Eléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell : le cas 3D

Alexandre Elmkies, Patrick Joly

▶ **To cite this version:**

Alexandre Elmkies, Patrick Joly. Eléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell : le cas 3D. [Rapport de recherche] RR-3381, INRIA. 1998. inria-00073308

HAL Id: inria-00073308
https://inria.hal.science/inria-00073308

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Eléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell: le cas 3D

Alexandre Elmkies Patrick Joly

N ° 3381

Mars 1998

THÈME 4

ISSN 0249-6399

Eléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell: le cas 3D

Alexandre Elmkies Patrick Joly *

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet ondes

Rapport de recherche n ° 3381 — Mars 1998 — 47 pages

Résumé : Dans ce travail, nous nous proposons de construire de nouveaux espaces d'éléments finis d'arêtes adaptés à la résolution des équations de Maxwell 3D et permettant de résoudre le problème de la condensation de masse, y compris en milieu anisotrope. Pour cela, nous adoptons la même démarche que celle présentée dans [5] pour le cas 2D. Nous sommes donc amené à enrichir les espaces de Nédélec et à introduire certaines composantes comme degrés de liberté supplémentaires. Les schémas obtenus sont alors analysés par l'intermédiaire d'une étude de dispersion numérique en maillage régulier. Dans ce rapport, nous considérons seulement les maillages tétraèdriques.

Mots-clé : Eléments finis d'arête, équations de Maxwell, condensation de masse, milieux anisotropes

(Abstract: pto)

* INRIA, Domaine de Voluceau, B.P.105 78153 Le Chesnay cedex, France.

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : 01 39 63 55 11 - International : +33 1 39 63 55 11
Télécopie : (33) 01 39 63 53 30 - International : +33 1 39 63 53 30

Finite elements and mass lumping for Maxwell's equations: the 3D case

Abstract: In this work, we propose to construct a new family of 3D edge finite elements for the resolution of Maxwell equations with the objective of solving the difficult problem of mass lumping, including the case of anisotropic media. To attain this goal, we follow the process presented in [5] for the 2D case. Thus, we are led to enrich the usual Nédélec space and to introduce some components of the vector field as additionnal degrees of freedom. The schemes obtained in this way are analyzed through their numerical dispersion on regular meshes. In this report, we consider only tetrahedral meshes.

Key-words: Edge finite elements, Maxwell equations, mass lumping, anisotropic media

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Les nouveaux éléments en maillage tétraédrique **4**
2.1 Nouvel élément fini de référence 4
2.2 Construction des fonctions de base de l'élément 7
2.3 Construction de l'espace d'approximation $\widetilde{V}_h$ 8
2.4 Condensation de masse dans l'espace $\widetilde{V}_h$ 11
2.4.1 Cas d'un milieu isotrope 11
2.4.2 Cas d'un milieu anisotrope 14

3 Analyse en maillage régulier **14**
3.1 Le problème modèle considéré. 14
3.2 Construction du problème semi-discret associé au nouvel élément fini d'arête. 15
3.2.1 Maillage régulier en tétraèdres 15
3.3 Analyse de la dispersion numérique du schéma semi discret. 16
3.3.1 Introduction 16
3.3.2 Courbes de dispersion numérique 18
3.3.3 Ordre de la dispersion numérique 19
3.3.4 Comparaison avec le schéma correspondant aux éléments finis de Nédélec du premier ordre (matrice de masse non condensée). 20
3.4 Discrétisation en temps 24
3.4.1 Introduction 24
3.4.2 Analyse de la stabilité: résultats généraux 24
3.4.3 Stabilité des schémas pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ et $\mathcal{R}_1$ 25
3.4.4 Analyse de la dispersion 25

4 Un nouvel élément fini tétraédrique du second ordre **31**
4.1 Elément fini tétraédrique du second ordre usuel 32
4.2 Rappels sur les formules de quadrature symétriques dans un tétraèdre 33
4.3 Nouvel élément fini du second ordre: une idée naturelle. 34
4.4 Analyse en maillage régulier 37
4.4.1 Problème semi discret et dispersion numérique associée 37
4.4.2 Courbes de dispersion numérique 37
4.4.3 Discrétisation en temps et ordre élevé 41
4.4.4 Analyse de la stabilité 41
4.4.5 Analyse de la dispersion numérique pour le schéma discrétisé en temps et en espace . . . 42

5 Conclusion et perspectives **46**

1 Introduction

On considère les équations de Maxwell dans un milieu tridimensionnel homogène Ω écrites sous la forme d'un système du second ordre:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = 0 \qquad x \in \Omega, t > 0 \tag{1}$$

V_h désignant un sous-espace d'approximation par éléments finis de $H(\mathrm{rot}, \Omega)$, la discrétisation en espace de (1) correspondant aboutit à un système différentiel du second ordre de la forme:

$$M_h \frac{d^2 U_h}{dt^2} + A_h U_h = 0 \tag{2}$$

où M_h est la matrice dite "de masse" dont les termes sont les produits scalaires $L^2(\Omega)$ entre les fonctions d'une base de V_h. La condensation de masse consiste alors à approcher M_h par une matrice diagonale dans une base convenable de V_h. Le schéma numérique obtenu après discrétisation en temps est alors complètement explicite,

ce qui est essentiel pour l'efficacité de la méthode. Il faut toutefois que cette approximation soit suffisamment bonne pour ne pas nuire à la précision des calculs et que la matrice diagonale soit à coefficients strictement positifs pour garantir la stabilité du schéma numérique.
Dans [5], nous avons construit de nouveaux espaces d'éléments finis d'arête 2D (triangulaires et rectangulaires) permettant de résoudre le problème de la condensation de masse en suivant une démarche inspirée de celle adoptée dans [9] pour les éléments de finis Lagrange. Il s'agit de réincorporer certaines composantes du champ à l'ensemble des degrés de liberté afin qu'il contienne toutes les composantes du champ en chaque point. De cette manière, l'emploi d'une formule de quadrature numérique faisant intevenir les mêmes points pour calculer les intégrales de M_h aboutit à une matrice diagonale en milieu isotrope. Si le milieu est anisotrope, la même méthode aboutit à une matrice diagonale par blocs dont l'inversion admet un coût négligeable. Dans chaque cas, nous avons déterminé une formule de quadrature à poids strictement positifs (pour assurer la stabilité du schéma) assez précise pour préserver l'ordre de la discrétisation en espace.
Néanmoins, la construction des éléments 3D se révèle sensiblement plus compliquée qu'en 2D. La raison philosophique en est la suivante: pour pouvoir utiliser une formule de quadrature qui condense la matrice de masse, il est nécessaire d'avoir comme degrés de liberté toutes les composantes du champs aux nœuds de quadrature. Si on pense, comme en 2D, en termes de composantes normales et tangentielles, un hiatus apparaît du fait suivant: une composante normale est naturellement associée à une face et donc un degré de liberté naturel est le centre de gravité d'une face alors qu'une composante tangentielle est associée à une arête ce qui fait du milieu de celle-ci un candidat naturel pour être degré de liberté. C'est à ce niveau que la difficulté apparaît: en dimension 3, contrairement à la dimension 2, faces et arêtes ne coïncident pas! La construction qui va suivre a donc été guidée par un autre argument fondé sur le théorème de trace dans $H(rot)$. Si Γ désigne par exemple une surface plane qui soit une partie du bord de Ω, la trace tangentielle (au sens projection orthogonale) d'un élément de l'espace $H(rot,\Omega)$ appartient à un espace du même type, en l'occurence $H^{-\frac{1}{2}}(rot_\Gamma,\Gamma)$. Au niveau discret, il est naturel que les traces tangentielles des champs appartenant à un espace V_h d'approximation de l'espace $H(rot)$-3D décrivent un espace d'approximation de l'espace $H(rot)$-2D. Cette propriété par exemple satisfaite par les éléments $H(rot)$ de Nédélec (cf. [8]).

2 Les nouveaux éléments en maillage tétraédrique

2.1 Nouvel élément fini de référence

Dans ce qui suit, K désigne un tétraèdre de sommets S_1, S_2, S_3, S_4 et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ sont les coordonnées barycentriques associées. Chaque arête S_iS_j a un double indice $\{i,j\} \subset \{1,2,3,4\}^2$ et chaque face a un indice $k \in \{1,2,3,4\}$ de telle sorte que la face d'indice k, notée T_k, est opposée au sommet S_k. A chaque arête $\{i,j\}$ nous associons le vecteur tangent $\vec{\tau}_{ij}$ mais aussi deux vecteurs normaux $\vec{n}_{ij}^k$ et $\vec{n}_{ij}^l$ (où $k,l \neq i,j$) qui restent toutefois tangents aux faces l et k respectivement. Ainsi, le vecteur $\vec{n}_{ij}^k$ est porté par la droite intersection de la face T_l et du plan orthogonal à l'arête $\{i,j\}$ passant par M_{ij}. Il est par ailleurs orienté vers l'intérieur de la face T_l (cf. figure 1).

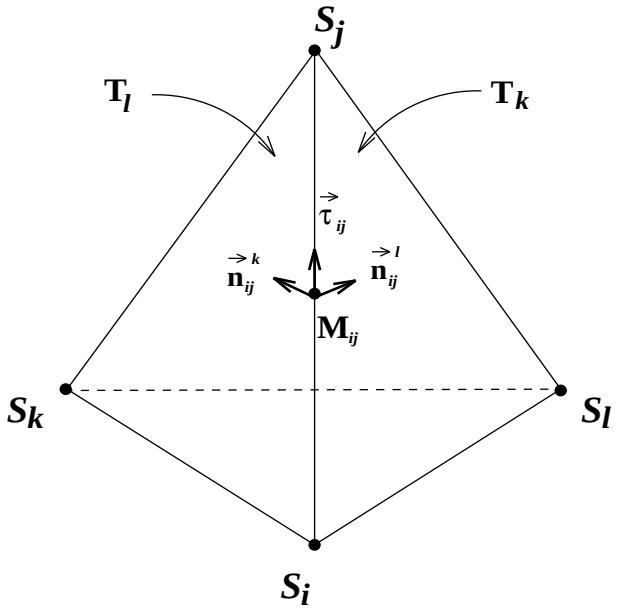


FIG. 1: *Degrés de liberté pour le nouvel élément fini de référence 3D*

Nous définissons ainsi 18 vecteurs unitaires qui nous permettent de définir sur $C^0(K)^3$ 18 formes linéaires formant l'ensemble:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(\vec{u}.\vec{\tau}_{ij})(M_{ij})\ \{i,j\} \subset \{1,2,3,4\}\} \\ &\cup \left\{(\vec{u}.\vec{n}^k_{ij})(M_{ij})\ \{i,j\} \subset \{1,2,3,4\},\ k \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

C'est cet ensemble Σ qui va constituer l'ensemble des degrés de liberté. Il s'agit maintenant de définir un espace de champs de vecteurs qui soit Σ-unisolvant. Rappelons que pour l'élément d'arête usuel, cet espace est:

$$\mathcal{R}_1 = \left\{\vec{u}(x) = \vec{a} \wedge x + \vec{b}, \quad (\vec{a},\vec{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right\}$$

Le plus simple consiste à décrire les fonctions de base associées aux nouveaux degrés de liberté, à savoir $\vec{u}.\vec{n}^k_{ij}(M_{ij})$.
Soit $I = \{(\{i,j\},k), \{i,j\} \subset \{1,2,3,4\}$ et $k \neq i,j\}$. Pour $(\{i,j\},k) \in I$, nous définissons:

$$\vec{w}^k_{ij} = \lambda_i \lambda_j \nabla \lambda_k$$

et

$$\widetilde{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 \oplus \left[\vec{w}^k_{ij}\right]_{(\{i,j\},k)\in I}$$

Afin de décrire les propriétés des champs $\vec{w}^k_{ij}$, introduisons $\{i,j,k,l\}$ une permutation circulaire de $\{1,2,3,4\}$ et $\vec{n}$ la normale unitaire sortante à ∂K. Si T_l est la face $S_iS_jS_k$ et $\mathcal{R}_1(T_l) = \{\vec{n} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{n}), \quad \vec{u} \in \mathcal{R}_1\}$ l'espace des traces tangentielles sur T_l des éléments de $\mathcal{R}_1$, nous définissons:

$$\widetilde{\mathcal{R}}_1(T_l) = \mathcal{R}_1(T_l) \oplus [\vec{t}^k_{ij}, \vec{t}^i_{jk}, \vec{t}^j_{ik}]$$

où $\vec{t}^k_{ij}$ (resp. $\vec{t}^i_{jk}$, $\vec{t}^j_{ik}$) est la trace tangentielle sur T_l de $\vec{w}^k_{ij}$ (resp. $\vec{w}^i_{jk}$, $\vec{w}^j_{ik}$). Plus précisément,

$$\vec{t}^l_{ij} = \lambda_i.\lambda_j \nabla_\Gamma \lambda_l$$

où le gradient tangentiel ∇_Γ est défini par

$$\nabla_\Gamma w = \vec{n} \wedge (\nabla w \wedge \vec{n})$$

On remarque aisément que, dans un système de coordonnées tangent au plan contenant l'arête T_l, l'espace $\widetilde{\mathcal{R}}_1(T_l)$ est isomorphe à l'espace des champs de vecteurs défini dans [5]. Nous savons donc que l'ensemble des degrés de liberté $\Sigma(T_l)$ défini par:

$$\Sigma(T_l) = \left\{ \vec{w}.\vec{\tau}_{ij}(M_{ij}), \vec{w}.\vec{\tau}_{jk}(M_{jk}), \vec{w}.\vec{\tau}_{ki}(M_{ki}), \vec{w}.\vec{n}^k_{ij}(M_{ij}), \vec{w}.\vec{n}^i_{jk}(M_{jk}), \vec{w}.\vec{n}^j_{ki}(M_{ki}) \right\}$$

est $\widetilde{\mathcal{R}}_1(T_l)$-unisolvant.
Nous pouvons maintenant décrire les propriétés de la fonction $\vec{w}^k_{ij}$ (cf. figure 2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{w}^k_{ij} \equiv \vec{0} \text{ sur les faces } T_i \text{ et } T_j \\ \vec{n} \wedge (\vec{w}^k_{ij} \wedge \vec{n}) \equiv \vec{0} \text{ sur la face } T_k \\ \vec{n} \wedge (\vec{w}^k_{ij} \wedge \vec{n})|_{T_l} = \vec{t}^k_{ij} \in \widetilde{\mathcal{R}}_1(T_l) \text{ sur la face } T_l \end{array} \right. \tag{4}$$

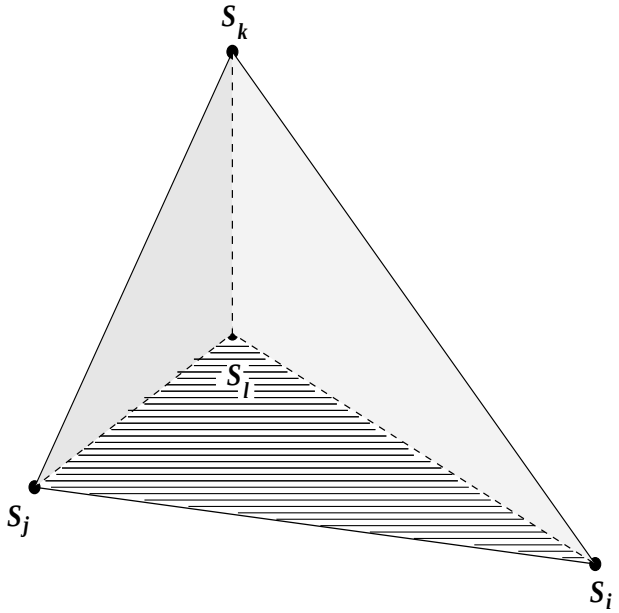


FIG. 2: *Propriétés de la fonction $\vec{w}^k_{ij}$ sur le bord: en gris, les faces T_i et T_j sur lesquelles le champ est identiquement nul et en trait hachuré, la face T_k sur laquelle la composante tangantielle s'annule.*

Ces propriétés entraînent le

Théorème 2.1

$$\forall\, \vec{w} \in \widetilde{\mathcal{R}}_1(K), \quad \forall \quad 1 \leq k \leq 4, \qquad \vec{n} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{n})|_{T_k} \in \widetilde{\mathcal{R}}_1(T_k)$$

Remarque 2.1 *Ce théorème implique que notre nouvel élément fini, s'il est unisolvant, est conforme dans $H(rot)$.*

D'autre part, nous déduisons de (4) que

$$\begin{array}{l} \text{(i) } \vec{w}^k_{ij}.\vec{\tau}_{pq}(M_{pq}) = 0 \ \ \forall \{p,q\} \subset \{1,2,3,4\} \\ \text{(ii) } \vec{w}^k_{ij}.\vec{n}^r_{pq}(M_{pq}) = 0 \ \ \forall\, p \neq i, q \neq j, r \neq k \end{array} \tag{5}$$

Ces propriétés découlent principalement du fait que $\vec{w}^k_{ij}$ étant identiquement nul sur deux faces du tétraèdre (T_i et T_j), il est identiquement nul sur toutes les arêtes de ∂K sauf l'arête $\{i,j\}$. On a donc immédiatement:

$$\forall M_{pq} \neq M_{ij}, \quad \vec{w}^k_{ij}(M_{pq}) = \vec{0}$$

Puisque $\vec{\tau}_{ij}$ est dans la face T_k, d'après (4),

$$\vec{w}_{ij}^{\,k}.\vec{\tau}_{ij}(M_{ij}) = \vec{n} \wedge (\vec{w}_{ij}^{\,k} \wedge \vec{n})(M_{ij}).\vec{\tau}_{ij}(M_{ij}) = 0$$

ce qui démontre la propriété (i). Un raisonnement identique appliqué au vecteur $\vec{n}_{ij}^{\,l}$ démontre la propriété (ii).

La propriété principale de cette section est traduite par le

Théorème 2.2 *L'espace $\widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$ est de dimension 18 et l'ensemble Σ est $\widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$ unisolvant.*

Preuve:

Soit $\vec{w}$ un élément de $\widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$ annulant toutes les formes linéaires de Σ. Nous pouvons écrire:

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \sum_I \alpha_{ij}^k \vec{w}_{ij}^{\,k}, \qquad \vec{w}_0 \in \mathcal{R}_1$$

La propriété $(\vec{w}.\vec{\tau}_{ij})(M_{ij}) = 0$ jointe aux propriétés (4) et (5) (qui expriment que ces mêmes quantités sont annulées par toutes les fonctions $\vec{w}_{ij}^{\,k}$) entraîne $(\vec{w}_0.\vec{\tau})(M_{ij}) = 0$ et ce pour tout $\{i,j\}$. Comme $\vec{w}_0 \in \mathcal{R}_1$, il en resulte que $\vec{w}_0 = \vec{0}$. Par suite, $(\vec{w}.\vec{n}_{pq}^{\,l})(M_{pq}) = 0$ se traduit, compte tenu encore des propriétés (4) et (5) par:

$$\alpha_{pq}^l(\vec{w}_{pq}^{\,l}.\vec{n}_{pq}^{\,l})(M_{pq}) = 0$$

Pour pouvoir conclure, il ne reste plus qu'à démontrer que $(\vec{w}_{pq}^{\,l}.\vec{n}_{pq}^{\,l})(M_{pq}) \neq 0$. Comme

$$(\vec{w}_{pq}^{\,l}.\vec{n}_{pq}^{\,l})(M_{pq}) = \frac{1}{4}\nabla\lambda_l.\vec{n}_{pq}^{\,l}$$

il suffit d'établir que $\nabla\lambda_l.\vec{n}_{pq}^{\,l} \neq 0$. Or, $\nabla\lambda_l$ n'est autre que la normale à la face T_l. Si on avait $\nabla\lambda_l.\vec{n}_{pq}^{\,l} = 0$, cela signifierait que $\vec{n}_{pq}^{\,l}$ est tangent à la face T_l. Or, par construction, $\vec{n}_{pq}^{\,l}$ appartient à la face T_k avec $k \neq p,q,l$ (cf. figure 1). Donc, $\vec{n}_{pq}^{\,l}$ serait portée par l'intersection des faces T_k et T_l, c'est-à-dire colinéaire à $\vec{\tau}_{pq}$ ce qui est impossible par construction. Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque 2.2 *De manière similaire au cas 2D, on a la double inclusion:*

$$\mathcal{R}_1 \subset \widetilde{\mathcal{R}}_1(K) \subset (P_2)^3$$

2.2 Construction des fonctions de base de l'élément

Il est facile d'expliciter les fonctions de base associées aux degrés de liberté de Σ. En effet, celles associées aux $\vec{w}.\vec{n}_{ij}^{\,k}(M_{ij})$ sont connues par construction et données par:

$$\vec{s}_{ij}^{\,k} = \frac{4}{\nabla\lambda_k.\vec{n}_{ij}^{\,k}}\,\vec{w}_{ij}^{\,k}$$

Pour celles associées aux degrés de liberté $\vec{w}.\vec{\tau}_{ij}(M_{ij})$, introduisons les fonctions de base de l'espace $\mathcal{R}_1$ associées aux mêmes degrés de liberté, à savoir:

$$\vec{q}_{ij} = \nabla\lambda_i\lambda_j - \nabla\lambda_j\lambda_i$$

On peut alors vérifier que la fonction de base $\vec{r}_{ij}$ de $\widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$ associée à $\vec{w}.\vec{\tau}_{ij}(M_{ij})$ est donnée par:

$$\vec{r}_{ij} = \vec{q}_{ij} + \sum_{(\{p,q\},r)\in I} \alpha_{pq}^r \vec{s}_{pq}^{\,r}$$

avec $\alpha_{pq}^r = -(\vec{q}_{ij}.\vec{n}_{pq}^{\,r})(M_{pq})$.

2.3 Construction de l'espace d'approximation $\widetilde{V}_h$

Dans cette partie, $\mathcal{T}_h$ désigne un maillage de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ en tétraèdres. Nous définissons l'espace:

$$\widetilde{V}_h = \left\{ \vec{v}_h \in H(rot, \Omega) / \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{v}_{h|_K} \in \widetilde{\mathcal{R}_1}(K) \right\}$$

Notons que comme $\mathcal{R}_1 \subset \widetilde{\mathcal{R}_1}(K)$ pour tout K, $\widetilde{V}_h$ contient l'espace V_h des éléments finis usuels. Pour décrire plus précisément l'espace $\widetilde{V}_h$, il est utile d'introduire:

- $\mathcal{A}$: l'ensemble des arêtes de $\mathcal{T}_h$, de cardinal N_a.
- $\mathcal{F}$: l'ensemble des faces de $\mathcal{T}_h$, de cardinal N_f.

A chaque arête a de $\mathcal{A}$, nous associons une orientation arbitraire, donnée par le vecteur $\vec{\tau}_a$, et le compact D_a réunion des tétraèdres contenant cette arête (cf. figure 3). Remarquons que le nombre de tétraèdres de D_a varie d'une arête à l'autre.

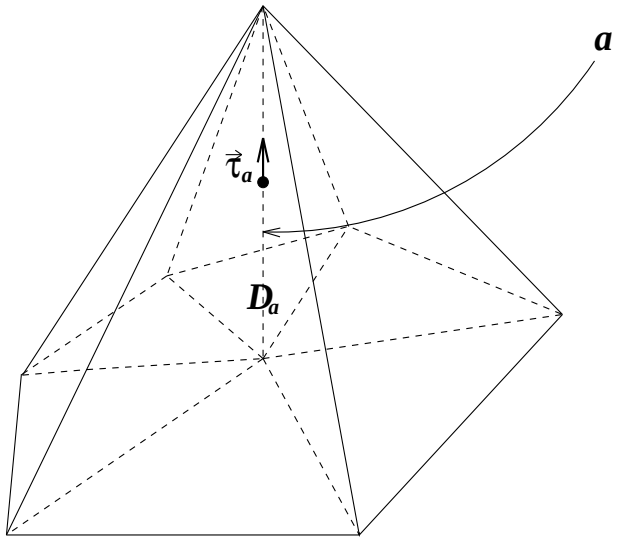


FIG. 3: *Tétraèdres communs à l'arête a.*

Nous définissons alors la fonction de base $\vec{r}_a$ par:

- supp $\vec{r}_a \subseteq D_a$
- $\forall K \subset D_a, \quad \vec{r}_a|_K = \vec{r}_{ij}(K)$ si a est l'arête $\{i,j\}$ de K

D'autre part, à toute face F de $\mathcal{F}$, nous associons a_1^F, a_2^F, a_3^F les arêtes de ∂F. On désigne alors par $\vec{\nu}_1^F$, $\vec{\nu}_2^F$, $\vec{\nu}_3^F$ les vecteurs unitaires normaux à a_1^F, a_2^F, a_3^F respectivement, contenus dans F et orientés rentrants par rapport à F. D_F désigne alors la réunion des tétraèdres de $\mathcal{T}_h$ ayant F pour face (cf. figure 4). Si F est une face intérieure, alors D_F est réunion des deux tétraèdres ayant la face F en commun. Si F est une face de $\partial\Omega$, alors D_F se réduit à un tétraèdre.

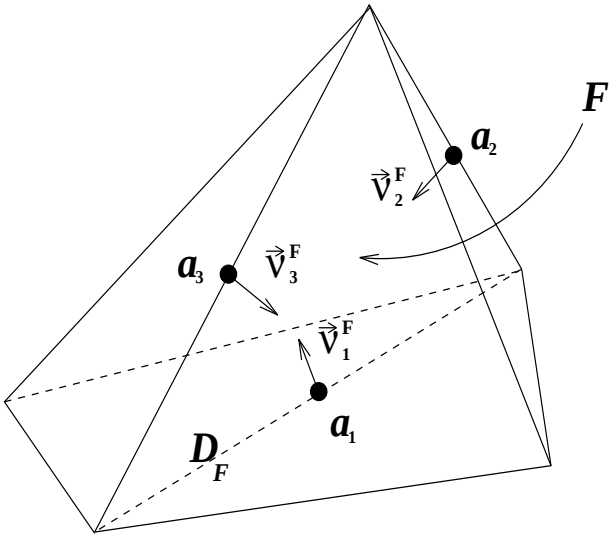


FIG. 4: *Tétraèdres communs à la face F.*

Nous définissons alors trois fonctions de base $\vec{s}_1^F$, $\vec{s}_2^F$, $\vec{s}_3^F$ par:

- $\forall i = 1...3, \quad \text{supp } \vec{s}_i^F \subseteq D_K$
- $\forall i = 1...3, \quad \forall K \subset D_K, \quad \vec{s}_i^F|_K = \vec{s}_{pq}^r(K)$ si a est l'arête $\{p,q\}$ de K et $\vec{\nu}_i^F$ le vecteur $\vec{n}_{pq}^r$ de K.

On a alors le

Lemme 2.1 *Les fonctions $\vec{r}_a$ et $\vec{s}_i^F$ sont des éléments de $\widetilde{V}_h$.*

Démonstration:

Nous écrivons la preuve pour les fonctions $\vec{r}_a$. Un raisonnement similaire permet d'établir le résultat pour les fonctions $\vec{s}_i^F$.
Soit a une arête, F une face de D_a, $F \not\subset \partial\Omega$, et $\vec{n}$ une normale unitaire à F. La trace tangentielle de la fonction $\vec{r}_a$ sur F, à savoir $\vec{n} \wedge (\vec{r}_a \wedge \vec{n})|_F$, a les propriétés suivantes:

- Si $F \subset \partial D_a$, c'est-à-dire $a \notin F$ (cf. figure 5), alors

$$\vec{n} \wedge (\vec{r}_a \wedge \vec{n})|_F = \vec{0}$$

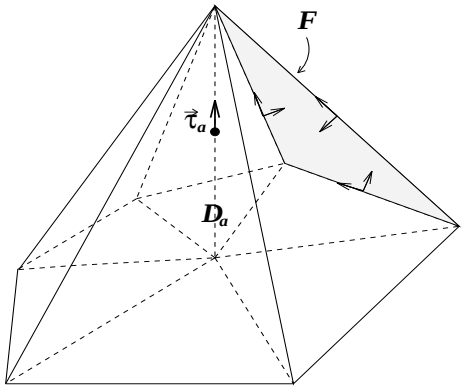


FIG. 5: *1^{er} cas: la face F (en gris) ne contient pas l'arête a. Les flèches représentent les degrés de liberté de $\widetilde{\mathcal{R}}_1(F)$.*

En effet, d'après le théorème 2.1 et la définition de $\vec{r}_a$, $\vec{n} \wedge (\vec{r}_a|_F \wedge \vec{n}) \in \widetilde{\mathcal{R}}_1(F)$ et annule toutes les formes linéaires de $\Sigma(F)$. D'après le résultat d'unisolvance pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1(F)$, on a $\vec{n} \wedge (\vec{r}_a \wedge \vec{n})|_F = \vec{0}$.

– Si $F \not\subset \partial D_a$, c'est-à-dire $a \in F.$, on note b et c les deux autres arêtes de F, K_1 et K_2 les deux tétraèdres ayant F pour face (cf, figure 6).

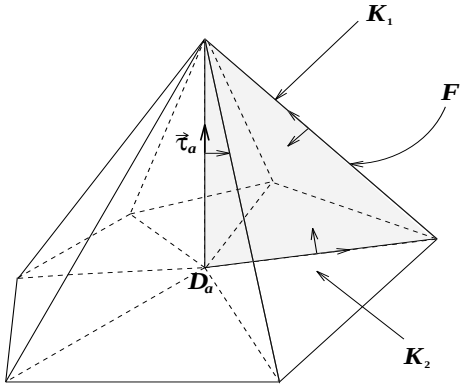


FIG. 6: *2ème cas: la face F (en gris) contient l'arête a. Les flèches représentent les degrés de liberté de* $\widetilde{\mathcal{R}}_1(F)$.

On pose:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{a,1} &= \vec{r}_a|_{K_1} \\ \vec{r}_{a,2} &= \vec{r}_a|_{K_2} \end{aligned} \tag{6}$$

On a alors $\vec{n} \wedge (\vec{r}_{a,1}|_F \wedge \vec{n})$ et $\vec{n} \wedge (\vec{r}_{a,1}|_F \wedge \vec{n}) \in \widetilde{\mathcal{R}}_1(F)$ et $\vec{n} \wedge [(\vec{r}_{a,1} - \vec{r}_{a,2})|_F \wedge \vec{n}]$ annule toutes les formes linéaires de $\Sigma(F)$. D'après le résultat d'unisolvance pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1(F)$, on a

$$\vec{n} \wedge (\vec{r}_{a,1}|_F \wedge \vec{n}) = \vec{n} \wedge (\vec{r}_{a,2}|_F \wedge \vec{n})$$

On a donc continuité de la trace tangentielle de la fonction $\vec{r}_a$ d'un tétraèdre à l'autre de D_a.

Ces deux propriétés réunies impliquent $\vec{r}_a \in H(\mathrm{rot}, \Omega)$ et donc $\vec{r}_a \in \widetilde{V}_h$.■
Nous avons alors le

Théorème 2.3 *$\widetilde{V}_h$ est l'espace engendré par*

$$\mathcal{B}_h = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{\vec{r}_a\} \cup \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \{\vec{s}_1^F, \vec{s}_2^F, \vec{s}_3^F\}$$

Démonstration:

Désignons par W_h l'espace engendré par $\mathcal{B}_h$. Par construction, on a évidemment $W_h \subset \widetilde{V}_h$. Soit alors $\vec{v}_h \in \widetilde{V}_h$. Posons, M_a désignant le milieu de l'arête a:

$$\vec{\varepsilon}_h = \vec{v}_h \quad - \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} (\vec{v}_h.\vec{\tau}_a)(M_a)\vec{r}_a - \sum_{F \in \mathcal{F}} \sum_{i=1,2,3} (\vec{v}_h.\vec{\nu}_i)(M_{a_i^F})\vec{s}_i^F \tag{7}$$

Il est clair que $\forall K \in \mathcal{T}_h$, $\vec{\varepsilon}_K = \vec{\varepsilon}_{h|_K} \in \widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$ et annule toute les formes linéaire associées à $\widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$. La propriété d'unisolvance établie au théorème 2.3 implique que $\vec{\varepsilon}_K = \vec{0}$. Ceci étant vrai pour tout K dans $\mathcal{T}_h$, il s'ensuit que $\vec{\varepsilon}_h = \vec{0}$, ce qui montre que $\vec{v}_h$ est combinaison linéaire des fonctions de $\mathcal{B}_h$.■

Nous avons donc:

$$\dim \widetilde{V}_h = 3N_f + N_a$$

à comparer avec dim $V_h = N_a$.
Par ailleurs, nous avons deux types de fonctions de base (cf. figure 3):

- celle de type $\vec{r}$, associées aux degrés de liberté tangentiels sur une arête. Leur support est constitué des tétraèdres ayant cette arête en commun: ce sont ces fonctions qui généralisent celles de l'élément $H(rot)$ usuel.
- celle de type $\vec{s}$, associées aux degrés de liberté normaux, à support dans deux tétraèdres (sauf pour une face de la frontière de Ω auquel cas ce support se réduit à un seul tétraèdre). Ce sont en quelque sorte les nouvelles fonctions de base.

D'après la construction des fonctions de base, on peut aussi décrire $\widetilde{V}_h$ en termes d'arêtes. En effet, à chaque arête a de $\mathcal{T}_h$, on peut associer:

- une fonction de type "$\vec{r}$", notée encore $\vec{r}_a$.
- L_a fonctions de type "$\vec{s}$", notées $\vec{s}_a^1, \cdots, \vec{s}_a^{L_a}$.

où L_a désigne le nombre de faces ayant l'arête a en commun (cf. figure 7).

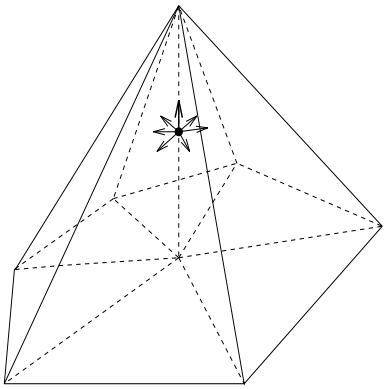


FIG. 7: *Degrés de liberté associés à une même arête*

$\widetilde{V}_h$ est alors engendré par:

$$\cup_{a\in\mathcal{A}} \left\{\vec{r}_a, \vec{s}_a^1, \cdots, \vec{s}_a^{L_a}\right\}$$

Commentaires:

Le fait que la trace normale $\vec{u}.\vec{n}$ sur chaque face ne figure pas parmi les nouveaux degrés de libertés (ceux-cis ne concernent que la trace tangentielle) autorise les discontinuités de la composante normale de chaque champ de vecteurs à travers chaque face du maillage. C'est cette propriété qui permet d'affirmer que $\widetilde{V}_h$ réalise une bonne approximation de $H(\mathrm{rot},\Omega)$. De fait, l'inclusion $V_h \subset \widetilde{V}_h$ fournit l'estimation:

$$\forall u \in H(\mathrm{rot},\Omega),\quad \inf_{v_h\in\widetilde{V}_h} \| u - v_h \|_{\mathrm{rot},\Omega} \leq \inf_{v_h\in V_h} \| u - v_h \|_{\mathrm{rot},\Omega}$$

et par conséquent, si $\{\mathcal{T}_h,\ h>0\}$ désigne une famille régulière de triangulations de $\overline{\Omega}$, on a:

$$\lim_{h\to 0} \inf_{v_h\in\widetilde{V}_h} \| u - v_h \|_{\mathrm{rot},\Omega} = 0$$

2.4 Condensation de masse dans l'espace $\widetilde{V}_h$

2.4.1 Cas d'un milieu isotrope

Nous considérons maintenant les équations de Maxwell dans le domaine Ω, écrites sous la forme d'un système du second ordre. Le milieu est supposé homogène et isotrope dans un premier temps. Le problème continu s'écrit

donc:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = 0 \qquad x \in \Omega, t > 0 \tag{8}$$

où $\vec{u}$ désigne ici indifféremment le champ électrique ou le champ magnétique.
La formulation variationnelle de (8) s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Chercher } \vec{u}(t) \in V = H(rot, \Omega) \text{ tel que:} \\ \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_\Omega \vec{u}(t).\vec{v} dx + \int_\Omega \nabla \times \vec{u}.\nabla \times \vec{v} dx = 0 \qquad \forall \vec{v} \in V \end{cases} \tag{9}$$

V_h désignant un sous-espace d'approximation par éléments finis de V, le problème semi-discrétisé en espace s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Chercher } \vec{u}_h(t) \in V_h \text{ tel que:} \\ \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_\Omega \vec{u}_h(t).\vec{v}_h dx + \int_\Omega \nabla \times \vec{u}_h.\nabla \times \vec{v}_h dx = 0 \qquad \forall \vec{v}_h \in V_h \end{cases} \tag{10}$$

ce que l'on écrit sous forme "matricielle":

$$M_h \frac{d^2 U_h}{dt^2} + A_h U_h = 0 \tag{11}$$

où les termes de la matrice M_h dite "de masse" sont de la forme $(\vec{u}_h, \vec{v}_h)$, $\vec{u}_h$ et $\vec{v}_h$ désignant deux fonctions de base de V_h et $(,)$ le produit scalaire $(L^2(\Omega))^3$. Rappelons que l'approche développée dans le cas 2D consiste à enrichir l'espace V_h. On calcule alors les termes de M_h au moyen d'une formule de quadrature à poids positifs appropriée pour obtenir une matrice diagonale. Dans le cas d'un milieu anisotrope, le calcul par quadrature numérique permet d'obtenir, dans une base convenable, une matrice diagonale par blocs de petite taille dont l'inversion admet un coût négligeable (cf. [5]). Nous allons voir que la seule différence introduite dans le cas 3D réside dans le fait que pour un milieu isotrope comme pour un milieu anisotrope, on obtient par quadrature une matrice de masse diagonale par blocs dans une base convenable de $\widetilde{V}_h$.
Si K désigne un tétraèdre, nous désignons par $\oint_K f dx$ la forme linéaire définie sur $C^0(K)$ par:

$$\oint_K f \, dx = \frac{\text{mes}\,(K)}{6} \sum_{i=1}^{6} f(M_i^K)$$

où $\{M_i^K, \quad i = 1..6\}$ est l'ensemble des milieux des arêtes de K. Rappelons que

$$\forall f \in P_1(K), \qquad \oint_K f \, dx = \int_K f \, dx$$

Considérons alors la forme bilinéaire définie sur $\widetilde{V}_h$ par:

$$(\vec{u}_h, \vec{v}_h)_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \vec{u}_h.\vec{v}_h$$

(qui approche le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^3$). Démontrons d'abord le

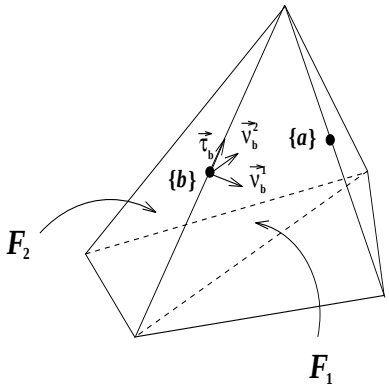
Lemme 2.2 *Soit $\vec{u}$ une fonction de base de $\widetilde{V}_h$ (de type $\vec{r}$ ou $\vec{s}$) associée à l'arête a. Soit $K \in \mathcal{T}_h$ contenant a et b une arête de K distincte de a et de milieu M_b. On a:*

$$\vec{u}|_K(M_b) = \vec{0}$$

Démonstration:

Si $b \notin$ Supp $\vec{u}$, le résultat est évident.
Si $b \subset$ Supp $\vec{u}$ et $K \notin$ Supp $\vec{u}$, alors, par construction, $\vec{u}|_K \equiv \vec{0}$ et donc en particulier, $\vec{u}|_K(M_b) = \vec{0}$.

Si $b \subset \text{Supp } \vec{u}$ et $K \subset \text{Supp } \vec{u}$, alors, d'après la construction des fonctions de base, quel que soit le type de la fonction $\vec{u}$, $a \subset K$. En d'autres termes, a et b sont deux arêtes de K. Conformément à la construction de l'espace $\widetilde{V}_h$, à l'arête b sont associés un vecteur tangent $\vec{\tau}_b$ et deux vecteurs normaux $\vec{\nu}_b^1$ et $\vec{\nu}_b^2$ contenus respectivement dans les deux faces F_1 et F_2 de K ayant b pour arête commune et tels que le repère $(\vec{\nu}_b^1, \vec{\nu}_b^2, \vec{\tau}_b)$ soit direct (cf. figure 2.4.1).



On a alors, en posant $\vec{u}_K = \vec{u}|_K$ et par définition des degrés de liberté:

$$\vec{u}_K(M_b).\vec{\nu}_b^1 = \vec{u}_K(M_b).\vec{\nu}_b^2 = 0$$

Donc, $\vec{u}_K(M_b) \in [\vec{\nu}_b^1, \vec{\nu}_b^2]^\perp$ c'est-à-dire $\vec{u}_K(M_b)$ est colinéaire à $\vec{\tau}_b$. Or, on a (encore par définition des degrés de liberté) $\vec{u}_K(M_b).\vec{\tau}_b = 0$. On a donc:

$$\vec{u}_K(M_b) = \vec{0} \qquad \blacksquare$$

On a alors le

Théorème 2.4 *Il existe une base $\widetilde{\mathcal{B}}_h$ de $\widetilde{V}_h$ dans laquelle la matrice de la forme bilinéaire $(\vec{u}_h, \vec{v}_h) \longrightarrow (\vec{u}_h, \vec{v}_h)_h$ est diagonale par blocs. En milieu isotrope, à chaque arête correspond un bloc dont la taille est majorée par le nombre L_a de faces qui y concourent. En milieu anisotrope, cette taille est majorée par $L_a + 1$.*

Démonstration:

D'après le lemme précédent, il est clair que deux fonctions de base associées à deux arêtes distinctes sont orthogonales pour la forme bilinéaire $(.,.)_h$. On se donne alors une numérotation des arêtes de la triangulation $\mathcal{T}_h$ de sorte que l'on puisse écrire:

$$\mathcal{A} = \{a_i, \quad i = 1 \cdots N_a\}$$

A chaque arête a_i sont associées:

- une fonction de type "$\vec{r}$", notée encore $\vec{r}_i$.
- L_i fonctions de type "$\vec{s}$", notées $\vec{s}_i^1, \cdots, \vec{s}_i^{L_i}$.

où $L_i - 1$ désigne le nombre de tétraèdres ayant l'arête a_i en commun. Si $\widetilde{\mathcal{B}}_h$ est la base de $\widetilde{V}_h$ définie par:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_h = \left\{ \vec{r}_1, \vec{s}_1^1, \cdots, \vec{s}_1^{L_1}, \cdots, \vec{r}_{N_a}, \vec{s}_{N_a}^1, \cdots, \vec{s}_{N_a}^{L_{N_a}} \right\}$$

alors, $(.,.)_h$ est diagonale par blocs.

2.4.2 Cas d'un milieu anisotrope

Pour le cas d'un milieu anisotrope, on considère le système du second ordre suivant:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \vec{E}) = 0 \quad x \in \Omega, t > 0 \tag{12}$$

où $\vec{E}$ désigne ici le champ électrique, ε et μ la permittivité électrique et la perméabilité magnétique. De manière générale, ε et μ sont des matrices symétriques définies positives (dépendant a priori de la variable d'espace). La formulation variationnelle de (12) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \vec{u}(t) \in V = H(\text{rot}, \Omega) \text{ tel que:} \\ \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_\Omega \varepsilon \vec{E}(t).\vec{F} dx + \int_\Omega \mu^{-1} \nabla \times \vec{E}.\nabla \times \vec{F} dx = 0 \qquad \forall \vec{F} \in V \end{array} \right. \tag{13}$$

Si $\mathcal{T}_h$ est une triangulation de Ω et $\widetilde{V}_h$ l'espace d'approximation de V associé défini dans la section précédente, le problème semi discrétisé en espace s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \vec{E}_h(t) \in \widetilde{V}_h \text{ tel que:} \\ \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \left(\varepsilon \vec{E}_h(t), \vec{F}_h \right)_h + (\mu^{-1} \nabla \times \vec{E}_h, \nabla \times \vec{F}_h) dx = 0 \qquad \forall \vec{F}_h \in \widetilde{V}_h \end{array} \right. \tag{14}$$

où $(.,.)_h$ est la forme bilinéaire définie sur $\widetilde{V}_h$ dans la section précédente et $(.,.)$ le produit scalaire $(L^2(\Omega))^3$. (14) peut s'écrire sous forme "matricielle":

$$M_{\varepsilon,h} \frac{d^2 E_h}{dt^2} + A_{\mu,h} E_h = 0 \tag{15}$$

Ainsi, pour le cas anisotrope, les termes de la matrice de masse calculés au moyen de la formule de quadrature sont de la forme $(\varepsilon \vec{u}, \vec{v})_h$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux fonctions de base. Soit alors la forme bilinéaire $(.,.)_{\varepsilon,h}$ définie sur $\widetilde{V}_h$ par:

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\varepsilon,h} = (\varepsilon \vec{u}, \vec{v})_h$$

Néanmoins, il est clair que d'après le lemme 2.2, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux fonctions de base associées à deux arêtes distinctes, $\varepsilon \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales pour la forme bilinéaire $(.,.)_h$, ce qui signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales pour la forme bilinéaire $(.,.)_{\varepsilon,h}$. On a donc encore

Théorème 2.5 *La matrice de la forme bilinéaire $(\vec{u}_h, \vec{v}_h) \longrightarrow (\vec{u}_h, \vec{v}_h)_{\varepsilon,h}$ dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}_h$ est diagonale par blocs.*

3 Analyse en maillage régulier

3.1 Le problème modèle considéré.

Dans cette section, on s'est attaché à analyser les schémas obtenus dans le cadre de la résolution des équations de Maxwell en milieu tridimensionnel homogène isotrope, écrites sous la forme d'un système différentiel du second ordre. Notre problème modèle peut donc s'écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \vec{E} \text{ dans } L^2\left([0,T], H(rot, \mathbb{R}^3)\right) \text{ tel que:} \\ \\ \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = 0 \; x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \end{array} \right. \tag{16}$$

La formulation variationnelle de (16) s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \vec{E} \text{ dans } L^2\left([0,T], H(rot, \mathbb{R}^3)\right) \text{ tel que:} \\ \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}.\vec{F} + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \vec{E}.\nabla \times \vec{F} = 0 \quad \forall \vec{F} \in H(rot, \mathbb{R}^3) \end{array} \right. \tag{17}$$

3.2 Construction du problème semi-discret associé au nouvel élément fini d'arête.

3.2.1 Maillage régulier en tétraèdres

Dans ce qui suit, $\mathcal{T}_h$ désigne le maillage régulier de $\mathbb{R}^3$ en tétraèdres obtenu à partir d'un maillage en cubes de coté h divisés en six tétraèdres conformément à la figure 8.

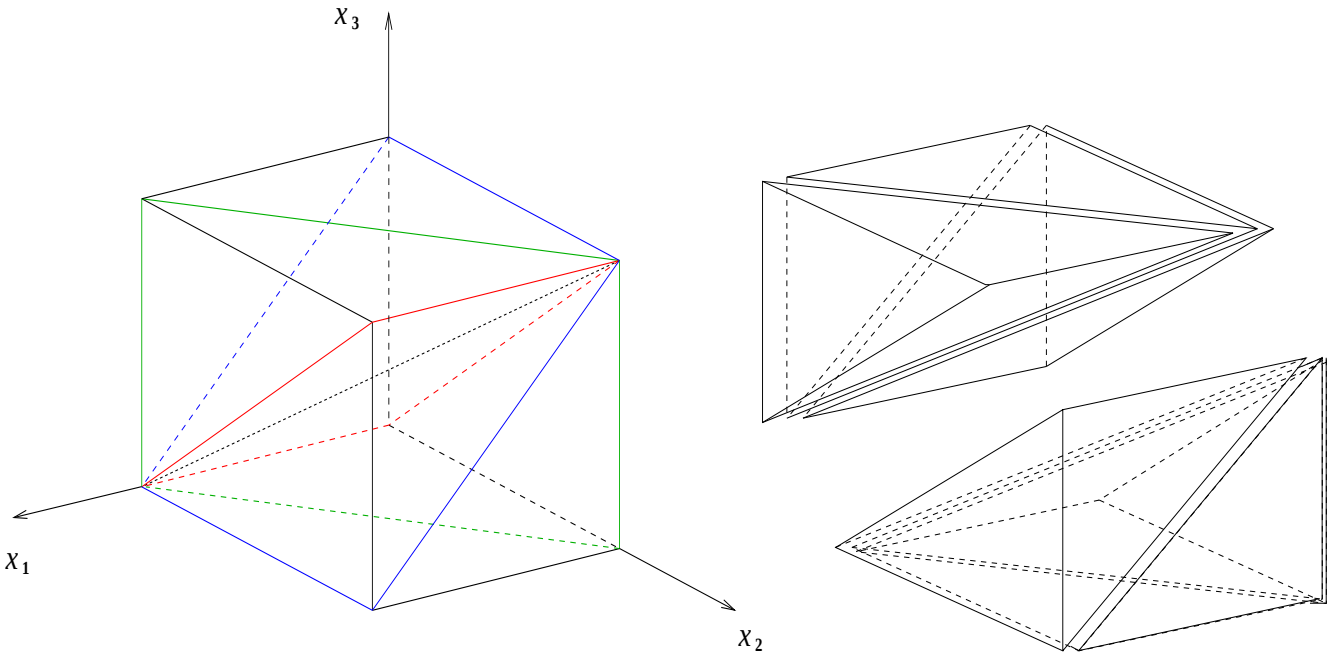


FIG. 8: *Subdivision du cube en six tétraèdres: à gauche, vision en perspective et à droite vue éclatée.*

L'espace de discrétisation associé au nouvel élément fini est défini par:

$$\widetilde{V_h} = \left\{ \vec{v}_h \in H(rot, \mathbb{R}^3) / \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ \vec{v}_{h|_K} \in \widetilde{\mathcal{R}}_1(K) \right\}$$

Le problème semi-discretisé en espace s'écrit alors:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \vec{E}_h \in \widetilde{V_h} \text{ tel que} \\ \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \vec{E}_h . \vec{F}_h + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \times \vec{E}_h . \nabla \times \vec{F}_h = 0 \quad \forall \vec{F}_h \in \widetilde{V_h} \end{cases} \tag{18}$$

Comme dans le cas bidimensionnel (cf. [5]), la régularité du maillage permet d'assimiler notre problème à l'étude d'un réseau périodique dont la cellule de base comporte 43 types de degrés de liberté comme indiqué sur la figure 9 ci-dessous:

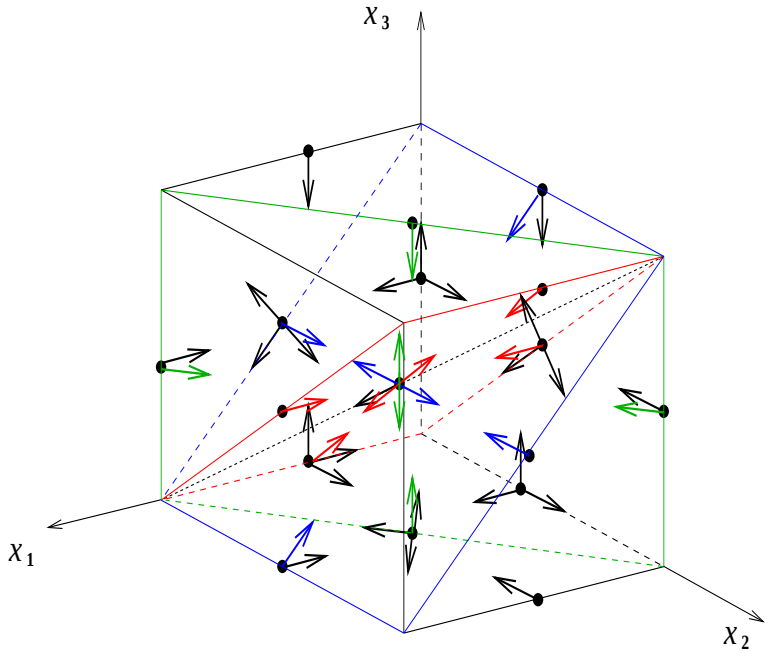


FIG. 9: *La cellule unité pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ et ses 43 types de degrés de liberté.*

A ces 43 degrés de liberté correspondent 43 classes de fonctions de base. En écrivant (18) pour ces 43 types de fonctions de bases, on obtient un système différentiel de dimension 43 équivalent au problème semi discrétisé en espace. Afin d'écrire ce système différentiel sous forme matricielle, introduisons, pour $(p,q,r) \in \mathbb{Z}^3$, la cellule unité $[ph,(p+1)h] \times [qh,(q+1)h] \times [rh,(r+1)h]$ et le vecteur

$$E_{p,q} = (E^l_{p,q}) \in \mathbb{C}^{43}$$

où $E^l_{p,q}$ représente le $l^{\text{ième}}$ degré de liberté de la cellule (p,q) pour $1 \leq l \leq 43$.
Nous désignons par $l^2_h(\mathbb{C}^{43})$ l'espace des suites de carré sommable et posons $E^h = (E_{p,q,r})_{(p,q,r)\in\mathbb{Z}^3}$. Nous munissons l^2_h du produit scalaire:

$$(E_h, F_h) = \sum_{p,q,r} (E_{p,q,r}, F_{p,q,r})_{\mathbb{C}^{43}}$$

où $(,)_{\mathbb{C}^{43}}$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^{43}$. On montre alors que le problème semi-discret peut se réécrire sous la forme

$$\widetilde{M_h}\frac{d^2E^h}{dt^2} + \widetilde{A_h}E^h = 0$$

où $\widetilde{M_h}$ et $\widetilde{A_h}$ sont des opérateurs symétriques et positifs de $l^2_h(\mathbb{C}^{43})$ ($\widetilde{M_h}$ n'est autre que la matrice de masse calculée par quadrature.). $\widetilde{M_h}$ et $\widetilde{A_h}$ sont des opérateurs à coefficients constants dans le sens où ils commutent avec les opérateurs de translation,

$$\forall\,(p,q,r) \in \mathbb{Z}^3, \qquad \tau_{pqr} \circ \widetilde{M_h} = \widetilde{M_h} \circ \tau_{pqr} \text{ et } \tau_{pqr} \circ \widetilde{A_h} = \widetilde{A_h} \circ \tau_{pqr}$$

où τ_{pqr} est définie par

$$S_h = \tau_{pq}(U_h) \Leftrightarrow S_{i,j,k} = U_{i+p,j+q,k+r}$$

3.3 Analyse de la dispersion numérique du schéma semi discret.

3.3.1 Introduction

L'analyse de la dispersion numérique consiste à étudier les solutions de l'équation de type "onde plane" c'est-à-dire de la forme:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0 \exp i(k_1x + k_2y + k_3z - \omega t)$$

Plus précisément, il s'agit d'écrire la relation que doivent respecter la pulsation ω et le nombre d'onde $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ pour qu'une telle fonction soit solution. Cette relation est dite "relation de dispersion". Pour le problème continu, en injectant l'expression de $\vec{E}$ dans notre équation, on obtient la relation de dispersion continue:

$$\omega^2 = |\vec{k}|^2$$

Pour le problème semi-discrétisé, on suppose que les fonctions $E^l_{p,q,r}$ sont de la forme:

$$E^l_{p,q,r} = E^l \exp i(k_1 ph + k_2 qh + k_3 rh - \omega_h t)$$

De telles solutions seront appelées "ondes planes numériques".
En injectant l'expression de E^h dans le système différentiel écrit précédemment, on obtient la relation suivante:

$$\omega_h^2 \widehat{M_h} \vec{E_0} = \widehat{A_h} \vec{E_0} \tag{19}$$

où $\widehat{M_h}(\vec{k})$ et $\widehat{A_h}(\vec{k})$ sont hermitiennes positives et $\vec{E_0} = (E^l,\ l = 1..43)$. La relation (19) s'interprétant comme un problème aux valeurs propres généralisé pour $\widehat{A_h}$, ω_h^2 est valeur propre de $\widehat{A_h}$ et $\vec{E_0}$ est le vecteur propre associé. Notons que les modules des composantes de $\vec{E_0}$ représentent les amplitudes des oscillations de la solution aux 43 types de degrés de liberté. Lorsque h tend vers 0, ces degrés de liberté tendent à se confondre en un seul. Ainsi, si le mode $E_{l,m,n}$ représente une approximation de la quantité continue, le vecteur propre $\vec{E_0}$ doit converger vers le vecteur $(1 \cdots 1)^t$ que nous appellerons vecteur unité. C'est ce qui nous amène à la définition de mode non parasite. Nous appellerons onde plane numérique non parasite le mode associé à la direction propre de la matrice $\widehat{A_h}$ qui converge en direction vers le vecteur unité lorsque h tend vers 0.

Nous nous intéressons ici uniquement à la dispersion de l'onde plane non parasite. Si on note λ_h^0 la valeur propre "physique" (celle associée au mode non parasite), la relation de dispersion du problème semi-discret peut s'écrire:

$$\omega_h^2(\vec{k}) = \lambda_h^0(\vec{k})$$

où ω_h est la pulsation discrète.
Un bon moyen d'évaluer l'erreur introduite par un schéma numérique consiste alors à calculer l'erreur faite sur la vitesse de phase. La relation de dispersion obtenue dans le cas continu nous donne la vitesse exacte:

$$c = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}$$

On définit alors, à partir de la relation de dispersion obtenue dans le cas discret, la vitesse approchée:

$$c_h = \frac{\omega_h}{|\vec{k}|}$$

Pour mesurer l'erreur faite sur la vitesse, on étudie le rapport:

$$Q_h = \frac{c_h}{c} = \frac{\omega_h}{\omega}$$

dont l'écart avec 1 quantifie l'erreur de dispersion du schéma.

Nous posons:

$$K = \frac{|\vec{k}|h}{2\pi} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

où K est l'inverse du nombre d'éléments finis par longueur d'onde, et:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} k_1 & = & |\vec{k}| \cos(\phi) \sin(\theta) \\ k_2 & = & |\vec{k}| \sin(\phi) \sin(\theta) \\ k_3 & = & |\vec{k}| \cos(\theta) \end{array} \right. \tag{20}$$

où $(|\vec{k}|, \theta, \phi)$ sont les coordonnées sphériques du vecteur $\vec{k}$ qui porte la direction de propagation de l'onde (cf. figure 10).

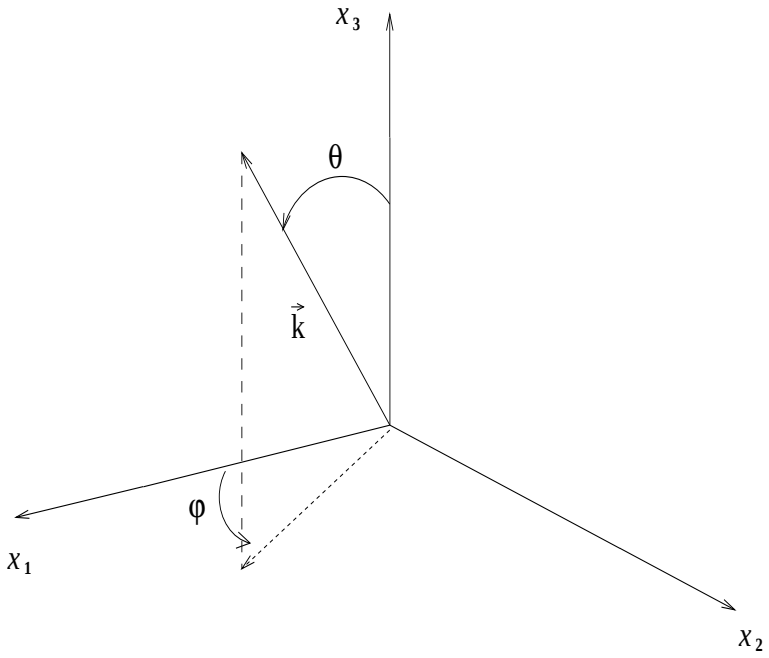


FIG. 10: *Le vecteur $\vec{k}$ en coordonnées sphériques*

Un calcul simple montre qu'il existe une fonction $\lambda^0(K, \theta, \phi)$ définie pour $K \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ telle que:

$$h^2 \lambda_h^0(\vec{k}) = \lambda^0(K, \theta, \phi)$$

On en déduit que

$$Q_h = Q(K, \theta, \phi) = \frac{\lambda^0(K, \theta, \phi)^{\frac{1}{2}}}{2\pi K}$$

La dépendance de Q par rapport à K caractérise la dispersion numérique proprement dite puisqu'elle évalue les variations de la vitesse de phase d'une onde plane en fonction du nombre de points par longueur d'onde. La dépendance de Q par rapport à θ et ϕ caractérise l'anisotropie du schéma puisqu'elle mesure les variations de cette même vitesse en fonction de la direction de propagation.

Définition 3.1 *On appellera par la suite courbe de dispersion du schéma dans la direction (θ, ϕ) la courbe représentant les variations de $Q(K, \theta, \phi)$ en fonction de K.*

3.3.2 Courbes de dispersion numérique

Il est important de noter que le problème aux valeurs propres que nous avons défini ne peut être résolu analytiquement du fait de la taille des matrices qui entrent en jeu. Nous avons donc résolu ces problèmes aux valeurs propres numériquement.
Dans les figures qui suivent, nous avons tracé, à la même échelle, les courbes de dispersion du schéma pour $\theta = 90°$ (ce qui correspond à la "projection" sur le plan $x = 0$) et $\phi = 0°, \pm 15°, \pm 30°, \pm 45°$ (cf. figure 11).

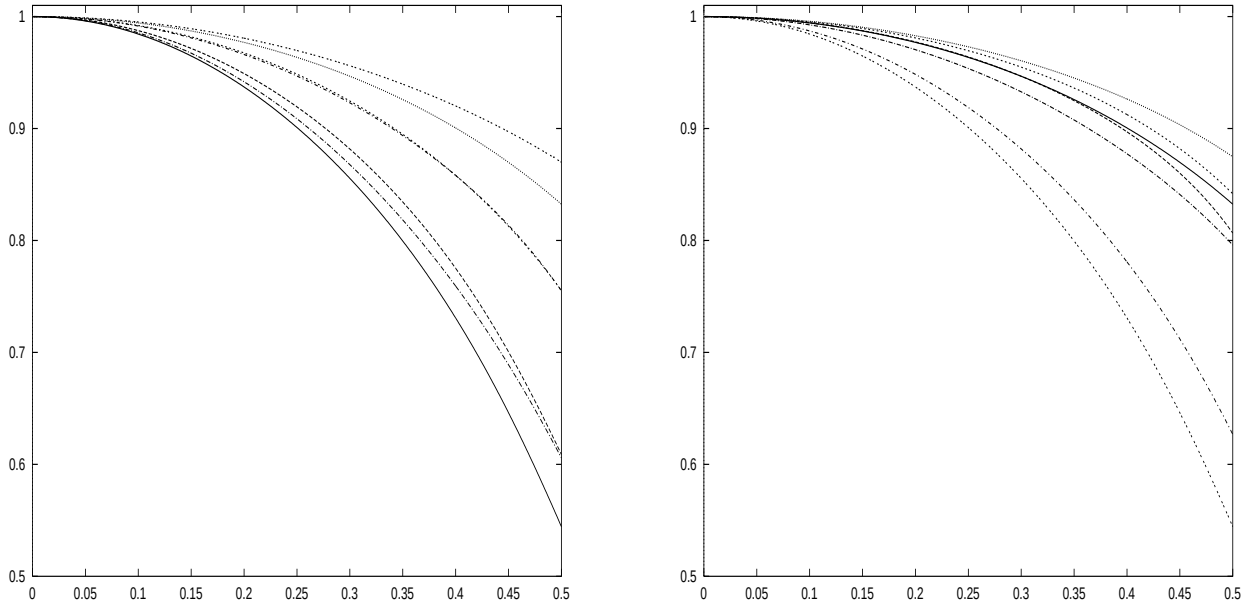


FIG. 11: *Courbes de dispersion pour* $\widetilde{\mathcal{R}}_1$*: à gauche* $\theta = 90°$ *et* $\phi = 0°, \pm 15°, \pm 30°, \pm 45°$ *et à droite* $\phi = 45°$ *et* $\theta = 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°$

On observe que

$$\forall \theta, \quad \forall \phi, \qquad \lim_{K \to 0} Q(K, \psi) = 1$$

ce qui illustre la consistance du schéma. En outre, l'allure "parabolique" des courbes de dispersion au voisinage de $K = 0$ suggère que nous avons affaire à des schémas d'ordre 2. Cela sera confirmé dans le paragraphe suivant.

3.3.3 Ordre de la dispersion numérique

Pour θ et ϕ fixés, si on écrit un développement limité de $Q(K, \theta, \phi)$ au voisinage de $K = 0$ de la forme

$$Q(K, \theta, \phi) = 1 + C(\theta, \phi) K^p + O(K^{p+1}) \tag{21}$$

où $C(\theta, \phi)$ est une constante qui ne dépend que de θ et ϕ, l'entier p est appelé "ordre de la dispersion numérique" introduite par le schéma semi-discrétisé en espace. Or, nous ne disposons pas des premiers termes de ce développement limité. Nous n'avons donc obtenu qu'une estimation numérique de l'ordre de la dispersion introduite. En effet, si on pose $R(K, \theta, \phi) = |Q(K, \theta, \phi) - 1|$, la courbe de $R(., \theta, \phi)$ en échelle logarithmique a l'allure d'une droite dont la pente fournit une estimation de l'entier p (cf. figure 12).

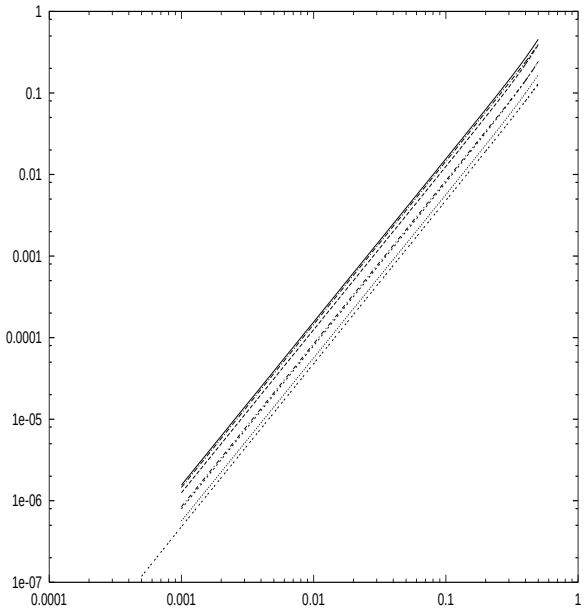


FIG. 12: *Droites en échelle logarithmique pour les éléments tétraédriques*

Ces droites permettent d'émettre la

Conjecture 3.1 *La fonction $\omega_h(\vec{k})$ admet le développement limité suivant:*

$$\omega_h(\vec{k}) = |\vec{k}|(1 + O(h^2|\vec{k}|^2))$$

Remarque 3.1 *Dans le cadre de l'équation des ondes, l'analyse de la dispersion numérique des schémas semi-discrétisés en espace avec condensation de masse sur maillage triangulaire aboutit à un problème aux valeurs propres qui, lui aussi, ne peut être résolu analytiquement. Toutefois, il a été possible d'exhiber les premiers termes du développement limité de la valeur propre "physique" et du vecteur propre associé (cf. [9]). Cette démarche devrait être transposable à notre problème.*

3.3.4 Comparaison avec le schéma correspondant aux éléments finis de Nédélec du premier ordre (matrice de masse non condensée).

On considère maintenant l'espace de discrétisation V_h correspondant aux éléments finis de Nédélec du premier ordre pour maillage tétraédrique. Celui-ci s'écrit

$$V_h = \left\{ \vec{v}_h \in H(rot, \mathbb{R}^3) / \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ \vec{v}_{h|_K} \in \mathcal{R}_1(K) \right\}$$

où $\mathcal{R}_1(K) = \left\{ \vec{u}(x) = \vec{a} \wedge x + \vec{b}, \quad (\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \right\}$.

Cette fois, si on considère le maillage régulier en tétraèdres décrit précédemment, le problème semi-discret associé peut être assimilé à l'étude d'un réseau périodique dont la cellule de base comporte 7 types de degrés de liberté (cf. figure 13)

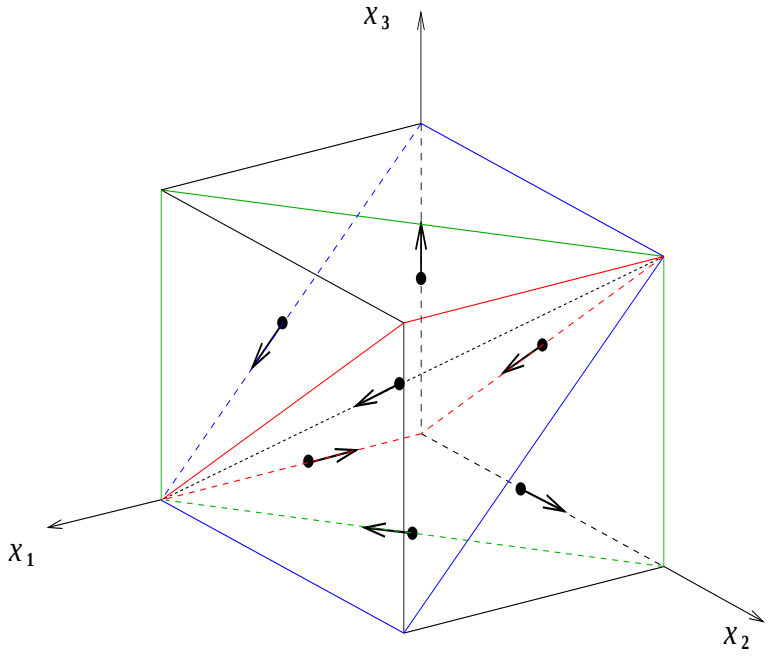


FIG. 13: *La cellule unité pour $\mathcal{R}_1$ et ses 7 types de degrés de liberté.*

Une analyse similaire à celle menée précédemment permet d'écrire la relation de dispersion associé et de tracer les courbes de dispersion correspondantes (cf. figure 14)

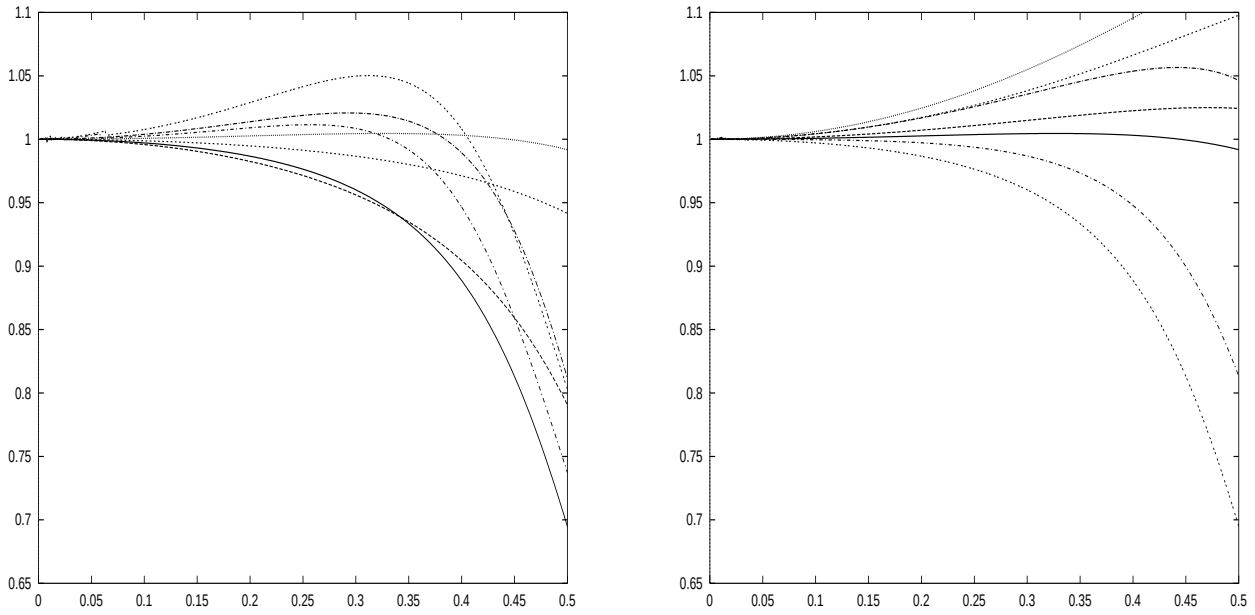


FIG. 14: *Courbes de dispersion pour $\mathcal{R}_1$: à gauche $\theta = 90°$ et $\phi = 0°, \pm 15°, \pm 30°, \pm 45°$ et à droite $\phi = 45°$ et $\theta = 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°$*

Nous avons alors le

Théorème 3.1 *La fonction $\omega_h(\vec{k})$ associée à $\mathcal{R}_1$ admet le développement limité suivant:*

$$\omega_h(\vec{k}) = |\vec{k}|(1 + O(h^2|\vec{k}|^2))$$

Une bonne manière de comparer, pour un maillage donné, la précision du schéma avec condensation de masse et celle du schéma correspondant à la discrétisation usuelle, est de tracer à la même échelle et pour θ et ϕ fixé les courbes de dispersion des deux schémas dans la direction (θ, ϕ). Dans les figures 15 et 16, on a tracé ces courbes pour $\theta = 90°$ et $\phi = 0°, 15°, 30°, 45°$.

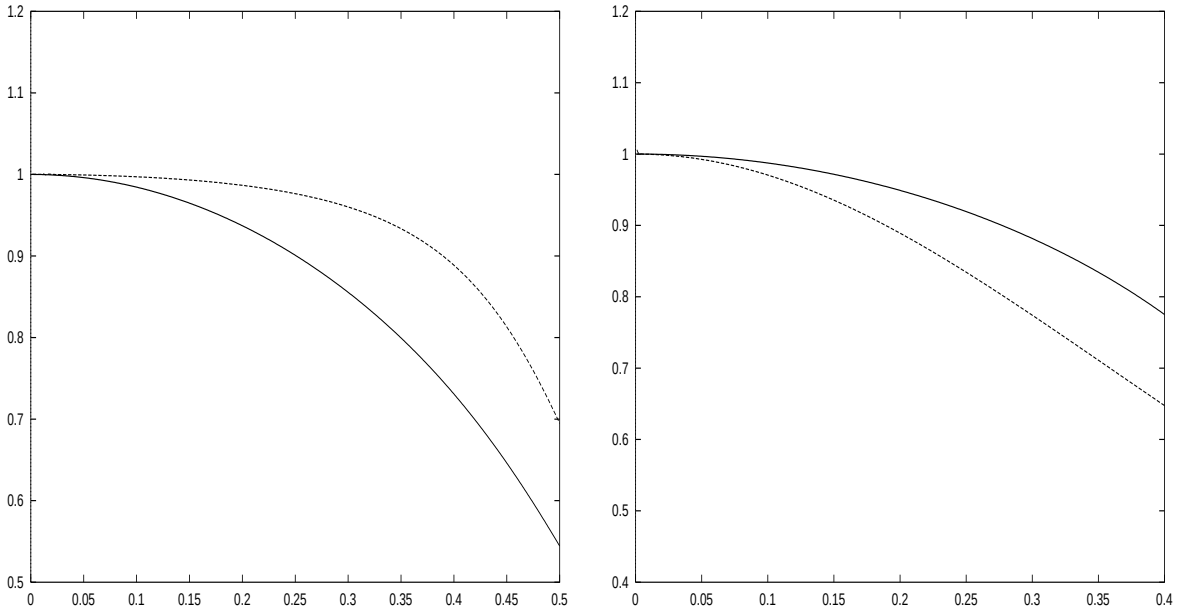


FIG. 15: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et $\mathcal{R}_1$ (pointillé) pour θ fixé à $90°$: $\phi = 0°$ (à gauche) et $\phi = 15°$ (à droite)*

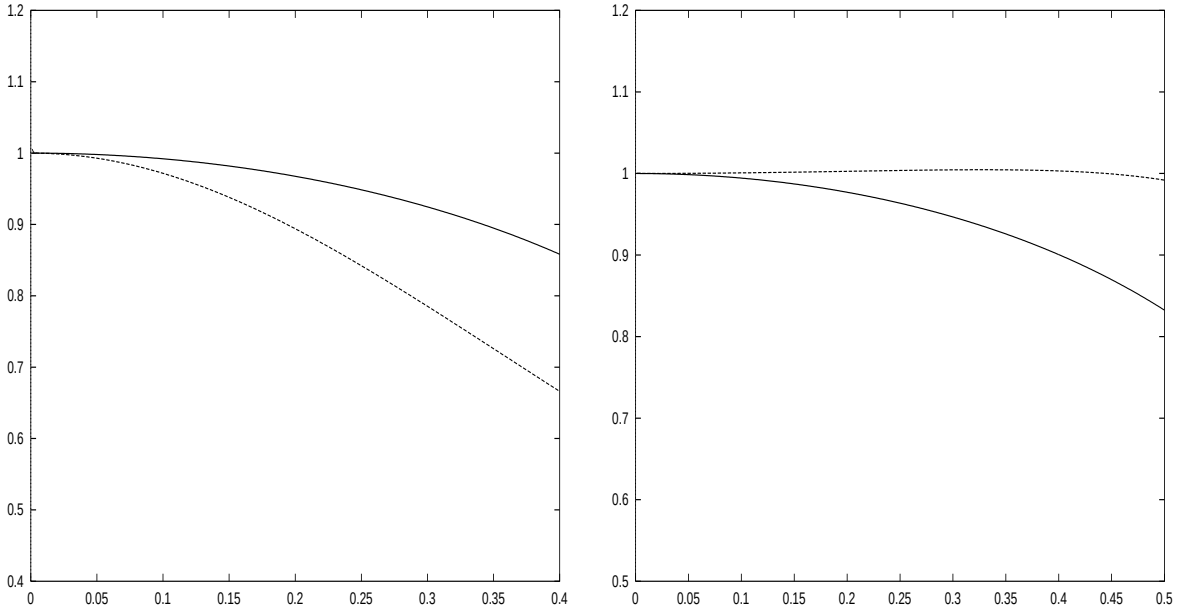


FIG. 16: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et $\mathcal{R}_1$ (pointillé) pour θ fixé à $90°$: $\phi = 30°$ (à gauche) et $\phi = 45°$ (à droite)*

Dans les figures 17 et 18, on a tracé ces deux courbes pour $\phi = 45°$ et $\theta = 15°, 30°, 45°, 60°$.

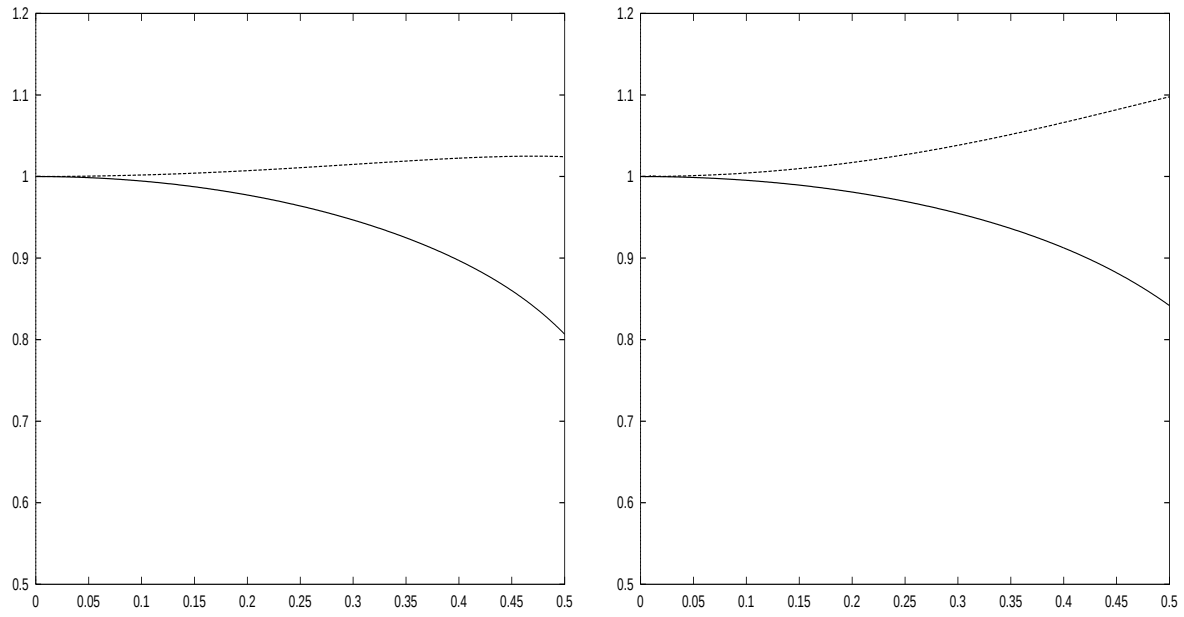


FIG. 17: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et $\mathcal{R}_1$ (pointillé) pour ϕ fixé à 45°: $\theta = 15°$ (à gauche) et $\theta = 30°$ (à droite)*

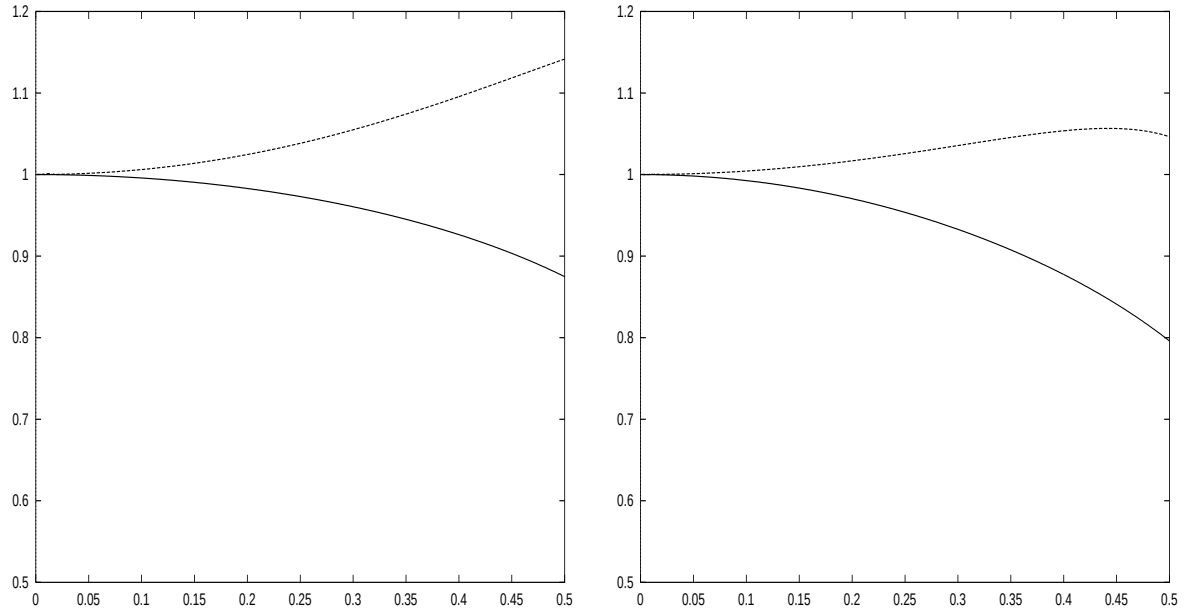


FIG. 18: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et $\mathcal{R}_1$ (pointillé) pour ϕ fixé à 45°: $\theta = 45°$ (à gauche) et $\theta = 60°$ (à droite)*

Ces courbes appellent le commentaire suivant. Rappelons que dans le cas bidimensionnel, le schéma associé au nouvel élément fini d'arête avec condensation de masse du premier ordre introduit, en maillage régulier, une erreur de dispersion qui est du même ordre que celle introduite par le schéma classique. Cependant, il s'avère moins précis et ce, quelle que soit la direction de propagation considérée (cf. [5]). Ce resultat semble donc se confirmer pour l'élément 3D du premier ordre.

3.4 Discrétisation en temps

3.4.1 Introduction

Dans les sections précédentes, nous nous sommes intéressés à la discrétisation en espace. Notre problème semi-discret peut être défini de façon générale par:

$$\frac{d^2E_h}{dt^2} + D_h E_h = 0 \tag{22}$$

où D_h est l'opérateur $M_h^{-1}A_h$.

Il reste alors à définir la discrétisation en temps. Le plus simple consiste à utiliser le schéma classique saute mouton avec 3 pas de temps en écrivant:

$$\frac{E_h^{n+1} - 2E_h^n + E_h^{n-1}}{\Delta t^2} + D_h E_h^n = 0 \tag{23}$$

où Δt représente le pas de discrétisation en temps.

3.4.2 Analyse de la stabilité: résultats généraux

Une importante caractéristique relative à une analyse et à une implémentation de ce genre de schéma est l'étude de leur stabilité. En effet, il est bien connu que les schémas explicites dépendent d'une condition de stabilité. Pour le schéma saute mouton (23), la condition de stabilité est:

$$\frac{\Delta t^2 \|D_h\|}{4} \leq 1 \tag{24}$$

où, si on note $a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = \displaystyle\int_\Omega \nabla\times\vec{u}_h.\nabla\times\vec{v}_h dx$ et $(\vec{u}_h, \vec{v}_h)_h = \displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \oint_K \vec{u}_h.\vec{v}_h\, dx$,

$$\|D_h\| = \sup_{v_h\in\tilde{V}_h} \frac{a(\vec{v}_h, \vec{v}_h)}{(\vec{v}_h, \vec{v}_h)_h}$$

Par un argument d'homogénéité, on a:

$$\|D_h\| = h^2\|D_1\|$$

Une analyse par transformée de Fourier discrète (cf. [4]) montre que

$$\|D_1\| = \max_{K\in[0,\frac{1}{2}]} \max_{1\leq j\leq 43} \lambda^i(K)$$

où les $\lambda^i(K)$ sont les solutions du problème aux valeurs propres généralisé

$$A_1(K)\vec{w} = \lambda M_1(K)\vec{w}$$

La condition (24) devient alors:

$$\frac{\Delta t^2}{h^2} \leq \frac{4}{\max\limits_{i,K}|\lambda^i(K)|}$$

c'est-à-dire:

$$\alpha \leq \frac{2}{\sqrt{\max\limits_{i,K}|\lambda^i(K)|}}$$

où

$$\alpha = \frac{\Delta t}{h}$$

3.4.3 Stabilité des schémas pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ et $\mathcal{R}_1$

Il est important de noter que le maximum $\max_{i,K}|\lambda^i(K)|$, quelle que soit la matrice $\widehat{D_h}$, est estimé numériquement du fait de la complexité des termes de ces matrices. On obtient alors les conditions de stabilité suivantes:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \leq & 0,18 \text{ pour } \widetilde{\mathcal{R}}_1 \\ \alpha & \leq & 0,23 \text{ pour } \mathcal{R}_1 \end{array} \tag{25}$$

On peut donc constater que le nouveau schéma présente une condition de stabilité légèrement plus restrictive que celle associée au schéma classique sans condensation de masse. Ce resultat, si le nouveau schéma ne faisait pas intervenir l'intégration numérique, pouvait être attendu. En effet, dans la mesure où l'espace de discrétisation a été enrichi ($V_h \subset \widetilde{V}_h$), on a:

$$\sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{a(\vec{v}_h, \vec{v}_h)}{(\vec{v}_h, \vec{v}_h)} \leq \sup_{\vec{v}_h \in \widetilde{V}_h} \frac{a(\vec{v}_h, \vec{v}_h)}{(\vec{v}_h, \vec{v}_h)}$$

La valeur maximum permise par la condition de stabilité étant inversement proportionnelle à la norme de l'opérateur considéré, il en résulte que la condition de stabilité est au moins aussi restrictive lorsque l'on enrichit l'espace. Il semblerait donc que ce resultat reste dans notre cas inchangé par l'emploi de l'intégration numérique.

3.4.4 Analyse de la dispersion

Rappelons que les différents schémas discrétisés en temps et en espace s'écrivent:

$$\frac{E_h^{n+1} - 2E_h^n + E_h^{n-1}}{\Delta t^2} + D_h E_h^n = 0 \tag{26}$$

Comme dans le cas semi-discret, l'analyse de dispersion consiste à étudier l'erreur commise sur la vitesse des ondes planes solutions de notre problème discrétisé en temps et en espace. La relation de dispersion à satisfaire pour qu'un champ de type "onde plane", c'est-à-dire de la forme

$$E_{p,q,r}^l = E^l \exp i(k_1 ph + k_2 qh + k_3 rh - \omega_h^{\Delta t} n\Delta t)$$

soit solution de (26) s'écrit:

$$\frac{4}{\Delta t^2} \sin^2(\frac{\Delta t}{2}\omega_h^{\Delta t}) = \lambda^0$$

où λ^0 est la valeur propre "physique" de $\widehat{D_1}$.

On s'intéresse à la vitesse de phase adimensionnelle $Q_h = \dfrac{\omega_h^{\Delta t}}{\omega}$ en fonction de deux paramètres:

- $K = \dfrac{|\vec{k}|h}{2\pi} = \dfrac{1}{N}$
- $\alpha = \dfrac{\Delta t}{h}$

On a alors:

$$Q_h = \frac{1}{\pi\alpha K} \arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{h^2\lambda^0}\right)$$

Dans les figures qui suivent, nous avons représenté les variations de la vitesse de phase adimensionnelle en fonction de K pour différents coefficients α et différentes directions de propagation données par θ et ϕ.

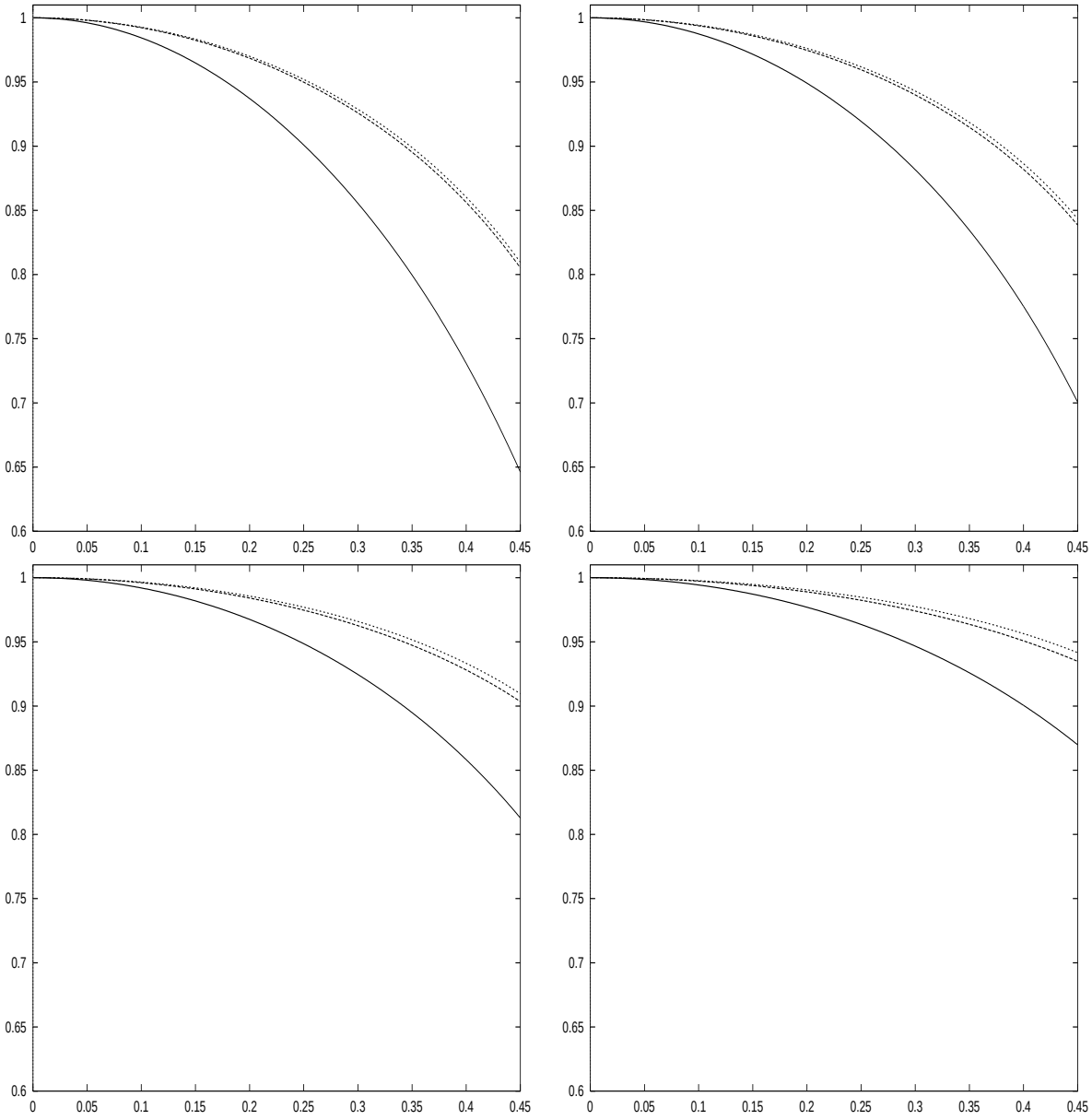


FIG. 19: *Courbes de dispersion pour* $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ *et l'ordre 2 en temps avec* $\alpha = 0$ *(semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.18 pour les courbes supérieures, pour* θ *fixé à* $90°$ *et pour différentes valeurs de l'angle* ϕ*: en haut à gauche:* $\phi = 0°$*, en haut à droite:* $\phi = 15°$*, en bas à gauche:* $\phi = 30°$ *et en bas à droite:* $\phi = 45°$.

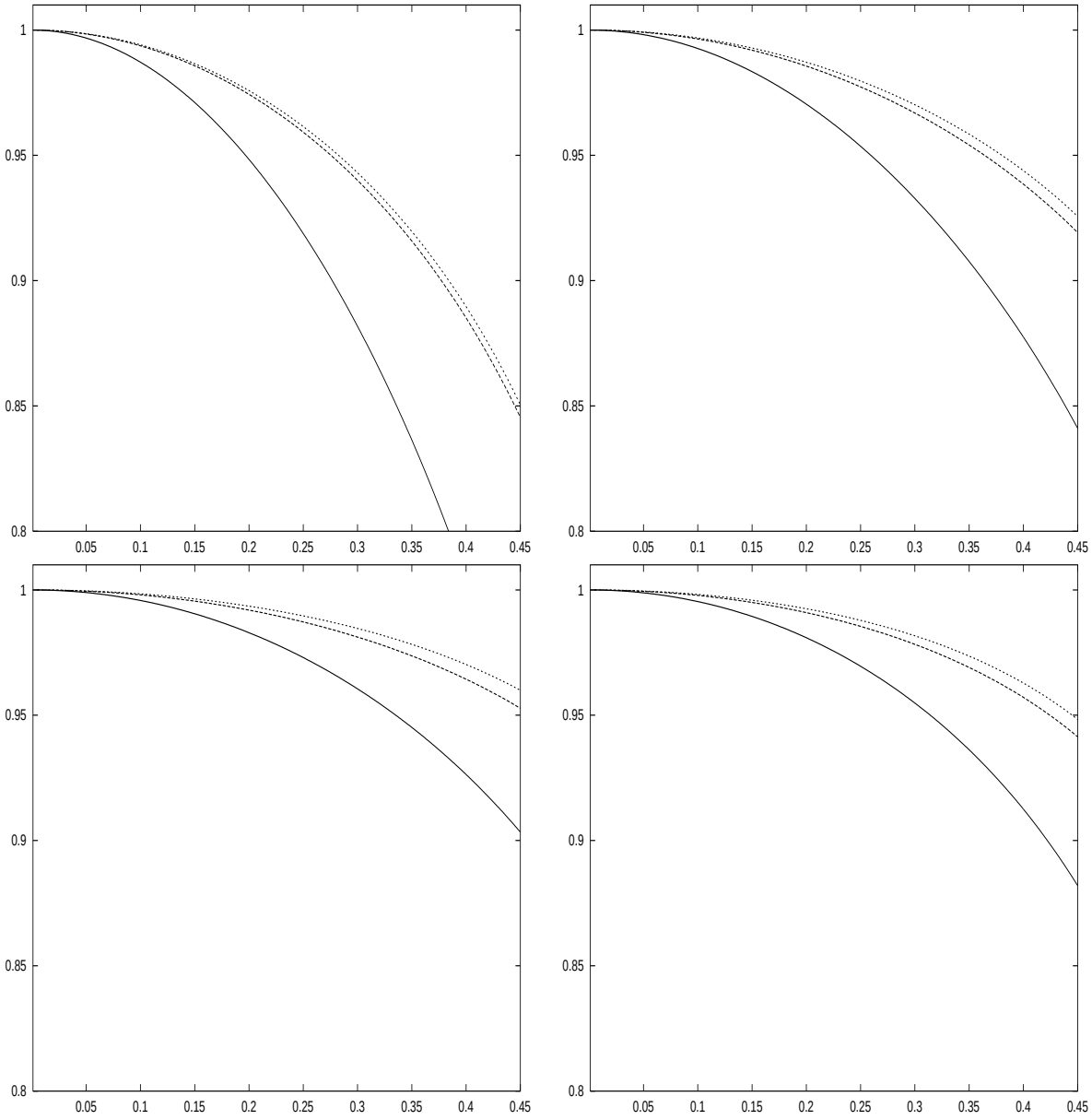


FIG. 20: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ et l'ordre 2 en temps avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.18 pour les courbes supérieures, pour ϕ fixé à $45°$ et pour différentes valeurs de l'angle θ: en haut à gauche: $\theta = 15°$, en haut à droite: $\theta = 30°$, en bas à gauche: $\theta = 45°$ et en bas à droite: $\theta = 60°$.*

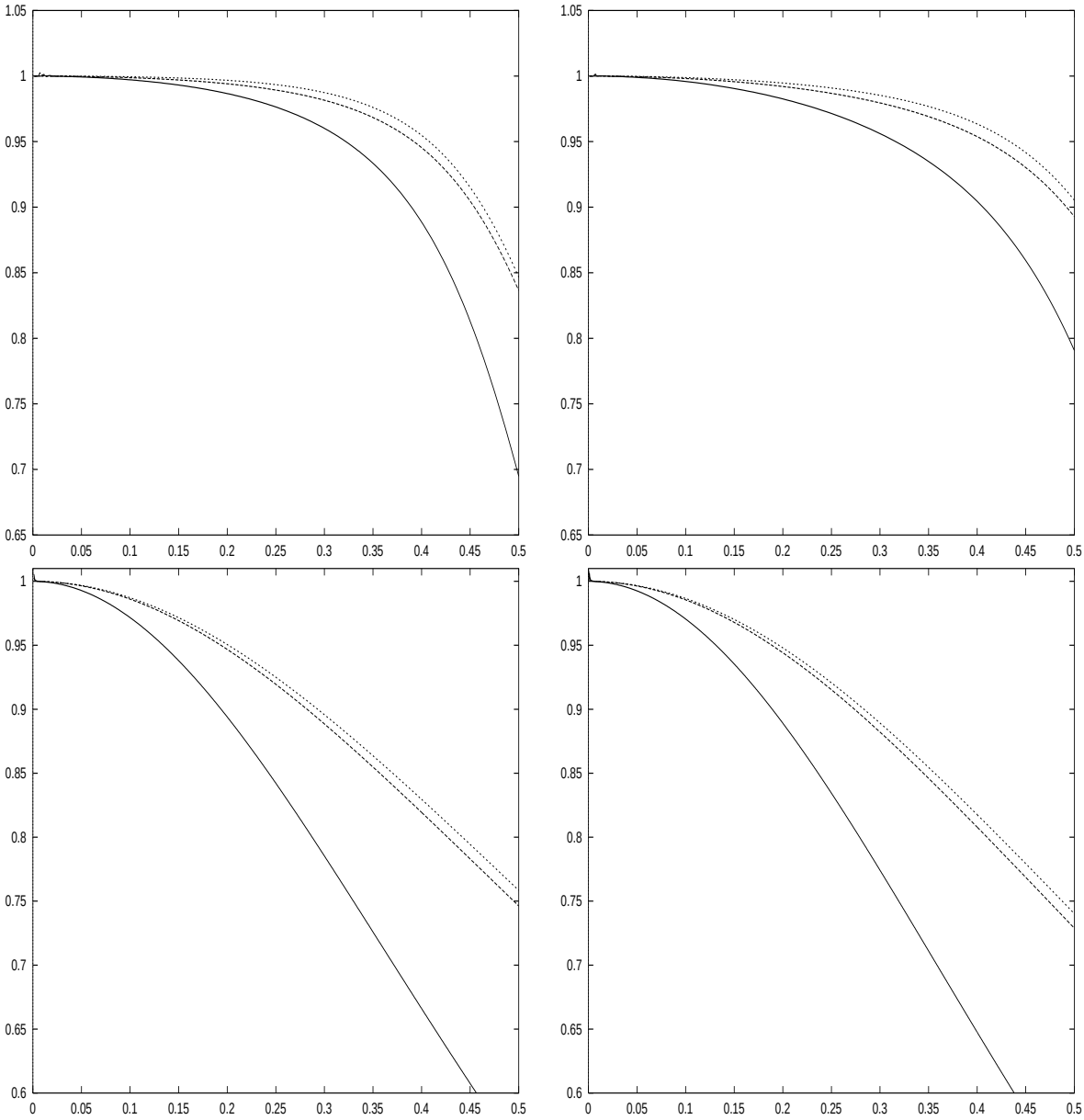


FIG. 21: *Courbes de dispersion pour $\mathcal{R}_1$ et l'ordre 2 en temps avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.23 pour les courbes supérieures, pour θ fixé à $90°$ et pour différentes valeurs de l'angle ϕ: en haut à gauche: $\phi = 0°$, en haut à droite: $\phi = 15°$, en bas à gauche: $\phi = 30°$ et en bas à droite: $\phi = 45°$.*

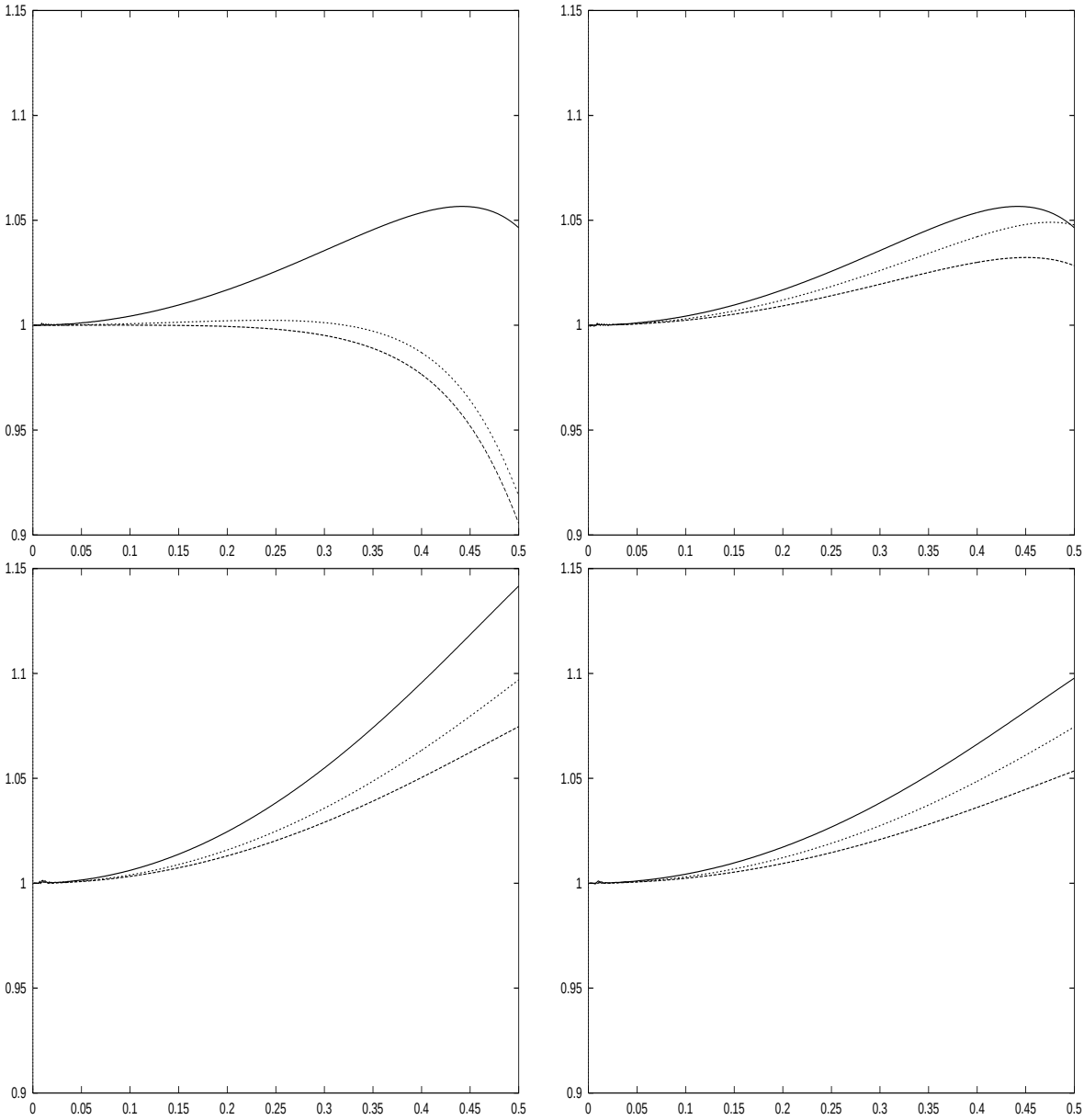


FIG. 22: *Courbes de dispersion pour $\mathcal{R}_1$ et l'ordre 2 en temps avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.23 pour les courbes supérieures, pour ϕ fixé à $45°$ et pour différentes valeurs de l'angle θ: en haut à gauche: $\theta = 15°$, en haut à droite: $\theta = 30°$, en bas à gauche: $\theta = 45°$ et en bas à droite: $\theta = 60°$.*

Pour comparer la précision des deux schémas discrétisés en temps et en espace, nous avons tracé, à la même échelle et pour α fixé, les courbes de dispersion des deux schémas dans une direction donnée. Dans les figures qui suivent, α est fixé à 0.18 (la valeur maximale autorisée pour le schéma avec condensation de masse).

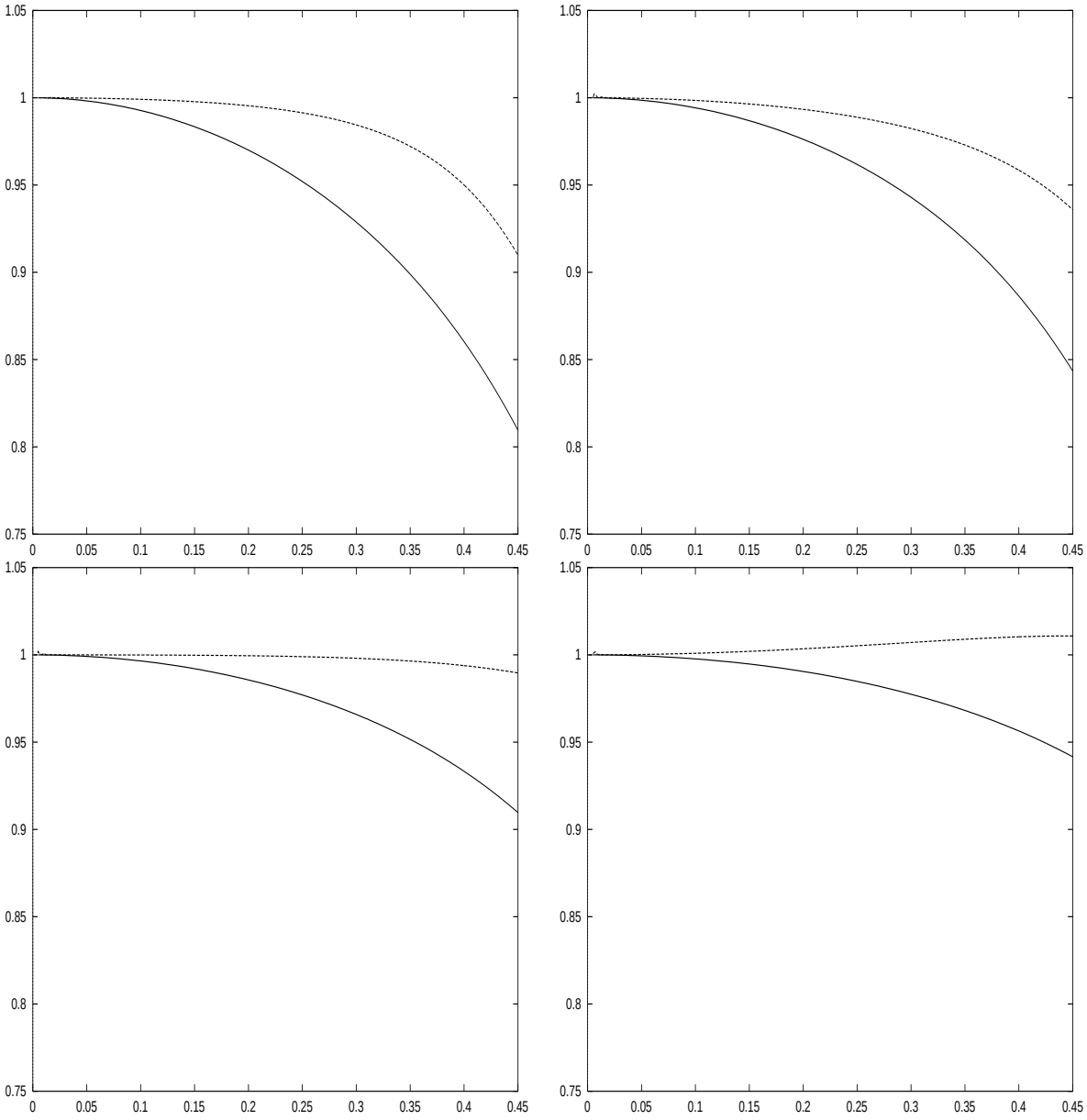


FIG. 23: *Courbes de dispersion comparées pour $\mathcal{R}_1$ (pointillé) et $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et l'ordre 2 en temps avec $\alpha = 0.18$, θ fixé à $90°$ et pour différentes valeurs de l'angle ϕ: en haut à gauche: $\phi = 0°$, en haut à droite: $\phi = 15°$, en bas à gauche: $\phi = 30°$ et en bas à droite: $\phi = 45°$.*

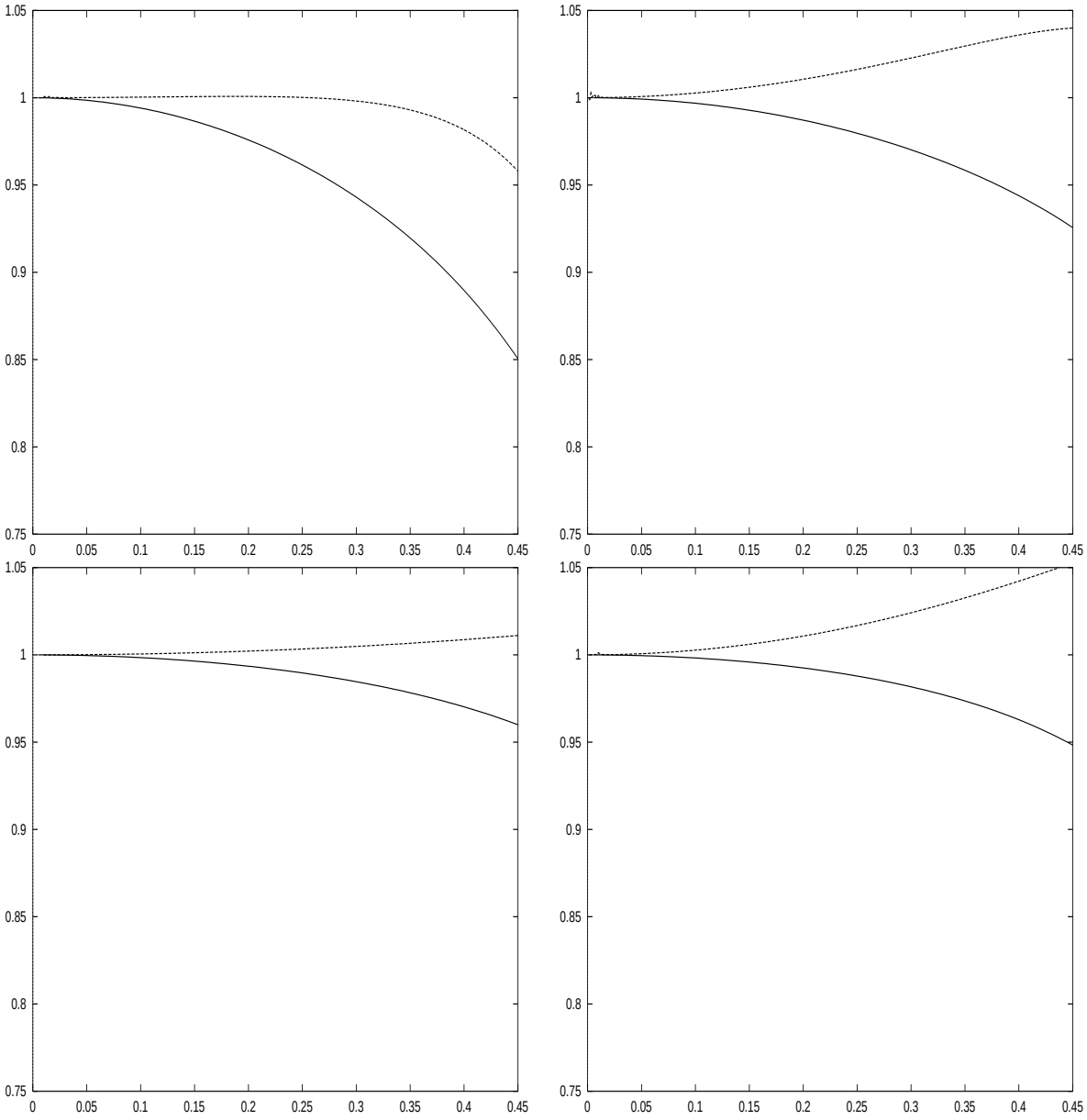


FIG. 24: *Courbes de dispersion comparées pour $\mathcal{R}_1$ (pointillé) et $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et l'ordre 2 en temps avec $\alpha = 0.178$, ϕ fixé à $45°$ et pour différentes valeurs de l'angle θ: en haut à gauche: $\theta = 15°$, en haut à droite: $\theta = 30°$, en bas à gauche: $\theta = 45°$ et en bas à droite: $\theta = 60°$.*

Ces courbes permettent de constater que la discrétisation en temps améliore la précision du schéma (du point de vue de la dispersion numérique) et que cette précision est optimale pour la valeur de α maximale. Néanmoins, le schéma numérique avec condensation de masse reste moins précis que le schéma classique sans condensation de masse.

4 Un nouvel élément fini tétraédrique du second ordre

Lorsque l'on s'intéresse à la résolution numérique des équations de Maxwell en régime transitoire, l'utilisation de méthodes d'ordre élevé présente un intérêt évident, tant du point de vue du coût de calcul que de celui de la dispersion numérique qui est bien connue comme étant le principal facteur limitant les méthodes du second ordre. C'est ce qui nous a conduit à chercher une généralisation de la condensation de masse à des méthodes

de type éléments finis d'arête tétraédrique d'ordre supérieur. Dans le cadre des éléments finis de Lagrange pour l'équation des ondes scalaire, pour obtenir la condensation de masse, on doit à la fois:

- enrichir l'espace d'éléments finis classique
- chercher une formule d'intégration numérique à poids positifs dont les nœuds coïncident avec les degrés de libertés du nouvel élément

Toutefois, pour ne pas altérer la précision du schéma en espace, on doit respecter le critère suivant: si le nouvel espace de fonctions $\widetilde{P}$ est compris, au sens de l'inclusion, entre P_k et $P_{k'}$, la formule de quadrature doit intégrer exactement les polynômes de $P_{k+k'-2}$. Cette condition, que l'on peut trouver dans les travaux de Ciarlet sur les problèmes elliptiques ([1]), relie la précision de la formule d'intégration numérique et le degré des polynômes de l'espace $\widetilde{P}$. Il faudrait donc, a priori, trouver l'analogue de ce critère pour les éléments finis d'arête. Dans le cadre des éléments finis d'arête en milieu bidimensionnel, l'analogue de ce critère n'ayant pas été établi, nous avons construit de nouveaux éléments finis en cherchant, dans chaque cas, la formule d'intégration à poids positifs la plus précise possible qui assure la condensation de masse. C'est la démarche que nous avons encore adopté dans le cas des éléments finis tétraédriques.

4.1 Elément fini tétraédrique du second ordre usuel

Dans ce qui suit, nous adoptons les notations de la section 2. Rappelons que pour l'élément fini d'arête tétraédrique usuel du second ordre, l'ensemble Σ des degrés de liberté choisi est donné par:

$$\Sigma = \left\{ \int_{\Gamma_{ij}} \vec{u}\vec{\tau} p d\sigma \quad \forall p \in P_1(\Gamma_{ij}), \quad i = 1 \cdots 4 \right\} \bigcup \left\{ \int_{T_i} (\vec{u} \wedge \vec{n}).\vec{q} d\gamma \quad \forall \vec{q} \in (P_0(K))^3, \quad i = 1..4 \right\}$$

où Γ_{ij} désigne l'arête S_iS_j. On a $|\Sigma| = 20$. L'espace vectoriel de champs de vecteurs $\mathcal{R}_2$ est défini par:

$$\mathcal{R}_2 = (P_1(K))^3 \oplus \mathcal{S}_2$$

où $\mathcal{S}_2$ est l'espace vectoriel de dimension 8 engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2x_3 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_3 \\ 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3^2 \\ 0 \\ -x_1x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_3^2 \\ -x_2x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ -x_1x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_3 \\ -x_1x_2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

On a bien dim $\mathcal{R}_2 = 20$. $\mathcal{R}_2$ est Σ-unisolvant et on obtient ainsi un élément fini conforme dans $H(rot)$ (cf. [7]). De manière analogue au cas 2D, nous allons d'abord montrer comment on peut, sans changer les propriétés de cet élément fini, remplacer ces degrés de liberté par des quantités qui se prêtent à l'emploi de formules de quadrature.
Sur chaque arête Γ_{ij}, on choisit 2 points notés $M_{ij}(\alpha)$ et $M_{ji}(\alpha)$ où $M_{ij}(\alpha)$ (resp. $M_{ji}(\alpha)$) est le barycentre de S_i et S_j avec pour poids respectifs $(1-\alpha)$ et α (resp. α et $(1-\alpha)$). D'autre part, on note F_i le centre de gravité de la face T_i. Aa chaque point M_{ij} est associé un vecteur τ_{ij} tangent à l'arête Γ_{ij} et d'orientation arbitraire. On considère alors l'ensemble des degrés de liberté suivant:

$$\Sigma' = \{\vec{u}.\vec{\tau}_{ij}(M_{ij}), \quad i,j = 1 \cdots 4\} \cup \{(\vec{u} \wedge \vec{n}).\vec{e}_{i,1}(F_i), (\vec{u} \wedge \vec{n}).\vec{e}_{i,2}(F_i), i = 1 \cdots 4\}$$

où $(\vec{e}_{i,1}, \vec{e}_{i,2})$ est une base orthonormée du plan contenant la face T_i (cf. figure 25).

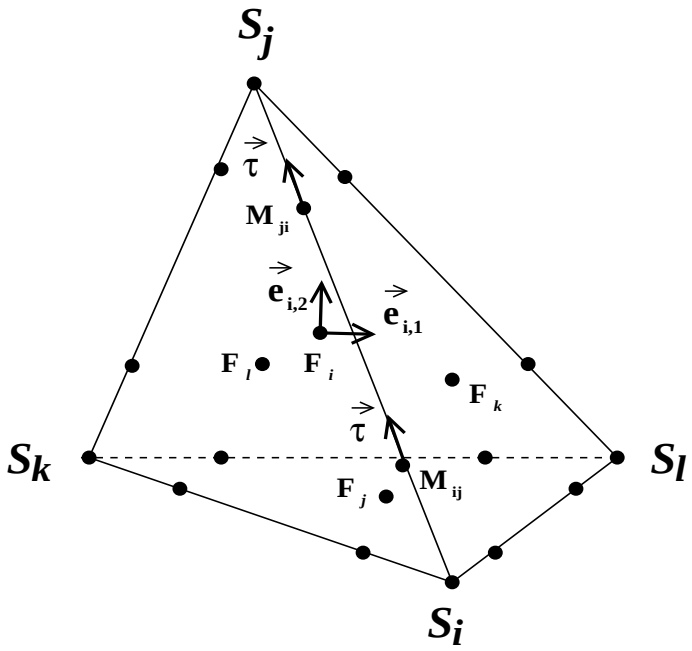


FIG. 25: *Degrés de liberté pour l'élément fini d'arête usuel du second ordre.*

On a alors le

Lemme 4.1 *L'espace $\mathcal{R}_2$ est Σ'-unisolvant et l'élément fini obtenu est $H(rot)$-conforme.*

Démonstration:

Soit (i,j,k,l) une permutation circulaire de $(1,2,3,4)$. A chaque face $T_i = S_jS_kS_l$, on associe l'ensemble des degrés de liberté Σ'_i défini par:
$\Sigma'_i = \{\vec{u}.\vec{\tau_{pq}}(M_{pq}), \vec{u}.\vec{\tau}_{qp}(M_{qp}), \quad p,q \in \{j,k,l\}\} \cup \{\vec{u} \wedge \vec{n}(G_i), \vec{u} \wedge \vec{n}(F_i)\}$ Soit alors $\vec{u} \in \mathcal{R}_2$ annulant toutes les formes linéaires de Σ'_i. Sur la face T_i, $\vec{u}_i = (\vec{u} \wedge \vec{n})_{|T_i} \in \mathcal{R}_2(T_i)$. Or, il a été établi dans [5] que $\mathcal{R}_2(T_i)$ est Σ'_i-unisolvant. On a donc $\vec{u}_i = 0$ ce qui démontre la conformité $H(rot)$.
D'autre part, si $\vec{u} \in \mathcal{R}_2$ annule toutes les formes linéaires de Σ', il annule en particulier celles de Σ'_i pour tout i, ce qui implique $\vec{u}_i = 0$ pour chaque face T_i. Par conséquent,

$$\forall \vec{q} \in (P_0(T_i))^3, \quad \int_{T_i} (\vec{u} \wedge \vec{n}).\vec{q}d\gamma = \int_{T_i} \vec{u}_i.\vec{q}d\gamma = 0$$

et

$$\forall i,j = 1 \cdots 4 \quad \forall p \in P_1(\Gamma_{ij}), \quad \int_{\Gamma_{ij}} \vec{u}\vec{\tau}.pd\sigma = \int_{\Gamma_{ij}} \vec{u}_i\vec{\tau}pd\sigma 0 \tag{28}$$

Ainsi, $\vec{u}$ annule toutes les formes linéaires de Σ. Puisque $\mathcal{R}_2$ est Σ- unisolvant, on a donc $\vec{u} = 0$ ce qui achève la démonstration. ■

4.2 Rappels sur les formules de quadrature symétriques dans un tétraèdre

De manière analogue cas 2D, nous rappelons d'abord dans ce paragraphe le cadre théorique introduit dans [9] pour l'étude des formules de quadrature sur un tétraèdre K.
De manière générale, une formule de quadrature est définie par

$$E_K(f) = \text{mes}(K)\sum_i \omega_i f(x_i)$$

où ω_i et x_i sont respectivement les poids et les points de quadrature sur K. Nous allons nous limiter dans ce qui suit aux formules de quadrature symétriques. Nous renvoyons à [9] (voir aussi [6]) pour plus de détails.

Pour cela, introduisons S_4 l'ensemble des permutations de $\{1,2,3,4\}$.
A toute fonction de deux variables $f(x,y,z)$ vue comme une fonction des quatre variables $\lambda_1(x,y,z)$, $\lambda_2(x,y,z)$, $\lambda_3(x,y,z)$, $\lambda_4(x,y,z)$ que l'on note encore $f(\lambda_1(x,y,z),\lambda_2(x,y,z),\lambda_3(x,y,z),\lambda_4(x,y,z))$, et toute permutation $\sigma \in S_4$, on associe la fonction f_σ définie par

$$f_\sigma(x,y,z) = f(\lambda_{\sigma(1)}(x,y,z),\lambda_{\sigma(2)}(x,y,z),\lambda_{\sigma(3)}(x,y,z),\lambda_4(x,y,z))$$

Une formule de quadrature est dite "symétrique" quand

$$\forall \sigma \in S_4, \forall f \in \mathcal{C}_0(K), \qquad E_K(f) = E_K(f_\sigma)$$

(cette propriété est vérifiée par l'intégration exacte).

Pour décrire les formules de quadrature symétriques, introduisons l'application qui à tout point de quadrature X de coordonnées barycentriques $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ associe le point X_σ de coordonnées barycentriques $(\lambda_{\sigma(1)},\lambda_{\sigma(2)},\lambda_{\sigma(3)},\lambda_{\sigma(4)})$. Cette application permet de définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_4 / Y = X_\sigma$$

Si l'ensemble $\mathcal{Q}$ des points de quadrature est stable par cette application, on dit qu'il est symétrique et en associant un poids ω_C à chaque classe d'équivalence C de $\mathcal{Q}$, on définit une formule de quadrature symétrique:

$$E_K(f) = \mathrm{mes}(K) \sum_{C \subset \mathcal{Q}} \omega_C \left[\sum_{x \in C} f(x) \right]$$

Soit M_k l'ensemble des monômes de P_k. On définit sur M_k la relation d'équivalence $\widehat{\mathcal{R}}$ par

$$r\widehat{\mathcal{R}}s \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_4 / s = r_\sigma$$

On montre alors qu'une formule de quadrature symétrique est exacte sur P_k si et seulement si elle est exacte sur un représentant de chaque classe d'équivalence de M_k pour la relation $\widehat{\mathcal{R}}$.

4.3 Nouvel élément fini du second ordre: une idée naturelle.

Pour construire un nouvel élément fini du second ordre assurant la condensation de masse, il semblerait naturel de suivre la même démarche que celle adoptée pour le premier ordre. A chaque point M_{ij} sont donc associés deux vecteurs normaux $\vec{n}_{ij}^k$ et $\vec{n}_{ij}^l$ (où $k,l \neq i,j$) définis conformément à la section 2. On introduit ainsi 24 vecteurs unitaires. Pour obtenir la condensation de masse, il est nécessaire d'avoir comme degrés de liberté toutes les composantes du champs aux nœuds de quadrature. On choisit donc comme degrés de liberté les quantités:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Sigma} &= \{(\vec{u}.\vec{\tau})(M_{ij}),(\vec{u}.\vec{\tau})(M_{ji}) \quad \{i,j\} \subset \{1,2,3,4\}\} \\ &\cup \left\{(\vec{u}.\vec{n}_{ij}^k)(M_{ij}),(\vec{u}.\vec{n}_{ji}^k)(M_{ji}) \ \{i,j\} \subset \{1,2,3,4\},\ k \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}\right\} \\ &\cup \{(\vec{u} \wedge \vec{n}).\vec{e}_{i,1}(F_i),(\vec{u} \wedge \vec{n}).\vec{e}_{i,2}(F_i),(\vec{u} \wedge \vec{n}).\vec{n}(F_i) \quad i = 1 \cdots 4\} \end{aligned} \tag{29}$$

Nous sommes donc amené à chercher une formule de quadrature de la forme:

$$\begin{aligned} \int_K \vec{u}\vec{v}dx &\simeq mes(K) \left\{ \omega_m (\sum_{i,j} \vec{u}(M_{i,j}).\vec{v}(M_{i,j})) \right\} \\ &+ mes(K) \left\{ \omega_f (\sum_i \vec{u}(F_i).\vec{v}(F_i)) \right\} \end{aligned} \tag{30}$$

où ω_m représente le poids associé aux points situés sur les arêtes et ω_f celui associé aux barycentres des faces du tétraèdre.
Nous avons ici 3 paramètres ω_m, ω_f et α ce qui permet d'affirmer que cette formule intègre exactement P_3 qui comporte trois classes d'équivalence pour la relation $\widehat{\mathcal{R}}$:

$$\begin{array}{l} C_1 = \left\{\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3, \lambda_4^3\right\} \\ C_2 = \left\{\lambda_1^2\lambda_2, \lambda_1^2\lambda_3, \lambda_1^2\lambda_4, \lambda_2^2\lambda_1, \lambda_2^2\lambda_3, \lambda_2^2\lambda_4, \lambda_3^2\lambda_1, \lambda_3^2\lambda_2, \lambda_3^2\lambda_4, \lambda_4^2\lambda_1, \lambda_4^2\lambda_2, \lambda_4^2\lambda_3\right\} \\ C_3 = \{\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_2\lambda_4, \lambda_1\lambda_3\lambda_4, \lambda_2\lambda_3\lambda_4\} \end{array} \tag{31}$$

Déterminons les paramètres de cette formule de quadrature.
En intégrant la fonction $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, on obtient

$$E_K(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = \mathrm{mes}(K)\,\omega_f\frac{1}{27} = \int_K \lambda_1\lambda_2\lambda_3 dx = \mathrm{mes}(K)\frac{1}{720}$$

ce qui donne:

$$\omega_f = \frac{3}{80}$$

En intégrant la fonction constante 1, on obtient:

$$E_K(1) = \mathrm{mes}(K)(12\omega_m + 4\omega_f) = \int_K 1 dx = \mathrm{mes}(K)\frac{1}{6}$$

ce qui donne:

$$\omega_m = \frac{1}{720}$$

En intégrant la fonction $\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{3})$, on obtient:

$$E_K(\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{3})) = \mathrm{mes}(K)(6\alpha^2 - 6\alpha + 2)\omega_m = \int_K \lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{3})dx = \mathrm{mes}(K)\frac{1}{360}$$

Ainsi, en remplaçant ω_m par sa valeur, on obtient que α est racine du polynôme $6\alpha^2 - 6\alpha$ ce qui donne $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. On vérifie a posteriori que cette formule intègre exactement un représentant quelconque de chacune des trois classes d'équivalence de P_3.
Cependant, pour qu'une telle formule quadrature assure la condensation de masse, il faut définir les degrés de liberté associés aux arêtes aux sommets du tétraèdre ce qui exclut la possibilité d'introduire les vecteurs normaux de type $\vec{n}_{ij}^k$. Néanmoins, en prenant pour degrés de liberté l'ensemble

$$\widetilde{\Sigma} = \{(\vec{u}.\vec{\tau}_{ij})(S_i), \quad i = 1..4, j \neq i\} \cup \{(\vec{u}\wedge\vec{n}).\vec{e}_{i,1}(F_i), (\vec{u}\wedge\vec{n}).\vec{e}_{i,2}(F_i), (\vec{u}.\vec{n})(F_i) \quad i = 1\cdots 4\}$$

(cf. figure 26), ce qui consiste à garder les composantes tangentielles aux sommets et à réincorporer la composante normale en chaque point des faces, on a bien, en chaque point de la formule de quadrature que nous venons d'exhiber, toutes les composantes du champs. Si l'on construit un espace de champs de vecteurs $\widetilde{\Sigma}$-unisolvant, l'emploi d'une telle formule pour calculer la matrice de masse donnerait une matrice diagonale par blocs dont la taille est majorée par le nombre maximum d'arêtes concourantes en un sommet.

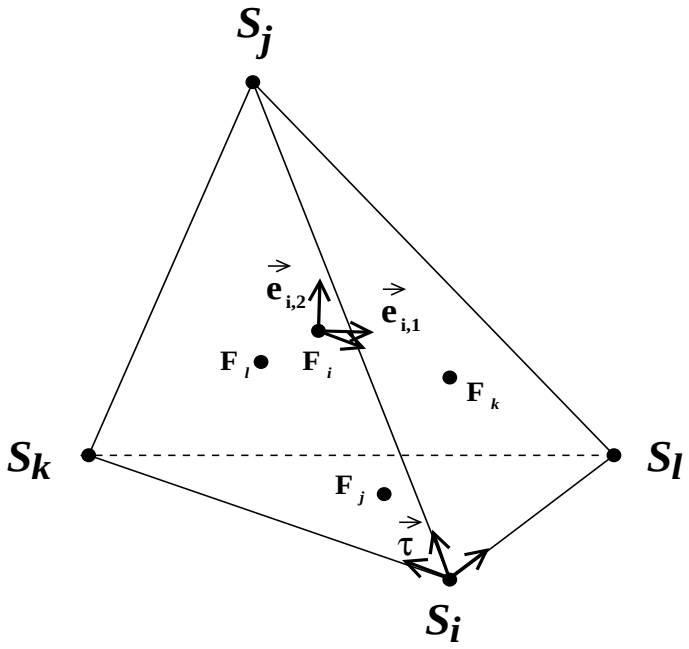


FIG. 26: *Degrés de liberté pour le nouvel élément fini d'arête du second ordre.*

Il reste à décrire l'espace de champs de vecteurs qui sera $\widetilde{\Sigma}$-unisolvant. Comme pour le cas du premier ordre, le plus simple consiste à décrire les fonctions de base associées aux nouveaux degrés de liberté, a savoir $(\vec{u}.\vec{n})(F_i)$. Pour cela, introduisons (i,j,k,l) une permutation circulaire de $(1,2,3,4)$ et posons:

$$\vec{w}_i = \lambda_j \lambda_k \lambda_l \nabla \lambda_i$$

On introduit ainsi 4 fonctions. Si $\vec{w}_i$ désigne l'une d'entre elle, elle vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_i = \vec{0} \text{ sur les faces } T_j, T_k, T_l \\ (\vec{w}_i \wedge \vec{n}) = \vec{0} \text{ sur la face } T_i \\ (\vec{w}_i.\vec{n})(F_i) = \dfrac{1}{27} \parallel \nabla \lambda_i \parallel \end{array} \right. \tag{32}$$

Nous considérons alors l'espace de champs de vecteurs suivant

$$\widetilde{\mathcal{R}}_2 = \mathcal{R}_2 \oplus [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4]$$

Si on note $\mathcal{R}_2(T_i) = \{\vec{n} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{n}), \quad \vec{u} \in \mathcal{R}_2\}$ l'espace des traces tangentielles sur T_i des éléments de $\mathcal{R}_2$, il est clair, d'après les deux premières propriétés de 32 que l'on a:

Lemme 4.2 $\forall\, \vec{w} \in \widetilde{\mathcal{R}}_2(K), \quad \forall \quad 1 \leq k \leq 4, \qquad \vec{n} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{n})|_{T_k} \in \widetilde{\mathcal{R}}_2(T_k)$

Remarque 4.1 *Ce lemme implique que notre nouvel élément fini, s'il est unisolvant, est conforme dans $H(rot)$.*

D'autre part, nous déduisons de 32 que la fonction $\vec{w}_i$ vérifie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_i.\vec{\tau}_{kl}(S_k) = 0, \quad \forall k = 1..4, \forall l \neq k \\ (\vec{w}_i \wedge \vec{n}).\vec{e}_{k,1}(F_k) = (\vec{w}_i \wedge \vec{n}).\vec{e}_{k,2}(F_k) = 0, \quad \forall k = 1..4 \end{array} \right. \tag{33}$$

Nous avons le

Théorème 4.1 *L'espace $\widetilde{\mathcal{R}_2}$ est de dimension 24 et l'ensemble $\widetilde{\Sigma}$ est $\widetilde{\mathcal{R}_2}$-unisolvant.*

Démonstration:

Soit $\vec{w}$ un élément de $\widetilde{\mathcal{R}}_2(K)$ annulant toutes les formes linéaires de $\widetilde{\Sigma}$. Nous pouvons écrire:

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \vec{w}_i \qquad \vec{w}_0 \in \mathcal{R}_2$$

On a donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{w}.\vec{\tau}_{kl}(S_k) = 0, \quad \forall k = 1..4, \forall l \neq k \\ (\vec{w} \wedge \vec{n}).\vec{e}_{k,1}(F_k) = (\vec{w} \wedge \vec{n}).\vec{e}_{k,2}(F_k) = 0, \quad \forall k = 1..4 \end{array} \right. \tag{34}$$

Cette propriété jointe à 33, qui exprime que ces mêmes quantités sont annulées par toutes les fonctions $\vec{w}_i$, implique

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_0.\vec{\tau}_{kl}(S_k) = 0, \quad \forall k = 1..4, \forall l \neq k \\ (\vec{w}_0 \wedge \vec{n}).\vec{e}_{k,1}(F_k) = (\vec{w}_0 \wedge \vec{n}).\vec{e}_{k,2}(F_k) = 0, \quad \forall k = 1..4 \end{array} \right. \tag{35}$$

Or, ces quantités ne sont autres que les degrés de liberté de Σ'. Puisque $\vec{w}_0 \in \mathcal{R}_2(K)$ et que (d'après le lemme 4.1), $\mathcal{R}_2(K)$ est Σ' unisolvant, on en déduit que $\vec{w}_0 = \vec{0}$.
Par suite, $(\vec{w}.\vec{n})(F_i) = 0$ pour tout i se traduit par:

$$\alpha_i (\vec{w}_i.\vec{n})(F_i) = \alpha_i \frac{1}{27} \parallel \nabla \lambda_i \parallel = 0$$

c'est-à-dire

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1..4$$

ce qui achève la démonstration. ■

4.4 Analyse en maillage régulier

4.4.1 Problème semi discret et dispersion numérique associée

Dans cette partie, $\mathcal{T}_h$ désigne encore le maillage régulier de $\mathbb{R}^3$ en tétraèdres utilisé pour l'analyse du nouvel élément du premier ordre et on considère le même problème modèle. L'espace de discrétisation associé au nouvel élément fini est défini par:

$$\widetilde{V_h} = \left\{ \vec{v}_h \in H(rot, \mathbb{R}^3) / \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ \vec{v}_{h|_K} \in \widetilde{\mathcal{R}}_2(K) \right\}$$

Dans le cas de l'élément du second ordre, la régularité du maillage permet de définir un réseau périodique de 62 types de degrés de liberté de sorte que le problème semi-discret est équivalent à un système différentiel de dimension 62 que nous n'écrirons pas (!). Ainsi, la relation de dispersion "physique" s'obtient en résolvant un problème au valeurs propres de même dimension de la forme

$$\omega_h{}^2 \widehat{M_h} \vec{E}_0 = \widehat{A_h} \vec{E}_0$$

4.4.2 Courbes de dispersion numérique

De manière analogue au cas du premier ordre, nous avons tracé, par résolution numérique du problème aux valeurs propres précédent, les courbes de dispersion qui représentent l'erreur relative commise sur la vitesse d'une solution de type "onde plane numérique" en fonction du nombre de points par longueur d'onde, pour une direction de propagation donnée (en coordonnées sphériques) par les angles θ et ϕ.
Dans les figures qui suivent, nous avons tracé, à la même échelle, les courbes de dispersion du schéma pour $\theta = 90°$ (ce qui correspond à la "projection" sur le plan $x = 0$) et $\phi = 0°, \pm 15°, \pm 30°, \pm 45°$ (cf. figure 27).

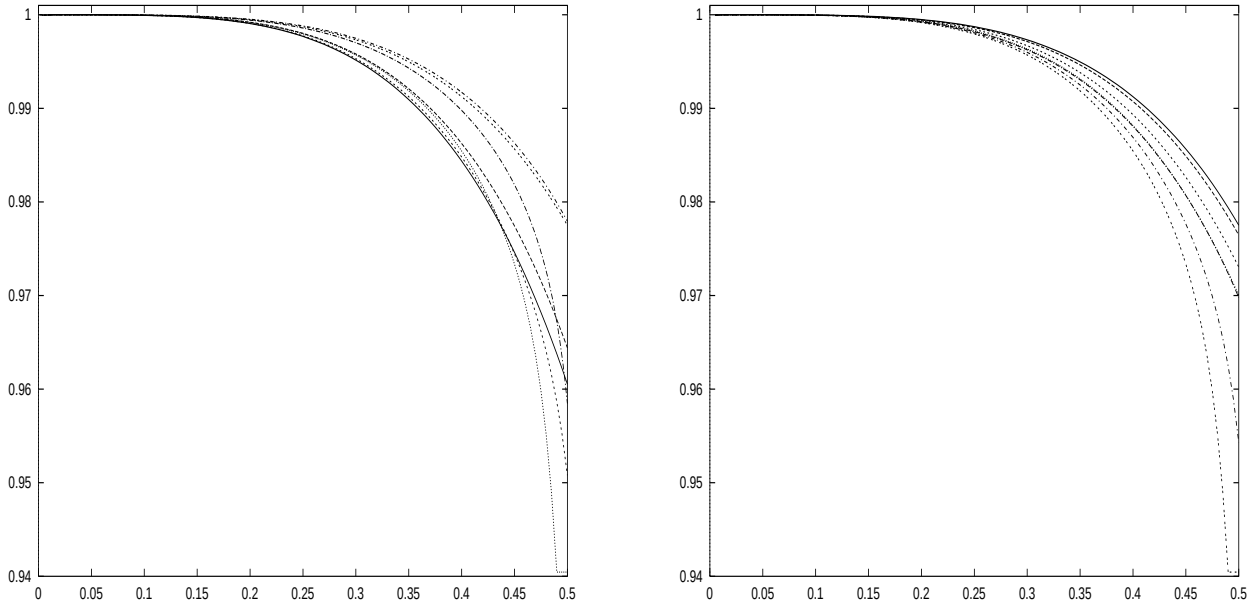


FIG. 27: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_2$: à gauche $\theta = 90°$ et $\phi = 0°, \pm 15°, \pm 30°, \pm 45°$ et à droite $\phi = 45°$ et $\theta = 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°$*

D'autre part, les courbes de l'erreur en échelle logarithmique (cf. figure 28), permettent d'émettre la conjecture:

Conjecture 4.1 *La valeur propre physique $\omega_h(\vec{k})$ associée au schéma correspondant à $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ admet le développement limité suivant:*

$$\omega_h(\vec{k}) = |\vec{k}|(1 + O(h^4|\vec{k}|^4))$$

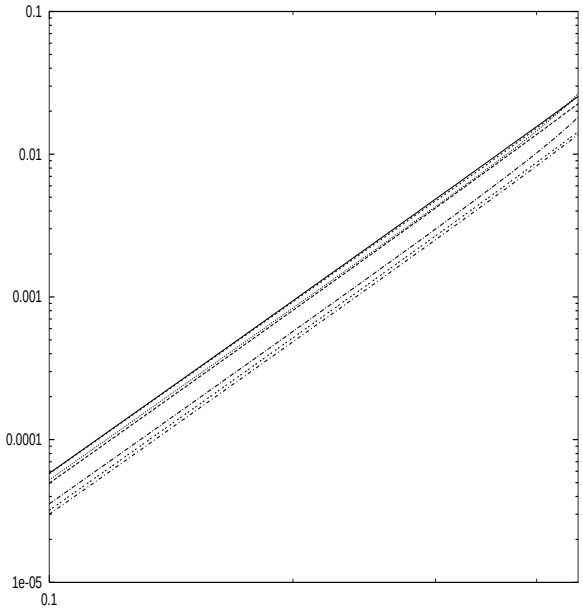


FIG. 28: *Droites en échelle logarithmique pour l'élément tétraédrique du second ordre.*

Ici aussi, nous avons comparé la dispersion numérique introduite par le nouveau schéma (trait pointillé) avec celle introduite par le schéma analogue sans condensation de masse (trait continu) en traçant à la même échelle les courbes de dispersion associées à ces deux schémas pour une direction de propagation (θ, ϕ) donnée. Dans les figures 29 et 30, on a tracé ces courbes pour $\theta = 90°$ et $\phi = 0°, 15°, 30°, 45°$.

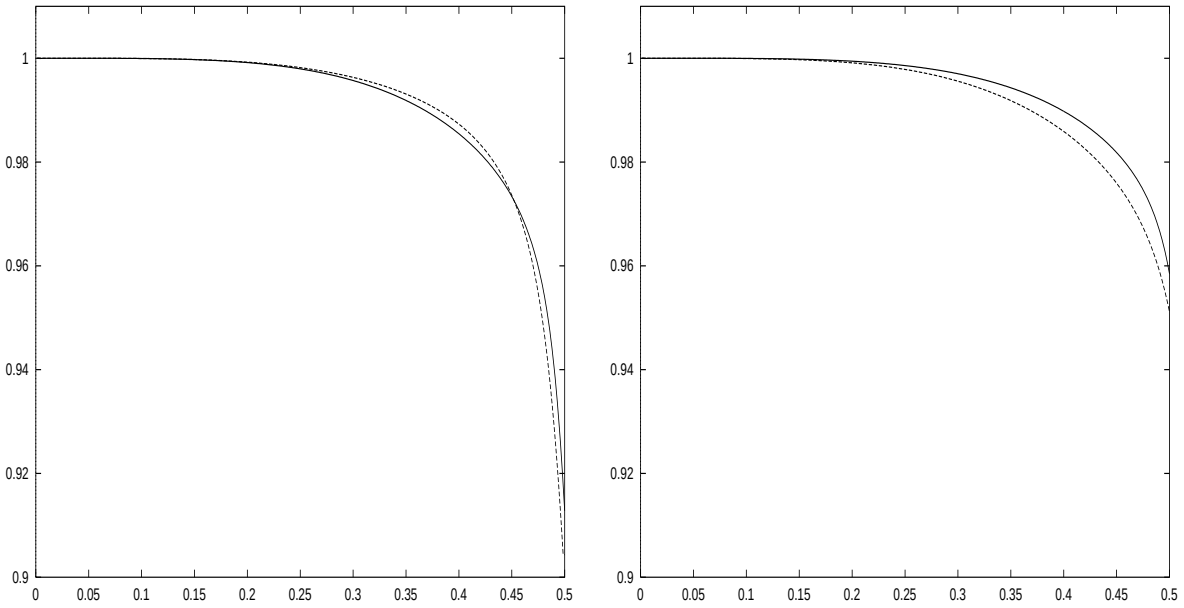


FIG. 29: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ (trait plein) et $\mathcal{R}_2$ (pointillé) pour θ fixé à 90°: $\phi = 0°$ (à gauche) et $\phi = 15°$ (à droite)*

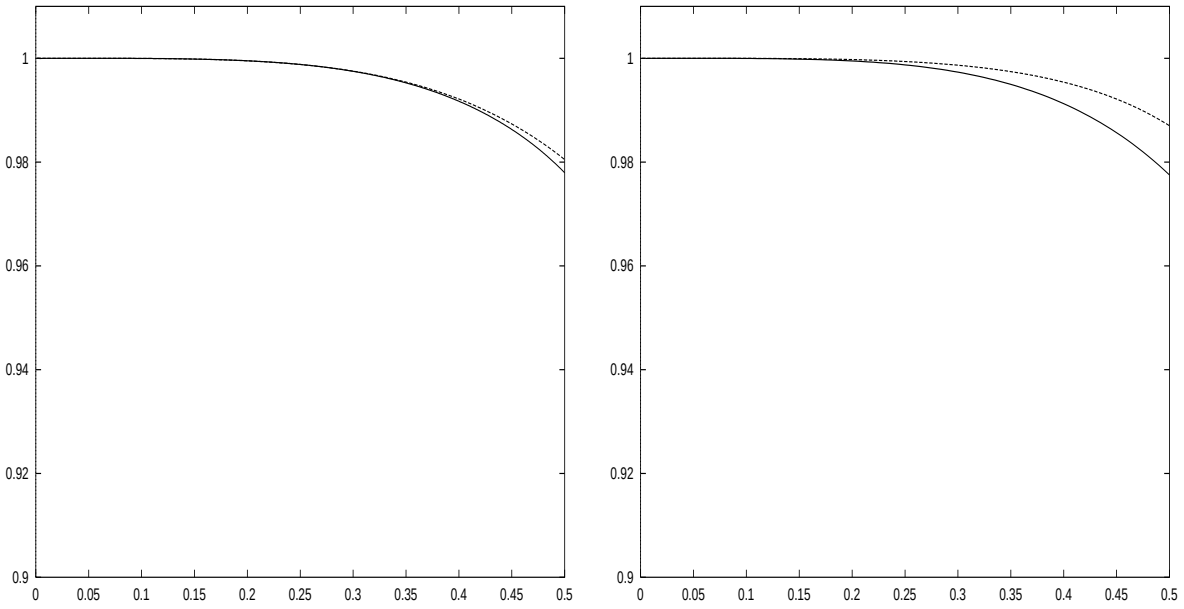


FIG. 30: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ (trait plein) et $\mathcal{R}_2$ (pointillé) pour θ fixé à 90°: $\phi = 30°$ (à gauche) et $\phi = 45°$ (à droite)*

Dans les figures 31 et 32, on a tracé ces deux courbes pour $\phi = 45°$ et $\theta = 0°, 15°, 30°, 45°$.

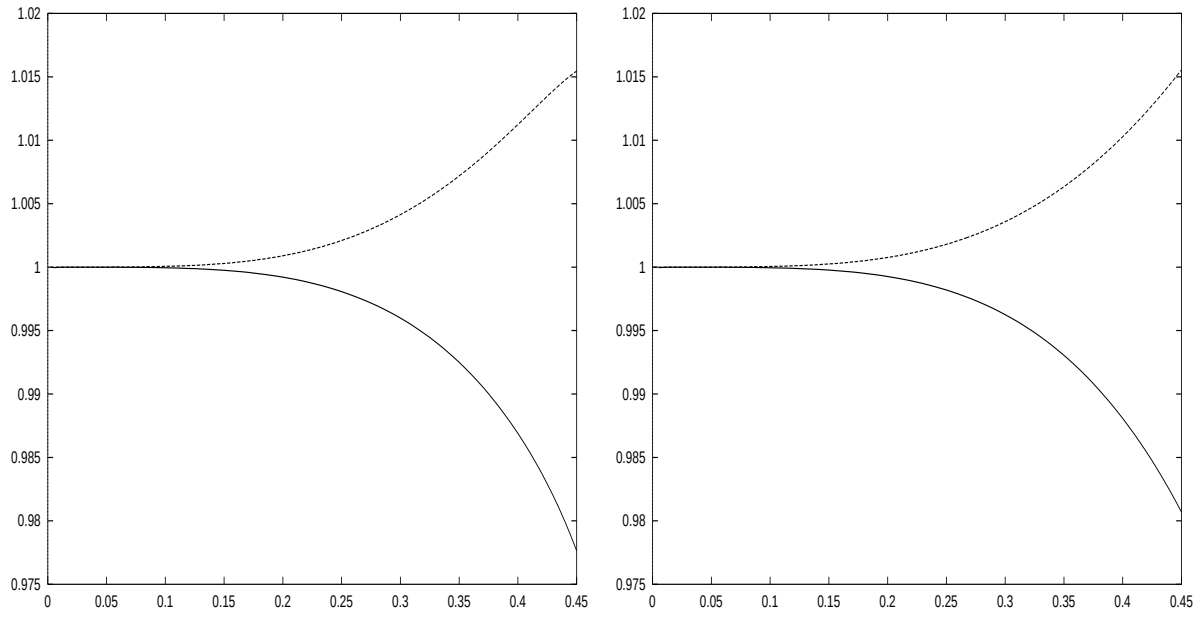


FIG. 31: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ (trait plein) et $\mathcal{R}_2$ (pointillé) pour ϕ fixé à 45°: $\theta = 0°$ (à gauche) et $\theta = 15°$ (à droite)*

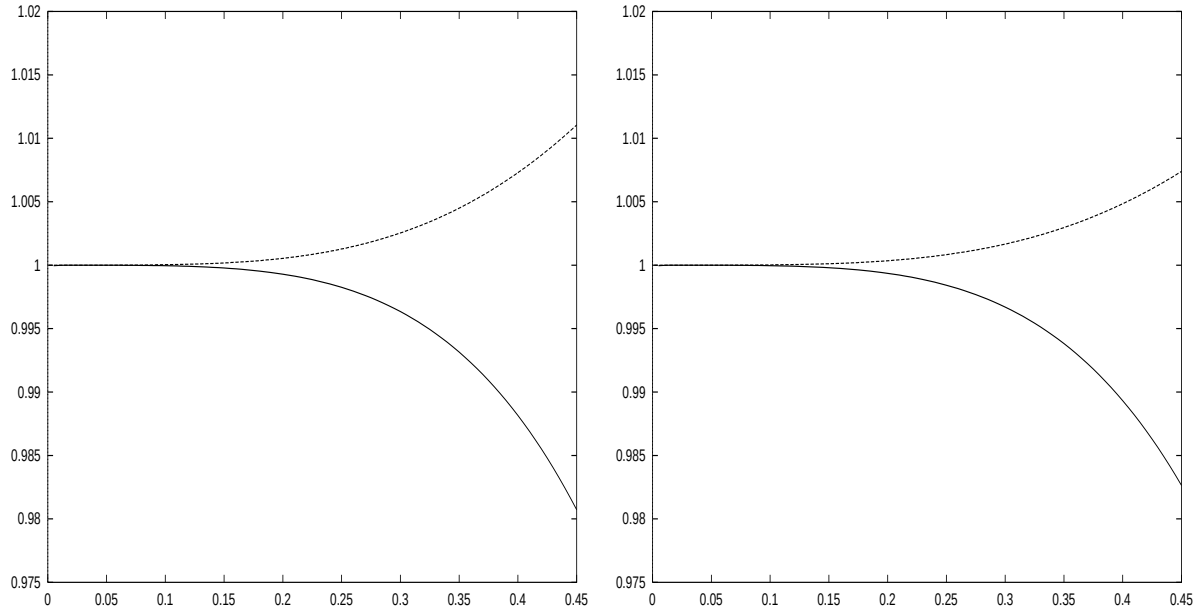


FIG. 32: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ (trait plein) et $\mathcal{R}_2$ (pointillé) pour ϕ fixé à 45°: $\theta = 30°$ (à gauche) et $\theta = 45°$ (à droite)*

Ces schémas appellent le commentaire suivant. Dans le cas du premier ordre, le schéma avec condensation de masse introduit une dispersion numérique d'ordre 2. Cependant, on peut constater une perte de précision par rapport au schéma sans condensation de masse et ce, quel que soit l'angle d'incidence (θ, ϕ) considéré. Par contre, pour le second ordre, il apparaît que le schéma avec condensation de masse admet une erreur de dispersion équivalente à celle introduite par le schéma sans condensation de masse.

4.4.3 Discrétisation en temps et ordre élevé

Si on met le problème semi-discrétisé obtenu sous la forme:

$$\frac{d^2E_h}{dt^2} + D_hE_h = 0 \tag{36}$$

où $D_h = M_h^{-1}A_h$, il est clair qu'une discrétisation en temps par un schéma classique saute mouton est insuffisante car d'ordre 2 en temps pour un schéma qui admet une erreur de dispersion en espace en $O(h^4)$. Or, une méthode de type différences finies d'ordre 4 à 5 pas de temps s'avère inconditionnellement instable. Aussi, nous adopterons l'approche de l'équation modifiée (décrite dans [3] ou [2] par exemple) qui permet de conserver un schéma stable à trois pas de temps. Cette approche consiste à écrire la somme des développement de Taylor de $E_h(t)$ (qui est $\mathcal{C}^\infty$) en t^{n+1} et t^{n-1} où $t^n = n\Delta t$ et Δt représente le pas de discrétisation en temps, ce qui donne:

$$\frac{E_h(t^{n+1}) - 2E_h(t^n) + E(t^{n-1})}{\Delta t^2} = \frac{\Delta t^2}{12}\frac{\partial^4 E_h}{\partial t^4}(t^n) + O(\Delta t^4) \tag{37}$$

En utilisant l'équation semi discrète (36), on a:

$$\frac{\partial^4 E_h}{\partial t^4}(t^n) = D_h^2 E_h(t^n)$$

de sorte que si on note $E_h^n = E_h(t^n)$ la solution de (36) au temps t^n, le schéma défini par:

$$\frac{E_h^{n+1} - 2E_h^n + E_h^{n-1}}{\Delta t^2} + D_hE_h^n - \frac{\Delta t^2}{12}D_h^2E_h^n = 0$$

est d'ordre 4 en temps par construction.

Remarque 4.2 • *Pour obtenir un coût calcul optimal, il faut factoriser cette équation en écrivant:*

$$\frac{E_h^{n+1} - 2E_h^n + E_h^{n-1}}{\Delta t^2} + N_h[E_h^n - \frac{\Delta t^2}{12}N_hE_h^n] = 0$$

Ainsi, à chaque pas de temps, l'expression $E_h^n - \frac{\Delta t^2}{12}N_hE_h^n$ *peut être considérée comme une inconnue de calcul intermédiaire. Le coût de programmation d'un pas de temps pour le schéma d'ordre 4 est donc le double de celui associé au schéma saute mouton.*

• *Nous pourrions tenir compte d'un second membre dans (36) et appliquer ensuite le principe de l'équation modifiée. Mais l'expérience a montré que sa contribution (lorsqu'il est à support compact) reste négligeable. De ce fait, l'algorithme peut être écrit sans en tenir compte.*

4.4.4 Analyse de la stabilité

Rappelons que pour l'ordre 2 en temps, la stabilité est équivalente à

$$\frac{\Delta t^2\|D_h\|}{4} \leq 1$$

c'est-à-dire, de manière équivalente,

$$\alpha \leq \frac{2}{\sqrt{\max_{i,K}|\lambda^i(K)|}}$$

où les $\lambda^i(K)$ sont les solutions du problème aux valeurs propres généralisé

$$A_1(K)\vec{w} = \lambda\, M_1(K)\vec{w}$$

Pour l'ordre 4 en temps, il faut considérer la norme de l'opérateur $D_h(Id - \frac{\Delta t^2}{12}D_h)$, ce qui donne la condition de stabilité (cf. [9]):

$$\alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\max_{i,K}|\lambda^i(K)|}}$$

Comme dans le cas du premier ordre, ce maximum est calculé numériquement. On a alors les conditions de stabilité suivantes:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \leq & 0,21 \text{ pour l'ordre 2 en temps} \\ \alpha & \leq & 0,37 \text{ pour l'ordre 4 en temps} \end{array} \tag{38}$$

alors que pour le schéma classique, on a:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \leq & 0,13 \text{ pour l'ordre 2 en temps} \\ \alpha & \leq & 0,37 \text{ pour l'ordre 4 en temps} \end{array} \tag{39}$$

On constate ici que la condition de stabilité associée au nouveau schéma est moins restrictive que celle associée au schéma usuel. Or, comme nous l'avons remarqué précédemment, l'espace d'approximation associé au nouvel élément contient celui associé à l'élément usuel, ce qui implique que la condition de stabilité du nouveau schéma, en l'absence de condensation de masse, doit être plus restrictive. Il semblerait donc que, pour cet élément, la condensation de masse inverse le resultat.
D'autre part, ces conditions de stabilité peuvent paraître très contraignantes comparativement à celles que l'on a calculées dans le cas du premier ordre. Toutefois, il faut tenir compte du fait que pour les nouveaux schémas, à un élément du premier ordre correspondent 18 degrés de liberté alors que dans le cas du second ordre correspondent 24 degrés de liberté.

4.4.5 Analyse de la dispersion numérique pour le schéma discrétisé en temps et en espace

Rappelons que pour l'ordre 2 en temps, la dispersion numérique s'écrit:

$$Q_h = \frac{1}{\pi \alpha K} \arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\lambda^0(K)}\right)$$

où λ^0 est la valeur propre physique de A_1.
Pour l'ordre 4 en temps, on a:

$$Q_h = \frac{1}{\pi \alpha K} \arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\lambda^0(K) - \frac{\alpha^2}{12}(\lambda^0(K))^2}\right)$$

Nous allons maintenant visualiser la dispersion numérique. Nous représentons les variations de la vitesse de phase adimensionnelle en fonction de K pour différentes directions de propagation (θ, ϕ). Dans chaque cas, on représente les courbes de dispersion associées à trois valeurs de α: $\alpha = 0$, ce qui correspond au schéma semi-discrétisé en espace, la valeur de α correspondant à la valeur maximale autorisée par la condition de stabilité, et la valeur de α correspondant à la moitié de cette valeur maximale. Comme les courbes qui vont suivre le démontrent, c'est cette dernière valeur qui donne une précision optimale, pour la discrétisation en temps d'ordre 2 comme pour celle d'ordre 4.

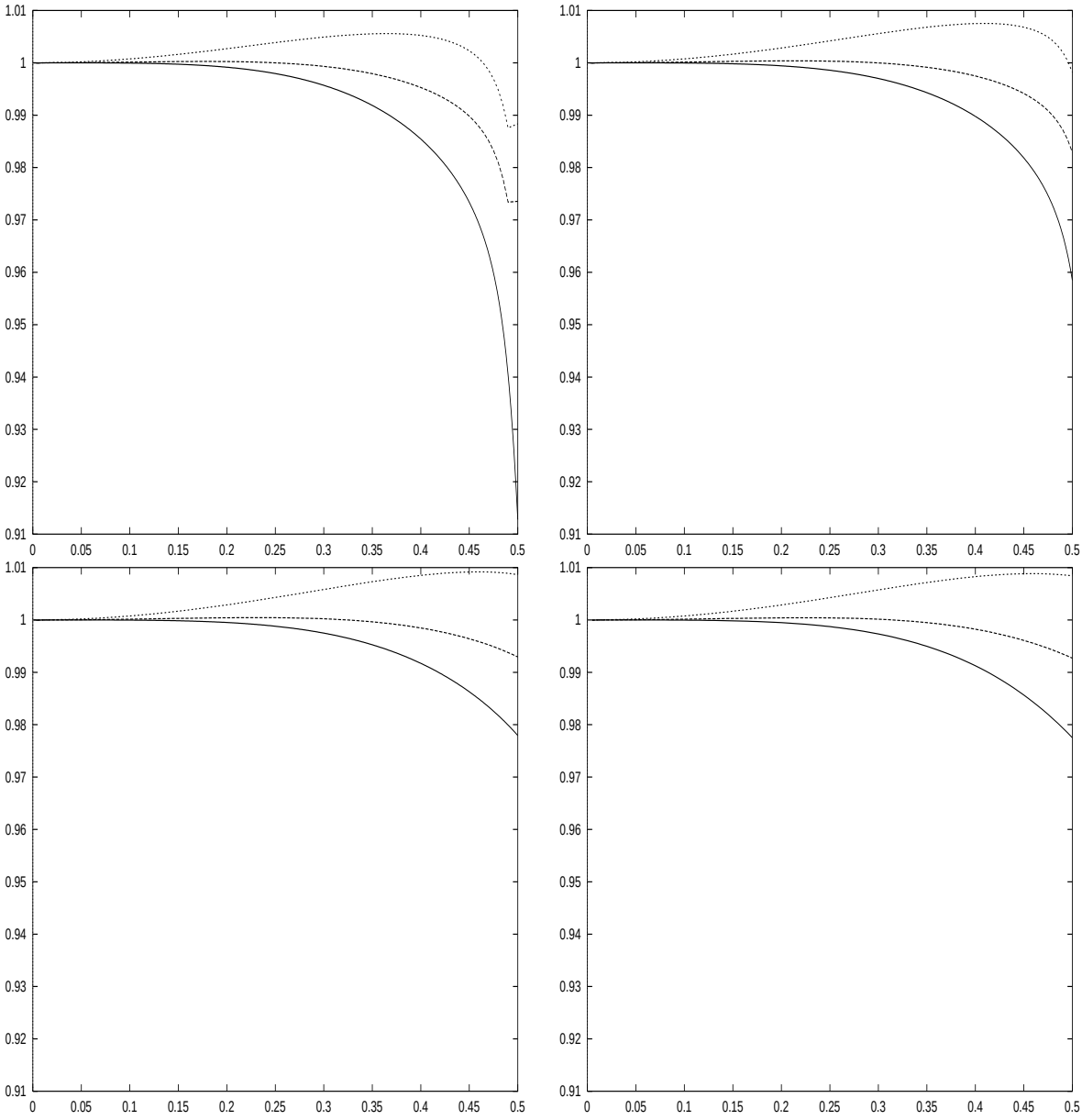


FIG. 33: *Courbes de dispersion pour* $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ *et l'ordre 2 en temps avec* $\alpha = 0$ *(semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.21 pour les courbes supérieures, pour* θ *fixé à* $90°$ *et pour différentes valeurs de l'angle* ϕ*: en haut à gauche:* $\phi = 0°$*, en haut à droite:* $\phi = 15°$*, en bas à gauche:* $\phi = 30°$ *et en bas à droite:* $\phi = 45°$.

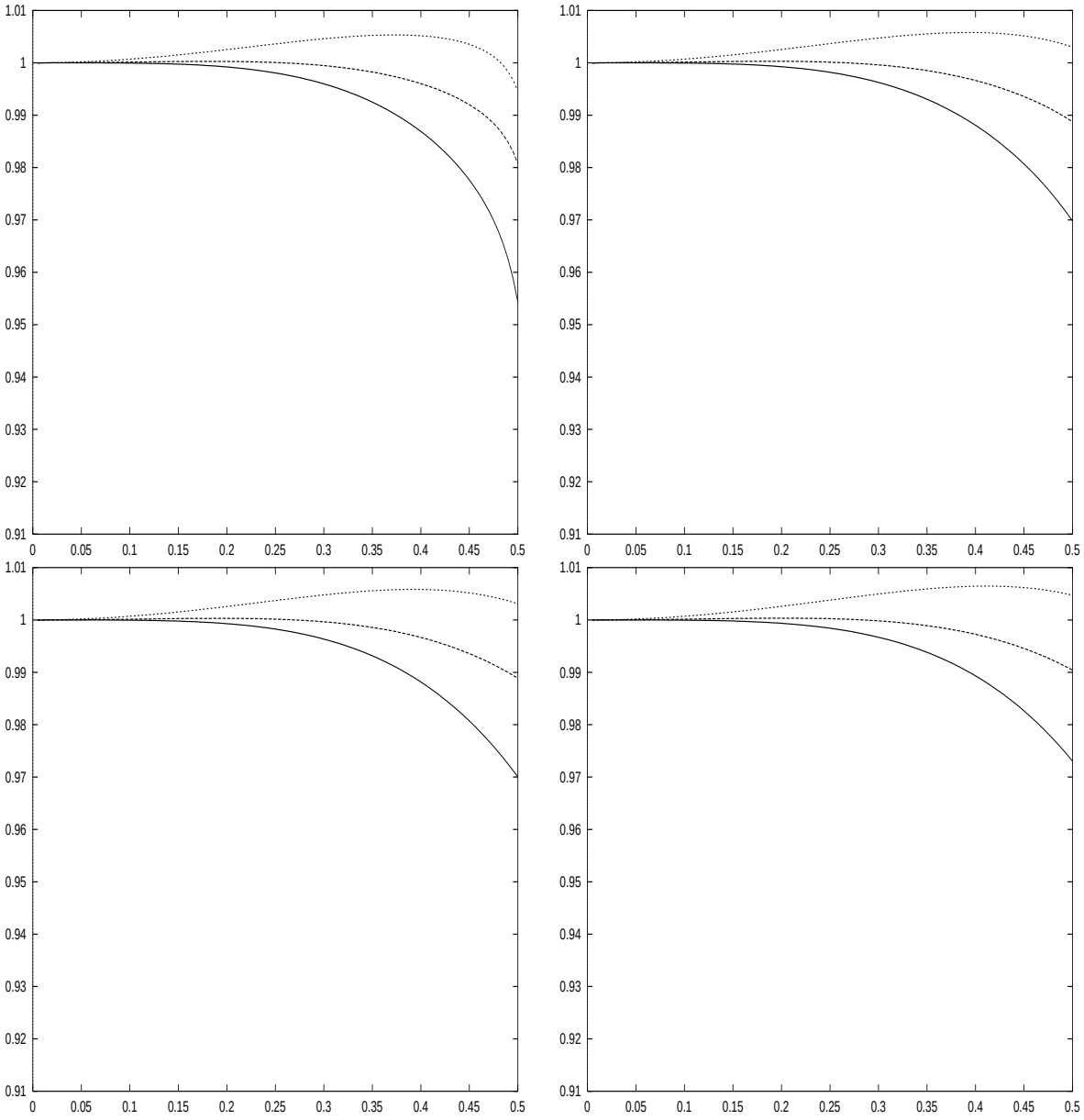


FIG. 34: *Courbes de dispersion pour* $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ *et l'ordre 2 en temps avec* $\alpha = 0$ *(semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.21 pour les courbes supérieures, pour* ϕ *fixé à* $45°$ *et pour différentes valeurs de l'angle* θ*: en haut à gauche:* $\theta = 15°$*, en haut à droite:* $\theta = 30°$*, en bas à gauche:* $\theta = 45°$ *et en bas à droite:* $\theta = 60°$*.*

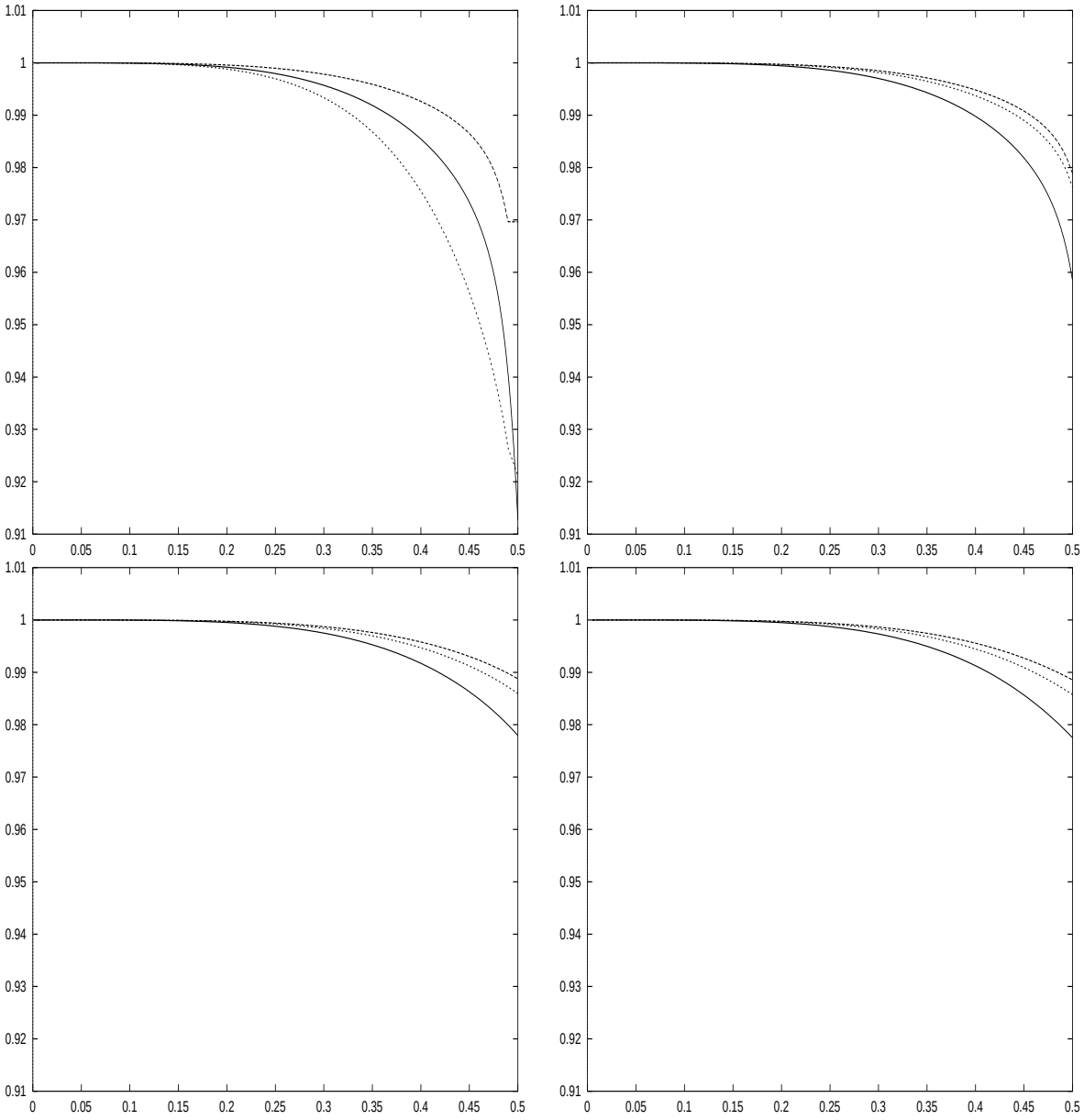


FIG. 35: *Courbes de dispersion pour* $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ *et l'ordre 4 en temps avec* $\alpha = 0.37$ *(courbe inférieure),* $\alpha = 0$ *(semi discret, courbe "médiane") et* $\alpha = 0.185$ *(courbe supérieure), et pour* θ *fixé à* $90°$ *et pour différentes valeurs de l'angle* ϕ*: en haut à gauche:* $\phi = 0°$*, en haut à droite:* $\phi = 15°$*, en bas à gauche:* $\phi = 30°$ *et en bas à droite:* $\phi = 45°$.

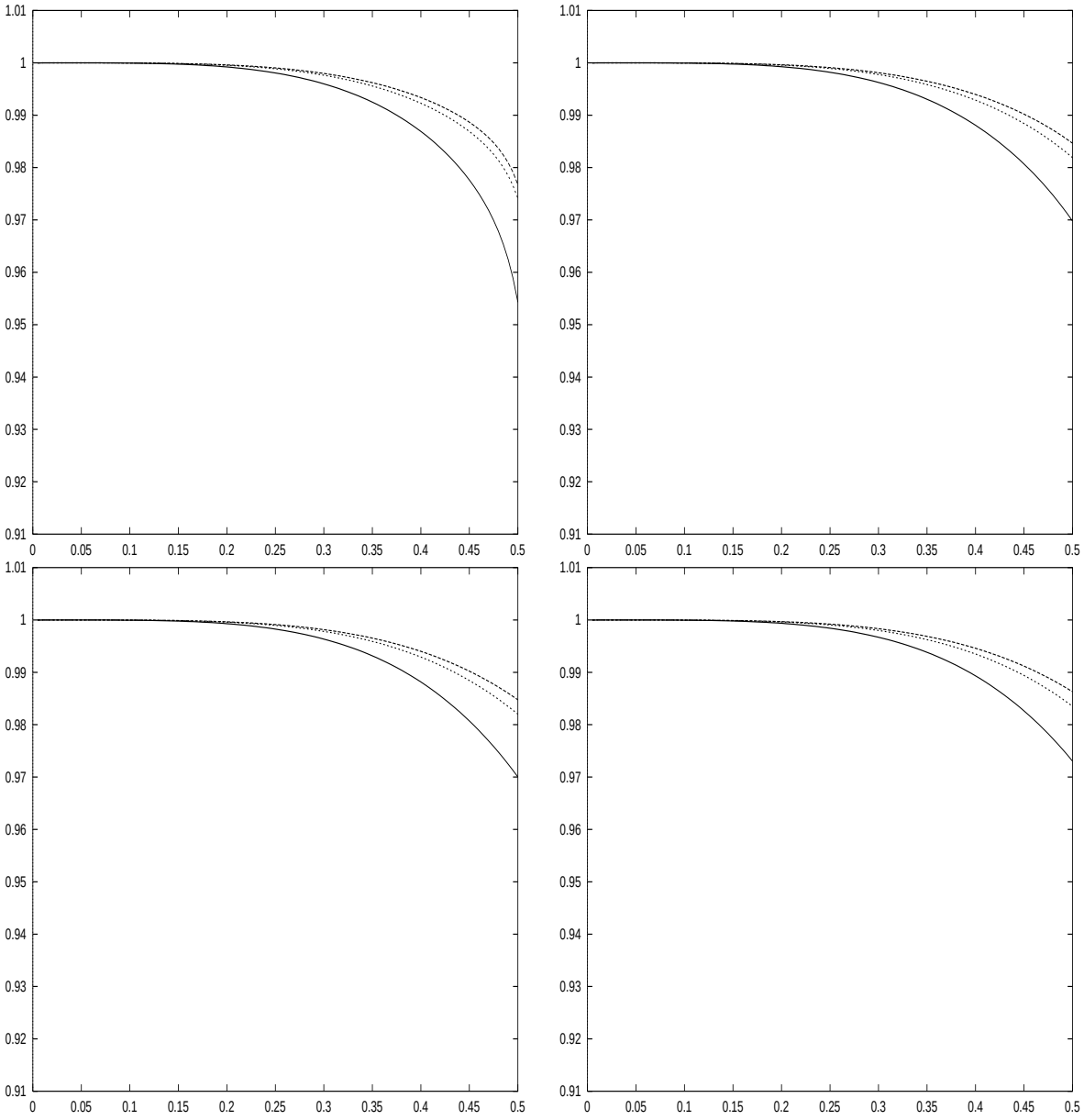


FIG. 36: *Courbes de dispersion pour $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ et l'ordre 4 en temps avec $\alpha = 0.37$ (courbe inférieure), $\alpha = 0$ (semi discret, courbe "médiane") et $\alpha = 0.185$ (courbe supérieure), et pour ϕ fixé à $45°$ et pour différentes valeurs de l'angle θ: en haut à gauche: $\theta = 15°$, en haut à droite: $\theta = 30°$, en bas à gauche: $\theta = 45°$ et en bas à droite: $\theta = 60°$.*

Comme dans le cas du premier ordre, la précision du schéma est améliorée avec la discrétisation en temps. De plus, il faut remarquer que la précision optimale est obtenu pour

5 Conclusion et perspectives

Cet article fait suite au travail présenté dans [5] dans lequel nous avions construit une nouvelle famille d'éléments finis d'arête triangulaires avec condensation de masse pour les équations de Maxwell et se propose de généraliser l'approche adoptée au cas des tétraèdres en s'appuyant sur le théorème de trace dans $H(rot)$. Cette stratégie, qui conduit à la construction d'un nouvel élément fini tétraédrique du premier ordre, n'a pu

être généralisée aux ordres supérieurs. Une solution est proposée, mais le schéma associé introduit une erreur de dispersion plus importante pour un même maillage que le schéma obtenu par la discrétisation usuelle.

Références

[1] P.G. CIARLET. *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland, 1978.

[2] G. COHEN and P. JOLY. Fourth order schemes for the heterogeneous acoustics equation. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin.*, 80:397–407, 1990.

[3] M.A. DABLAIN. The application of high order differencing for the scalar wave equation. *Geophysics*, 1(51):54–66, 1986.

[4] R. DAUTRAY et J.L. LIONS. *Analyse Mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.* Masson, 1988.

[5] A. ELMKIES et P. JOLY. Eléments finis d'arête et condensation de masse pour les équations de Maxwell: le cas 2d. *Rapport de recherche INRIA 3035*, Novembre 1996.

[6] G.COHEN P. JOLY and N. TORDJMAN. Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation. *soumis à SIAM Journal of Numerical Analysis.*

[7] J.C. NEDELEC. Mixed finite element in $\mathbb{R}^3$. *Numerische Mathematik*, 35:315–341, 1980.

[8] J.C. NEDELEC. A new family of mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$. *Numerische Mathematik*, 50:57–81, 1986.

[9] N. TORDJMAN. *Eléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes.* PhD thesis, Université de Paris 9, 1995.

Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399