

Résolution d'un cas test de contrôle optimal pour un système gouverné par l'équation des ondes à l'aide d'une méthode de décomposition de domaine

Jean-David Benamou

▶ **To cite this version:**

Jean-David Benamou. Résolution d'un cas test de contrôle optimal pour un système gouverné par l'équation des ondes à l'aide d'une méthode de décomposition de domaine. [Rapport de recherche] RR-3095, INRIA. 1997. inria-00073596

HAL Id: inria-00073596
https://inria.hal.science/inria-00073596

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Résolution d'un cas test de contrôle optimal pour un système gouverné par l'équation des ondes à l'aide d'une méthode de décomposition de domaine

Jean-David Benamou

N° 3095

Janvier 1997

THÈME 4



ISSN 0249-6399

INRIA
ROCQUENCOURT

Résolution d'un cas test de contrôle optimal pour un système gouverné par l'équation des ondes à l'aide d'une méthode de décomposition de domaine

Jean-David Benamou*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Ondes

Rapport de recherche n° 3095 — Janvier 1997 — 56 pages

Résumé : On utilise une méthode de décomposition de domaine pour résoudre un problème de contrôle optimal pour l'équation des ondes. La décomposition choisie (un sous-domaine par maille de discrétisation) permet d'utiliser facilement la technique de synthèse quadratique.

Mots-clé : Décomposition de domaine, Contrôle optimal, Equation des ondes, Equation de Riccati, Element finis mixtes hybrides, Schéma saute-mouton

(Abstract: pto)

Pas de note.

* Inria, ONDES

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

Optimal control of systems governed by the wave equation : resolution of a test case using a domain decomposition method

Abstract: A domain decomposition method is used to solve an optimal control problem for the wave equation. The domain decomposition (one sub-domain per mesh element) allows the easy use of the quadratic synthesis technique.

Key-words: Domain decomposition, Optimal control, Wave equation, Riccati equation, Mixt hybrid finite elements, Leap-frog scheme

1 Introduction

La technique classique pour la résolution de problèmes de contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations d'évolution (voir [19]) repose sur la reformulation en un système d'optimalité comprenant une équation pour l'état direct (l'équation dans laquelle intervient le contrôle), une équation pour l'état adjoint (nouvelle équation couplée à la précédente par l'intermédiaire du critère à minimiser) et les conditions d'optimalités faisant intervenir le gradient du critère (exprimé variationnellement à l'aide de l'état adjoint).

Lorsqu'aucune contrainte n'est imposée sur le contrôle, ce dernier est directement donné en fonction de l'état adjoint par la condition d'optimalité. On peut alors éliminer une inconnue, le contrôle, et une équation, les conditions d'optimalité. On se ramène donc à la résolution d'un problème couplé état direct/état adjoint.

Une des difficultés principales pour la résolution numérique de tels problèmes vient du caractère rétrograde en temps de l'équation adjointe : nous sommes en présence d'un problème "au deux bouts". Dans le cas ou le critère est quadratique (c'est le cas dans ce rapport), on peut utiliser soit un algorithme de descente soit la technique du découplage, aussi appelée synthèse quadratique. Dans le premier cas, on est amené à calculer une suite de points dans l'espace des paramètres de contrôle avec pour chacun de ces points la résolution de l'état direct puis de l'état adjoint pour calculer le gradient du critère qui donne une direction de descente. Dans le deuxième cas, on remarque que l'état adjoint peut pour tout temps s'exprimer comme une loi affine de l'état direct. On peut alors dériver une équation de type Riccati non linéaire pour les coefficients de cette loi, dite de "feed-back". Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation de Riccati et à réinjecter la loi de "feed back" dans l'équation de l'état direct pour résoudre le problème.

Dans le cas de problèmes hyperboliques, la technique de synthèse quadratique peut poser des problèmes théoriques et numériques [17]. Du point de vue numérique, on est ramené à la résolution d'un système d'équations non-linéaires de grande taille (dans le cas d'un domaine spatial discretisé avec N points, l'equation de Riccati portera sur $N*(N+1)/2$ variables). Cette résolution peut être difficile ou coûteuse.

Les méthodes de décomposition de domaine consistent généralement après décomposition du domaine à ramener la résolution du problème "global" à la résolution de sous-problèmes locaux posés chacun sur les sous-domaines de cette décomposition.

L'utilisation d'une technique de ce type se justifie, soit au niveau informatique pour l'utilisation d'ordinateurs parallèles afin de résoudre des problèmes de grande taille autrement inaccessibles, soit au niveau de la modélisation lorsque la décomposition du domaine permet de réduire le caractère hétérogène de la géométrie ou de la nature du milieu.

Ce papier se situe dans la continuation de [1] [7] [2] [3] [4] [6] [5] ou une méthode de décomposition de domaine est proposée pour divers problèmes de contrôle optimal. Des travaux sur le même sujet peuvent être trouvés dans [9] [18] [8].

Nous renvoyons le lecteur interessé par les aspects théoriques de la méthode au références ci dessus mentionnées. L'objectif de ce papier est de montrer sur un cas test hyperbolique que la méthode de décomposition de domaine proposée dans [4] [5] fonctionne correctement et permet en particulier d'utiliser une technique de synthèse quadratique locale aux sous-domaines. La stratégie adoptée consiste à considérer chaque élement fini de la discrétisation du problème comme un sous-domaine.

Le papier est organisé comme suit : nous présentons le problème test puis la méthode de décomposition de domaine en section 2, 3 et 4. La discrétisation et la stratégie de décomposition de domaine sont décrites en section 5 et 6. Nous résumons en section 7 les différentes étapes de l'algorithme. Les résultats numériques sont présentés en section 8. On passe rapidement en revue en conclusion les applications et extensions possibles de la méthode. On commentera en particulier la non-optimalité de la décomposition du domaine proposée à la lumière de l'expérience numérique présentée.

2 Le problème test

Il s'agit d'un problème bi-dimensionnel. Soit $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$, Q le domaine en espace-temps $]0,T[\times\Omega$, T fixé. Le bord de Ω est divisé en quatre

parties Γ_X, $(X = N, E, W, S)$ correspondant au faces Nord, Est, Ouest, et Sud du domaine. On note aussi $\Sigma_X =]0, T[\times\Gamma_X$.

Nous cherchons à résoudre le problème

$$\min_{u\in L^2(\Sigma_N)\cup L^2(\Sigma_S)} J(u, y(u))$$

où la fonction coût J est donnée par

$$J(u, y(u)) = \frac{1}{2}(\gamma \int_Q |y(u)(t, x_1, x_2)|^2 dx_1 d_x 2dt + \alpha \int_{\Sigma_N\cup\Sigma_S} |u(t, x_1)|^2 dx_1 dt) \quad (1)$$

avec α et γ des paramètres positifs et $y(u)$ la solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(u) - \Delta y(u) = 0 & dans\ Q, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} y(u) = u & sur \Sigma_N \cup \Sigma_S\ , \\ y(u) = 0 & sur \Sigma_E \cup \Sigma_W\ , \\ y(u)(0, x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2) \quad \frac{\partial}{\partial t} y(u)(0, x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) & sur\ \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Sous des conditions standard de régularité sur les conditions initiales, f_0 f_1, ce problème d'observation distribuée et contrôle frontière admet une solution unique ([19] Chap. 4 section 7.3) donnée par la résolution du problème couplé

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y - \Delta y = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} p - \Delta p = \gamma y & dans\ Q, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} y + \frac{1}{\alpha} p = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \nu} p = 0 & sur \Sigma_N \cup \Sigma_S\ , \\ y = 0 \quad p = 0 & sur \Sigma_W \cup \Sigma_E\ , \\ y(0, x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2) \quad \frac{\partial}{\partial t} y(0, x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) & sur\ \Omega, \\ p(T, x_1, x_2) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} p(T, x_1, x_2) = 0 & sur\ \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

On a ici utilisé l'abscence de contraintes sur le contrôle qui est alors donné par $u = -\frac{1}{\alpha} p$.

Remarque 1 : Il est possible, (comme dans [19] Chap. 4 section 5), de trouver pour $s \in]0, T[$, une loi de 'feed back'

$$\vec{p}(s) = \mathcal{P}(s)\vec{y}(s) + \vec{r}(s) \quad (4)$$

permettant de découpler les système (3) (5). Ici, $\vec{y} = (y, \frac{\partial}{\partial t} y)$ et $\vec{p} = (p, \frac{\partial}{\partial t} p)$. On écrit l'équation de Riccati satisfaite par $\mathcal{P}(s)$ et l'équation hyperbolique satisfaite par $\vec{r}(s)$. On est alors en mesure de remplacer p dans l'équation de l'état direct et de résoudre directement le problème. La difficulté est reportée sur le calcul de la loi (4).

3 La méthode de décomposition de domaine

Nous ramenons, dans cette section, la résolution de (3) à la résolution d'une suite de sous-problèmes définis sur une décomposition de Ω.

Soit $\Omega_i,\ i = 1, m$ une décomposition sans recouvrement de Ω (i.e. $\Omega = \cup_i \bar{\Omega}_i$ et $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ pour $i \neq j$). Notons $Q_i = \Omega_i \times]0, T[$, $\Gamma_{x,i} = \partial\Omega_i \cap \Gamma_X$ pour $(X = N, E, W, S)$ $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ et $\Sigma_{x,i} = \Gamma_{x,i} \times]0, T[$ pour $(X = N, E, W, S)$ $\Sigma_{ij} = \Gamma_{ij} \times]0, T[$. Enfin ν_i désigne la normale extérieure au sous-domaine Ω_i.

L'algorithme consiste à résoudre de façon itérative (le n est l'indice des itérations) ,pour tout i, les sous-problèmes

$$\left\{\begin{array}{ll}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} y_i^{n+1} - \Delta y_i^{n+1} = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_i^{n+1} - \Delta p_i^{n+1} = \gamma y_i^{n+1} & dans\ Q_i, \\
\frac{\partial}{\partial \nu_i} y_i^{n+1} + \frac{1}{\alpha} p_i^{n+1} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \nu_i} p_i^{n+1} = 0 & sur\ \Sigma_N \cup \Sigma_S, \\
\frac{\partial}{\partial \nu_i} y_i^{n+1} = 0 \quad p_i^{n+1} = 0 & sur\ \Sigma_E \cup \Sigma_W, \\
\frac{\partial}{\partial \nu_i} y_i^{n+1} + \beta p_i^{n+1} = -\frac{\partial}{\partial \nu_j} y_j^n + \beta p_j^n & sur\ \Sigma_{ij}, \\
\frac{\partial}{\partial \nu_i} p_i^{n+1} - \beta y_i^{n+1} = -\frac{\partial}{\partial \nu_j} p_j^n - \beta y_j^n & sur\ \Sigma_{ij}, \\
y_i^{n+1}(0, x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2) \quad \frac{\partial}{\partial t} y_i^{n+1}(0, x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) & sur\ \Omega_i, \\
p_i^{n+1}(T, x_1, x_2) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} p_i^{n+1}(T, x_1, x_2) = 0 & sur\ \Omega_i.
\end{array}\right. \tag{5}$$

Les ingrédients essentiels de cette méthode sont les conditions au bord sur les frontières créées par les interfaces Σ_{ij}. Ce sont les "conditions de transmissions" entre sous-domaines. Leur second membre est donné par la résolution à l'étape précédente sur les sous-domaines voisins. Lorsque l'algorithme est stationnaire ces conditions garantissent la continuité des traces des fonctions et des dérivées normales sur les interfaces. La concaténation des solutions locales est donc bien la solution unique du problème global. Sur les aspects théoriques de la

méthode nous renvoyons à [4] [5] où est démontré en particulier la convergence.

Remarque 2 : Il est possible de résoudre le problème direct, c'est à dire l'équation des ondes sans contrôle, en modifiant très simplement l'algorithme (5). Il suffit pour cela de supprimer le contrôle $\frac{1}{\alpha}p_i^{n+1}$ de la condition au bord sur $\Sigma_N \cup \Sigma_S$. Il est possible dans ce cas et comme pour le problème de contrôle optimal de montrer la convergence de l'algorithme avec ou sans termes sources additionnels. Cette remarque permet de transformer très facilement l'algorithme et son implémentation en un solveur pour le problème direct. Cela sera utile dans la section numérique pour des comparaisons entre problème de contrôle, problème direct et le calcul de différentes valeurs du critère.

4 Interprétation des sous-problèmes et leur découplage

Posons $\lambda_{ij}^n = (-\frac{\partial}{\partial \nu_j} y_j^n + \beta p_j^n)|_{\Sigma_{ij}}$ et $\mu_{ij}^n = (-\frac{\partial}{\partial \nu_j} p_j^n - \beta y_j^n)|_{\Sigma_{ij}}$. Le système (5) peut alors se reinterpréter comme le problème de contrôle frontière, observation distribuée et frontière

$$\min_{u \in L^2(\partial\Omega_i)} \frac{1}{2}\left(\int_{Q_i} |y_i^{n+1}|^2 dxdt + \alpha \int_{\Sigma_i} |u|^2 d\sigma dt + \sum_j \int_{\Sigma_{ij}} |u|^2 + |y_i^{n+1} + \mu_{ij}^n|^2 d\sigma dt\right) \tag{6}$$

avec y_i^{n+1} solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y_i^{n+1} - \Delta y_i^{n+1} = 0 & dans\ Q_i, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} y_i^{n+1} = u & sur\ \Sigma_i, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} y_i^{n+1} = u + \lambda_{ij}^n & sur\ \Sigma_{ij}, \\ y_i^{n+1}(0, x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2) \quad \frac{\partial}{\partial t} y_i^{n+1}(0, x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) & sur\ \Omega_i. \end{cases}$$

Cette interprétation en terme de contrôle optimal garantit en particulier que chaque sous problème (3) a une solution unique (y_i^{n+1}, p_i^{n+1}) définie par transposition dans $L^2(Q_i) \times L^2(Q_i)$ ([19] Chap 4 section 7). On peut montrer qu'on a une régularité supplémentaire H^1 en espace. Il faut aussi remarquer que toute hypothèse de régularité sur la solution du problème global et sur l'initialisation

de l'algorithme est potentiellement propageable au cours des itérations par les conditions de transmissions.

Remarque 3 : Comme pour le problème global il est possible de découpler ces sous-problèmes par une loi de 'feed-back' (notations comme dans la remarque 1)

$$\vec{p}_i^{n+1}(s) = \mathcal{P}_i^{n+1}(s)\vec{y}_i^{n+1}(s) + \vec{r}_i^{n+1}(s)$$

L'action de l'opérateur $\mathrm{P}_i^{n+1}(s)$ sur $\vec{h}$, $\mathrm{P}_i^{n+1}(s)\vec{h}$, est défini comme la solution $\vec{p}_i^{n+1}(s)$ du système (5) pour $t \in]s, T[$ avec $f = 0$, $\lambda_{ij}^n = 0$, $\mu_{ij}^n = 0$ et $\vec{y}_i^{n+1}(s) = \vec{h}$ comme conditions initiales. Les seconds membres des conditions de transmission étant nuls $\mathrm{P}_i^{n+1}(s)$ est, en fait, indépendant de n, c'est à dire du processus itératif. C'est la partie linéaire de la loi de 'feed back'. La partie constante, $\vec{r}_i^{n+1}(s)$, est la solution $\vec{p}_i^{n+1}(s)$ du système (5) pour $t \in]s, T[$ avec condition initiales $\vec{y}_i^{n+1}(s) = 0$ nulles.

Le calcul de l'opérateur P_i (l'indice d'itération n'est plus nécessaire) n'est donc à réaliser qu'une fois.

Nous réaliserons le calcul de la loi de feed back sur le problème complètement discrétisé en section 6.

5 La discrétisation et la décomposition du domaine

Nous utilisons en espace des éléments finis mixtes hybrides (non conformes) et en temps un schéma saute-mouton. Ces choix correspondent à un schéma discret stable classique pour l'équation des ondes. Ils assurent que l'algorithme de décomposition de domaine discret converge.

Pour une description précise des élément finis mixtes hybrides. Nous renvoyons à [12] [15] [21] par exemple. On se contente ici de décrire rapidement le schéma obtenu. Les indices bas i, j indiquent la discrétisation spatiale sur une grille régulière $[0, Nx_1] \times [0, Nx_2]$ d'éléments finis quadrilatéraux. On pose $h = \frac{2}{Nx_1+1}$ et on suppose que $Nx_1 = Nx_2$. Les indices haut k représentent le

temps $k\delta t$ de la discrétisation temporelle. Les degré de liberté sur un élement fini repéré par ses indices i, j et au temps $k\delta t$ sont alors

- $y^k_{i,j}, p^k_{i,j}$: les valeurs moyennes de $y(k\delta t, x_1, x_2), p(k\delta t, x_1, x_2)$ sur l'élément.
- Pour chacune des faces $(X = N, E, W, S)$, Nord, Est, Ouest, Sud de l'élement on a $qy^k_{X,i,j}, qp^k_{X,i,j}$ et $ty^k_{X,i,j}, tp^k_{X,i,j}$, représentant respectivement le flux de $y(k\delta t, x_1, x_2), p(k\delta t, x_1, x_2)$ à travers la face considérée et la valeur moyenne de la trace de la même fonction sur la même face.

Cela nous fait donc neuf degrés de liberté pour l'état direct et idem pour l'état adjoint.

Pour simplifier les écritures, adoptons les notations vectorielles suivantes : $u^k_{i,j} = (y^k_{i,j}, p^k_{i,j})'$, $qu^k_{X,i,j} = (qy^k_{X,i,j}, qp^k_{X,i,j})'$ $tu^k_{X,i,j} = (ty^k_{X,i,j}, tp^k_{i,j})'$ ($'$ dénote la transposition). La discrétisation du problème (3) peut alors s'écrire (sous forme vectorielle) après condensation de masse (en espace) :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{u^{k+1}_{i,j} + u^{k-1}_{i,j} - 2u^k_{i,j}}{\delta t^2} - \displaystyle\sum_{(X=N,E,W,S)} qu^k_{X,i,j} = (0, h^2\gamma y^k_{ij})' \\
\frac{1}{2} qu^k_{X,i,j} = -u^k_{i,j} + tu^k_{X,i,j}, \quad pour\ (X = N, E, W, S), \\
qu^k_{W,i,j} = -qu^k_{E,i-1,j} \\
qu^k_{E,i,j} = -qu^k_{W,i-1,j}, \\
qu^k_{S,i,j} = -qu^k_{N,i,j+1} \\
qu^k_{N,i,j} = -qu^k_{S,i,j-1}, \\
tu^k_{W,i,j} = tu^k_{E,i-1,j} \\
tu^k_{E,i,j} = tu^k_{W,i-1,j}, \\
tu^k_{S,i,j} = tu^k_{N,i,j+1} \\
tu^k_{N,i,j} = tu^k_{S,i,j-1}, \\
qu^k_{S,i,0} + (h\dfrac{1}{\alpha} tp^k_{S,i,0}, 0)' = (0,0)', \\
qu^k_{N,i,Nx_2} + (h\dfrac{1}{\alpha} tp^k_{N,i,Nx_2}, 0)' = (0,0)', \\
tu^k_{W,0,j} = (0,0)' \quad tu^k_{E,Nx_1,j} = (0,0)'.
\end{array}
\right. \tag{7}
$$

La première équation représente les deux équations des ondes (directe et adjointe). On a ensuite les équations de consistence entre les variable q représentant le gradient de y et p, y et p eux-mêmes et leurs traces (c'est une intégration par partie). Puis viennent les relations de continuité sur les dérivées normales et les traces d'éléments voisins entre eux. On a finalement les conditions aux bords. Ces relations sont valables pour tout $k = 0..Nt$ et l'on doit ajouter les conditions initiales et finales :

$$y^0_{i,j} = f_0(i*h-1, j*h-1), \quad \frac{y^0_{i,j} - y^{-1}_{i,j}}{\delta t} = f_1(i*h-1, j*h-1),$$
$$p^{Nt}_{i,j} = 0, \quad \frac{p^{Nt}_{i,j} - p^{Nt+1}_{i,j}}{\delta t} = 0.$$

Une meilleure approximation (d'ordre 2 en temps) de $\frac{\partial}{\partial t} y(\frac{-\delta t}{2}, ., .)$ est donnée par

$$\frac{y^0_{i,j} - y^{-1}_{i,j}}{\delta t} = f_1(i*h-1, j*h-1) + \frac{\delta t}{2} \Delta f_0(i*h-1, j*h-1).$$

On a utilisé ici un dévellopement limité en temps et l'équation des ondes. La même démarche pour approcher $\frac{\partial}{\partial t} p(\frac{Nt+\delta t}{2}, ., .)$ donne encore 0.

Cette discrétisation spatiale est (grâce à la condensation de masse) la même que le schéma classique à 5 points pour le Laplacien (il suffit d'éliminer les degrés de liberté qu_X, tu_X). Nous ne comptons pas nous lancer dans une étude de stabilité mais remarquons cependant que ce type de schéma est stable pour l'équation des ondes "standard" avec une CFL de $\frac{1}{2}$.

Nous conservons tout de même le formalisme des éléments finis mixtes hybrides car, comme nous allons le voir, ils permettent de décrire facilement la méthode de décomposition de domaine discrète.

Remarque 4 : Ce système couplé (7) peut s'interpréter comme un problème de contrôle optimal discret qui n'est autre que le problème (1) (2) discrétisé. Ceci s'explique par les propriétés d'intégration par parties discrètes de

notre discrétisation. Le critère discret s'écrit

$$\begin{aligned} Jdisc = \frac{\delta t}{2} \sum_{k=0}^{Nt} \{ \quad & \gamma \sum_{i=0}^{Nx_1} \sum_{j=0}^{Nx_2} h^2 |y_{i,j}^k|^2 + \\ & \alpha \sum_{i=0}^{Nx_1} h |u_{N,i,Nx_2}^k|^2 \\ & \alpha \sum_{i=0}^{Nx_1} h |u_{N,i,0}^k|^2 \}. \end{aligned} \tag{8}$$

Les paramètres de contrôles: (u_{N,i,Nx_2}^k) et (u_{N,i,Nx_2}^k) pour $i = 0..Nx_1$ et $k = 0..Nt$, interviennent dans (7) qui est maintenant découplé. On "oublie" les équations en p et on réécrit l'avant dernière ligne et la précédente:

$$\begin{cases} qy_{S,i,0}^k = hu_{S,i,0}^k, \\ qy_{N,i,Nx_2}^k = hu_{N,i,Nx_2}^k \end{cases}.$$

C'est exactement la discrétisation du problème (2).

Il faut maintenant choisir une décomposition du domaine discret. La stratégie retenue est de considerer chaque element fini de la discrétisation spatiale comme un sous-domaine. Ce choix conduit à un algorithme couteux en nombre d'itération de la méthode mais permet:

- de résoudre facilement les sous-problèmes par une méthode de synthèse quadratique.
- d'écrire la maquette d'un code facilement et efficacement implémentable sur un ordinateur massivement parallèle de type SIMD.

Dans ce cas les interfaces entre sous-domaines sont constituée par les faces N,E,W et S de chaque élement fini. Afin de manipuler plus facilement les conditions au bord, définissons des matrices (2×2): $D_{X,i,j}$ et $J_{X,i,j}$, pour

$(X = N, E, W, S)$. Soit :

$$\begin{cases} D_{X,i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \textit{pour } (X = N, E, W, S) \textit{ et } (i,j) \in [0, Nx_1] \times [0, Nx_2], \\ \textbf{à l'exception des bords} \\ \textbf{de } \Omega \textbf{ (exterieurs) :} \\ D_{E,Nx_1,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \textit{pour } j \in [0, Nx_2], \\ D_{W,0,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \textit{pour } j \in [0, Nx_2], \\ D_{N,i,Nx_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \textit{pour } i \in [0, Nx_1], \\ D_{S,i,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \textit{pour } i \in [0, Nx_1], \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} J_{X,i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} & \textit{pour } (X = N, E, W, S) \textit{ et } (i,j) \in [0, Nx_1] \times [0, Nx_2], \\ \textbf{à l'exception des bords} \\ \textbf{de } \Omega \textbf{ (exterieurs) :} \\ J_{E,Nx_1,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \textit{pour } j \in [0, Nx_2], \\ J_{W,0,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \textit{pour } j \in [0, Nx_2], \\ J_{N,i,Nx_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \textit{pour } i \in [0, Nx_1], \\ J_{S,i,0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \textit{pour } i \in [0, Nx_1]. \end{cases}$$

A l'aide de ces notations nous pouvons écrire les conditions de transmissions discrétisées, n est l'indice d'itération et $k \in [0, Nt]$ l'indice de temps :

$$
\begin{aligned}
&D_{N,i,j} qu^{n+1,k}_{N,i,j} + hJ_{N,i,j} tu^{n+1,k}_{N,i,j} = -D_{S,i,j+1} qu^{n,k}_{S,i,j+1} + hJ_{S,i,j+1} tu^{n,k}_{S,i,j+1} \\
&(i,j) \in [0, Nx_1] \times [0, Nx_2 - 1], \text{ cond. de transm. } S \to N, \\
&D_{S,i,j} qu^{n+1,k}_{S,i,j} + hJ_{S,i,j} tu^{n+1,k}_{S,i,j} = -D_{N,i,j-1} qu^{n,k}_{N,i,j-1} + hJ_{N,i,j-1} tu^{n,k}_{N,i,j-1} \\
&(i,j) \in [0, Nx_1] \times [1, Nx_2], \text{ cond. de transm. } N \to S, \\
&D_{E,i,j} qu^{n+1,k}_{E,i,j} + hJ_{E,i,j} tu^{n+1,k}_{E,i,j} = -D_{W,i+1,j} qu^{n,k}_{W,i+1,j} + hJ_{W,i+1,j} tu^{n,k}_{W,i+1,j} \\
&(i,j) \in [0, Nx_1 - 1] \times [0, Nx_2], \text{ cond. de transm. } W \to E, \\
&D_{W,i,j} qu^{n+1,k}_{W,i,j} + hJ_{W,i,j} tu^{n+1,k}_{W,i,j} = -D_{E,i-1,j} qu^{n,k}_{E,i-1,j} + hJ_{E,i-1,j} tu^{n,k}_{E,i-1,j} \\
&(i,j) \in [1, Nx_1] \times [0, Nx_2], \text{ cond. de transm. } E \to W, \\
&D_{N,i,Nx_2} qu^{n+1,k}_{N,i,Nx_2} + hJ_{N,i,Nx_2} tu^{n+1,k}_{N,i,Nx_2} = 0 \\
&i \in [0, Nx_1], \text{ cond. au bord coté } N, \\
&D_{S,i,0} qu^{n+1,k}_{S,i,0} + hJ_{S,i,0} tu^{n+1,k}_{S,i,0} = 0 \\
&i \in [0, Nx_1], \text{ cond. au bord coté } S, \\
&D_{E,Nx_1,j} qu^{n+1,k}_{E,Nx_1,j} + hJ_{E,Nx_1,j} tu^{n+1,k}_{E,Nx_1,j} = 0 \\
&j \in [0, Nx_2], \text{ cond. au bord coté } E, \\
&D_{W,0,j} qu^{n+1,k}_{W,0,j} + hJ_{W,0,j} tu^{n+1,k}_{W,0,j} = 0 \\
&\textit{tout } j \in [0, Nx_2] \text{ cond. au bord coté } W.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Afin d'obtenir une écriture synthétique et manipulable de l'algorithme discret nous allons dorénavant :

- omettre l'indice d'itération n, nous écrivons implicitement l'étape $n+1$ de l'algorithme.
- omettre les indices d'espace i, j.

Nous avons déja pris en compte les conditions de transmissions et les conditions aux bords dans (9). Il reste à écrire les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{u^{k+1}+u^{k-1}-2u^k}{\delta t^2} - \displaystyle\sum_{(X=N,E,W,S)} q u_X^k = (0, h^2\gamma y^k)', \\ \frac{1}{2} q u_X^k = -u^k + t u_X^k, \quad pour\ (X = N, E, W, S), \end{cases} \tag{10}$$

et les conditions initiales et finales :

$$\begin{aligned} &y^0 = f_0(i*h-1, j*h-1), \quad \frac{y^0 - y_{i,j}^{-1}}{\delta t} = f_1(i*h-1, j*h-1), \\ &p^{Nt} = 0, \quad \frac{p^{Nt+1}-p^{Nt}}{\delta t} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

La démonstration de convergence est exactement la même que dans le cas continu (décrite dans [5] [4]). Les intégrations par parties discrètes (en espace et en temps) y remplacent leur homologues continues.

6 la résolution des sous-problèmes par découplage

L'opération de base de l'algorithme consiste donc à résoudre le problème aux deux bouts (9) (10) (11). Il est plus commode d'introduire (en particulier pour programmer l'algorithme) un changement de variables $(qu_X, Tu_X) \to (up_X, um_X)$ défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} up_X^k &= D_X q u_X^k + h J_X t u_X^k \\ um_X^k &= -D_X q u_X^k + h J_X t u_X^k. \end{aligned} \tag{12}$$

On peut alors exprimer les qu_X et les tu_X en fonction des up_X et u et remplacer. Tous calculs fait la résolution d'un sous-problème s'écrit :

$$\frac{u^{k+1}+u^{k-1}-2u^k}{\delta t^2} - Au^k = (f^k, g^k)', \tag{13}$$

avec

$$A = \frac{1}{h^2} \sum_{(X=N,E,W,S)} \{(D_X + \frac{1}{2}J_X)^{-1} J_X\} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A a la structure suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

On gardera cette notation ainsi que :

$$(f^k, g^k)' = \frac{1}{h^2} \sum_{(X=N,E,W,S)} \{(D_X + \frac{1}{2} J_X)^{-1} u p_X^k\}. \tag{14}$$

Nous aurons besoins des um_X pour les conditions de transmissions (9). Ils peuvent de même s'exprimer en fonction des up_X et u :

$$\begin{array}{c} um_X^k = (D_X(D_X + \frac{1}{2}J_X)^{-1}J_X + J_X(D_X + \frac{1}{2}J_X)^{-1}D_X)u^k - \\ (D_X(D_X + \frac{1}{2}J_X)^{-1} - \frac{1}{2}J_X(D_X + \frac{1}{2}J_X)^{-1})up_X^k \end{array} \tag{15}$$

Dans l'esprit de [19] Chap. 4.5 nous allons découpler le système (13). Réécrivons d'abord ces équations comme un système du premier ordre. Pour cela on revient à la notation y, p et on pose pour $k = 0..Nt - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^{k+\frac{1}{2}} = \frac{y_0^{k+1} - y_0^k}{\delta t}, \\ y_0^k = y^k, \\ p_1^k = p^k, \\ -a p_0^{k-\frac{1}{2}} = \frac{p_1^{k-1} - p_1^k}{\delta t}. \end{array} \right. \tag{16}$$

On reécrit alors (13) comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_0^{k+1} - y_0^k}{\delta t} = y_1^{k+\frac{1}{2}}, \\ \frac{y_1^{k+\frac{1}{2}} - y_1^{k-\frac{1}{2}}}{\delta t} = a y_0^k + b p_1^k + f^k, \end{array} \right. \tag{17}$$

pour $k = 0..Nt - 1$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p_0^{k-\frac{1}{2}} - p_0^{k+\frac{1}{2}}}{\delta t} = -\frac{c}{a} y_0^k - p_1^k - \frac{g^k}{a}, \\ \frac{p_1^{k-1} - p_1^k}{\delta t} = -a p_0^{k-\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \tag{18}$$

pour $k = Nt..1$. Les conditions initiales pour (17) s'écrivent :

$$y_0^0 = f_0(i*h-1, j*h-1), \quad y_1^{-\frac{1}{2}} = f_1(i*h-1, j*h-1)$$

et finales pour (18) :

$$p_0^{Nt+\frac{1}{2}} = 0, \quad p_1^{Nt} = 0.$$

On peut maintenant reformuler ces systèmes à l'aide des notations vectorielles :

$$\begin{aligned} &\vec{y}^{\,k} = (y_0^k, y_1^{k-\frac{1}{2}})', \quad \vec{p}^{\,k} = (p_0^{k+\frac{1}{2}}, p_1^k)', \\ &\vec{f}^{\,k} = (0, f^k)', \quad \vec{g}^{\,k} = (-\frac{g^k}{a}, 0)'. \end{aligned} \tag{19}$$

et des matrices

$$\begin{aligned} &\mathcal{I} = \frac{1}{\delta t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{cases} \vec{y}^{\,k+1} = (\mathcal{I}+\mathcal{J})^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{A})\vec{y}^{\,k} + (\mathcal{I}+\mathcal{J})^{-1}\mathcal{B}\vec{p}^{\,k} + (\mathcal{I}+\mathcal{J})^{-1}\vec{f}^{\,k}, \\ \vec{p}^{\,k-1} = (\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{J})\vec{p}^{\,k} + (\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}\mathcal{C}\vec{y}^{\,k} + (\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}\vec{g}^{\,k}. \end{cases} \tag{20}$$

La technique du découplage (ou synthèse quadratique) consiste à remarquer que pour tout k il existe une relation affine entre $\vec{p}^{\,k}$ et $\vec{y}^{\,k}$ que l'on note

$$\vec{p}^{\,k} = \mathcal{P}^k\vec{y}^{\,k} + \vec{r}^{\,k} \tag{21}$$

On peut alors à l'aide de (20) et des conditions finales pour (18) dériver les équations d'évolution discrètes pour les matrices $\mathcal{P}^k$ et les vecteurs $\vec{r}^{\,k}$. Tout calculs fait on trouve

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}^{k-1} = (\mathcal{K}^k)^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{J})(\mathcal{P}^k + (\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}\mathcal{C})(\mathcal{I}+\mathcal{J})^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{A}), \\ &\mathcal{K}^k = \delta t\mathcal{I} - ((\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{J})(\mathcal{P}^k + (\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}\mathcal{C})(\mathcal{I}+\mathcal{J})^{-1}\mathcal{B}) \end{aligned} \tag{22}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{r}^{\,k-1} = (\mathcal{K}^k)^{-1}\{(\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{J})\vec{r}^{\,k} + ((\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{J})\mathcal{P}^k + \\ (\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}\mathcal{C})(\mathcal{I}+\mathcal{J})^{-1}\vec{f}^{\,k-1} + (\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}\vec{g}^{\,k}\}.\end{aligned} \tag{23}$$

Ces équations sont à intégrer pour $k = Nt..1$. Il faut y ajouter les conditions finales :

$$\mathcal{P}^{Nt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{\,Nt} = (0,0)'.$$

Une fois les coefficients de la loi de "feed-back" (21) connus, on peut donc résoudre directement la première équation de (20). On remplace $\vec{p}^{\,k}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{y}^{\,k} = \{(\mathcal{I}+\mathcal{J})^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{A}) + (\mathcal{I}+\mathcal{J})^{-1}\mathcal{B}\mathcal{P}^{k-1}\}\vec{y}^{\,k-1} + \\ (\mathcal{I}+\mathcal{J})^{-1}\mathcal{B}\vec{r}^{\,k-1} + (\mathcal{I}+\mathcal{J})^{-1}\vec{f}^{\,k-1}\end{aligned} \tag{24}$$

auquel il faut ajouter les conditions initiales donnée précédement pour les variables y.

Comme déja mentionné dans la remarque 3, les matrices $\mathcal{P}^k$ ne dépendent ni de $\vec{f}^{\,k}$ ni de $\vec{g}^{\,k}$ et sont donc indépendantes du processus itératif. La résolution de (22) n'est à faire qu'une fois au début de l'algorithme. Nous sommes ramené à chaque étape à intégrer (23) (24).

Remarque 4 : Nous aurions également pu réaliser le découplage sur le schéma semi-discrétisé (en espace). On obtient alors (comme dans [19] [17]) des équations continue en temps qui à leur tour doivent être discrétisées. Cette option ne débouche pas nécessairement sur notre schéma. Notre approche totalement discrète garantit un découplage "exact" du schéma complètement discret dont nous savons qu'il converge.

7 Description synthétique de l'algorithme

Nous replacons ici les résultats de la section précédentes dans le contexte global de l'algorithme. Nous serons amené à réintegrer les indices d'itération

et d'espace aux notations. Avant de décrire complétement l'algorithme, il faut définir un critère de convergence pour la méthode itérative. Pour cela à nous définissons à chaque itération une norme L^1 d'une "erreur" :

$$\begin{aligned} err^n = \delta t \sum_{k=0}^{Nt} \{ \quad & \sum_{i=0}^{Nx_1} \sum_{j=0}^{Nx_2-1} |up_{N,i,j}^{k,n} - um_{S,i,j+1}^{k,n}| + \\ & \sum_{i=0}^{Nx_1} \sum_{j=1}^{Nx_2} |up_{S,i,j}^{k,n} - um_{N,i,j-1}^{k,n}| + \\ & \sum_{i=0}^{Nx_1-1} \sum_{j=0}^{Nx_2} |up_{E,i,j}^{k,n} - um_{W,i-1,j}^{k,n}| + \\ & \sum_{i=1}^{Nx_1} \sum_{j=0}^{Nx_2} |up_{E,i,j}^{k,n} - um_{W,i+1,j}^{k,n}| \}. \end{aligned} \tag{25}$$

Cette quantité est une mesure du défaut de continuité des flux qu et des traces tu à travers une interface. En effet si cette erreur est nulle, on a pour chaque interface crée par la méthode de décomposition de domaine

$$up_G = um_D, \quad up_D = um_G$$

où D et G dénotent les sous-domaines respectivement à droite et à gauche de l'interface. En utilisant (12), on montre que dans ce cas :

$$qu_G = -qu_D, \quad tu_D = tu_G.$$

Autrement dit, lorsque err^n tends vers 0 la suite u^n générée par la méthode de décomposition de domaine (9) (10) (11) tend vers la solution du problème global (7).
L'algorithme s'écrit :

- Résoudre, pour chaque sous-domaine, (22) (équation de Riccati locales).
- Initialiser tous les $um_{X,i,j}^0$ (à 0 par exemple).
- Tant que $err^n > \epsilon$ (ϵ est une précision fixée) faire
  1. $n = n + 1$
  2. appliquer les conditions de transmissions ;

$$\begin{cases} up_{N,i,j}^{k,n} = um_{S,i,j+1}^{k,n-1}, \ (k,i,j) \in [0,Nt] \times [0,Nx_1] \times [0,Nx_2-1], \\ up_{S,i,j}^{k,n} = um_{N,i,j-1}^{k,n-1}, \ (k,i,j) \in [0,Nt] \times [0,Nx_1] \times [1,Nx_2], \\ up_{E,i,j}^{k,n} = um_{W,i-1,j}^{k,n-1}, \ (k,i,j) \in [0,Nt] \times [0,Nx_1-1] \times [0,Nx_2], \\ up_{W,i,j}^{k,n} = um_{E,i+1,j}^{k,n-1}, \ (k,i,j) \in [0,Nt] \times [1,Nx_1] \times [0,Nx_2]. \end{cases} \tag{26}$$

3. appliquer les conditions de bords :

$$\begin{cases} up^{k,n}_{N,i,Nx_2} = (0,0)', \ (k,i) \in [0,Nt] \times [0,Nx_1], \\ up^{k,n}_{S,i,0} = (0,0)', \ (k,i) \in [0,Nt] \times [0,Nx_1], \\ up^{k,n}_{E,Nx_1,j} = (0,0)', \ (k,j) \in [0,Nt] \times [0,Nx_2], \\ up^{k,n}_{W,0,j} = (0,0)', \ (k,j) \in [0,Nt] \times [0,Nx_2]. \end{cases} \tag{27}$$

4. Pour chaque sous-domaine i,j et pour tout k calculer les $(\vec{f}^{\,k}, \vec{g}^{\,k})$ par l'intermédiaire de (14) (19).
5. Résoudre pour chaque sous-domaine i,j l'équation (23) qui donne les $(\vec{r}^{\,k})$ puis l'équation (24) qui donne les $(\vec{y}^{\,k})$. La loi (21) donne elle les $(\vec{p}^{\,k})$.
6. On utilise maintenant (15) pour avoir tous les $(um^{k,n}_X)$. On est alors en mesure de calculer err^n (25) et éventuellement de revenir en 1.

8 Résultats numériques

Nous avons résolu le problème avec $T = 5$, $Nt = 50$, $Nx_1 = Nx_2 = 10$. Les conditions initiales sont données par

$$f_0(x_1,x_2) = atang(cos(\frac{\Pi}{2}x_1)), \quad f_1(x_1,x_2) = (3 * sin(\Pi x_1) * exp(sin(\frac{\Pi}{2}x_2)).$$

Afin de conserver l'adimensionnalité des équations discrètes nous avons choisi $\gamma = h^2$, $\beta = \frac{1}{h}$ et $\alpha = h$. Il est évidement possible de modifier ces paramètres. Il faut cependant savoir qu'ils ont un impact non négligeable sur la vitesse de convergence de l'algorithme (nous n'avons pas étudié cet aspect de la méthode).

Il est possible pour ce genre de méthode de décomposition de domaine (voir par exemple [11] sur l'équation de Helmholtz) d'améliorer sensiblement la vitesse de convergence par une technique de sous-relaxation. Il arrive même que la méthode sans sous-relaxation ne converge pas. Dans [11], où une analyse de ce phénomène a été réalisée dans le cadre d'un algorithme du même type pour l'équation de Helmholtz, les valeurs propres de l'opérateur d'itération

sont identifiées dans un cas simple et on montre qu'elles tendent vers 1 par valeur inférieures. Des erreurs d'arrondis sont capables de nuire voire d'empêcher la convergence. La sous-relaxation permet de remédier à ce problème. Cette technique a été utilisée systématiquement dans [6] [7] [2] [3]. Elle donne également de bons résultats ici. La sous-relaxation consiste à introduire un paramêtre $rel \in [0,1]$ dans les conditions de transmissions. Le 2. de l'algorithme devient :

$$\begin{cases} up^{k,n}_{N,i,j} = rel\ um^{k,n-1}_{S,i,j+1} + (1-rel)\ up^{k,n-1}_{N,i,j},\ (k,i,j) \in [0,Nt] \times [0,Nx_1] \times [0,Nx_2-1], \\ up^{k,n}_{S,i,j} = rel\ um^{k,n-1}_{N,i,j-1} + (1-rel)\ up^{k,n-1}_{S,i,j},\ (k,i,j) \in [0,Nt] \times [0,Nx_1] \times [1,Nx_2], \\ up^{k,n}_{E,i,j} = rel\ um^{k,n-1}_{W,i-1,j} + (1-rel)\ up^{k,n-1}_{E,i,j},\ (k,i,j) \in [0,Nt] \times [0,Nx_1-1] \times [0,Nx_2], \\ up^{k,n}_{W,i,j} = rel\ um^{k,n-1}_{W,i+1,j} + (1-rel)\ up^{k,n-1}_{E,i,j},\ (k,i,j) \in [0,Nt] \times [1,Nx_1] \times [0,Nx_2]. \end{cases}$$

La figure (1) représente l'évolution de l'erreur err^n par rapport à n pour $rel = 1$ (algorithme non relaxé), et $rel = 0.5$. On obtient une solution satisfaisante un nombre d'itération de l'ordre du millier. Ceci peut paraître prohibitif. Il ne faut toutefois pas oublier que les résolutions sur chaque sous-domaines sont extrêmement simples. Les communications entre sous-domaines ètant locale, cet algorithme est un bon candidat pour une machine parrallèle de type SIMD. Dans l'optique de l'utilisation d'autre machines, le choix de la taille des sous-domaines avec un découpage plus grossier est évidement crucial. Il faudra alors utiliser un solveur local et prendre en compte son coût. Nous ne nous sommes pas intéressé à ce problème.

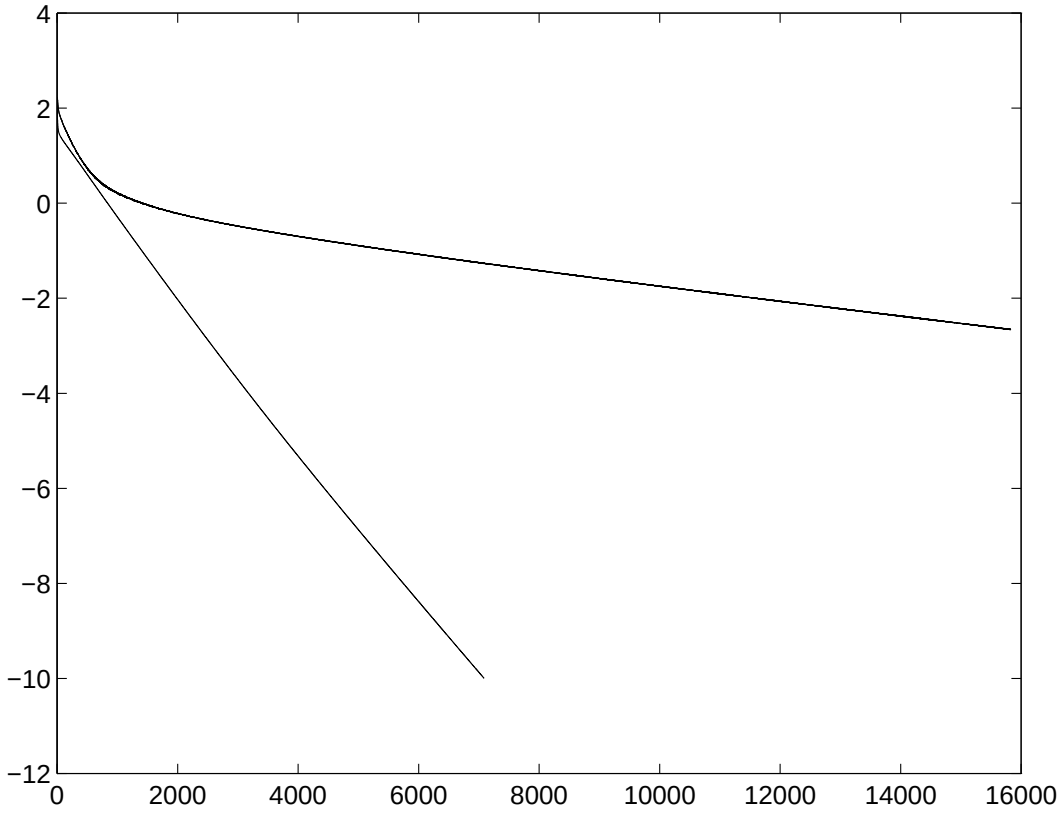


FIG. 1 – *log*10(err^n) *en fonction de n. de haut en bas : rel* $= 1, 0.5$.

Nous allons maintenant représenter sur les mêmes figures d'une part, la solution de l'equation des ondes pour le problême contrôle optimal, d'autre part la solution de l'équation des ondes sans contrôle. Ce dernier problème revient à résoudre (2) avec $u = 0$. Il à été résolu avec exactement le même algorithme. Il suffit uniquement de remplacer $\frac{1}{\alpha}$ par 0 dans (5) (voir également la remarque 2). Chaque figure est un instantané correspondant à différent instants pris entre 0 et 5 secondes. Comme on s'y attend et conformément au critère la solution controlée s'ammortit progressivement. On représente également la valeur du contrôle aux instants correspondants.

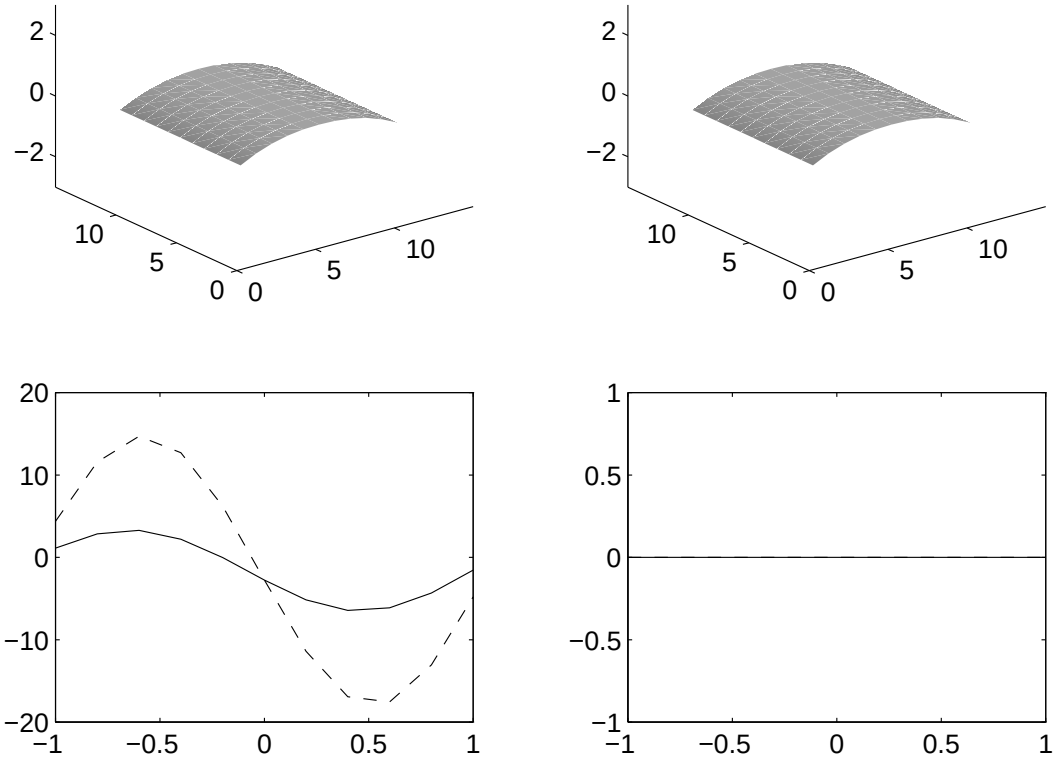


FIG. 2 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 0s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords N et S (représentés par deux courbes,* **attention aux echelles sur ces courbes, elles varient d'une figure à l'autre***). A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

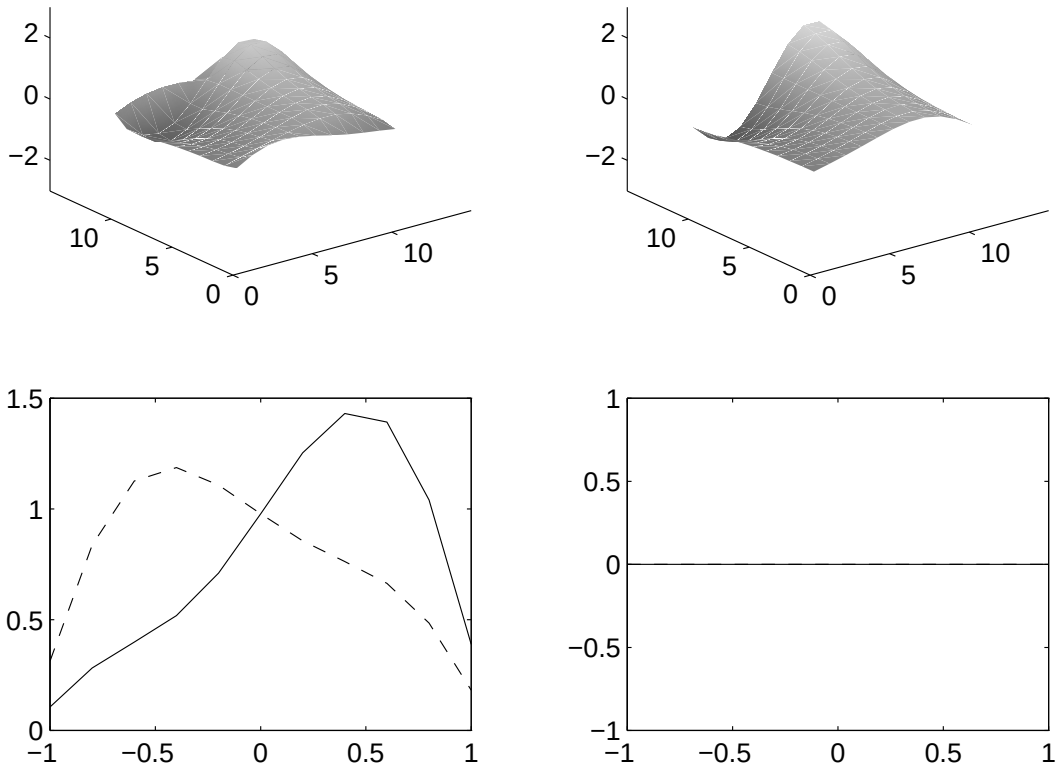


FIG. 3 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 0.2s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

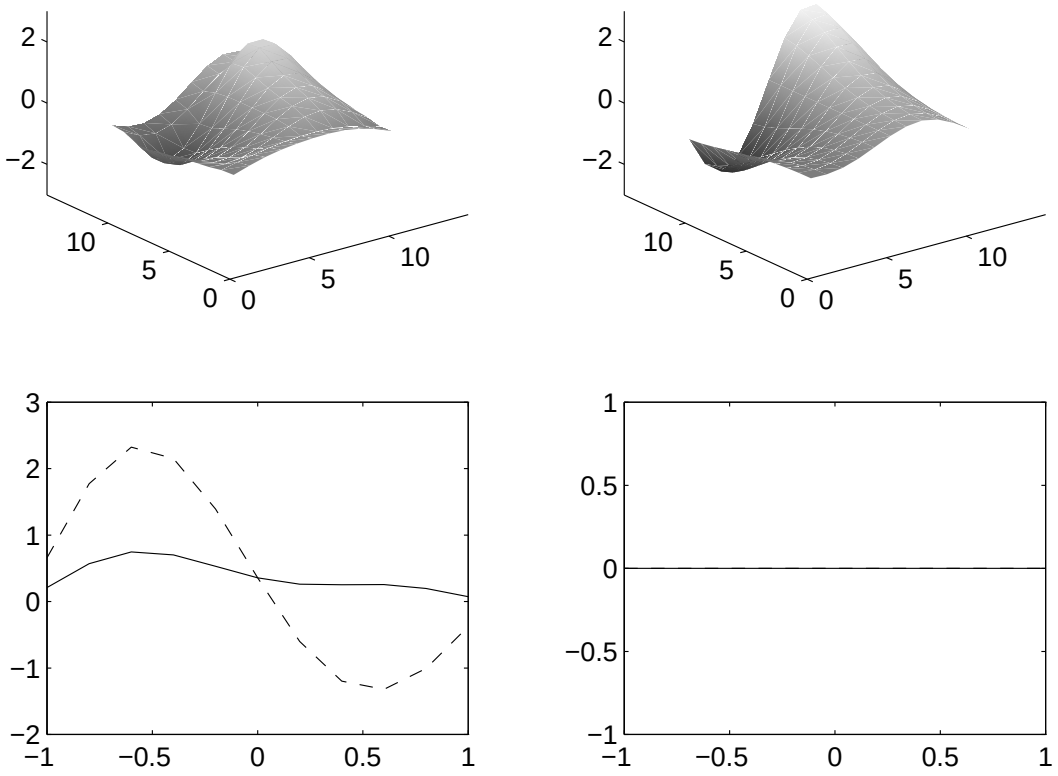


FIG. 4 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 0.4s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

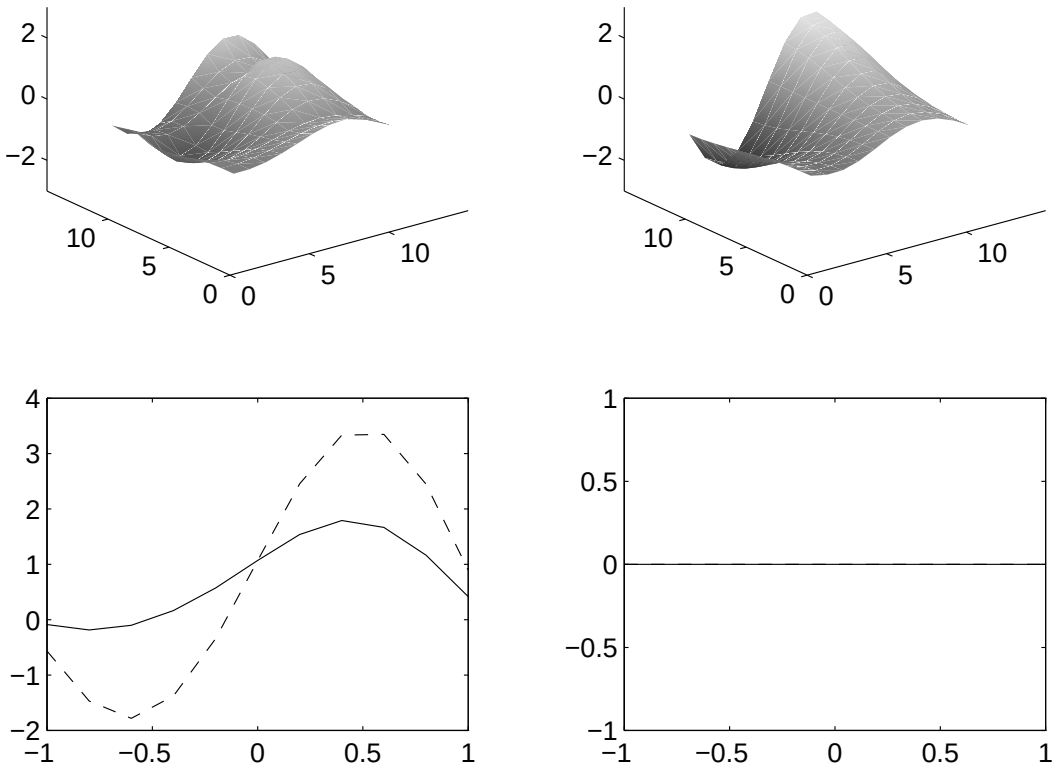


FIG. 5 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 0.6s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

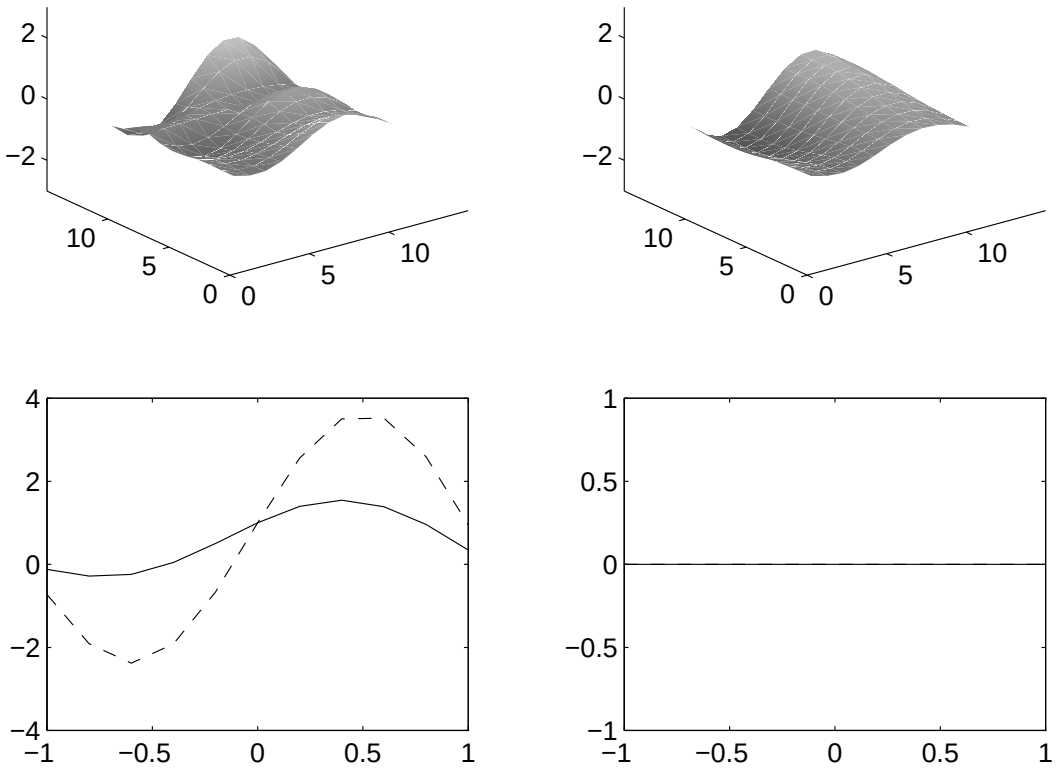


FIG. 6 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 0.8s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

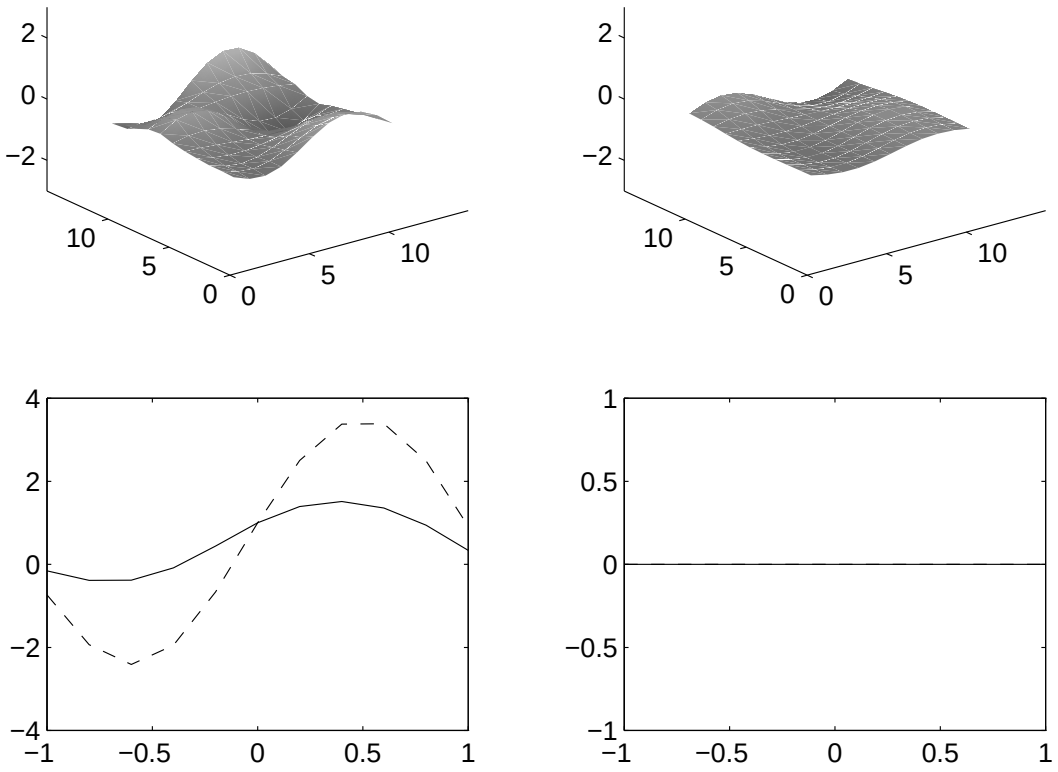


FIG. 7 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 1s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords N et S (représentés par deux courbes. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

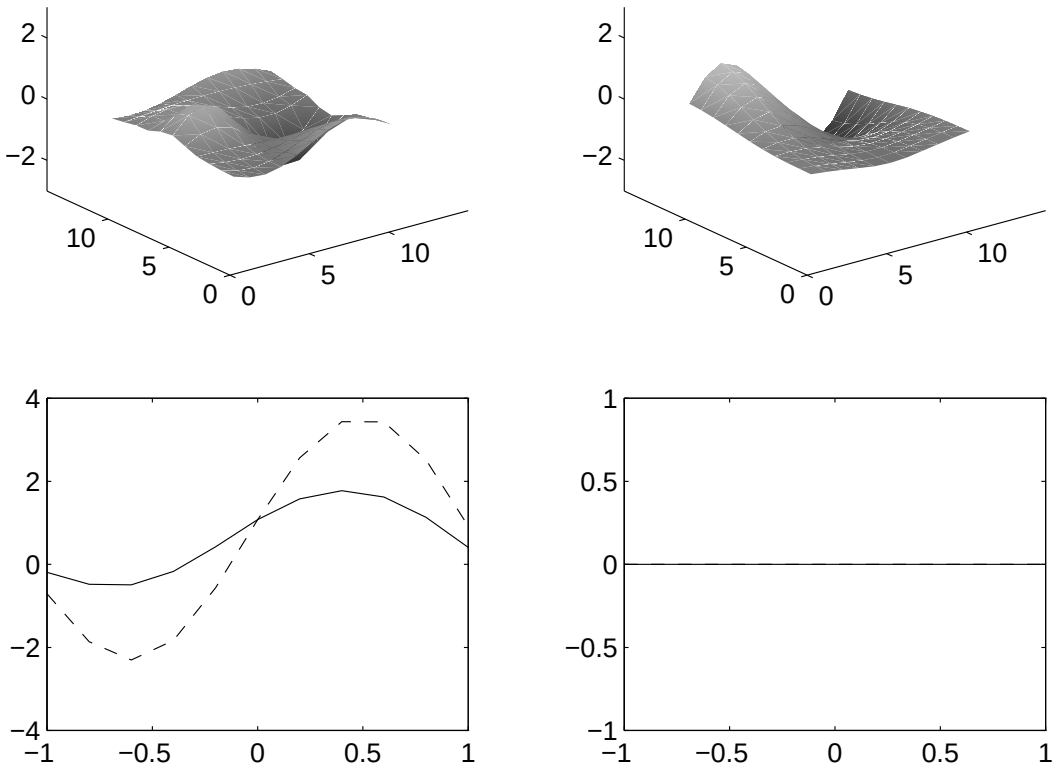


FIG. 8 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 1.2s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

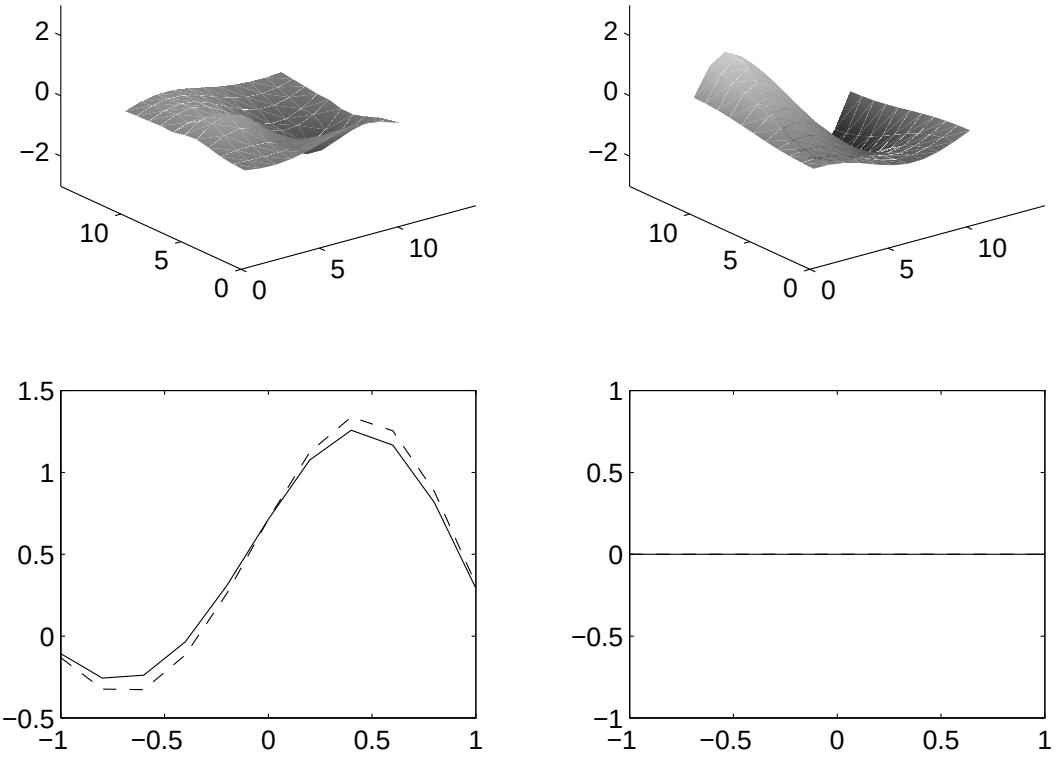


FIG. 9 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 1.4s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

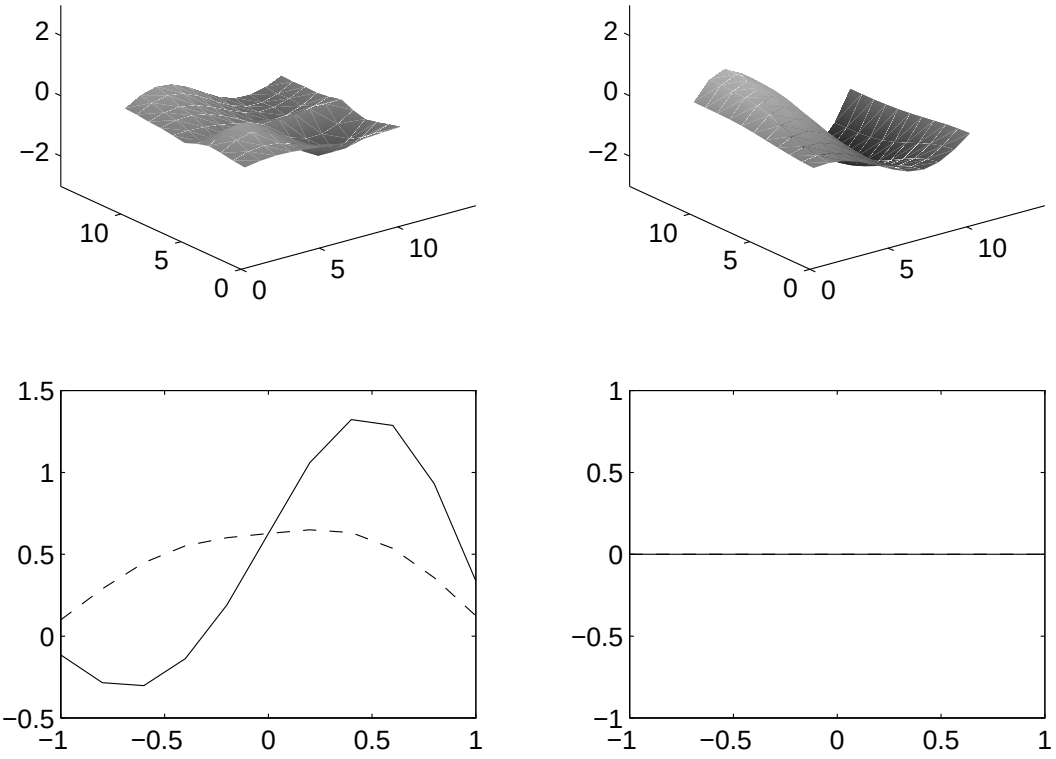


FIG. 10 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 1.6s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

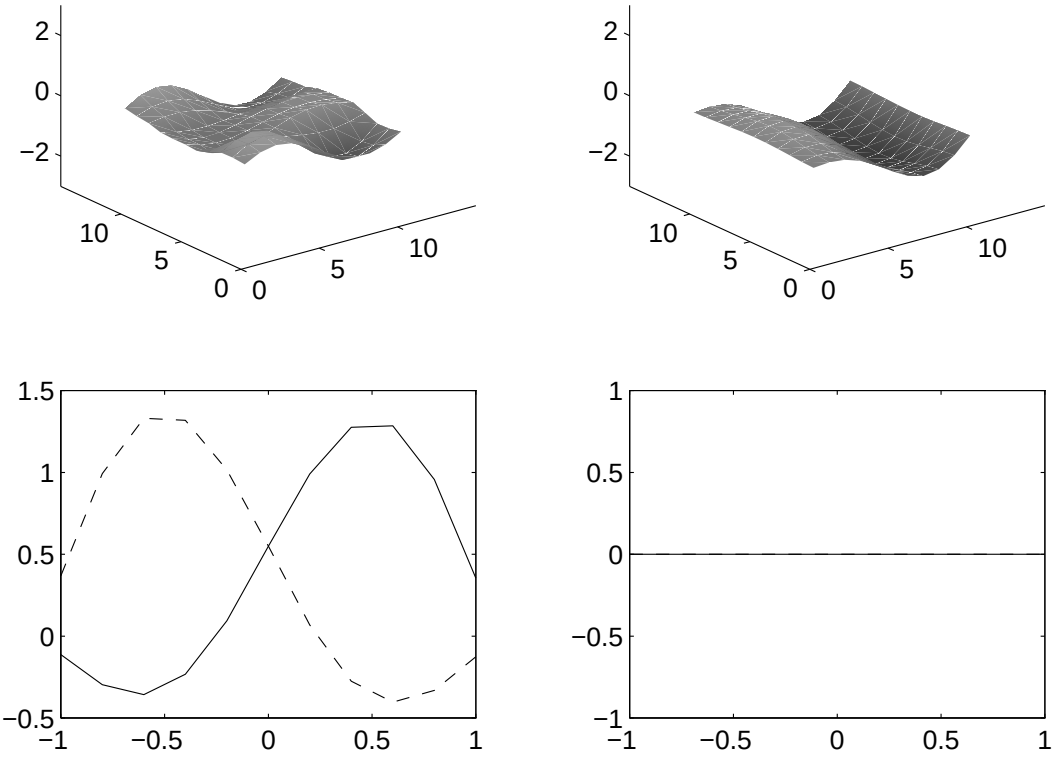


FIG. 11 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 1.8s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

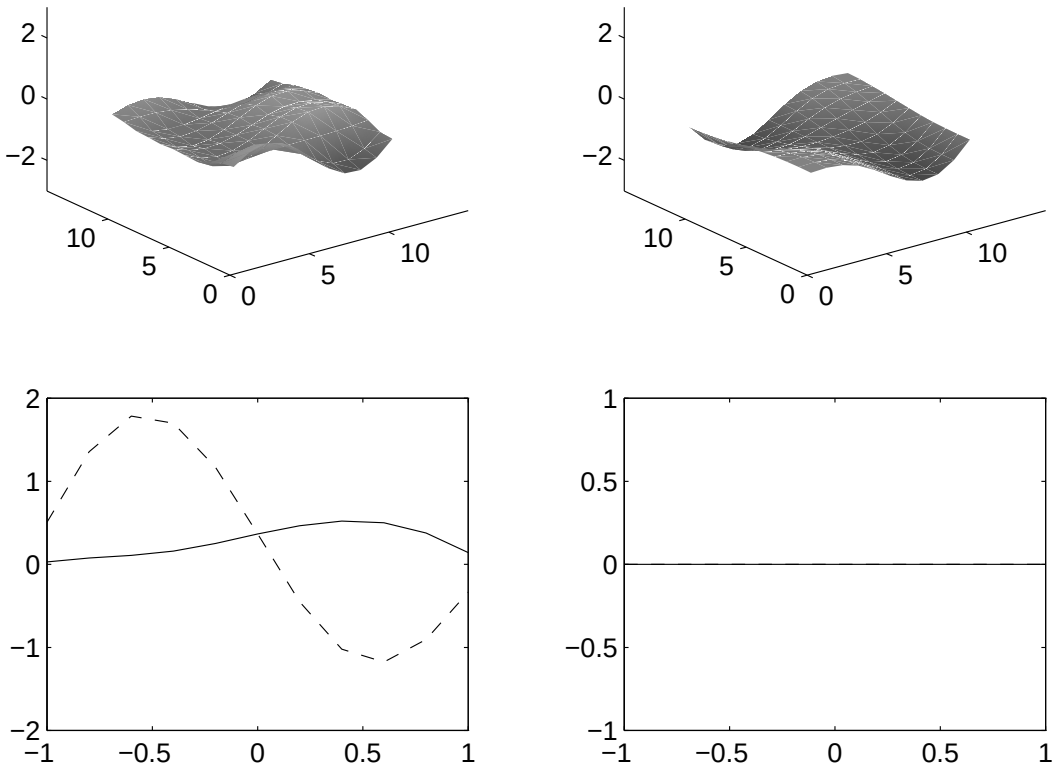


FIG. 12 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 2s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords N et S (représentés par deux courbes. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

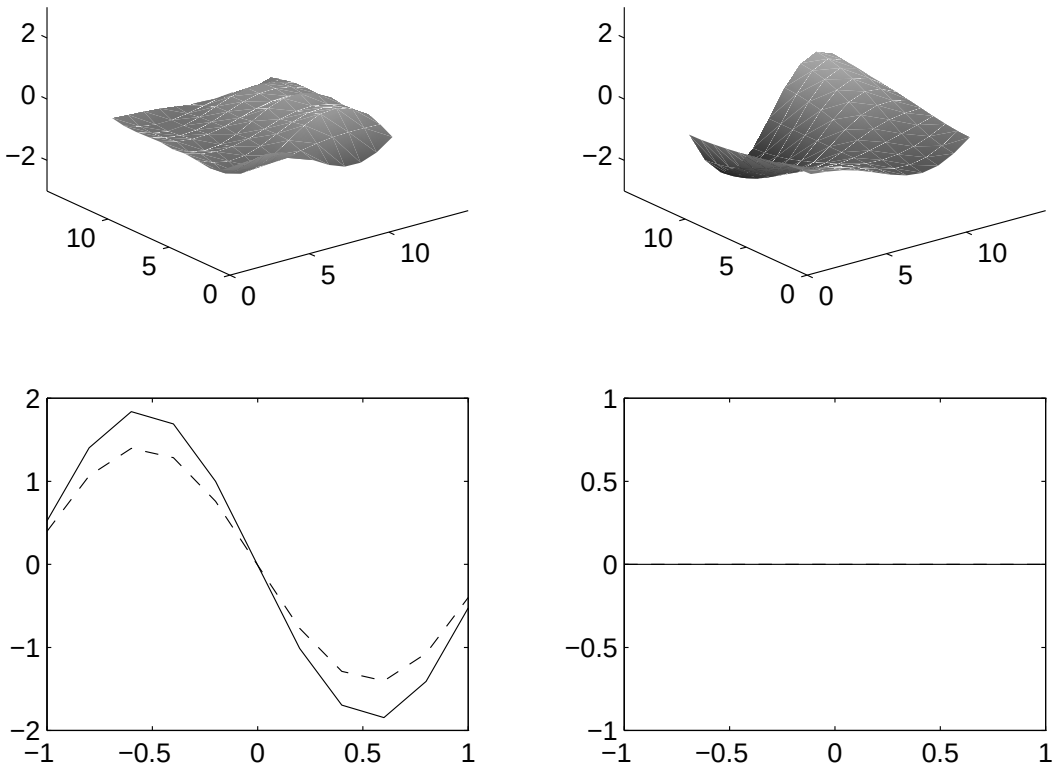


FIG. 13 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 2.2s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

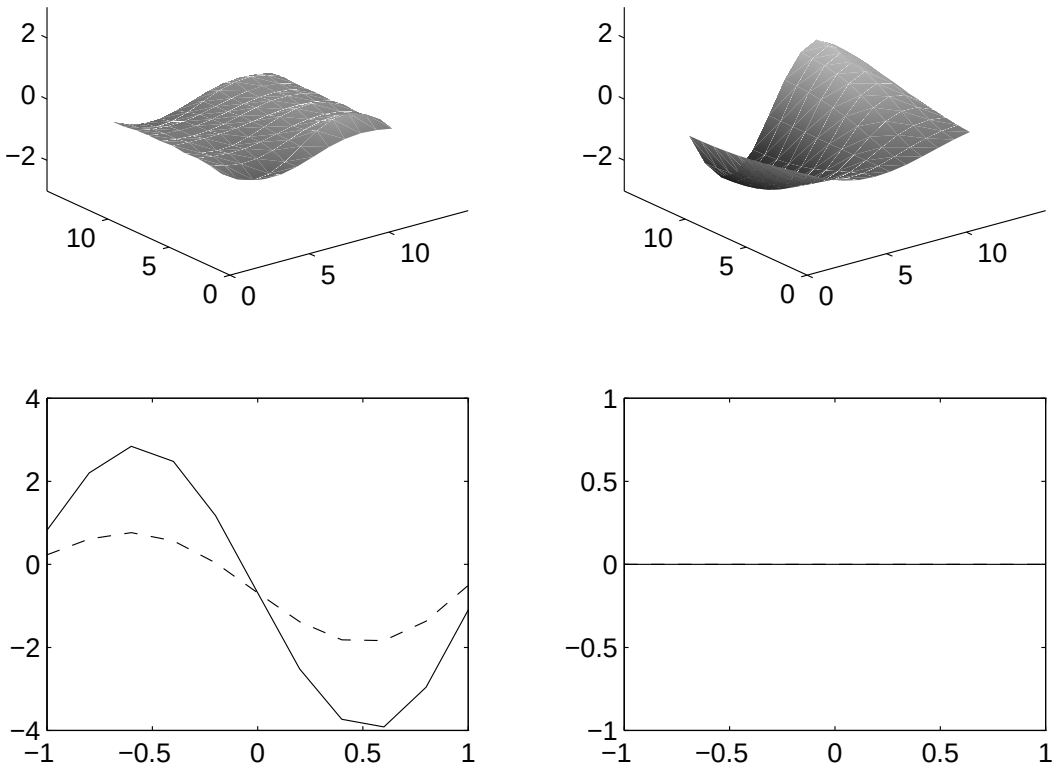


FIG. 14 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 2.4s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

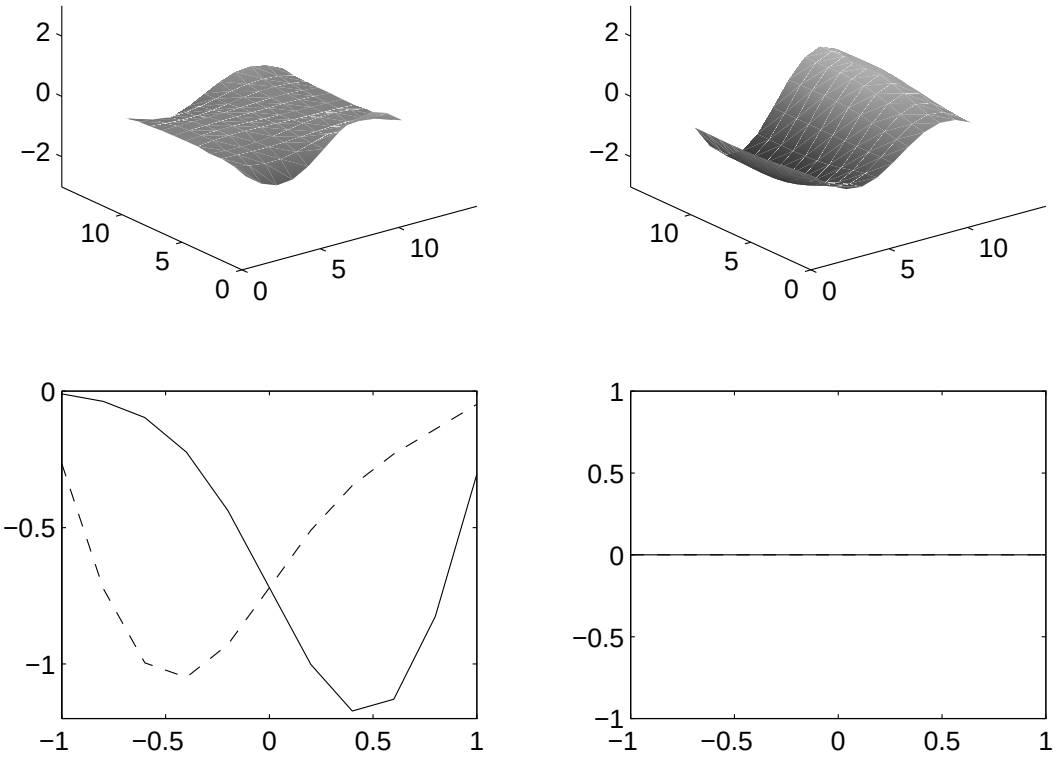


FIG. 15 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 2.6s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

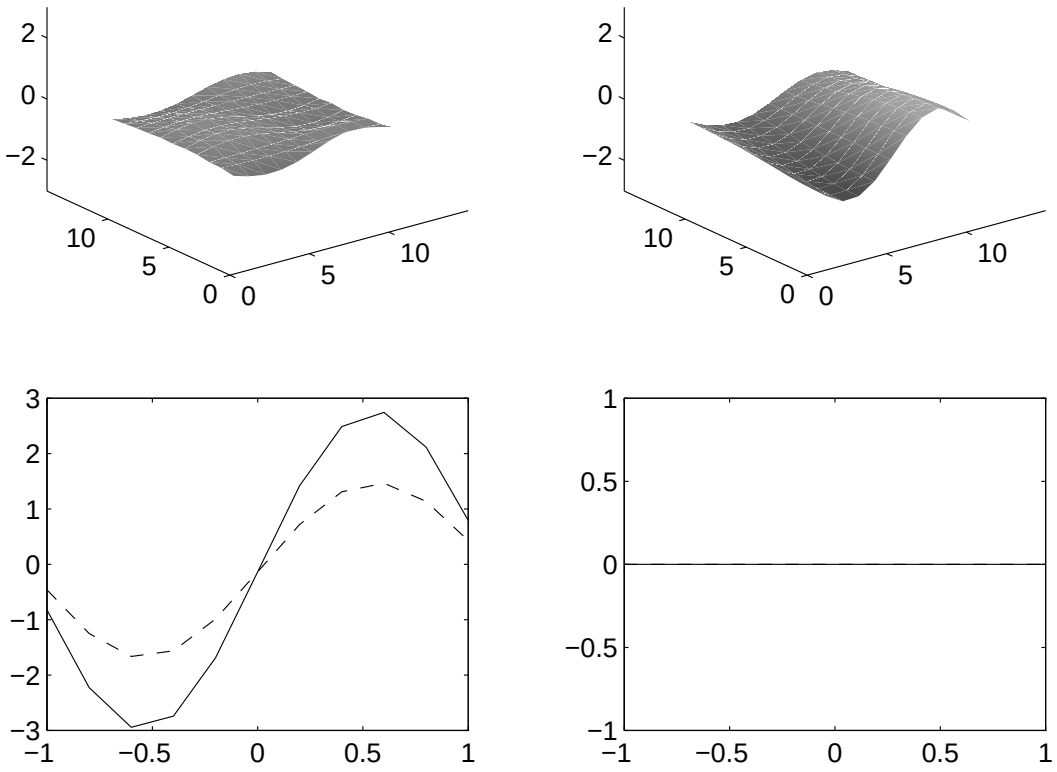


FIG. 16 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 2.8s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

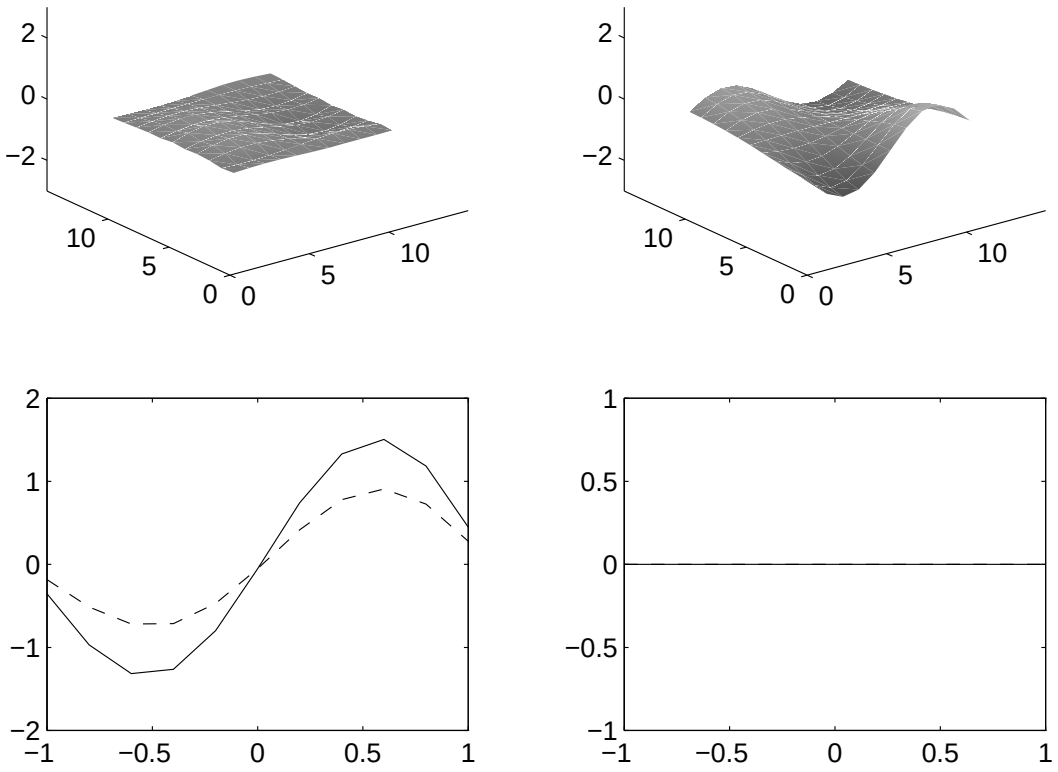


FIG. 17 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 3s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords N et S (représentés par deux courbes. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

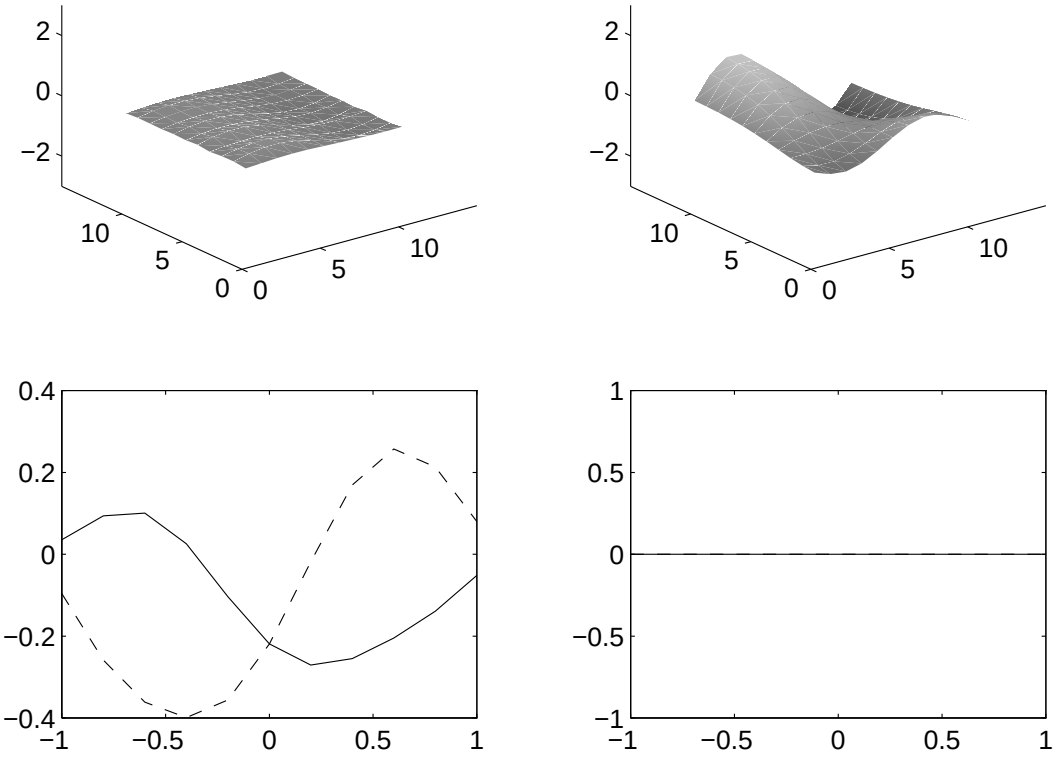


FIG. 18 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 3.2s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

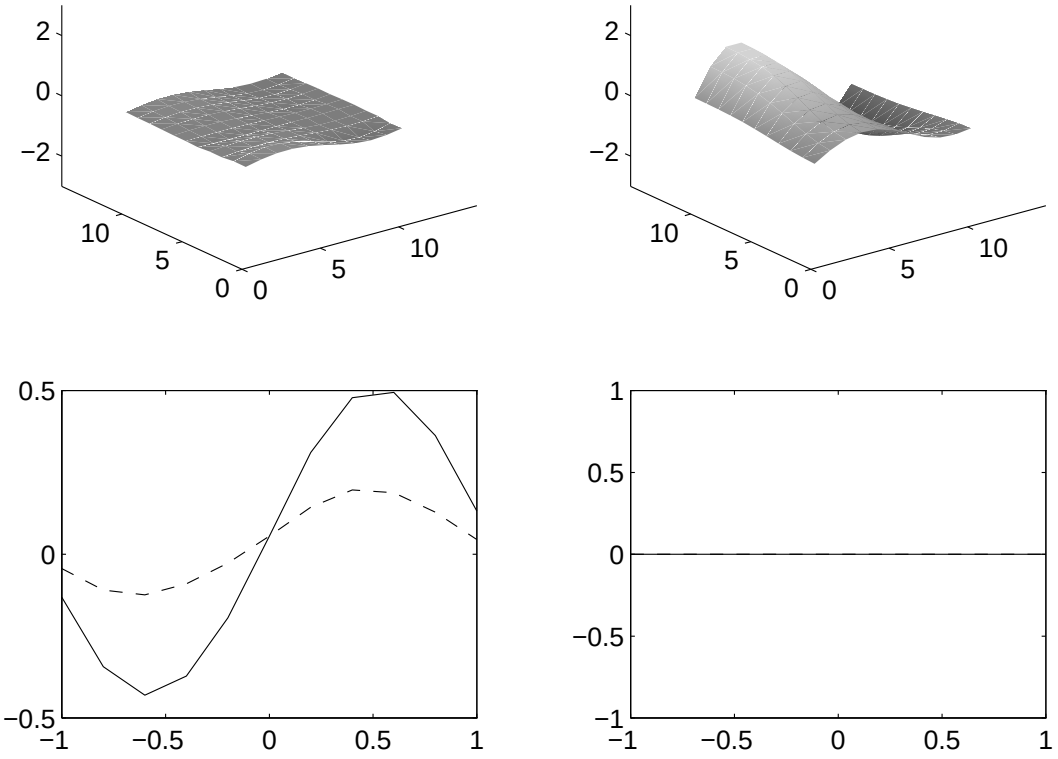


FIG. 19 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 3.4s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

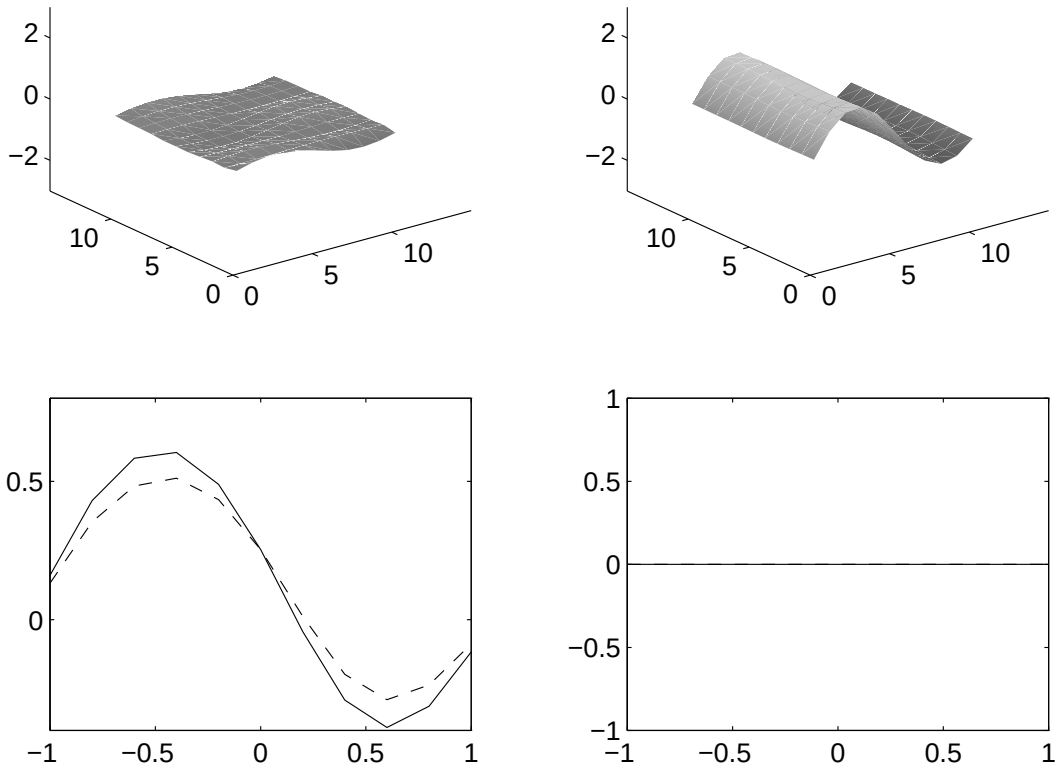


FIG. 20 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 3.6s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

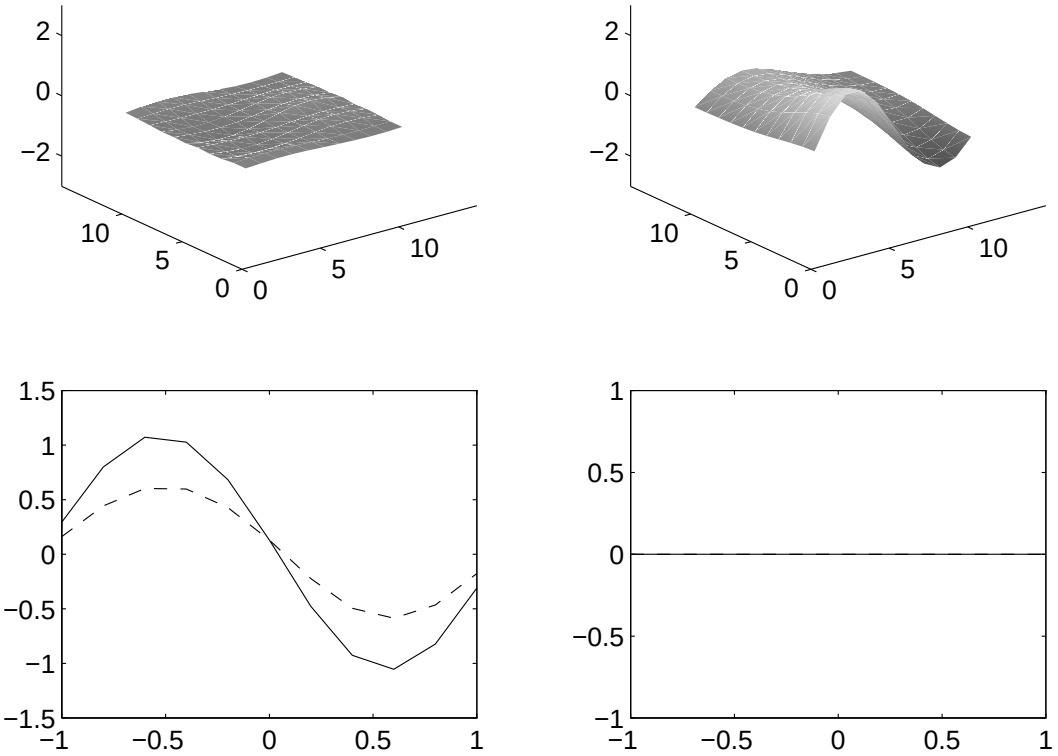


FIG. 21 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 3.8s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

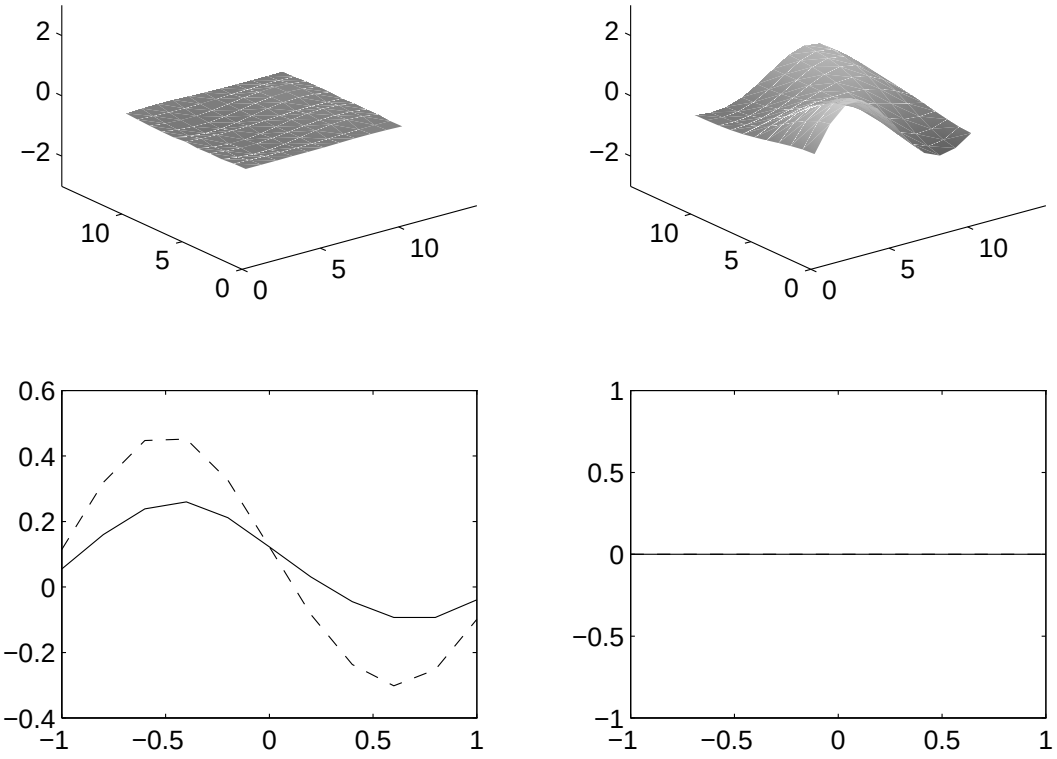


FIG. 22 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 4s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords N et S (représentés par deux courbes. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

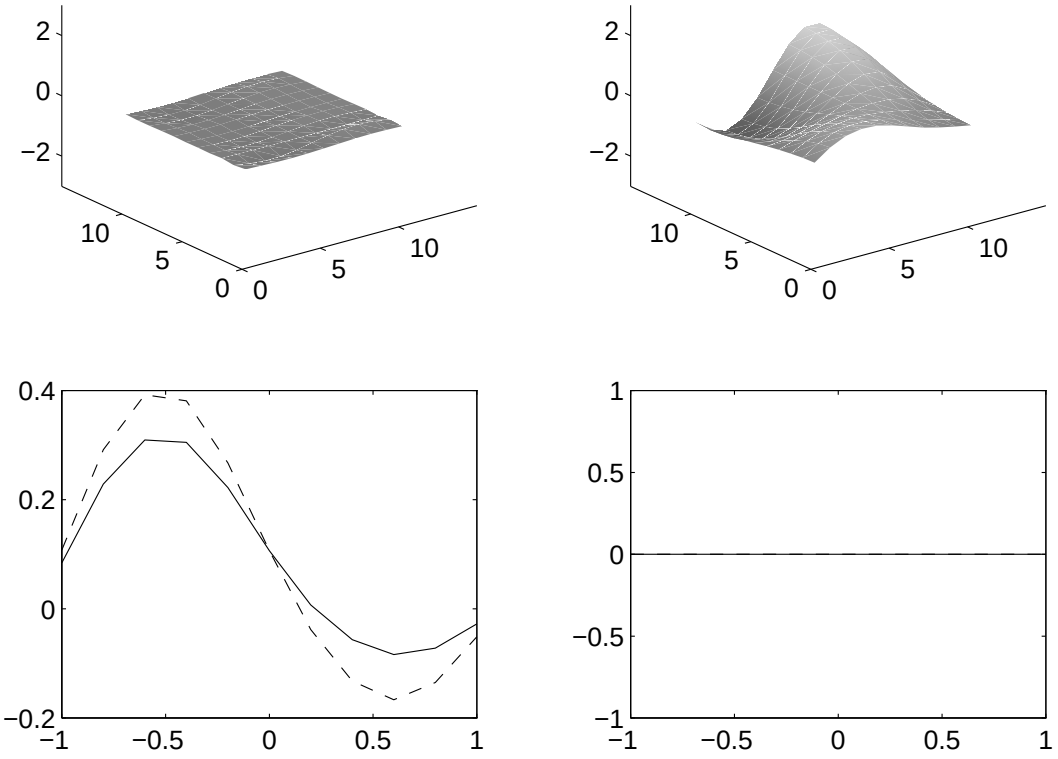


FIG. 23 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 4.2s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

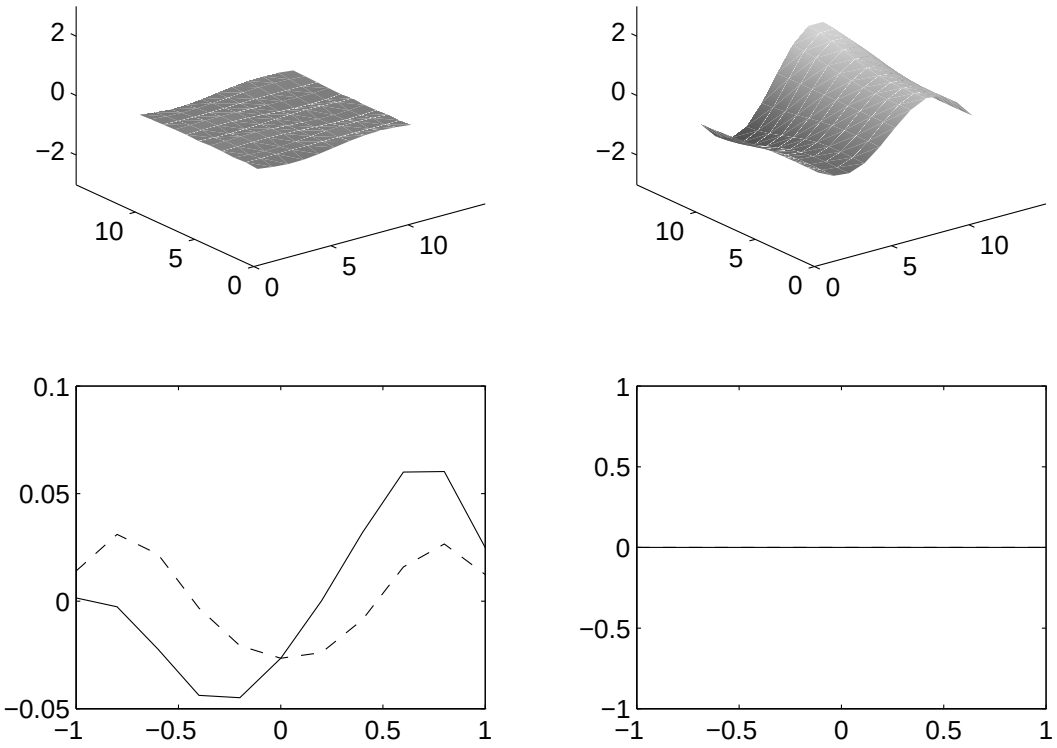


FIG. 24 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 4.4s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

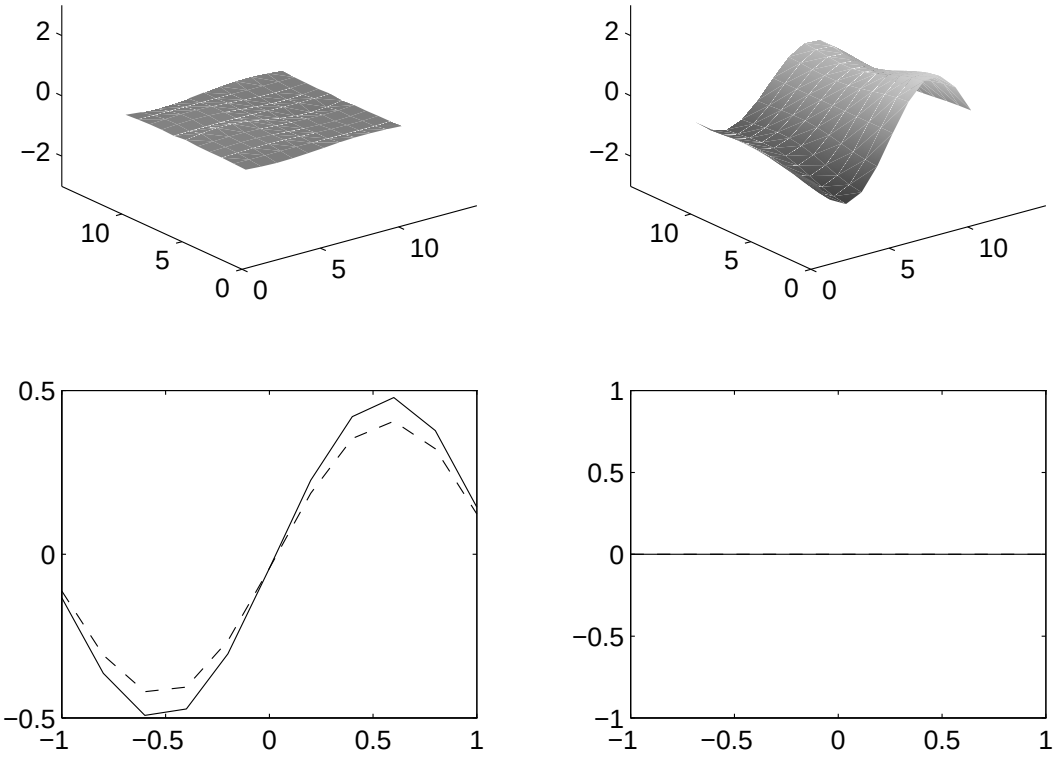


FIG. 25 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 4.6s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

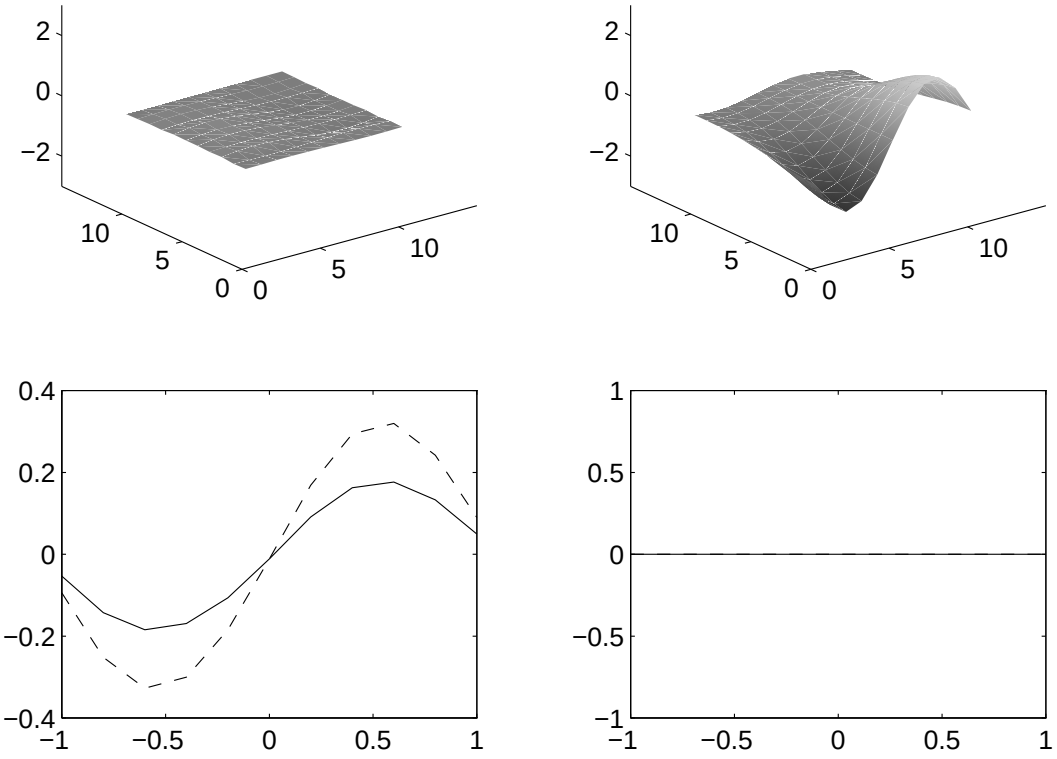


FIG. 26 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 4.8s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

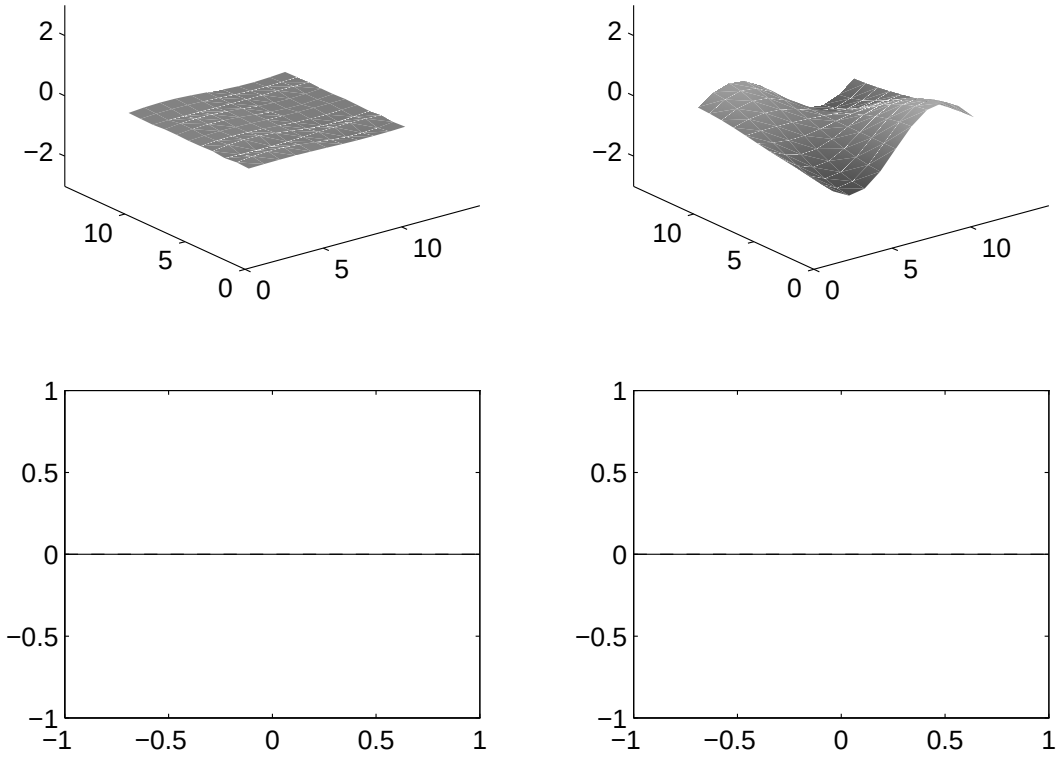


FIG. 27 – *Solution au temps* $\mathbf{t = 5s}$. *A gauche : en haut solution contrôlée, en bas le contrôle sur les bords. A droite : en haut solution non contrôlée, en bas pas de contrôle (*0 *sur les bords).*

Soit *uopt* le contrôle optimal trouvé précédement. Nous avons calculé (figure 28) la valeur du critère (8) (voir la remarque 4) pour quelques contrôles de la forme $uopt + m/10 * uopt$ pour $m = -6..6$. Cela correspond à tracer le critère le long d'une coupe de direction *uopt* dans l'espace des paramètres de contrôle. On trouve bien une fonction convexe qui atteint son minimum pour $m = 0$, c'est à dire pour le contrôle optimal. Comme pour le problème sans contrôle précédent on utilise le même algorithme en remplaçant $\frac{1}{\alpha}$ par 0 dans (5). Les termes sources sont pris en compte en modifiant (27). Létape 3. de l'algorithme sécrit alors :

$$\begin{cases} up^{k,n}_{N,i,Nx_2} = ((1+\frac{m}{10}) * uopt^k_{N,i,Nx_2}, 0)', \ (k,i) \in [0,Nt] \times [0,Nx_1], \\ up^{k,n}_{S,i,0} = ((1+\frac{m}{10}) * uopt^k_{S,i,0}, 0)', \ (k,i) \in [0,Nt] \times [0,Nx_1], \\ up^{k,n}_{E,Nx_1,j} = (0,0)', \ (k,j) \in [0,Nt] \times [0,Nx_2], \\ up^{k,n}_{E,0,j} = (0,0)', \ (k,j) \in [0,Nt] \times [0,Nx_2]. \end{cases}$$

$uopt^k_{X,i,j}$ est le contrôle optimal discret trouvé précédement.

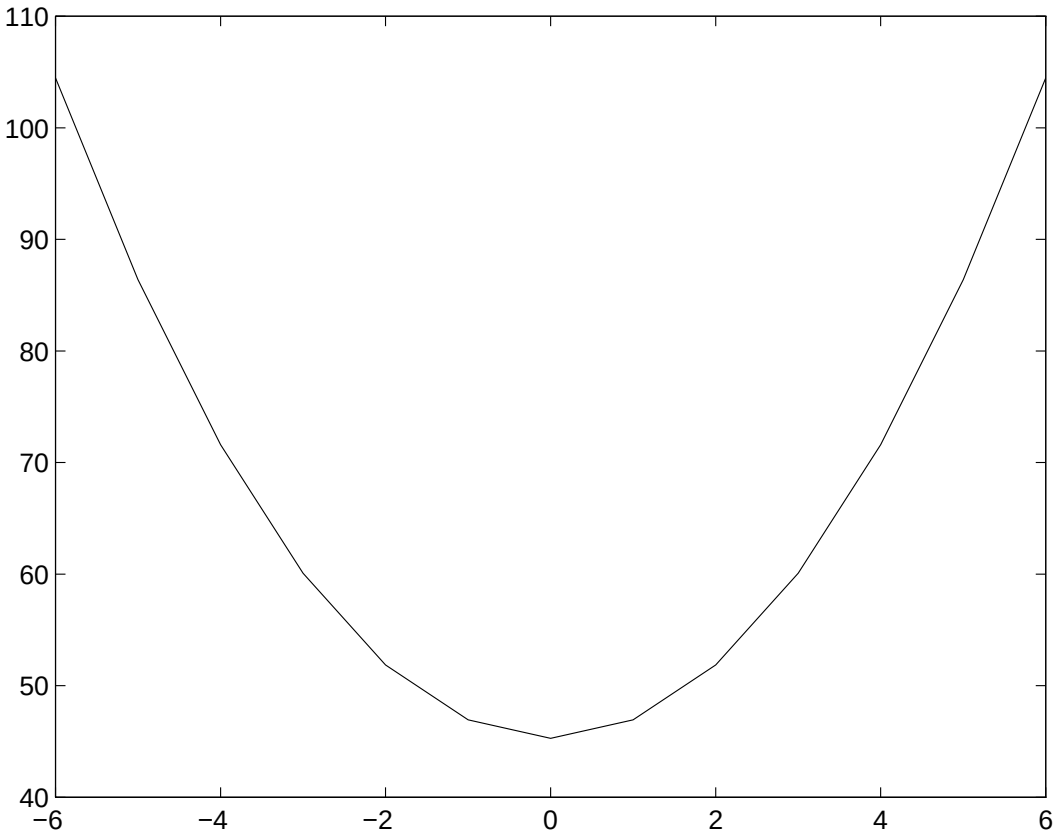


FIG. 28 – *Le critère discret pour différentes valeurs de m*

Nous nous sommes également intéressé aux matrice $\mathcal{P}^k$ entrant dans la loi (21) et solution de (22). Pour les sous-domaines intérieurs ces matrices sont identiques. Nous avons representé, en fonction de k, sur la figure (29) les 4 éléments de la matrice $\mathcal{P}^k$ solutions de (22). On rappelle que cette équation est rétrograde. On observe tout d'abord que, contrairement à ce qui se passe pour le problème continu, les matrices $\mathcal{P}^k$ ne sont pas symmétriques. Ceci s'explique par le choix (19) du découplage discret : le schéma saute-mouton en temps la loi de "feed-back" traite deux instants décalés d'un demi pas de temps.

D'autre part les solutions se stabilisent très vite. C'est ce qu'on observe habituellement pour les problèmes paraboliques pour lesquels la vitesse de propagation est infinie. Nous avons une vitesse $c = 1$ pour notre problème hyperbolique mais nos sous-domaines sont de taille h. Le paramètre de vitesse à prendre en compte pour les problèmes locaux de contrôle (voir (6)) est donc $\frac{1}{h}$ ce qui peut expliquer cette stabilisation rapide des valeurs de $\mathcal{P}^k$.

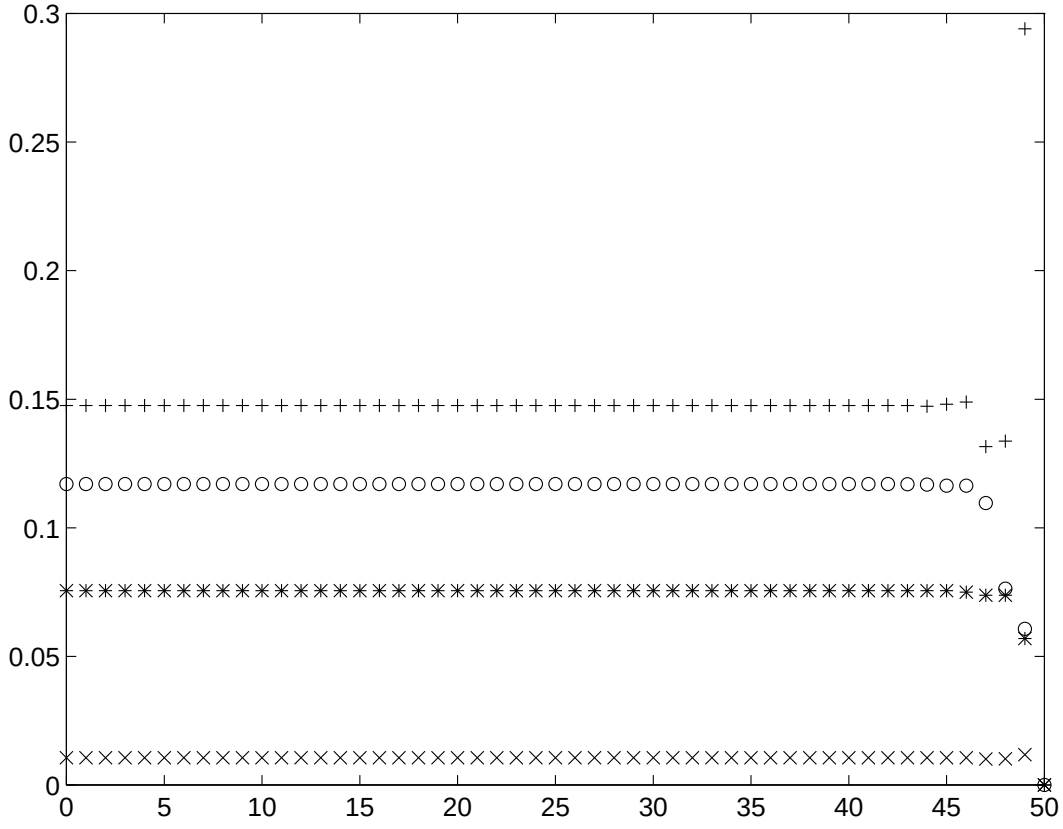


FIG. 29 – $\mathcal{P}_{11}^k$ *représenté par des 'o',* $\mathcal{P}_{12}^k$ *par des '+',* $\mathcal{P}_{21}^k$ *par des 'x',* $\mathcal{P}_{22}^k$ *par des '*', en fonction de* k.

9 Conclusion

L'application de l'algorithme à d'autres problèmes de contrôle optimal est possible. Mentionnons les points suivants :

-Le Laplacien peut être remplacé par un opérateur du second ordre à coefficients (suffisamment réguliers) variables. Les conditions de transmission ainsi que l'énergie dépendent alors de ces coefficients 'locaux'.

-Il est possible de traiter des systèmes gouvernés par des équations paraboliques.

-D'autres types d'observation et contrôle sont possibles.

-Les contraintes (linéaires) sur le contrôle peuvent être prises en compte. La preuve de convergence nécessite alors d'établir des estimations à l'aide des conditions d'optimalité globales et locales.

Nous travaillons par ailleurs à l'application de cette méthode pour la controlabilité exacte de l'équation des ondes. La méthode HUM (voir [20] [13] [14] [15] [16] [10]) repose sur la résolution 'implicite' de deux équations des ondes couplées définissant l'opérateur Λ. Il est possible, dans le même esprit et toujours à l'aide des conditions de transmissions couplées, de définir par décomposition de domaine une suite de sous problèmes de type HUM.

Enfin au vu de la figure (29) il peut sembler judicieux d'introduire par analogie avec la décomposition du domaine en espace une décomposition du domaine temporel. Il est possible, au moins formellement, de montrer la convergence d'une telle méthode avec des conditions de transmissions couplées en temps. Plus précisément, si l'on introduit un découpage $t_0 < t_1 < ... < T_n$ de l'intervalle de temps considéré, on écrira pour conditions initiales et finales du sous-problème i posé sur $]t_i, t_{i+1}[$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{\partial}{\partial t} y_i^{n+1}(t_i) + p_i^{n+1}(t_i) = \tfrac{\partial}{\partial t} y_{i-1}^{n}(t_i) + p_{i-1}^{n}(t_i),\\
&-\tfrac{\partial}{\partial t} p_i^{n+1}(t_i) - y_i^{n+1}(t_i) = \tfrac{\partial}{\partial t} y_{i-1}^{n}(t_i) - y_{i-1}^{n}(t_i),\\
&\tfrac{\partial}{\partial t} y_i^{n+1}(t_{i+1}) + p_i^{n+1}(t_{i+1}) = -\tfrac{\partial}{\partial t} y_{i+1}^{n}(t_{i+1}) + p_{i+1}^{n}(t_{i+1}),\\
&\tfrac{\partial}{\partial t} p_i^{n+1}(t_{i+1}) - y_i^{n+1}(t_{i+1}) = -\tfrac{\partial}{\partial t} p_{i+1}^{n}(t_{i+1}) - y_{i+1}^{n}(t_{i+1}).
\end{aligned}
$$

Références

[1] J. Benamou, *Décomposition de domaine pour le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles elliptiques*, C. R .Acad. Sci. Paris, 317 (1993), pp. 205–209.

[2] ——, *A domain decomposition method for the optimal control of system governed by the helmholtz equation*, in Third international conference on mathematical and numerical wave propagation phenomena (Cannes-Mandelieu), SIAM, ed., 1995.

[3] ——, *A massively parallel algorithm for the optimal control of systems governed by elliptic p.d.e.'s*, in Seventh SIAM conference on parallel processing for scientific computing (San Francisco), SIAM, ed., 1995.

[4] ——, *Décomposition de domaine pour le contrôle de systèmes gouvernés par des équations d'évolution*, Submitted to C. R .Acad. Sci. Paris, (1996).

[5] ——, *A domain decomposition method for control problems*, in Ninth international conference on Domain Deomposition Methods (Bergen), 1996.

[6] ——, *Domain decomposition methods with coupled transmission conditions for the optimal control of systems governed by elliptic partial differential equations*, SINUM, 33 (1996).

[7] J. Benamou and B. Després, *A domain decomposition method for the helmholtz equation and related optimal control problems*, Soumis à J. Comp. Physics et INRIA Tech. Report 2791, (1996).

[8] A. Bensoussan, R. Glowinsky, and J. Lions, *Méthode de décomposition appliquée au contrôle optimal de systèmes distribués*, in 5th IFIP Conference on Optimization techniques, L. N. in Computer Science, ed., 1973.

[9] A. Bounaim, in Ninth international conference on Domain Deomposition Methods (Bergen), 1996.

[10] F. Bourquin, *Approximation theory for the problem of exact controllability of the wave equation with boundary control*, in Second international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenoma, SIAM, 1993.

[11] B. Després, *Domain decomposition method and the Helmholtz problem (part ii)*, in Second international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenoma, SIAM, 1993.

[12] J. E. R. G. Chavent, *A unified physical presentation of mixed, mixed-hybrid finite elements and usual finite differences for the determination of velocities in waterflow problems*, To appear in Advances Water Resources.

[13] R. Glowinski, *Ensuring well-posedness by analogy; stokes problem and boundary control for the wave equation*, J. COmp. Phys., 103 (1992), pp. 189–221.

[14] R. Glowinski and J.-L.Lions, *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, Acta Numerica, (1996), pp. 159–333.

[15] R. Glowinski, W. Kinton, and M. Wheeler, Int. J. Numer. Methods Eng., 27 (1989), pp. 623–.

[16] R. Glowinski, J.-L. Lions, and C. Li, *A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (i) dirichlet control: description of the numerical methods*, Japan J. of Applied Math., 7 (1990), pp. 1–.

[17] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Differential and Algebraic Riccati equation with Application to Boundary Point Control Problems: Continuous Theory and Approximation Theory*, Springer Verlag, 1991.

[18] G. Leugering, *On dynamic domain decomposition of controlled networks of strings and joint-masses*, 1996.

[19] J. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[20] ——, *Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués, tome 1*, Masson, Paris, 1988.

[21] M. W. R. Glowinski, *Domain decomposition and mixed finite element methods for elliptic problems*, in First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, SIAM, ed., 1988.



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399