour } p = 0,..,n-1 \tag{2.19}$$

En multipliant les n premières équations par $e^{-\frac{2i\pi pm}{n}}$, m étant le numéro de la ligne, puis en sommant les n lignes on obtient

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi pm}{n}} \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} k_l e^{\frac{2i\pi lm}{n}} \right\} = \sum_{m=0}^{n-1} G_m\,(1+R_0) e^{-\frac{2i\pi pm}{n}}$$

En intervertissant les deux sommes de gauche on a

$$\sum_{l=0}^{n-1} k_l \sum_{m=0}^{n-1} (e^{\frac{2i\pi(p-l)}{n}})^m = (1+R_0)\,\hat{\mathrm{G}}_p$$

or

$$\sum_{m=0}^{n-1}(e^{\frac{2i\pi(p-l)}{n}})^m = \frac{1-(e^{\frac{2i\pi(p-l)}{n}})^n}{1-e^{\frac{2i\pi(p-l)}{n}}} = \frac{1-e^{2i\pi(p-l)}}{1-e^{\frac{2i\pi(p-l)}{n}}} = n\delta_l^p$$

On obtient ainsi la relation

$$k_p = \frac{1}{n}(1+R_0)\,\hat{\mathrm{G}}_p \tag{2.20}$$

En remplaçant dans la dernière équation du système on aboutit à

$$\frac{1}{n}(1+R_0)\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n\,\hat{\mathrm{G}}_l = r(n\omega) + r^{-1}(n\omega)\,R_0 \tag{2.21}$$

soit

$$\left(\frac{1}{r(n\omega)} - \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l\right)\,R_0 = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l - r(n\omega) \tag{2.22}$$

On trouve le déterminant du système analogue à celui trouvé par Marsha Berger pour l'équation hyperbolique (cf. [2]).

$$\delta(\omega) = \frac{1}{r(n\omega)} - \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l \tag{2.23}$$

Sous la condition $\delta(\omega) \neq 0$, on a

$$\begin{cases} R_0 = \dfrac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l - r(n\omega)}{\dfrac{1}{r(n\omega)} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l} \\ k_l = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l - r(n\omega)}{\dfrac{1}{r(n\omega)} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l}\right)\hat{\mathrm{G}}_l \end{cases} \tag{2.24}$$

Pour les mêmes raisons que dans la section 1.2, la stabilité sera démontrée si le déterminant $\delta(\omega)$ est non nul $\forall\omega$ tel que $\Im(\omega) \geq 0$ (Le cas $\Im(\omega) = 0$ s'obtient par passage à la limite). Plus exactement, notre schéma sera stable si les coefficients R_0 et k_l sont bornés. On peut démontrer que $\delta(\omega)$ est non nul sur le demi-plan complexe $\Im\omega > 0$ (cf. Annexe C). La démonstration pour ω réelle analogue au schéma

1/2 conduit à des calculs très compliqués, on se contentera ici, d'une vérification numérique apportée par le calcul des coefficients qui montre qu'ils sont effectivement bornés (figure 2.2 et 2.3).

FIG. 2.2 – *Coefficients de réflexion-transmission pour le schéma 1/4. En abscisse la pulsation adimensionnée ($\omega\Delta t = 2\pi/N$ où N est le nombre de points par période), pour chaque figure,de haut en bas, le coefficient de réflexion (R_0), celui de transmission (k_0) puis ceux de transmission parasite,en haut $\alpha = 1$, à gauche $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, à droite $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.*

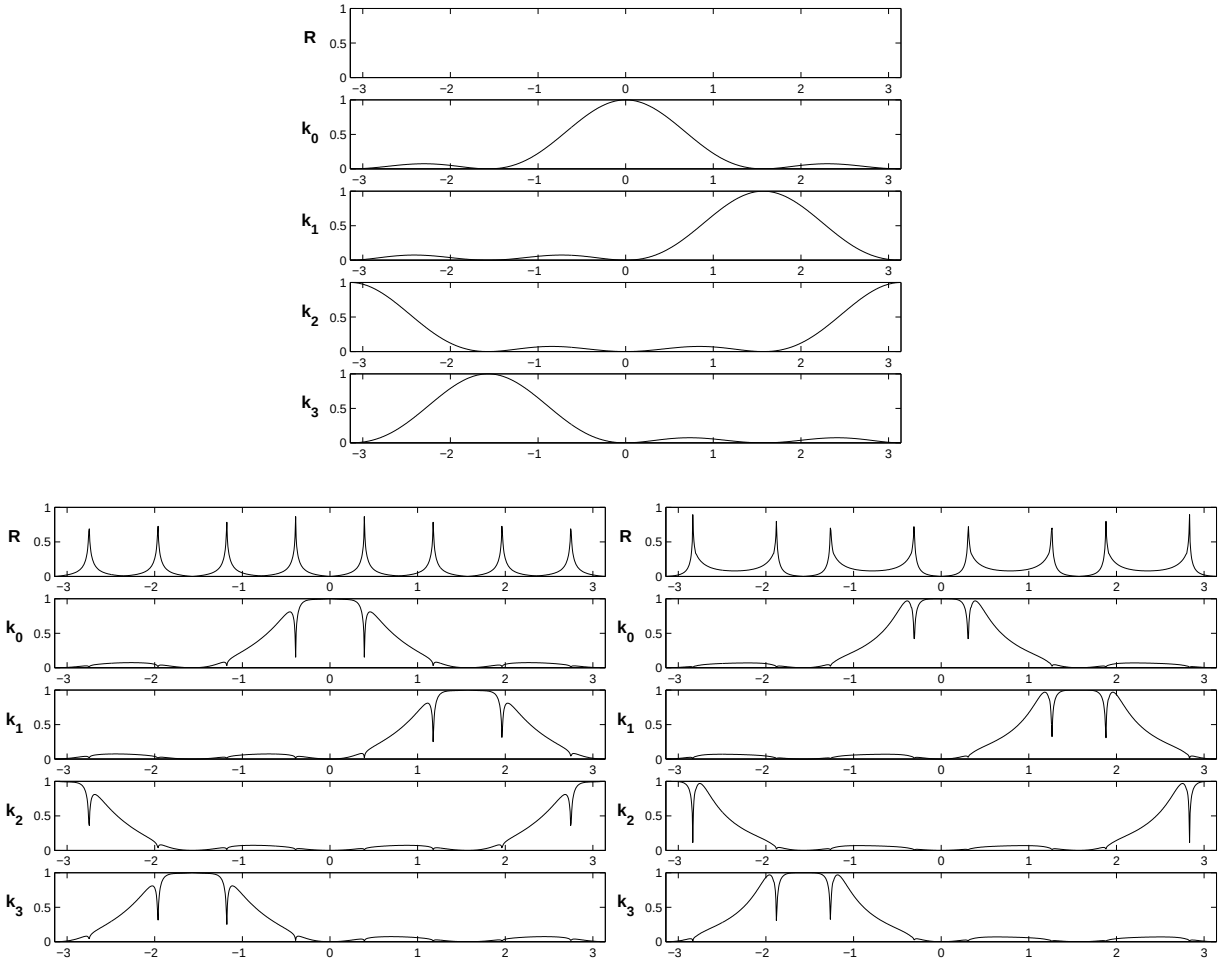
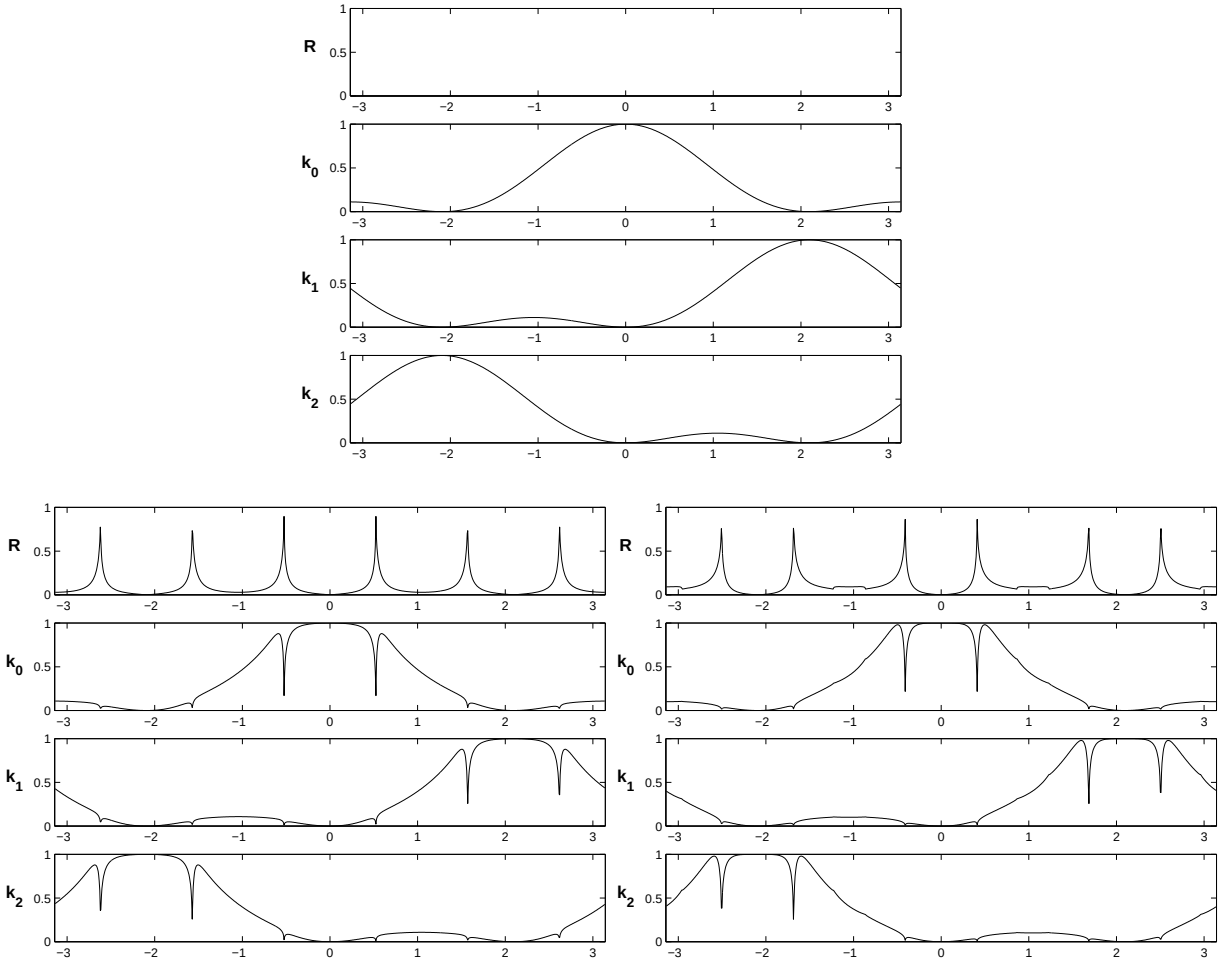


FIG. 2.3 – *Coefficients de réflexion-transmission pour le schéma 1/3. En abscisse la pulsation adimensionnée ($\omega\Delta t = 2\pi/N$ où N est le nombre de points par période), pour chaque figure,de haut en bas, le coefficient de réflexion (R_0), celui de transmission (k_0)puis ceux de transmission parasite,en haut $\alpha = 1$, à gauche $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, à droite $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.*



2.3 Étude de précision

2.3.1 Ordre du Schéma

Afin de tester l'ordre de tels schéma nous réalisons le même procédé expérimental que dans la section 1.3.2 pour $n = 4$ et $n = 3$. Les courbes sont pratiquement identiques à celles de la section 1.3.2.

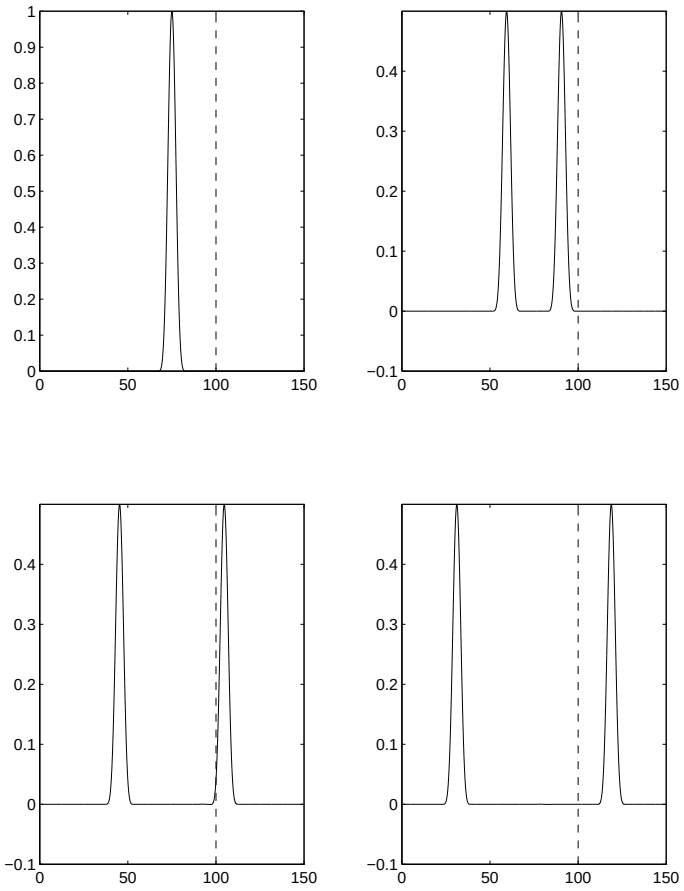


FIG. 2.4 – *Solution numérique dans le cas 1/4 correspondant à $\Delta x = 0.25$ à quatre instants distincts ($t = 0, 20/\sqrt{2}, 40/\sqrt{2}, 60/\sqrt{2}$). L'abscisse de chaque courbe est x, l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.*

Pente d'erreur	dispersion seule	réflexion seule	Transmission +dispersion
Schéma 1/2	-2.0579	-1.1808	-2.5322
Schéma 1/3	-2.0579	-1.17	-2.5633
Schéma 1/4	-2.0579	-1.4414	-2.5304

TAB. 2.1 – *Tableau récapitulatif des différentes pentes des logarithmes des erreurs observées*

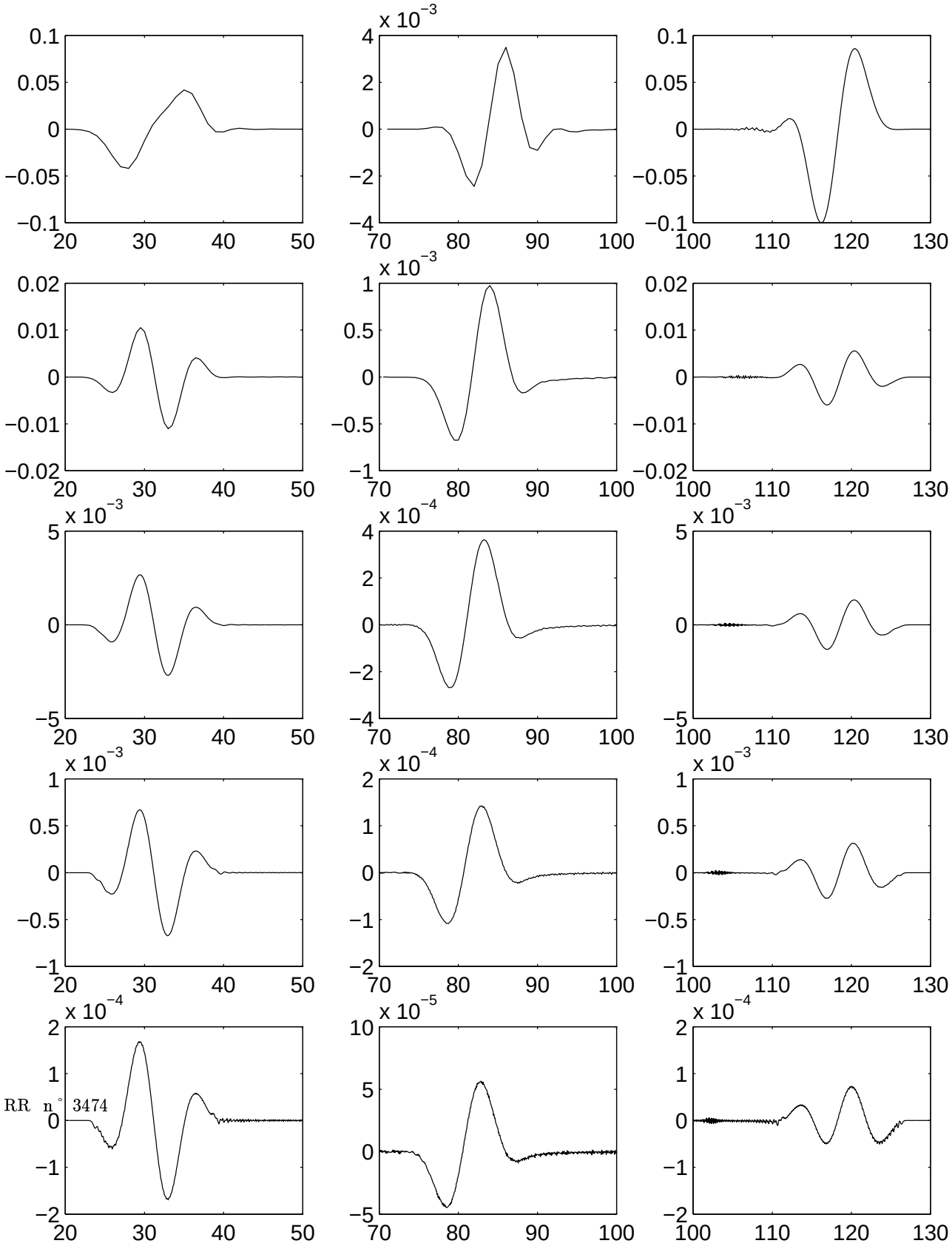


FIG. 2.5 – *Tracé des différences entre 2 raffinements successifs dans le cas 1/4*

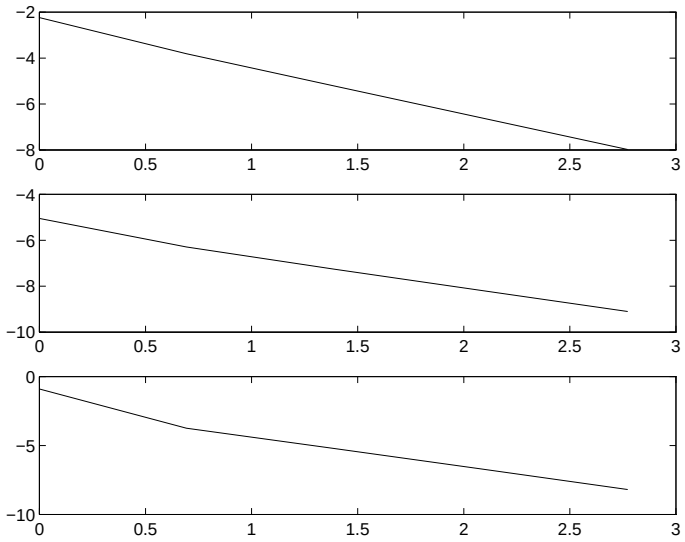


FIG. 2.6 – *Tracé des logarithmes de chaque erreur en fonction du logarithme du raffinement dans le cas 1/4*

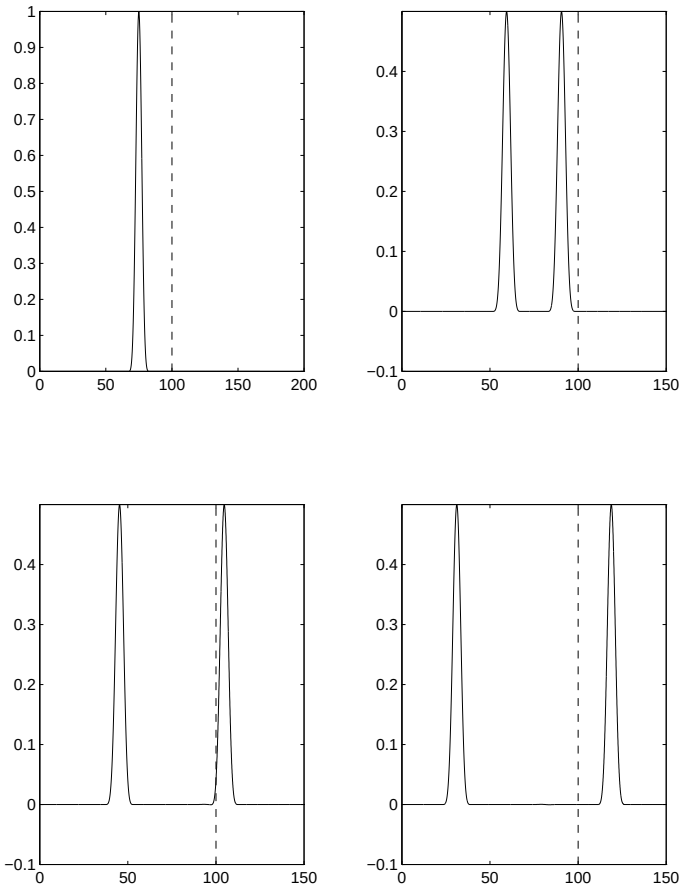


FIG. 2.7 – *Solution numérique dans le cas 1/3 correspondant à* $\Delta x = 0.25$ *à quatre instants distincts* ($t = 0, 20/\sqrt{2}, 40/\sqrt{2}, 60/\sqrt{2}$). *L'abscisse de chaque courbe est* x, *l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.*

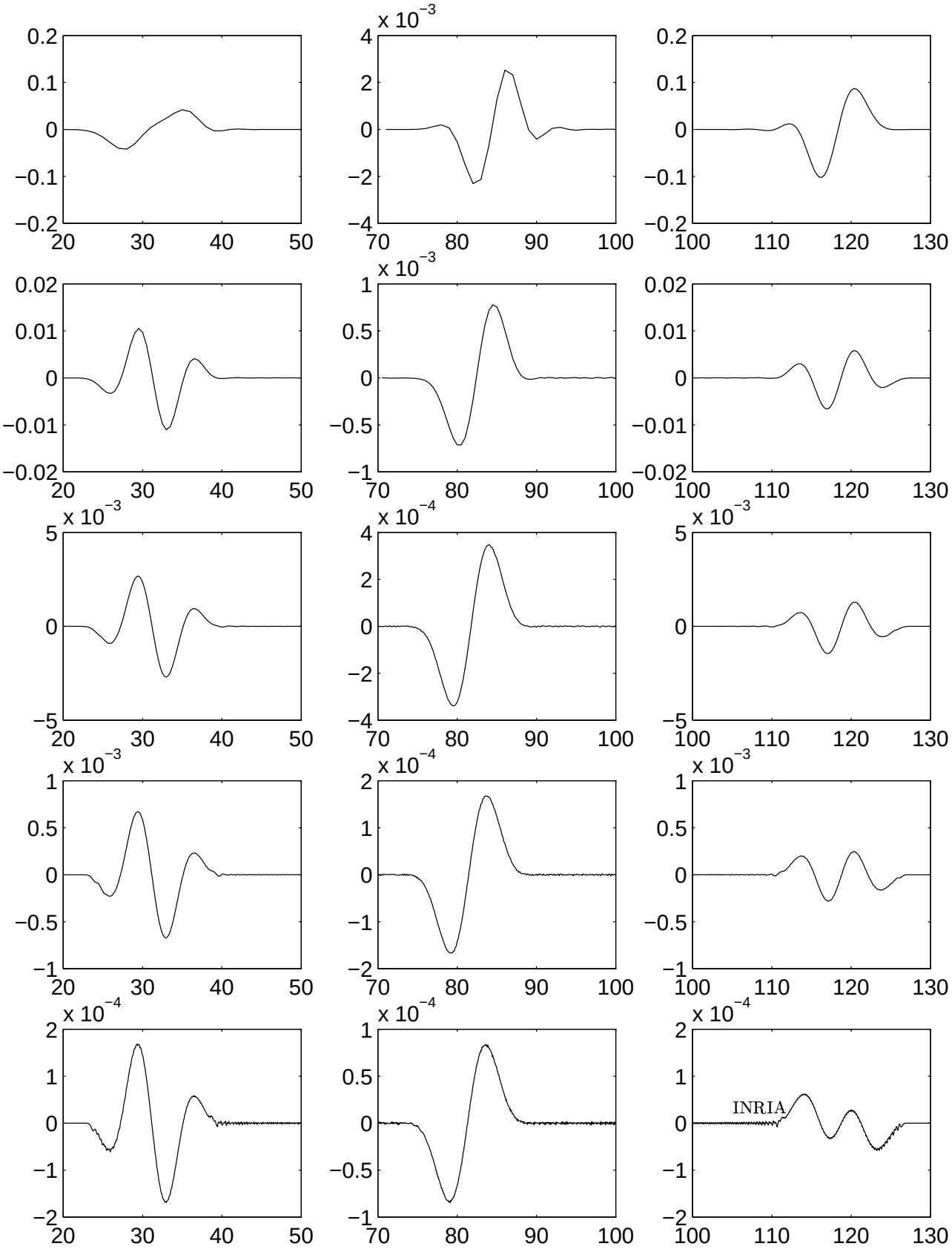


FIG. 2.8 – *Tracé des différences entre 2 raffinements successifs dans le cas 1/3*

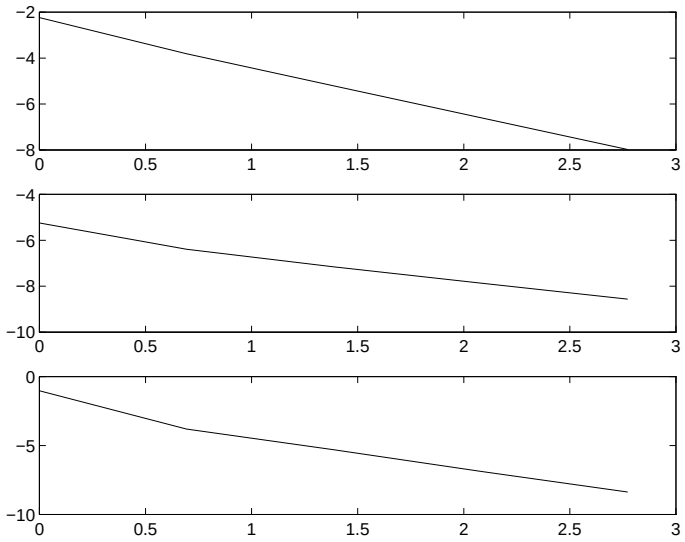


FIG. 2.9 – *Tracé des logarithmes de chaque erreur en fonction du logarithme du raffinement dans le cas 1/3*

2.3.2 Réinterprétation de la solution en termes d'ondes planes

On peut comme dans la section 1.3.4 donner une signification aux coefficients calculés dans l'étude de stabilité de la section 2.2.

Cas d'une onde incidente dans la grille grossière

Supposons que la condition initiale soit éloignée de l'interface entre les deux grilles. On a vu que le champ incident au voisinage de l'interface s'écrivait

$$u_{nj}^{nk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{n\Delta t}}^{+\frac{\pi}{n\Delta t}} \hat{u}_0(\omega) r(n\omega)^j e^{-ni\omega k\Delta t} d\omega, \tag{2.25}$$

cette expression étant valable au moins au delà du support des conditions initiales en temps.

A ce champ, se rajoute dans la grille grossière un champ réfléchi dont l'expression est

$$\tilde{g}_{nj}^{nk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{n\Delta t}}^{+\frac{\pi}{n\Delta t}} \hat{u}_0(\omega) R_0(\omega) r(n\omega)^{-j} e^{-ni\omega k\Delta t} d\omega. \tag{2.26}$$

Enfin, l'onde incidente génère dans la grille fine le champ

$$d_j^k = \sum_{l=0}^{n-1} (d_l)_j^k \tag{2.27}$$

avec

$$(d_l)_j^k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{n\Delta t}}^{\frac{\pi}{n\Delta t}} \hat{u}_0(\omega) k_l(\omega) r(\omega + \frac{2l\pi}{n\Delta t})^j e^{i\omega k\Delta t} \tag{2.28}$$

Dans toutes ces formules, les notations sont celles de la section précédente : la fonction $r(\omega)$ est définie par les formules (1.24), tandis que les coefficients R_0, et k_l sont solutions du système (2.18) et sont donnés par (2.24). En introduisant $k_h(\omega))$ le nombre d'onde numérique, on peut expliciter la solution sous forme d'une superposition d'ondes planes numériques. Plus précisément, fixons ω et posons

$$\begin{aligned} G_{nj}^{nk} &= \left(e^{ik_h(n\omega)jh} + R_0(\omega) e^{-ik_h(n\omega)jh} \right) \; e^{-i\omega nk\Delta t} \\ D_j^k &= \sum_{l=0}^{n-1} k_l(\omega) e^{i(k_h(\omega + \frac{2l\pi}{n\Delta t})jh - (\omega + \frac{2l\pi}{n\Delta t})k\Delta t)} \end{aligned} \tag{2.29}$$

On vérifie que (G, D) est une solution particulière du schéma. La partie gauche, G, est composée d'une onde plane numérique incidente et d'une onde plane numérique réfléchie tandis que la partie droite est composée de n ondes planes transmises, associées aux pulsations $\omega + \frac{2l\pi}{n\Delta t}$. Dans ce contexte, les nombres R_0 et k_l s'interprètent donc bien comme les coefficients de réflexion et de transmission ainsi que nous les avions définis.

Cas d'une onde incidente dans la grille fine

Afin de simplifier les calculs dans la grille fine, nous allons nous contenter de faire une analyse par ondes planes, mais les résultats de stabilité sont identiques au cas précédent On suppose ici que l'onde incidente est une onde plane de pulsation $\omega_q = \omega + \frac{2q\pi}{n\Delta t}$ dans la grille fine (celle-ci est toujours à droite de la grille grossière). Dans un premier temps q est fixé.

$$(u_{inc})_j^{nk+m} = r(\omega + \frac{2q\pi}{n\Delta t})^{-j} z_q^m \exp^{ink\omega\Delta t}$$

Cherchons la solution dans la grille grossière sous la forme

$$(u_{tran})_{nj}^{nk} = t_q r(n\omega)^j \exp^{ink\omega\Delta t}$$

où par définition t_q est le coefficient de transmission fin grossier associé à la pulsation incidente ω_q. Nous appellerons vecteur de transmission fin grossier le vecteur T de composantes $(t_q)_{q=0,n-1}$

Dans la grille fine, on cherche la solution sous la forme

$$(u_{ref})_j^{nk+m} = \sum_{l=0}^{n-1} R(l,q) r(\omega_l)^{-j} z_l^m \exp^{ink\omega\Delta t}$$

où $(R(l,q))_{l=0,n-1}$ sont les coefficients de réflexion fin grossier associés à la pulsation incidente ω_q. Nous appellerons matrice de Réflexion fin grossier la matrice R de composantes $(R(l,q))_{l=0,n-1;q=0,n-1}$.

On a noté

$$\omega_l = \omega + \frac{2l\pi}{n\Delta t} \text{ et } z_l = \exp^{i(\frac{2l\pi}{n} + \omega\Delta t)}$$

La vérification au point $j = 0$ de $(u_{fin})_0^{nq+m} = \frac{n-m}{n}(u_{gro})_0^{nq} + \frac{m}{n}(u_{gro})_0^{nq+n}$ pour $m = 0, n-1$, aboutit au système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{c} ((z_q)^m)_m + \sum_{l=0}^{n-1} R(l,q)\,((z_l)^m)_m = t_q \left(\frac{n-m}{n} + \exp^{in\omega\Delta t} \frac{m}{n} \right)_m \\ m = 0, n-1 \end{array} \right. \tag{2.30}$$

En multipliant chaque équations par $\frac{1}{n}\exp^{-i\frac{2pm\pi}{n}}\exp^{-im\omega\Delta t}$ et en sommant, on trouve

$$R(p,q) = t_q \hat{\mathrm{G}}_p - \delta_p^{l0}$$

où on a posé

$$\hat{\mathrm{G}}_p = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{n-m}{n} + \exp^{in\omega\Delta t}\frac{m}{n}\right)\exp^{-i\frac{2pm\pi}{n}}\exp^{-im\omega\Delta t} = \frac{1}{n^2}\frac{\sin(\frac{n\omega\Delta t}{2})^2}{\sin(\frac{\omega\Delta t}{2}+\frac{\pi pm}{n})^2}$$

La vérification au point $j=-1$ nous donne

$$r(\omega+\frac{\pi 2q}{n\Delta t})^{-n} + \sum_{l=0}^{n-1} R(l,q)\, r(\omega+\frac{\pi 2l}{n\Delta t})^{+n} = t_q\, r(n\omega)^{-1}$$

On trouve alors

$$t_q = \frac{r(\omega+\frac{2q\pi}{n\Delta t})^{-n} - r(\omega+\frac{2q\pi}{n\Delta t})^{n}}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{p=0}^{n-1}\hat{\mathrm{G}}_p\, r(\omega+\frac{\pi 2p}{n\Delta t})^{n}} \tag{2.31}$$

et la matrice de réflexion s'écrit

$$R(l,q) = \frac{r(\omega+\frac{\pi 2q}{n\Delta t})^{-n} - r(\omega+\frac{\pi 2q}{n\Delta t})^{n}}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{p=0}^{n-1}\hat{\mathrm{G}}_p\, r(\omega+\frac{\pi 2p}{n\Delta t})^{n}}\hat{\mathrm{G}}_l - \delta_l^q \tag{2.32}$$

Le déterminant du système étant identique au cas d'une onde incidente dans la grille grossière, l'analycité de ces coefficients et donc la stabilité est démontrée de la même façon qu'à la section (2.2).

Chapitre 3

Cas de la bande raffinée : apparition d'instabilités

3.1 Position du problème

Pour beaucoup d'applications numériques, il est nécessaire de raffiner seulement une bande et non la moitié du domaine, par exemple afin de mieux tenir compte de la géométrie d'un objet diffractant tel qu'une antenne. Nous nous proposons ici, d'étudier le schéma proposé dans le cas d'une bande à l'aide d'une analyse par ondes planes inspirée du cas décrit précédemment.

On a représenté sur la figure 3.1 le schéma d'interpolation temporelle 1/4 dans le cas d'une bande. On peut déjà noter qu'il existe une largeur minimale de la bande permettant d'appliquer le schéma précédemment décrit. En effet, la bande doit comporter n points pour que les schémas d'interpolation soient valables, où n correspond au degré de raffinement. Dans l'exemple ci-dessus $n = 4$.

Un tel cas est un peu plus complexe à analyser. Le simple calcul des coefficients n'est plus suffisant. En effet, comme le montre la figure 3.2, l'onde transmise est ensuite réfléchie sur la deuxième interface, puis re-réflechie sur la première etc.

Il apparaît donc que lors d'une simulation, il peut y avoir un nombre de réflexions important, surtout si la bande n'est pas large. Ces réflexions multiples sont un phénomène nouveau par rapport au cas traité précédemment d'une interface simple. En fait, nous allons montrer par un calcul théorique que le critère de stabilité s'en trouve modifié. Ce calcul est basé sur la recherche de solutions de type somme d'ondes planes et s'inspire du schéma des réflexions (3.2). Afin de simplifier, nous allons considérer une grille fine intercalée entre une grille grossière et une condition

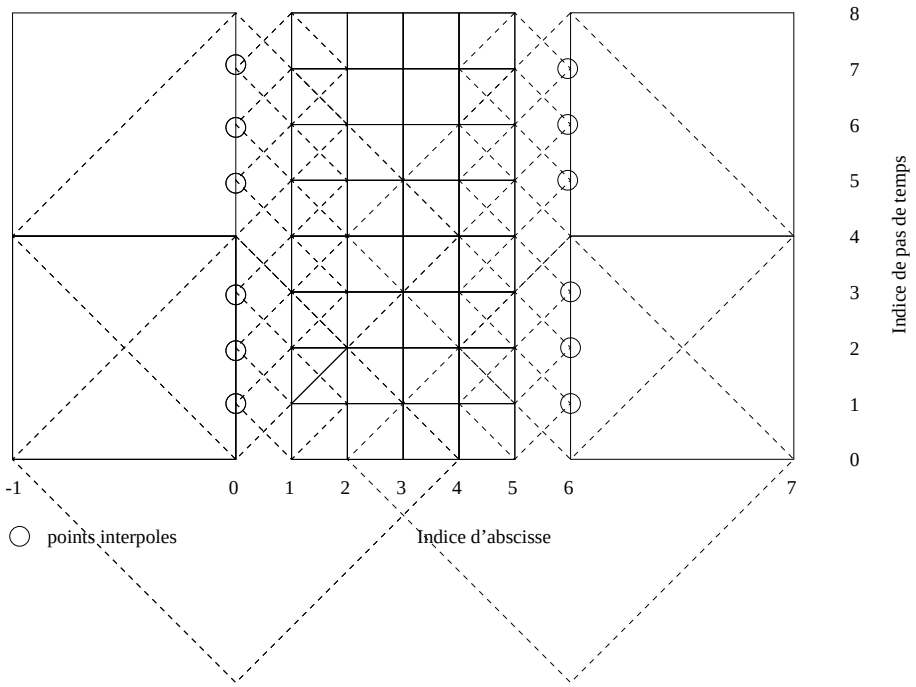
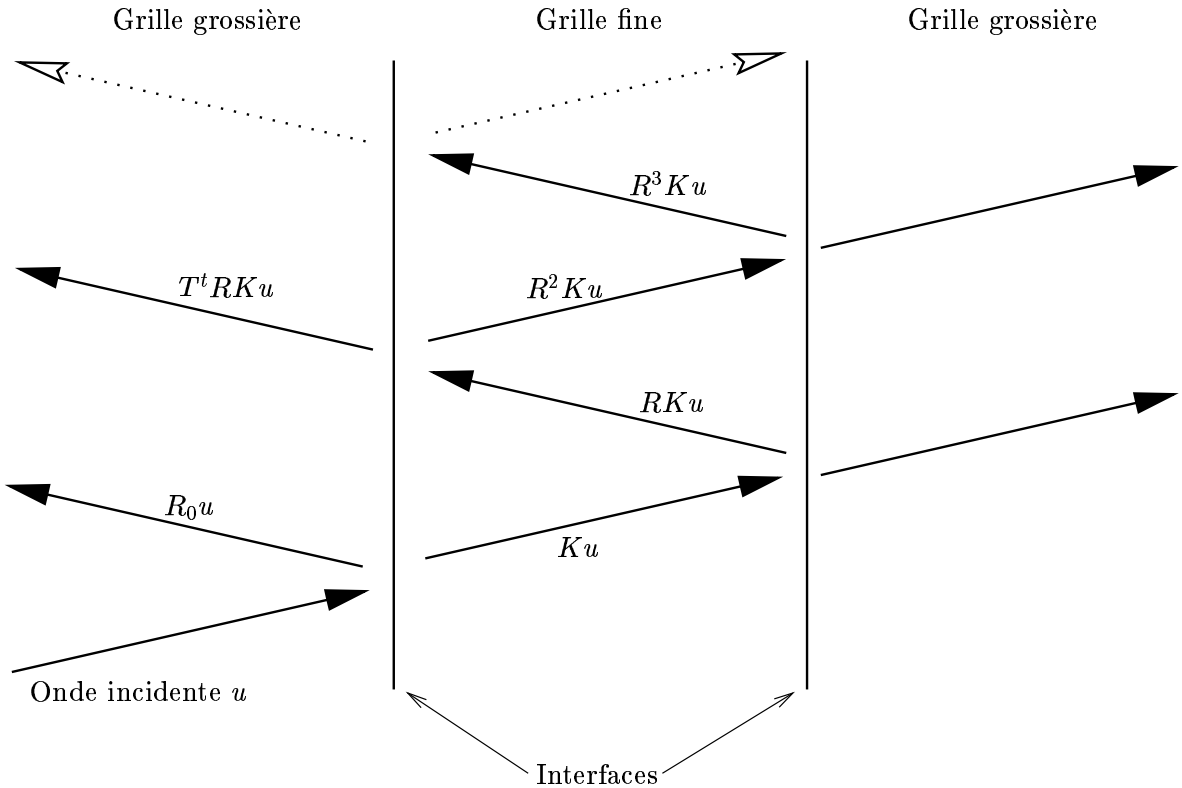


FIG. 3.1 – *Exemple de bande 1/4/1*

de Dirichlet comme indiqué sur la figure 3.3. Cette restriction facilite les calculs mais n'enlève rien à la généralité du résultat.

Les calculs qui vont suivre impliquent des quantités que nous avons déjà rencontrées dans le chapitre précédent. Afin de faciliter leur compréhension, il nous a semblé opportun de les résumer succintement dans le paragraphe qui va suivre.



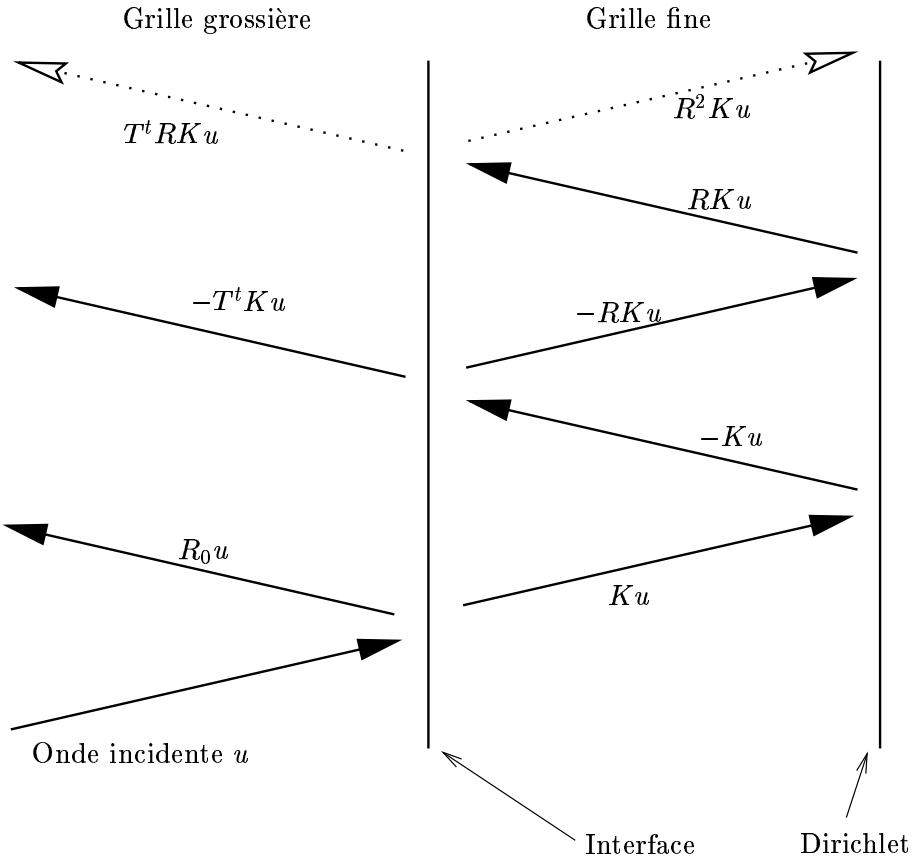
K : Vecteur des coefficients de transmission grossier - fin

R_0 : Coefficient de réflexion grossier - fin

T : Vecteur de transmission fin - grossier

R : Matrice de reflexion fin - grossier

FIG. 3.2 – *schéma de réflexions multiples dans une bande*



K : Vecteur des coefficients de transmission grossier - fin

R_0 : Coefficient de réflexion grossier - fin

T : Coefficient de transmission fin - grossier

R : Matrice de reflexion fin - grossier

FIG. 3.3 – *schéma de réflexions multiples dans une bande avec condition de Dirichlet*

3.2 Rappel des solutions sous forme d'ondes planes

Dans le précédent chapitre, nous avions démontré la stabilité et calculé les réflexions engendrées à l'interface par une méthode d'ondes planes d'un schéma de raffinement 1-n pour des ondes incidentes dans la grille grossière ou dans la grille fine. On distingue 2 cas. Dans le premier cas, nous avions considéré une onde plane incidente dans la grille grossière de pulsation $n\omega$. L'onde incidente s'écrit

$$\begin{array}{ll}(u_{inc})_{nj}^{nk} & = r(n\omega)^j \exp^{in\omega k\Delta t}. \\ & = \exp^{(ik_h(n\omega)\, j)} \exp^{in\omega k\Delta t}\end{array} \tag{3.1}$$

où $k_h(n\omega)$ le nombre d'onde vérifie la relation de dispersion

$$\frac{2}{h}\sin(\frac{k_h\, h}{2}) = \frac{2}{\Delta t}\sin(\frac{\omega\Delta t}{2}) \tag{3.2}$$

et $r(n\omega) = \exp^{(ik_h(n\omega))}$ est solution du polynome caractéristique

$$\left\{\begin{array}{l} r^2(\omega) - 2A(\omega)r(\omega) + 1 = 0 \\ \\ \text{avec } A(\omega) = 1 - 2\dfrac{h^2}{\Delta t^2}\sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2}). \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Cette onde incidente génère une onde réfléchie dans la grille grossière

$$U_{nj}^{nk} = R_0 r(n\omega)^{-j} \exp^{in\omega k\Delta t} \tag{3.4}$$

et n ondes transmises dans la grille fine

$$u_j^{nk+m} = \sum_{l=0}^{n-1} k_l r(\omega_l)^j z_l^m \exp^{ink\omega\Delta t} \tag{3.5}$$

où $z_l = \exp^{i(\frac{2l\pi}{n}+\omega\Delta t)}$.

Les coefficients R_0 et $(k_l)_{l=0,n-1}$ vérifient le système imposé par les conditions à l'interface

$$\left\{\begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} k_l z_l^m & = & H_m\,(1+R_0) \text{ pour } m = 0, n-1 \\ \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) k_l & = & r(n\omega) + r^{-1}(n\omega)\; R_0 \end{array}\right. \tag{3.6}$$

avec

$$H_m = \frac{n-m}{n} + \exp^{in\omega\Delta t}\,\frac{m}{n} \tag{3.7}$$

La résolution du système nous donne

$$\begin{cases} R_0 = \dfrac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l - r(n\omega)}{\dfrac{1}{r(n\omega)} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l} \\ k_l = \dfrac{1}{n}\Big(1 + \dfrac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l - r(n\omega)}{\dfrac{1}{r(n\omega)} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l}\Big)\,\hat{\mathrm{G}}_l \end{cases} \tag{3.8}$$

où on a posé

$$\hat{\mathrm{G}}_l = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} H_m \exp^{-i\frac{2lm\pi}{n}} \exp^{-im\omega\Delta t} = \frac{1}{n^2}\frac{\sin(\frac{n\omega\Delta t}{2})^2}{\sin(\frac{\omega\Delta t}{2} + \frac{\pi lm}{n})^2}$$

Dans le deuxième cas on considère une onde incidente dans la grille fine de pulsation $\omega_q = \omega + \frac{2q\pi}{n\Delta t}$

$$(u_{inc})_j^{nk+m} = r(\omega_q)^{-j} z_q^m \exp^{ink\omega\Delta t} \tag{3.9}$$

elle génère une onde transmise dans la grille grossière

$$(u_g)_{nj}^{nk} = t_q r(n\omega)^{-j} \exp^{ink\omega\Delta t} \tag{3.10}$$

et n ondes réfléchies dans la grille fine

$$(u_d^{ref})_j^{nk+m} = \sum_{l=0}^{n-1} R(l,q) r(\omega_l)^j z_l^m \exp^{ink\omega\Delta t} \tag{3.11}$$

Les coefficients $R(l,q)$ et t_q vérifient le système

$$\begin{cases} z_q^m + \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} R(l,q) z_l^m = t_q H_m \text{ pour } m = 0, n-1 \\ r(\omega + \dfrac{2q\pi}{n\Delta t})^n + \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} R(l,q) r(\omega + \dfrac{\pi 2l}{n\Delta t})^{-n} = t_q r(n\omega) \end{cases} \tag{3.12}$$

La résolution du système nous donne la transmission

$$t_q = \frac{r(\omega + \frac{2q\pi}{n\Delta t})^{-n} - r(\omega + \frac{2q\pi}{n\Delta t})^n}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{\mathrm{G}}_l r(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t})^n} \tag{3.13}$$

et la matrice de réflexion

$$R(l,q) = \frac{r(\omega + \frac{\pi 2q}{n\Delta t})^{-n} - r(\omega + \frac{\pi 2q}{n\Delta t})^n}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{p=0}^{n-1} \hat{\mathrm{G}}_p r(\omega + \frac{\pi 2p}{n\Delta t})^n} \hat{\mathrm{G}}_l - \delta_l^q \tag{3.14}$$

L'analycité des coefficients R_0, R, k_p et T pour $\Im(\omega) > 0$, nous avait permis de démontrer la stabilité dans le cas d'une seule interface, pour un milieu infini.

Le cas d'une condition de Dirichlet ou Neumann dans la grille fine ou d'une bande raffinée relève d'une analyse plus fine.

3.3 Analyse de la bande raffinée

3.3.1 Analyse par ondes planes, expression de la solution

Dans cette section nous calculons la solution ondes planes du schéma afin d'établir un critère de stabilité.

En plus des équations de raccord (2.3) et (2.5), la solution doit vérifier $u_J^n = 0$ où J est le nombre de points dans la couche fine. Afin de ré-interpréter la solution du système avec condition de Dirichlet comme une somme de réflexions multiples, écrivons la solution du système complet sous la forme de séries. Dans la grille grossière, on cherche la solution sous la forme

$$U_{nj}^{nk} = r(n\omega)^j + R_0 r(n\omega)^{-j} + \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} t_l \left(A^{t-1} K \right)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) r(n\omega)^{-j} \exp^{i\omega nk\Delta t} \tag{3.15}$$

et dans la grille fine

$$u_j^{nk+m} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \left(A^{t-1} K \right)_l \left(r(\omega_l)^j - r(\omega_l)^{2J-j} \right) z_l^m \exp^{i\omega nk\Delta t} \tag{3.16}$$

On a noté $K = \begin{pmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{pmatrix}$ et A est une matrice $n \times n$ à définir

Il est évident que $u_J^l = 0$, il nous reste donc à vérifier les conditions sur l'interface grille fine - grille grossière. Les conditions de raccords en $j = 0$ et $j = 1$, nous donne

$$\begin{cases} u_0^{nk+m} = U_0^{nk} H_m \\ u_n^{nk} = U_n^{nk} \end{cases} \tag{3.17}$$

où H_m est définit par (3.7) Réécrivons u_j^{nk+m} sous la forme

$$u_j^{nk+m} = \sum_{l=0}^{n-1} \left(k_l r(\omega_l)^j + \sum_{t=1}^{\infty} \left(A^t K \right)_l r(\omega_l)^j - \sum_{t=1}^{\infty} \left(A^{t-1} K \right)_l r(\omega_l)^{2J-j} \right) z_l^m \exp^{i\omega nk\Delta t}$$

Le système (3.6) nous permet alors d'éliminer les termes $\sum_{l=0}^{n-1} k_l r(\omega_l)^j$ et $r(n\omega)^j + R_0 r(n\omega)^{-j}$ dans le système (3.17). En posant $\Psi = A^{t-1} K$, l'égalité $u_0^{nk+m} = U_0^{nk} H_m$ revient alors à résoudre pour $m = 0, n-1$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n-1} (A\Psi)_l z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} (\Psi)_l r(\omega_l)^{2J} z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} H_m t_l (\Psi)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} A(l,p) \Psi_p z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} (\Psi)_l r(\omega_l)^{2J} z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} H_m t_l (\Psi)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) = 0$$

En interchangeant les noms d'indice p et l dans la double somme, l'équation devient

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} A(p,l) \Psi_l z_p^m - \sum_{l=0}^{n-1} (\Psi)_l r(\omega_l)^{2J} z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} H_m t_l (\Psi)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) = 0$$

puis en permutant les sommes sur l et p

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \Psi_l \sum_{p=0}^{n-1} A(p,l) z_p^m - \sum_{l=0}^{n-1} (\Psi)_l r(\omega_l)^{2J} z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} H_m t_l (\Psi)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) = 0$$

ainsi on doit avoir

$$\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \Psi_l (-r(\omega_l)^{2J}) \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{A(p,l)}{-r(\omega_l)^{2J}} z_p^m + z_l^m - H_m t_l \right) = 0$$

Or si l'on choisit $A(p,l) = R(p,l)(-r(\omega_l)^{2J})$ les équations du système (3.12) nous montrent que $\forall l = 0, n-1$, $\forall m = 0, n-1$,

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{A(p,l)}{-r(\omega_l)^{2J}} z_p^m + z_l^m - H_m t_l = 0 \tag{3.18}$$

Ainsi ce choix de A permet la vérification des conditions de raccord en $j = 0$. De la même façon, On montre que la condition de raccord en j=1, revient à vérifier

$$\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \Psi_l(-r(\omega_l)^{2J}) \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{A(p,l)}{-r(\omega_l)^{2J}} r(\omega_l)^n + r(\omega_l)^{-n} - t_l r(n\omega)^{-1} \right) = 0$$

La dernière équation du système (3.12) nous montre que pour le même choix de A, $\forall l = 0, n-1$,

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{A(p,l)}{-r(\omega_l)^{2J}} r(\omega_l)^n + r(\omega_l)^{-n} - t_l r(n\omega)^{-1} = 0$$

On a donc trouvé toute une famille de solution particulière qui vérifient les équations du schéma de la bande. Ces solutions interprétent comme des sommes infinie de réflexions. Dans la grille grossière la solution s'écrit alors

$$U_{nj}^{nk} = r(n\omega)^j + R_0 r(n\omega)^{-j} + \sum_{l=0}^{n-1} \left(t_l \left(\left(\sum_{t=1}^{\infty} A^{t-1} \right) K \right)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) r(n\omega)^{-j} \exp^{i\omega nk\Delta t} \tag{3.19}$$

et dans la grille fine

$$u_j^{nk+m} = \sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \left(A^{t-1} \right) K \right)_l \left(r(\omega_l)^j - r(\omega_l)^{2J-j} \right) z_l^m \exp^{i\omega nk\Delta t} \tag{3.20}$$

Ce calcul de solutions ondes planes va nous permettre à l'aide de l'analyse de stabilité d'une interface seule (cf. 1.2) d'analyser celle de notre schéma dans le cas de la bande.

3.3.2 Interprétation de la solution ondes planes en terme de stabilité

On peut réinterpréter ces solutions en ondes planes pour ω complexe avec $\Im(\omega)$ suffisament grande comme les coefficients de la transformée de Fourier-Laplace.

Ainsi on peut calculer la solution générale (notée v_g à gauche et v_d à droite) correspondant à une onde incidente de transformée de Laplace $g(\omega\Delta t)$ en appliquant la transformée de Laplace inverse

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_g)_j = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{\Delta t}+iA}^{\frac{\pi}{\Delta t}+iA} U_{nj}(\omega\Delta t) g(\omega\Delta t) d\omega \\ (v_d)_j = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{\Delta t}+iA}^{\frac{\pi}{\Delta t}+iA} u_j(\omega\Delta t) g(\omega\Delta t) d\omega \end{array} \right. \tag{3.21}$$

On a montré dans le cas d'une seule interface (cf. rapport 1), que l'analycité des solutions ondes planes dans le demi-plan ($\Im(\omega) > 0$) nous permettait de calculer la transformée inverse de Fourier Laplace sur l'axe réel par une déformation de contour et donc de nous assurer de la stabilité du schéma. L'analycité des coefficients R_0, R, k_p et T pour $\Im(\omega) > 0$, étant démontrée, il reste à nous occuper de la série.

On remarque que la solution telle que donnée par (3.19) et (3.20) fait intervenir la matrice

$$M^J = \sum_{t=1}^{\infty} \left(A^{t-1} \right) (\omega) \tag{3.22}$$

où A est le produit de la matrice de réflexion définie en (3.14) par la matrice de propagation P définie par

$$P = \begin{pmatrix} -r(\omega)^{2J} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -r(\omega + \frac{2l\pi}{n\Delta t})^{2J} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -r(\omega + \frac{2(n-1)\pi}{n\Delta t})^{2J} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Lorsque ω a une partie imaginaire grande et positive, il est facile de vérifier que $\|A(\omega)\| < 1$ (lorsque $\Im(\omega) \to +\infty$, on a $A(\omega) \to 0$). La série définie en (3.22) est alors normalement convergente et on peut substituer

$$M^J(\omega) = (I - A)^{-1} (\omega) \tag{3.24}$$

Lorsque l'on va déformer le contour pour se ramener à l'axe réel dans la formule de Laplace inverse, on peut tomber sur un éventuel ω du demi plan complexe $\Im(\omega) > 0$ tel que

$$\exists v \in \mathbb{C}^n / (I - A)v = 0$$

Dans ce cas, la formule des résidus va faire apparaître en plus de l'intégrale sur l'axe réel un terme de la forme $(\exp^{\Im(\omega_0)\Delta t})^k$ qui explose exponentiellement avec k. Dans ce cas on aura instabilité forte du schéma.

Notre étude de stabilité se réduit donc à chercher $v \in \mathbb{C}^n/(I-A)v = 0$, soit $v \in \mathbb{C}^n/(I-RP)v = 0$ autrement dit nous devons donc résoudre un problème aux valeurs propres.

Posons $\alpha_p = \hat{\mathrm{G}}_p$, $a_l = r(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t})^{-n} - r(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t})^n$, et $K = r(n\omega) - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{\mathrm{G}}_l r(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t})^{-n}$, on a alors

$$R = \frac{1}{K}B - I$$

où

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_0 a_0 & \dots & \alpha_0 a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} a_0 & \dots & \alpha_{n-1} a_{n-1} \end{pmatrix}$$

B possède une valeur propre nulle multiple (n-1 fois) associée aux vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} \prod_{i \neq 0} a_i \\ \dots \\ \prod_{i \neq m} a_i \exp^{\frac{iml\pi}{n}} \\ \dots \\ \prod_{i \neq n-1} a_i \exp^{\frac{i(n-1)l\pi}{n}} \end{pmatrix} \text{ pour } l = 1, n-1$$

La dernière valeur propre de B est $\sum_{l=0}^{n-1} a_l \alpha_l$ associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} \hat{\mathrm{G}}_0 \\ \dots \\ \hat{\mathrm{G}}_p \\ \dots \\ \hat{\mathrm{G}}_{n-1} \end{pmatrix}$

Calculons les valeurs propres de $I - RP$. On a

$$\begin{aligned} I - RP &= I - P(\tfrac{1}{K}B - I) \\ &= (I+P)(I - (I+P)^{-1}P\tfrac{1}{K}B) \end{aligned}$$

Si $\Im(\omega\Delta t) > 0$, $|r(\omega + \frac{2il\pi}{n\Delta t})| < 1$, donc $I + P$ est inversible Il nous reste donc à résoudre

$$KX = (I+P)^{-1}PBX$$

Posons $\Lambda = (I+P)^{-1}P$. C'est une matrice diagonale ce qui simplifie le calcul des valeurs propres de ΛB.

$$\Lambda B = \begin{pmatrix} \alpha_0\lambda_0 a_o & \dots & \alpha_0\lambda_0 a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}a_0 & \dots & \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}a_{n-1} \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres 0 et $\sum_0^{n-1} \alpha_l\lambda_l a_l$. Les seules pulsations susceptibles de rendre $I - RP$ non inversible pour $\Im(\omega) > 0$ annulent donc $\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l\lambda_l a_l - K$

Les pôles de la transformée de Fourier Laplace de la solution vérifient ainsi dans le demi plan $\Im(\omega) > 0$

$$P(\omega\Delta t, J, \alpha) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\hat{\mathrm{G}}_p \left(r(\omega + \frac{\pi 2p}{n\Delta t})^{-n} - r(\omega + \frac{\pi 2p}{n\Delta t})^{n} \right) \dfrac{-r(\omega + \dfrac{2p\pi}{n\Delta t})^{2J}}{1 - r(\omega + \dfrac{2p\pi}{n\Delta t})^{2J}}}{r(n\omega) - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{\mathrm{G}}_l r(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t})^{-n}} - 1 = 0 \tag{3.25}$$

On voit donc que dans le cas d'une bande, une relation supplémentaire intervient pour l'étude de la stabilité. C'est cette relation qui fait toute la différence avec le cas stable d'une interface seule.

L'équation (3.25) est très difficile à résoudre théoriquement, nous allons donc tenter de caractériser l'éventuel pôle par des résolution numériques.

La détection systématique de pôles s'est avérée délicate à cause des caractéristiques de P : même avec un point de départ proche de la solution, la recherche de l'annulation de P par une méthode de Newton est très difficile, le bassin d'attraction étant très petit. Une méthode de minimisation de $|P|^2$ s'est également avérée très souvent déficiente à cause de minima locaux très près de la solution.

La solution la plus adaptée a été de représenter les courbes de niveaux de $\Re(P)$ et $\Im(P)$ en fonction de ω sur des grilles très fines.

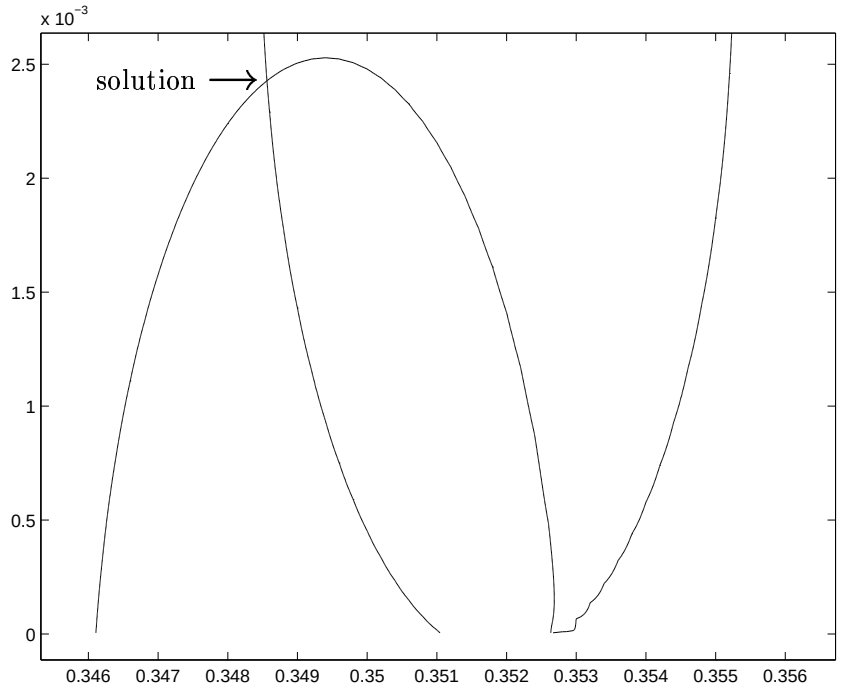


FIG. 3.4 – *Courbes de niveaux de* $\Re(P)$ *et* $\Im(P)$ *en fonction de* $\omega\Delta t$

On a représenté sur la figure 3.4, les courbes de niveaux de $\Re(P)$ et $\Im(P)$ dans le cas du schéma 1-4, pour un nombre de Courant $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et une bande de 5 points. Une intersection de ces 2 courbes est remarquée au point $\omega\Delta t = (0.349, 2.43\,10^{-3})$, ce qui signifie une annulation de P et donc un pôle pour la solution. On peut cependant noter que la partie imaginaire de ce pôle est très petite, il se trouve donc très près de l'axe réel, cela montre qu'il faudra un grand nombre de pas de temps pour pouvoir déceler l'instabilité.

Cette méthode nous a donc permis de mettre en évidence un pôle. Ce qui implique donc l'instabilité forte du schéma. Ce résultat est à comparer avec l'expérience numérique présentée figure (3.8). L'expérience numérique a également donné une instabilité. La partie réelle de ce pôle correspond bien à la pulsation de l'onde

numérique trouvée lors de l'explosion. On retrouve également numériquement la partie imaginaire du pôle comme étant la pente de la droite $y = log(|u(t)|)$.

La preuve de l'instabilité dans ce cas ayant été faite, on peut vouloir chercher une condition C.F.L. qui apporterait la stabilité. Nous nous sommes donc intéressés à l'évolution du pôle en fonction du nombre de Courant.

On représente figure 3.5 le déplacement du pôle du schéma 1-4 avec le nombre de Courant α pour une longueur de bande de 5. Les flèches indiquent le sens de décroissance de α. Le pôle a une partie imaginaire positive pour $\alpha \in [0.42; 0.45] \bigcup [0.47; 0.796] \bigcup [0.8; 0.87]$. Ce fractionnement du segment $[0; 1]$ est assez surprenant.

Cependant cette figure nous montre qu'il existe une plage de nombres de Courant pour lesquels on a stabilité du schéma.

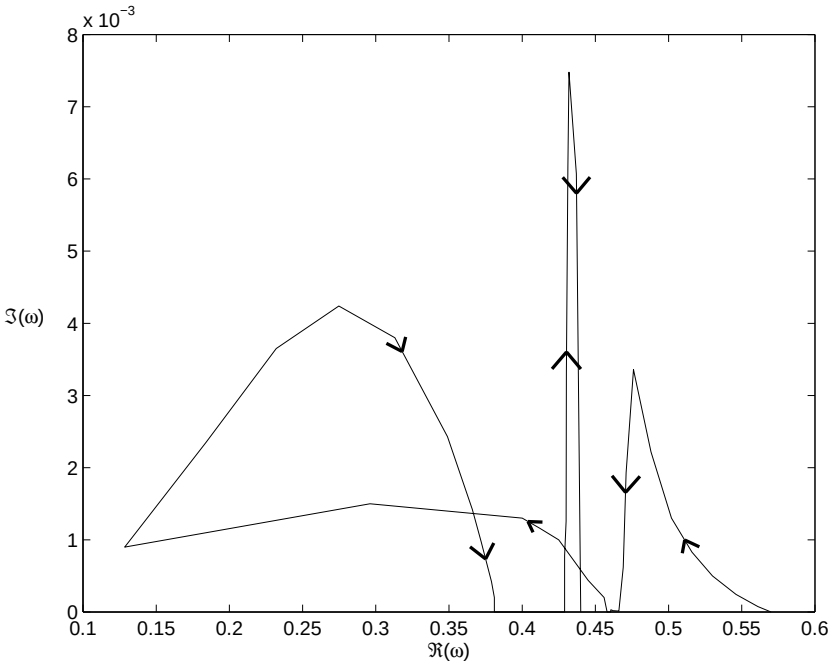


FIG. 3.5 – *Évolution du pôle dans le demi-plan complexe ($\Im\omega > 0$) lorsque α diminue*

Cette étude nous a donc enfin permis d'apporter une réponse sur la stabilité des schémas d'interpolation temporelle dans le cas d'une bande. Contrairement aux cas d'interface simple qui sont inconditionnellement stables, le schéma appliqué sur une bande raffinée peut être instable. Une méthode nous permet maintenant de

déterminer s'il y aura explosion du schéma. Toutefois, cette méthode n'étant pour le moment pas automatisable, si l'on veut trouver des conditions de stabilité reliant par exemple, le nombre de courant à la longueur de la bande il faudra recourir a des experiences numériques.

3.4 Résultats numériques

Dans cette partie, nous nous attacherons à étudier l'instabilité du schéma. En effet, Les résultats de précision et d'adéquation du schéma trouvés pour une interface simple sont les mêmes dans le cas d'une bande raffinée. Pour des temps de simulation pas trop longs, les réflexions aux interfaces sont imperceptibles. L'élément nouveau est véritablement l'instabilité. En effet, pour des temps de simulation plus longs, on commence à déceler des phénomènes d'instabilité. L'instabilité rencontrée dépend alors du nombre de points dans la bande et du nombre de Courant $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. On cherchera dans la deuxième section à caractériser l'instabilité

3.4.1 Mise en évidence de l'instabilité

On présente ici des exemples de simulation pour des raffinements 1-2 1-3 et 1-4, pour 2 nombres de Courant différents. La longueur de la bande est égale à 5. Sur la figure (3.6) c'est à dire pour un nombre de Courant de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, le schéma 1-4 explose, alors que les deux autres n'explosent pas. Sur la figure (3.7), c'est à dire pour un nombre de Courant de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ aucun schéma n'explose.

L'instabilité dépend donc du degré de raffinement choisi ainsi que du nombre de Courant. Nous verrons qu'elle dépend également de la largeur de la bande.

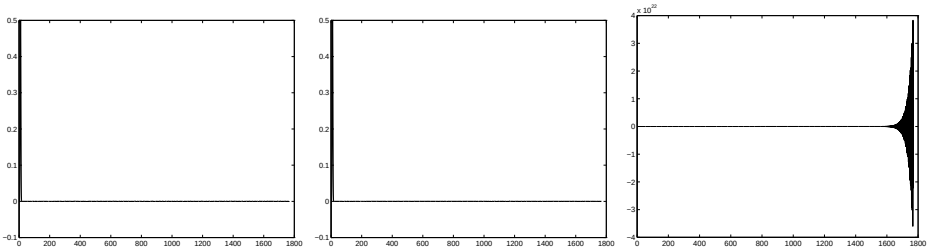


FIG. 3.6 – *Résultats de simulation de bandes pour les schémas 1/2 (à gauche) 1/3 (au milieu) et 1/4 (à droite) pour un nombre de Courant de* $\frac{1}{\sqrt{2}}$

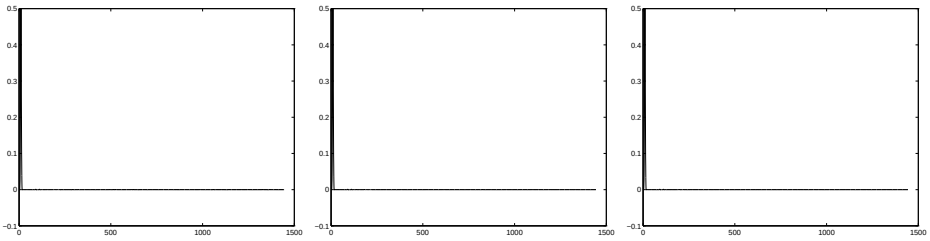


FIG. 3.7 – *Résultats de simulation de bandes pour les schémas 1/2 (à gauche) 1/3 (au milieu) et 1/4 (à droite) pour un nombre de Courant de* $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3.4.2 Caractérisation de l'instabilité

Afin de valider l'étude théorique de stabilité, on présente figure 3.8 une simulation du schéma 1-4 pour un temps long (200000 pas de temps grossier) avec une bande raffinée de 5 pas d'espace. Le nombre de Courant $\frac{\Delta t}{dx}$ est de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. La solution explose en 3500 pas de temps. Nous avons simulé sur un très grand nombre de pas de temps afin de mieux détecter la fréquence qui explose. La transformée de Fourier de la solution nous donne une pulsation d'explosion de $\frac{0.349}{\Delta t}$ qui est la partie réelle du pôle détecté dans l'étude théorique. Afin de retrouver la partie imaginaire du pôle, on représente également le log du module de la solution en fonction du pas de temps. La droite tracée nous montre le caractère exponentiel de l'explosion. La pente de cette droite ($2.42\,10^{-3}$) est égale à la partie imaginaire du pôle détecté.

L'instabilité semblant dépendre de la l'épaisseur de la bande, on a cherché à voir si pour chaque longueur de bande, il n'existait pas une condition C.F.L. Pour cela, pour chaque longueur de bande on recherche un nombre de Courant limite par dichotomie. On a représenté figure 3.9 les résultats obtenus.

A la vue de ces résultats, il semblerait donc qu'il n'y ait pas réellement un nombre de Courant limite mais plutôt une bande limite. Ceci peut s'expliquer grâce à la figure 3.5. Le fait que le pôle ne reste pas constamment dans le plan ($\Im(\omega) > 0$) ne favorise pas une recherche de limite par dichotomie. Toutefois il existe toujours des valeurs de α pour lesquels on est sûr de la stabilité. Malgré tout cette condition devient assez contraignante dans le cas du schéma 1-4, et laisse présager des nombres de Courant très petit pour des dimensions supérieures et donc de la dispersion ainsi que des temps de calcul plus longs.

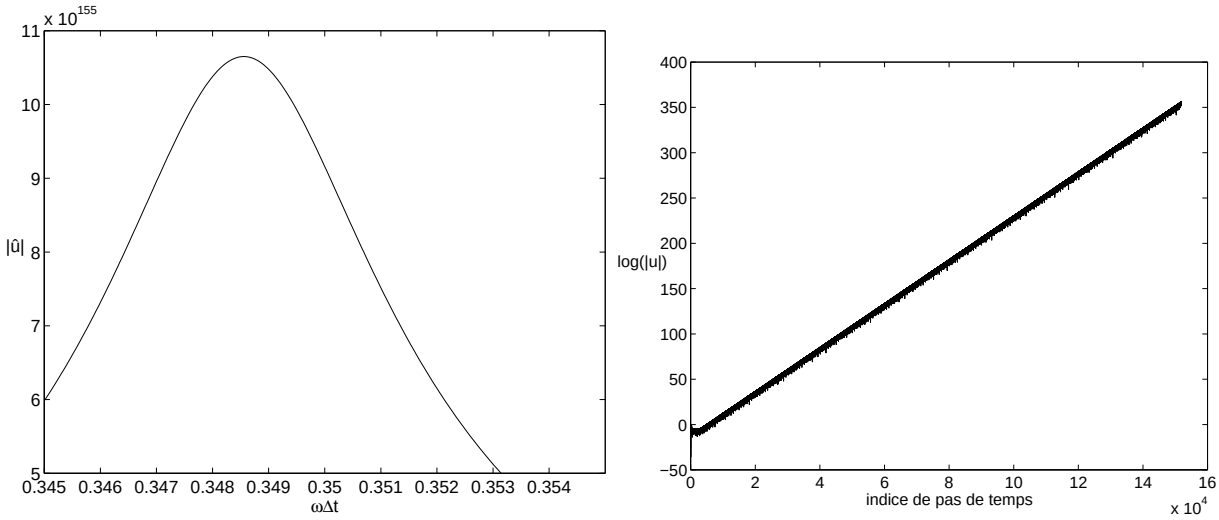


FIG. 3.8 – *Résultats de Simulation du schéma 1-4 pour une bande longueur 5 et un nombre de Courant de* $\frac{1}{\sqrt{2}}$. *A gauche un zoom de la transformée de Fourier, à droite le* log *de la valeur absolue ainsi que la droite de régression*

Ces expériences numériques nous ont permis de valider la caractérisation de l'instabilité mais également de répondre aux questions qui n'avaient pu être résolues théoriquement à propos de l'existence d'une condition C.F.L.

Cette étude nous a donc permis d'analyser le schéma d'interpolation temporelle. Elle fait apparaître qu'il peut être instable et nous incite donc à la recherche d'autres schémas qui seraient stables.

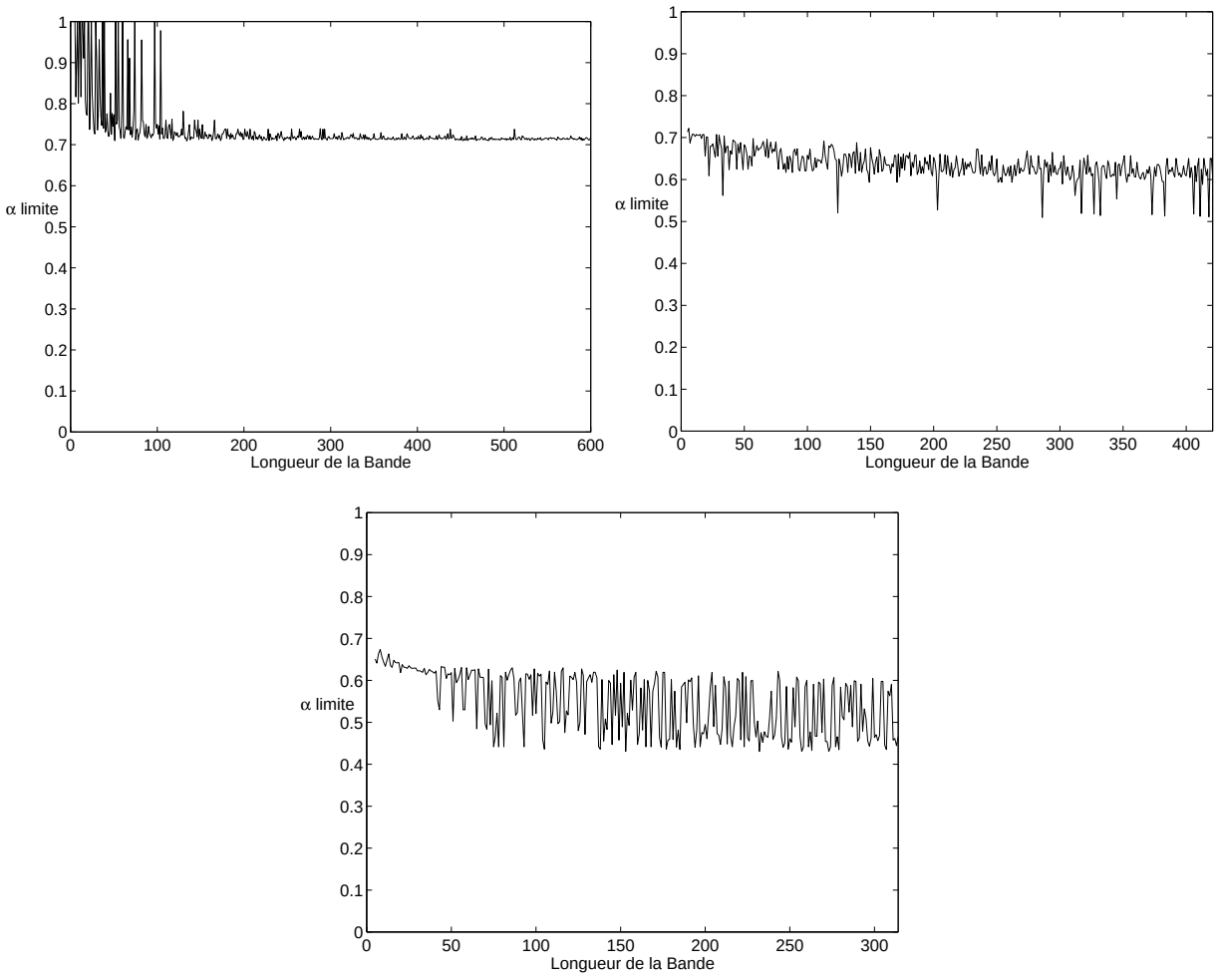


FIG. 3.9 – *Conditions de C.F.L. numériques pour les schémas 1-2 1-3 1-4*

Chapitre 4

Extension du schéma aux équations de Maxwell

Nous avons présenté l'étude de stabilité d'un schéma d'interpolation temporelle pour l'équation des ondes. La même étude peut être faite pour d'autres choix d'interpolation ainsi que pour des schémas de raffinement pour les équations de Maxwell. Mais notre sentiment est que ce type de schéma conduit bien souvent à une instabilité. Haro sur les schémas !!! On présente néanmoins, quelques exemples de schémas possibles pour les équations de Maxwell, ainsi qu'une extension à 2 dimensions. L'analyse théorique de ces schémas n'a pas été faite mais dans tous les cas, l'instabilité a été constatée numériquement.

4.1 Cas 1D

On présente ici, diverses propositions de schémas afin d'appliquer le schéma d'interpolation aux équations de Maxwell .

On rappelle que les équations de Maxwell en 1D s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad x \in \mathbf{R} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad x \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases} \tag{4.1}$$

Dans chaque cas présentés ci-dessous, on résoud les équations de Maxwell, en appliquant le schéma de Yee dans 2 grilles de raffinement différent. La grille fine est localisée en $x > 0$, la grossière pour $x \leq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{u_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - u_{j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \dfrac{v_{j+1}^{k} - v_{j}^{k}}{h} = 0 \\ \dfrac{v_{j}^{k+1} - v_{j}^{k}}{\Delta t} - \dfrac{u_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Il reste ensuite à trouver les équations de raccords entre les grilles. On choisit de raccorder les grilles sur v. On présente ici trois types de raccord retenu, le premier concerne un rapport de raffinement de 3, mais peut s'étendre a tout raffinement de rapport impair. Les deux suivants concernent un rapport de raffinement de 2.

4.1.1 Un schéma de raffinement 1-3

Ce schéma possède l'avantage de ne pas voir se décaler les valeurs de u entre les grilles fines et grossières

En j=0, pour le calcul de v on va simplement prendre le point de la grille fine nécessaire au schéma de Yee sur la grille grossière, l'équation devient alors

$$\frac{(v_g)_{3j}^{3(k+1)} - (v_g)_{3j}^{3k}}{\Delta t} - \frac{(u_d)_{3(j+\frac{1}{2})}^{3(k+\frac{1}{2})} - (u_g)_{3(j-\frac{1}{2})}^{3(k+\frac{1}{2})}}{h} = 0 \qquad \text{pour } j = 0. \tag{4.3}$$

Pour le calcul de u l'approximation dépendra de l'itération en temps car les éléments de la grille grossière ne sont calculés qu'une fois sur trois. Ainsi pour le

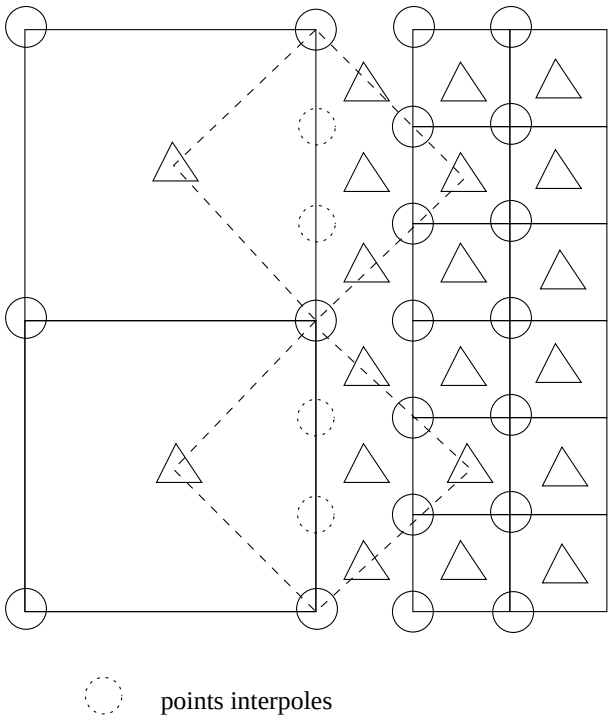


FIG. 4.1 – *Schéma de l'interpolation à l'interface pour un raffinement triple*

calcul de $(u_d)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{1}{2}}$ on a

$$\frac{(u_d)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{1}{2}} - (u_d)_{j+\frac{1}{2}}^{3k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \frac{(v_d)_{j+1}^{3k} - (v_g)_j^{3k}}{h} = 0 \qquad \text{pour } j = 0. \tag{4.4}$$

Pour le calcul de $(u_d)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{3}{2}}$ on approche $(v_g)_j^{3k+1} \approx \frac{1}{3}(2(v_g)_j^{3k} + (v_g)_j^{3(k+1)})$ et on obtient

$$\frac{(u_d)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{3}{2}} - (u_d)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \frac{(v_d)_{j+1}^{3k+1} - \frac{1}{3}(2(v_g)_j^{3k} + (v_g)_j^{3(k+1)})}{h} = 0 \qquad \text{pour } j = 0. \tag{4.5}$$

Et pour le calcul de $(u_d)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{5}{2}}$ on approche $(v_g)_j^{3k+2} \approx \frac{1}{3}((v_g)_j^{3k} + 2(v_g)_j^{3(k+1)})$ et on obtient

$$\frac{(u_d)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{5}{2}} - (u_d)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{3}{2}}}{\Delta t} - \frac{(v_d)_{j+1}^{3k+2} - \frac{1}{3}((v_g)_j^{3k} + 2(v_g)_j^{3(k+1)})}{h} = 0 \qquad \text{pour } j = 0. \tag{4.6}$$

Pour ce schéma, on obtient des résultats très proches de ceux décrits pour l'équation des ondes. En effet, la stabilité pour une interface seule peut être mise en évidence de la même manière, mais on se heurte à une forte instabilité pour une bande raffinée. Cette instabilité est d'ailleurs de plus en plus forte quand le raffinement augmente.

4.1.2 Un schéma de raffinement 1-2 implicite

Lorsque le raffinement est pair, on ne peut pas adapter le schéma précédent. Une idée est alors d'introduire des valeurs supplémentaires, et d'avoir ainsi aux points voulus ($j = 1$) des valeurs pour u et v à la fois.

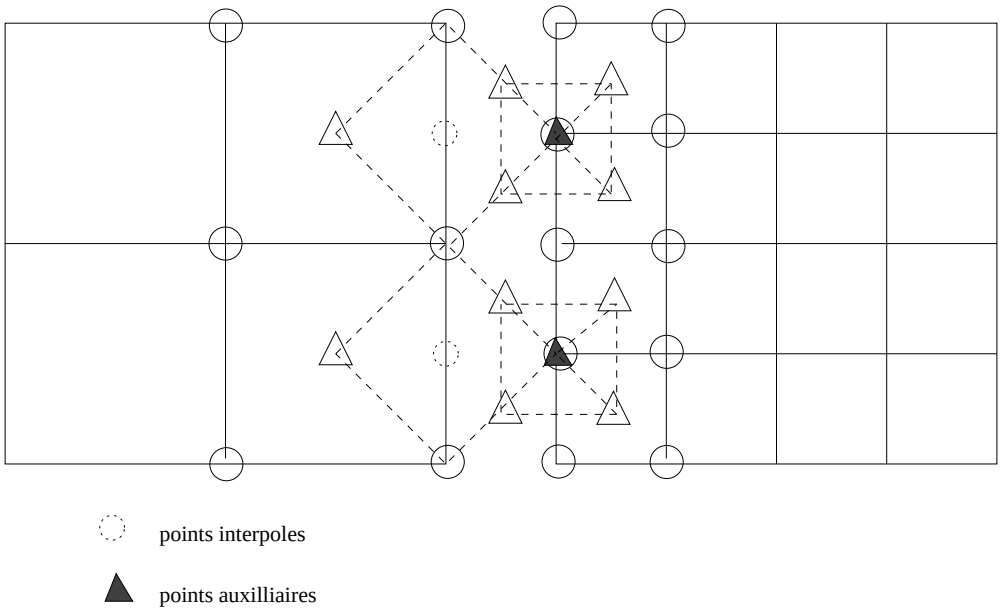


FIG. 4.2 – *Schéma d'interpolation implicite à l'interface pour le raffinement 1-2*

Dans ce cas, on écrit alors à l'interface

$$\begin{cases} \dfrac{(v_g)_0^{2(k+1)} - (v_g)_0^{3k}}{\Delta t} - \dfrac{(u_d)_1^{*,2k+1} - (u_g)_{-1}^{2k+1}}{h} = 0 \\ (u_d)_1^{*,2k+1} = \dfrac{1}{4}((u_d)_{\frac{1}{2}}^{2k+\frac{1}{2}} + (u_d)_{\frac{1}{2}}^{2k+\frac{3}{2}} + (u_d)_{\frac{3}{2}}^{2k+\frac{1}{2}} + (u_d)_{\frac{3}{2}}^{2k+\frac{3}{2}}) \\ (v_g)_0^{2k+1} = \dfrac{(v_g)_0^{2k+2} + (v_g)_0^{2k}}{2} \end{cases} \tag{4.7}$$

Le schéma est alors implicite, et il faut résoudre un système linéaire 3x3.

Cependant, on obtient des résultats de stabilités comparables aux schémas précédents, si ce n'est que, dans le cas d'une bande raffinée, la condition de stabilité C.F.L semble un peu meilleure que précédemment.

4.1.3 Comment se ramener à l'équation des Ondes

Un autre schéma de raffinement 1-2 offre la particularité d'être rigoureusement équivalent au schéma de l'équation des ondes, au moins pour l'un des champs. Il suffit de faire comme dans le schéma précédent, mais en calculant $(u_d)_1^{*,2k+1}$ comme dans la grille grossière.

Le schéma à l'interface devient donc

$$\begin{cases} \dfrac{(v_g)_0^{2(k+1)} - (v_g)_0^{3k}}{\Delta t} - \dfrac{(u_d)_1^{*,2k+1} - (u_g)_{-1}^{2k+1}}{h} = 0 \\ \dfrac{(u_d)_1^{*,2k+1} - (u_d)_1^{*,2k-1}}{\Delta t} - \dfrac{(v_d)_2^{2k} - (v_d)_0^{2k}}{h} = 0 \\ (v_g)_0^{2k+1} = \dfrac{(v_g)_0^{2k+2} + (v_g)_0^{2k}}{2} \end{cases} \tag{4.8}$$

Il est facile de vérifier que v vérifie alors le schéma de l'équation des ondes. Toutes les études déjà faites sont alors valables.

Finalement, tous ces schémas ont les mêmes propriétés de stabilité, et ne sont donc pas satisfaisants. On pourrait sans doute démontrer l'instabilité de la même façon que dans le schéma pour l'équation des ondes.

Nous voyons dans la section suivante que le même genre de résultat est rencontré en 2 dimensions.

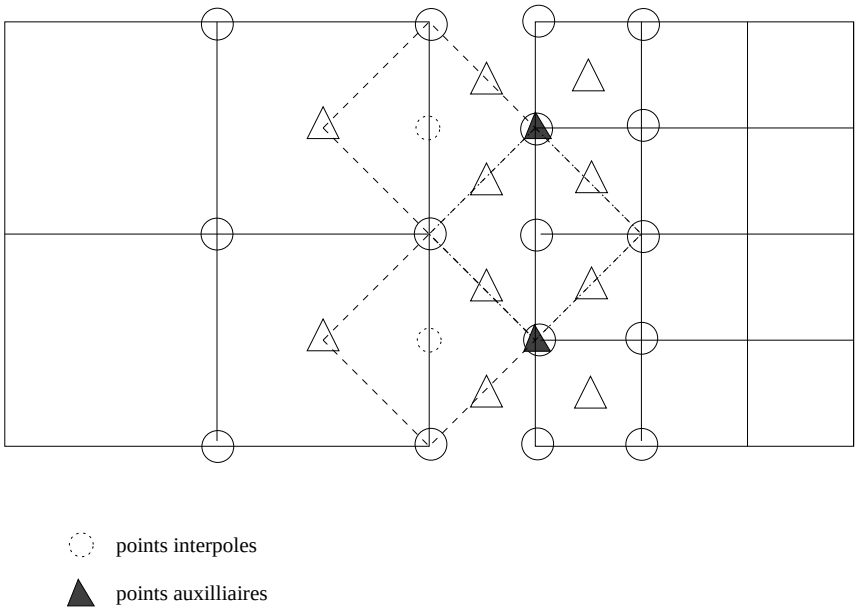


FIG. 4.3 – *Schéma d'interpolation explicite à l'interface pour le schéma 1-2*

4.2 Extension du schéma au cas 2D

Dans cette section, nous tentons d'étendre la méthode décrite en 4.1.1 en s'inspirant de méthodes rencontrées dans la littérature, notamment par Chevalier [3], afin de résoudre les équations de maxwell en 2 dimensions avec le schéma de Yee. On choisit d'exposer la méthode pour une interface simple verticale située en $x = 0$ mais elle s'étend très facilement au cas d'un carré raffiné. On a également choisit la même discrétisation en x et en y.

On rappelle que le schéma de Yee peut s'écrire

$$\begin{cases} \dfrac{H^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \dfrac{(E_X)^n_{i+\frac{1}{2},j+1} - (E_X)^n_{i+\frac{1}{2},j}}{h} + \dfrac{(E_Y)^n_{i+1,j+\frac{1}{2}} - (E_Y)^n_{i,j+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \\ \dfrac{(E_X)^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} - (E_X)^n_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t} - \dfrac{H^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - H^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = 0 \\ \dfrac{(E_Y)^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} - (E_Y)^n_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \dfrac{H^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - H^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

On applique ce schéma dans chacune des 2 grilles, reste ensuite à définir les conditions de raccord.

Une difficulté dans ce raccord provient du fait que les champs ne sont pas calculés aux mêmes points d'espace. De plus H est calculé aux pas de temps $n+\frac{1}{2}$ alors que E_X et E_Y le sont aux temps n. Chevalier préconise de prendre une grille fine avec une discrétisation 3 fois plus fine que la grille grossière, ceci afin de pouvoir calculer les champs E et H aux mêmes instants dans la grille grossière et dans la grille fine. En effet un raffinement 1-2 verrait un décalage des champs E_X E_Y et H entre les 2 grilles. Grâce à ce choix on peut trouver des points de la grille fine qui sont également, par extension, des points de la grille grossière. Nous nous intéresserons donc à un raffinement 1-3. Nous choisirons également de placer l'interface sur des noeuds Électrique (E_X pour une interface horizontale où E_Y pour une interface verticale).

On représente sur la figure (4.4) une projection de l'interface spatio-temporelle dans le plan de l'espace dans le cas d'une interface verticale. Les gros triangles représentent H sur la grille grossière, les petits sur la grille fine. Les flèches verticales représentent E_Y sur la grille fine et sur la grille grossière (en gras pour cette dernière). Les flèches horizontales correspondent aux champs E_X.

On a entouré de flèches les champs E_Y qui sont calculés aux pas de temps n à l'aide d'interpolations spatiales entre les 2 champs E_Y grossier qui les encadrent.

Sur la figure (4.5), On représente une projection de l'interface spatio-temporelle dans le plan (x,t). Les carrés représentent les champs E (E_X où E_Y), les triangles les champs H. Les petits éléments représentent les valeurs sur la grille fine, les gros représentent les valeurs de la grille grossière.

On suppose connues les valeurs jusqu'à l'itération n (coloriés en noir), on présente alors la méthode pour calculer les temps suivants. De manière à faciliter les calculs nous avons choisi une méthode implicite.

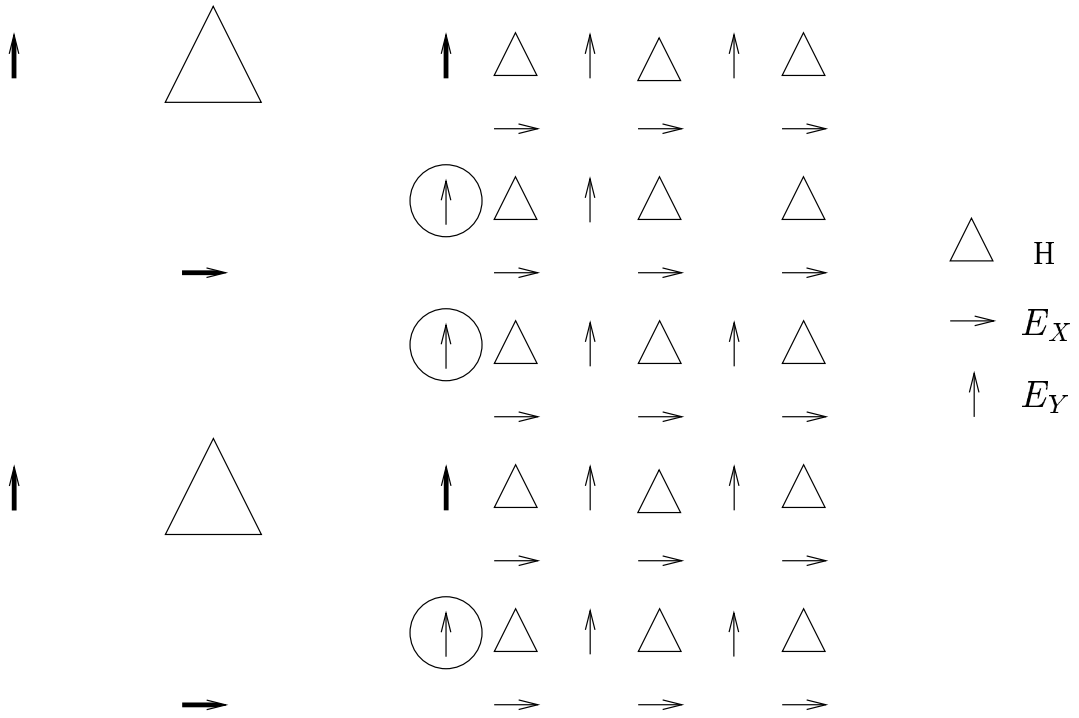


FIG. 4.4 – *interface des deux grilles, en abscisse x ordonnée y*

On calcule les points 1, 2 et 3 à l'aide du schéma de Yee sur la grille fine. On peut alors calculer les points 4 et 5 à l'aide du schéma de Yee sur la grille grossière. Pour le calcul du point 4 se trouvant à l'interface on utilise le point 3 comme étant un point de la grille grossière. On peut alors calculer les points 6 par interpolation temporelle. Maintenant, On peut calculer les points 7, 8, 9 et 10 en appliquant à nouveau le schéma de Yee dans la grille fine.

Ce schéma a été implémenté dans le cas d'un carré raffiné dans une grille grossière. Du point de vue qualitatif, l'interface n'a qu'une influence quasiment imperceptible sur la solution. Malheureusement, si on simule pour des temps beaucoup plus longs une instabilité apparaît au niveau de l'interface et se transmet ensuite dans tout le domaine.

Pour palier à cet inconvénient, Chevalier préconise un recouvrement de grilles. Il propose en effet de remplacer les valeurs sur les mailles voisines de l'interface par des moyennes pondérées entre la valeur en ces points en tant que grille grossière et

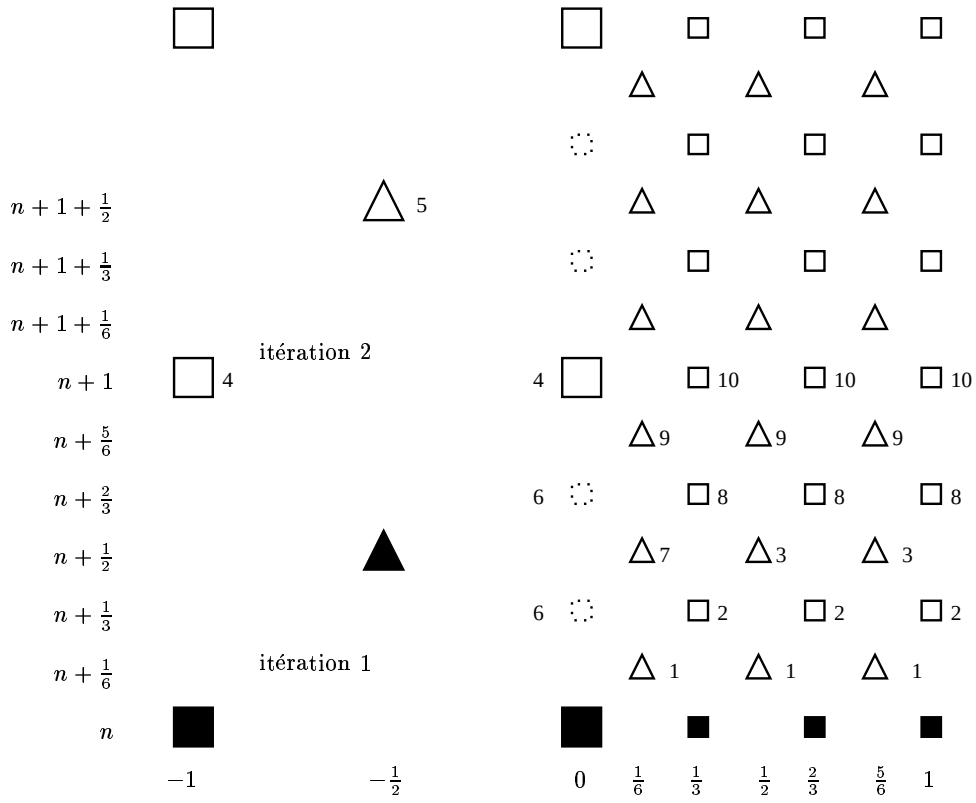


FIG. 4.5 – *interface des deux grilles, en abscisse l'espace en ordonnée le temps*

en tant que grille fine. Les coefficients de pondérations semblant être empiriques. Cette méthode n'a pas donné de résultats encourageant dans notre cas.

Une autre solution proposée est de modifier le schéma à l'intérieur de la grille fine en y ajoutant un terme dissipatif en σE de manière à éliminer les fréquences d'explosion. Cette solution s'est avérée inefficace dans notre cas. En effet le terme dissipatif nécessaire pour tuer l'instabilité s'est avéré trop important pour une bonne précision du schéma.

En conclusion, il semble que les classes de schéma rencontrées dans la littérature, ne soient pas réellement stable. Il est toutefois bon de noter que les instabilités sont détectées pour des temps de simulation très longs. Ceci explique sans doute pourquoi la stabilité de ces schémas semble observée dur les expériences numériques de la littérature. Dans notre cas, le code de simulation devant ensuite être utilisé

industriellement, il nous est nécessaire de trouver des schémas inconditionnellement stables. Il nous faut donc abandonner la classe de schémas précédemment décrite et nous orienter vers d'autre constructions de schéma.

Annexe A

Analyse des effets de dispersion

On se propose ici de donner une expression approchée de l'onde numérique propagée par le schéma classique à cinq points de l'équation des ondes. avec pour schéma de démarrage

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u_0(jh) \\ u_j^1 &= u_0(jh) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u_0((j+1)h) - 2u_0(jh) + u_0((j-1)h)}{h^2} \end{aligned} \tag{A.1}$$

On suppose donnée la transformée de Fourier des conditions initiales

$$\hat{u}_o(k) = h \sum_j u_0(jh)\, e^{ijkh} \tag{A.2}$$

Le lien entre conditions initiales et la donnée $\hat{u}_0$ est bien sûr

$$\begin{aligned} u_j^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k)\, e^{ikjh}\, dk \\ u_j^1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k) \left(1 - \frac{2\Delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\right) e^{ikjh}\, dk \end{aligned} \tag{A.3}$$

La solution du schéma est donnée sous forme de combinaison linéaire d'ondes planes

$$u_j^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_-(k)\, e^{i(kjh - \omega_h(k) n\Delta t)}\, dk \; + \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_+(k)\, e^{i(kjh + \omega_h(k) n\Delta t)}\, dk, \tag{A.4}$$

avec (relation de dispersion)

$$\frac{2}{\Delta t}\sin\left(\frac{\omega_h(k)\Delta t}{2}\right) = \frac{2}{h}\sin\left(\frac{kh}{2}\right) \tag{A.5}$$

Il est facile de voir que u_j^n donné ci-dessus vérifie bien le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t^2} = 0,$$

Il ne reste qu'à satisfaire le schéma de démarrage. On obtient un système satisfait par $\hat{u}_d(k)$ et $\hat{u}_g(k)$

$$\begin{aligned} \hat{u}_+ + \hat{u}_- &= \hat{u}_o(k) \\ \hat{u}_+ e^{i\omega_h(k)\Delta t} + \hat{u}_- e^{-i\omega_h(k)\Delta t} &= \hat{u}_o(k)\left(1 - \tfrac{2\Delta t^2}{h^2}\sin^2\left(\tfrac{kh}{2}\right)\right). \end{aligned} \tag{A.6}$$

En utilisant la relation de dispersion

$$1 - 2\frac{\Delta t^2}{h^2}\sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) = \cos(\omega_h(k)\Delta t)$$

le système se résoud simplement en

$$\hat{u}_+ = \hat{u}_- = \frac{\hat{u}_o(k)}{2}!! \tag{A.7}$$

D'où la solution du schéma

$$u_j^n = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k)\, e^{i(kjh - \omega_h(k)n\Delta t)}\, dk \;+\; \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k)\, e^{i(kjh + \omega_h(k)n\Delta t)}\, dk \tag{A.8}$$

On s'intéresse à un développement asymptotique de la solution numérique. On part de la relation de dispersion approchée par Taylor

$$\omega_h(k) = k - \frac{1}{24}k^3h^2(1 - \frac{\Delta t^2}{h^2}) = k - Ck^3h^2 \tag{A.9}$$

D'où une expression de la solution

$$\begin{aligned} u_j^n \approx\; & \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k)\, e^{ik(jh - n\Delta t)}(1 + in\Delta t Ck^3h^2)\, dk \\ & + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k)\, e^{ik(jh + n\Delta t)}(1 - in\Delta t Ck^3h^2)\, dk \end{aligned} \tag{A.10}$$

soit ($x_j = hj,\ t_n = n\Delta t$)

$$\begin{aligned} u_j^n \approx \quad & \frac{1}{2}\left(u_o(x_j - t_n) - \frac{t_n}{24}h^2(1 - \frac{\Delta t^2}{h^2})u_o'''(x_j - t_n)\right) \\ + \quad & \frac{1}{2}\left(u_o(x_j + t_n) + \frac{t_n}{24}h^2(1 - \frac{\Delta t^2}{h^2})u_o'''(x_j + t_n)\right) \end{aligned} \tag{A.11}$$

Pour $\frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient

$$\begin{aligned} u_j^n \approx \quad & \frac{1}{2}\left(u_o(x_j - t_n) - \frac{t_n}{48}h^2 u_o'''(x_j - t_n)\right) \\ + \quad & \frac{1}{2}\left(u_o(x_j + t_n) + \frac{t_n}{48}h^2 u_o'''(x_j + t_n)\right) \end{aligned} \tag{A.12}$$

On voit que l'erreur due à la dispersion est d'ordre 2 et est d'autant plus grande que le temps de propagation t_n est grand. D'autre part, l'erreur est au second ordre proportionnelle à la dérivée troisiéme du signal.

Par exemple, si l'on choisit pour u_0 la fonction de Harris étalée sur un intervalle de longueur $L = 15$, le maximum de la dérivée troisième est de l'ordre de 0.13 (cf. figure 1.7) et l'erreur est de l'ordre de $1/2\ 0.13\ 30/\sqrt{2}\ /48\ h^2 \approx 0.028h^2$ pour un temps de propagation de $30/\sqrt{2}$.

Annexe B

Vitesse de groupe

La vitesse de propagation d'une onde est définie par la vitesse de groupe (cf. [14]).

$$C(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k} \qquad \text{où k est le nombre d'onde et } \omega \text{ la pulsation} \tag{B.1}$$

est une fonction ω.

La relation de dispersion

$$\frac{2}{h}\sin(\frac{kh}{2}) = \frac{2}{\Delta t}\sin(\frac{\omega \Delta t}{2}) \tag{B.2}$$

nous donne alors pour la vitesse de groupe

$$C(k) = \frac{\cos(\frac{kh}{2})}{\cos(\frac{\omega \Delta t}{2})}.$$

Par ailleurs, un développement de Taylor de ω pour dt petit nous donne

$$\omega = k - \frac{k^3}{24} dt^2 + O\left(dt^3\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} C(k) &\simeq 1 - \frac{k^2 dt^2}{8} \\ &\simeq 1 - \frac{(\omega \Delta t)^2}{8} \end{aligned} \tag{B.3}$$

On voit donc que les ondes à hautes fréquences se propagent moins vite, ce qui concorde avec le phénomène observé (cf. 1.3.4). Ainsi, dans le premier exemple

(figure 1.20) avec $\omega\Delta t = 0.2$, on trouve une vitesse de groupe $C(k) = 0.995$, alors que numériquement, si l'on calcule la vitesse du maximum entre les deux premières images on trouve $C(k) = 0.9958$. Dans la troisième expérience (figure 1.22), avec $\omega\Delta t = \frac{3\pi}{8}$, on trouve une vitesse de groupe de $C(k) = 0.83$ pour un calcul numérique entre les deux premières images $C(k) = 0.84$.

Annexe C

Annulation du déterminant dans le cas 1/n

On montre ici que le déterminant δ du système (2.18) ne s'annule pas sur le demi plan complexe $\Im\omega > 0$. En effet, rappelons que

$$\delta(\omega) = \frac{1}{r(n\omega)} - \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\,\hat{\mathrm{G}}_l \tag{C.1}$$

Si $\Im\omega\Delta t > 0$, on a alors $\forall l\ |r_l(\omega) < 1|$ (cf. section 1.2.2), soit comme $\hat{\mathrm{G}}_l > 0$,

$$|\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\hat{\mathrm{G}}_l| < |\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \hat{\mathrm{G}}_l|$$

Or,

$$\hat{\mathrm{G}}_l = \sum_{m=0}^{n-1} G_m\, e^{-\frac{2i\pi lm}{n}}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{n-1} \hat{\mathrm{G}}_l &= \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1} G_m\, e^{-\frac{2i\pi lm}{n}} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} G_m \sum_{l=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi lm}{n}} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} G_m\, n\delta_{m=0} \\
&= nG_0 \\
&= n
\end{aligned}$$

ainsi $\forall\omega$ tel que $\Im\omega > 0$,

$$|\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega)\hat{\mathrm{G}}_l| < 1$$

et finalement comme $|r^{-1}(n\omega)| \geq 1$,

$$|\delta(\omega)| > 0 \quad \forall\omega \text{ tel que } \Im\omega > 0 \tag{C.2}$$

Bibliographie

[1] Alain Bamberger, Roland Glowinski, and Quang Huy Tran *A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and grid change* SIAM J. Numer. Anal. Vol. 34, No. 2,pp 603-639, April 1997.

[2] Marsha J. Berger *Stability of Interfaces with Mesh Refinement* Mathematics of Computation Vol.45 NO 172 Pages 301-318 October 1985

[3] Michael W. Chevalier, Raymond J. Luebbers *FDTD Local Grid with Material Traverse* IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 45, NO 3, March 1997

[4] G. Cohen *Méthodes numériques d'ordre élevé pour les ondes en régime transitoire* Ecole des ondes INRIA, INRIA-Rocquencourt 24-28 Janvier 1994

[5] Du Fort, E. C.; Frankel, S. P. *Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations.* Math. Tables and Other Aids to Computation 7, (1953). 135–152.

[6] D. F. Elliot K. Ramamohan rao *Fast Transforms Algorithms, Analyses, Applications.* Academic Press NY. London 1982 pp 215-216 H-19

[7] I. S. Kim et W. J. R. Hoefer *A local mesh refinement algorithm for the time-domain finite-difference method to solve Maxwell's equations* IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol 38,no. 6, pp. 812-815, June 1990.

[8] Heinz-Otto Kreiss *Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems* Communications on pure and applied mathematics, Vol. XXIII, pp. 277-298, 1970

[9] K. S. Kunz and L. Simpson, *A technique for increasing the resolution of finite-difference solutions to the Maxwell equations*, IEEE Trans. Electromagn. Compat., Vol EMC-23, pp.419-422, Nov. 1981.

[10] Peter Monk *Sub-gridding FDTD Schemes*, ACES Journal, Vol. 11, pp. 37-46, 1996.

[11] Rudin Walter ,*Analyse réelle et complexe.* Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1975. x+397pp

[12] D. T. Prescott and N. V. Shuley, *A method for incorporating different sized cells into the finite-difference time-domain analysis technique,* IEEE Microwave Guided Wave Lett., vol2, pp.434-436, Nov 1992.

[13] D. T. Shimizu, M. Okoniewski, and M. A. Stuchly, *An efficient subgridding algorithm for FDTD* in Conf. Proc. 11th Ann. Rev. Progress Appl. Computat. Electromagn., Monterey, CA, pp. 762-766, Mar. 1995.

[14] Trefethen Lloyd N. *Group velocity in finite difference schemes* SIAM review Vol. 24, No. 2, April 1982.

[15] Trefethen Lloyd N. *Group Velocity Interpretation of the Stability Theory of Gustafsson, Kreiss, and Sundström* Journal of Computationnal Physics, 1981.

[16] K.S. Yee *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell 's equations in isotropic media* IEEE Trans. on Antennas and propagatio, vol. AP-16, pp. 302-307, 1966

Table des matières

0.1 Position du problème et motivation 3
0.2 Un survol non exhaustif de la bibliographie sur le raffinement de maillage spatio-temporel pour l'électromagnétisme 4
0.3 Présentation du plan de travail et des principaux résultats obtenus . 7

1 Etude d'un schéma de raffinement moitié pour l'équation des ondes. Cas de deux milieux infinis 10
1.1 Description d'un schéma de raffinement moitié pour l'équation des ondes. 10
1.2 Analyse de la stabilité par Fourier-Laplace 14
1.2.1 Transformées de Fourier-Laplace : définition et résolution . . 14
1.2.2 Définition et analyse de $r(\omega)$ 17
1.2.3 Résolution du problème 21
1.2.4 Preuve de l'inégalité (1.32) 25
1.3 Étude de Précision 28
1.3.1 Calcul par développements limités de l'ordre du schéma . . . 28
1.3.2 Expériences numériques 28
1.3.3 Réinterprétation du schéma : Approximation du Dirac 35
1.3.4 Étude de réflexion et transmission : application à l'ordre du schéma 36

2 Extension à un raffinement plus fort. Cas de 2 milieux infinis 57
2.1 Description du schéma 57
2.2 Analyse de la stabilité par Fourier-Laplace 59
2.3 Étude de précision 67
2.3.1 Ordre du Schéma 67
2.3.2 Réinterprétation de la solution en termes d'ondes planes . . . 74

3 Cas de la bande raffinée : apparition d'instabilités **77**
3.1 Position du problème 77
3.2 Rappel des solutions sous forme d'ondes planes 81
3.3 Analyse de la bande raffinée 83
3.3.1 Analyse par ondes planes, expression de la solution 83
3.3.2 Interprétation de la solution ondes planes en terme de stabilité 85
3.4 Résultats numériques 91
3.4.1 Mise en évidence de l'instabilité 91
3.4.2 Caractérisation de l'instabilité 92

4 Extension du schéma aux équations de Maxwell **95**
4.1 Cas 1D 95
4.1.1 Un schéma de raffinement 1-3 96
4.1.2 Un schéma de raffinement 1-2 implicite 98
4.1.3 Comment se ramener à l'équation des Ondes 99
4.2 Extension du schéma au cas 2D 100

A Analyse des effets de dispersion **105**

B Vitesse de groupe **108**

C Annulation du déterminant dans le cas 1/n **110**

Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399