INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires II. Analyse numérique

Eliane Bécache — Abdelaâziz Ezziani — Patrick Joly

N° 5159

Avril 2004

THÈME 4



ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--5159--FR

INRIA
ROCQUENCOURT

Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires II. Analyse numérique

Eliane Bécache , Abdelaâziz Ezziani , Patrick Joly*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Ondes

Rapport de recherche n° 5159 — Avril 2004 — 50 pages

Résumé : Nous nous intéressons à la modélisation de la propagation d'ondes dans des milieux viscoélastiques. Un premier rapport concernait l'analyse mathématique des modèles continus. Le second rapport est consacré à leur approximation numérique. Nous présentons une méthode d'éléments finis mixtes pour approcher les équations viscoélastiques dans des milieux anisotropes hétérogènes. Cette méthode permet de faire la condensation de masse et ainsi d'obtenir un schéma explicite centré pour la discrétisation en temps. Nous démontrons, pour le schéma ainsi obtenu, un résultat de décroissance d'une énergie discrète et donnons une condition suffisante de stabilité. Pour simuler la propagation dans les milieux ouverts, nous adaptons la technique de couches absorbantes parfaitement adaptées aux ondes viscoélastiques. Nous présentons finalement des validations de la méthode ainsi que des simulations d'expériences réalistes.

Mots-clés : Analyse de stabilité, différences finies, dissipation d'énergie, élément finis mixte, ondes viscoélastiques.

* INRIA, Domaine de Voluceau, B.P.105 78153 Le Chesnay Cedex, France

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Téléphone : +33 1 39 63 55 11 —Télécopie : +33 1 39 63 53 30

Modeling of waves propagation in linear viscoelastic media II. Numerical analysis

Abstract: We are interested in the modeling of wave propagation in viscoelastic media. A first report was devoted to the mathematical analysis of continuous models. This second report is concerned with their numerical approximation. We present a mixed finite element method to approximate the viscoelastic equations in general heterogeneous anisotropic media. This method combines mass lumping with a centered explicit scheme for time discretization. For the resulting scheme, we prove a discrete energy decay result and provide a sufficient stability condition. For the numerical simulations in open domains we adapt the perfectly matched layers techniques to viscoelastic waves. The method is validated with simple numerical experiments and finally more realistic simulations are presented.

Key-words: Energy dissipation, finite difference, mixed finite element, stability analysis, viscoelastic waves.

Table des matières

Introduction **3**

1 Présentation du problème **4**

2 Cas 1D - Schémas aux différences finies **5**
2.1 Discrétisation en espace 6
2.2 Discrétisation en temps 6
2.3 Analyse de stabilité 7
2.3.1 Stabilité par Fourier 7
2.3.2 Stabilité par techniques énergétiques 13

3 Dimension supérieure - Éléments finis mixtes **15**
3.1 Reformulation du problème 15
3.2 Formulation variationnelle déplacement-contrainte 16
3.3 Semi-discrétisation en espace 17
3.4 Schéma totalement discrétisé 19
3.5 Énergie discrète et analyse de stabilité 20

4 Traitement des milieux ouverts **25**
4.1 Application des PML au problème de la viscoélasticité 25
4.2 Approximation des PML 28

5 Conception de modèles réalistes **28**
5.1 Définitions 28
5.2 Facteur de qualité quasi-constant 29
5.3 Cas d'un milieu isotrope de dimension supérieure à 2 33

6 Simulations numériques **34**
6.1 Solution analytique du problème 1D 34
6.2 Tests numériques dans le cas 1D 36
6.3 Résultats bi-dimensionnels 38
6.3.1 Dissipation d'énergie discrète 39
6.3.2 Du viscoélastique à l'élastique 39
6.3.3 Simulation de la propagation d'onde viscoélastique dans un milieu homogène isotrope 41
6.3.4 Efficacité des couches PML 42
6.3.5 Propagation d'ondes viscoélastiques dans un milieu hétérogène isotrope . . 45

Introduction

Ce rapport est la suite de [2] et concerne la modélisation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires. Dans [2], nous avons présenté et analysé mathématiquement une classe assez générale de modèle viscoélastiques (Modèle de Zener généralisé). Le présent rapport est consacré à l'approximation et l'analyse numérique de ce type de modèles.

L'étude numérique de ces problèmes a commencé il y a environ 15 ans (voir par exemple les travaux de Carcione et al [10, 12, 13]). La plupart des méthodes développées sont basées sur des schémas d'approximation aux différences finies [8, 15, 28]. En particulier, un travail de référence est dû à Robertson, Blanch et Symes [31]. Ces derniers proposent une analyse de Fourier de la stabilité de leur méthode qui est toutefois limitée aux milieux homogènes unidimensionnels. On sait qu'une manière robuste de traiter les milieux hétérogène est d'utiliser la méthode des éléments finis. Dans le cadre des ondes viscoélastiques, il semble qu'il n'y ait que très peu de travaux

existants, en particulier de nature mathématique. Dans [26], les auteurs proposent une méthode d'éléments finis en espace et de quadrature pour l'intégration en temps, pour résoudre un problème viscoélastique isotrope basé sur une formulation en déplacement et une représentation intégrale du modèle de viscoélasticité. Mentionnons également l'approche par éléments finis espace-temps, de nature beaucoup moins mathématique, par Isedman, Niekamp et Stein [25] (voir aussi [32] pour des problèmes quasi-statiques). Récemment, dans [5], nous avons développé une nouvelle méthode d'éléments finis mixtes pour l'équations de l'élastodynamique. Cette méthode est particulièrement conçue pour les maillages réguliers et présente l'intérêt d'être compatible avec la condensation de masse et l'utilisation de la méthode des domaines fictifs pour traiter des domaines de propagation de géométrie complexe [4, 16].

Notre objectif dans ce rapport est essentiellement d'étendre cette méthode aux milieux viscoélastiques et d'en analyser les principales propriétés théoriques et pratiques. Le plan que nous suivons est le suivant : au chapitre 2, nous traitons en détail le cas simplifié des milieux unidimensionnels. Dans ce cas notre analyse peut être directement confrontée à celle de Robertson et al [31]. Le chapitre central de ce rapport est le chapitre 3 dans lequel nous décrivons et étudions la méthode dans le cas général. En particulier, nous démontrons la stabilité de notre schéma dans les milieux hétérogènes par des techniques de décroissance d'énergie discrète directement inspirées de celles utilisées pour l'analyse du problème continu [2]. Le chapitre 4 est consacré à l'adaptation des couches absorbantes parfaitement adaptées aux milieux viscoélastiques. Au chapitre 5, nous abordons la question de modélisation suivante : comment adapter les paramètres du modèle mathématique de façon à se caler sur des mesures ou pour obtenir des propriétés physiques données ? En particulier, nous montrons comment on peut construire des modèles à facteur de qualité *quasi-constant*. Finalement, nous accordons au chapitre 6 une large place aux résultats numériques, lesquels vont de tests de validation élémentaires jusqu'à la simulation d'expériences physiques réalistes.

1 Présentation du problème

Nous considérons le modèle suivant dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ (n=1,2,3) généralisant le problème unidimensionnel de Zener [9, 11]: Trouver le champ de déplacement u et le tenseur des contraintes σ vérifiant :

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho\,\partial_{tt}^2 u - \mathbf{div}\,\sigma = f, & \text{dans } \Omega\times]0,T], \quad \text{(i)} \\ \sigma + \tau_0\partial_t\sigma = \boldsymbol{C}\varepsilon(u) + \tau_0\boldsymbol{D}\varepsilon(\partial_t u), & \text{dans } \Omega\times]0,T], \quad \text{(ii)} \\ u(x,0) = u_0,\ \partial_t u(x,0) = u_1, \sigma(x,0) = \sigma_0, & \text{dans } \Omega, \quad \text{(iii)} \\ u = 0, & \text{dans } \partial\Omega\times]0,T], \quad \text{(iv)} \end{cases}$$

avec

$$(\mathbf{div}\,\sigma)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \forall i = 1,n$$

où ρ est la densité volumique, τ_0 un temps de relaxation, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ deux tenseurs d'ordre 4 symétriques

$$(2)\qquad \boldsymbol{C}_{ijkl} = \boldsymbol{C}_{jikl} = \boldsymbol{C}_{klij}\ ,\ \boldsymbol{D}_{ijkl} = \boldsymbol{D}_{jikl} = \boldsymbol{D}_{klij},$$

et définis positifs:

$$(3)\qquad \left| \begin{array}{l} \exists M_-,\ M_+ > 0, \text{ tels que :} \\ 0 < M_-|\sigma|^2 \le \boldsymbol{C}\sigma : \sigma \le M_+|\sigma|^2, \ \ \forall \sigma \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)\ \ p.p.x \in \mathbb{R}^n, \quad (i) \\ 0 < M_-|\sigma|^2 \le \boldsymbol{D}\sigma : \sigma \le M_+|\sigma|^2, \ \ \forall \sigma \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)\ \ p.p.x \in \mathbb{R}^n, \quad (ii) \end{array} \right.$$

où $\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^n)$ est le sous espace de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ des tenseurs symétriques avec :

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \{\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ linéaire}\},\\ \sigma : \tilde{\sigma} = \sigma_{ij}\tilde{\sigma}_{ij},\ \ \forall(\sigma,\tilde{\sigma}) \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))^2 \ \text{(produit scalaire dans } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)),\\ |\sigma| = (\sigma:\sigma)^{\frac{1}{2}} = \big(\sum_{i,j}\sigma_{ij}^2\big)^{\frac{1}{2}} \ \text{(la norme du produit scalaire)},\\ \boldsymbol{C}\sigma = \boldsymbol{C}_{ijkl}\sigma_{kl},\ \ \forall(\boldsymbol{C},\sigma) \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\big) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).\end{array}\right.$$

Nous ferons en outre les hypothèses suivantes :

– ρ, τ_0, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ mesurables.

(4) – $0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty \quad p.p.x \in \mathbb{R}^n$.

– $0 < \tau_- \leq \tau_0(x) \leq \tau_+ < +\infty \quad p.p.x \in \mathbb{R}^n$.

– la condition d'absorption : $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}$ est défini positif :

$$0 < M_-|\sigma|^2 \leq \mathcal{A}\sigma : \sigma \leq M_+|\sigma|^2,\ \ \forall\sigma \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)\ \ p.p.x \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

et on note par $\boldsymbol{Z}_\tau$ le tenseur symétrique défini positif : $\boldsymbol{Z}_\tau = \tau_0\boldsymbol{Z}$.

On définit **le modèle généralisé** de (1), comme le modèle obtenu en prenant le tenseur des contraintes σ comme une superposition des contraintes élémentaires :

$$\sigma = \sum_l^L \sigma_l, \tag{6}$$

les σ_l étant reliés au tenseur des déformations par la loi élémentaire :

$$\sigma_l + \tau_{0,l}\partial_t\sigma_l = \boldsymbol{C}_l\varepsilon(u) + \tau_{0,l}\boldsymbol{D}_l\varepsilon(\partial_t u)\ \ \forall\, l = 1,\cdots,L, \tag{7}$$

et où $\tau_{0,l}$, $\boldsymbol{C}_l$ et $\boldsymbol{D}_l$ ont respectivement les mêmes propriétés que τ_0, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ dans (1).

2 Cas 1D - Schémas aux différences finies

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas unidimensionnel. Notre objectif est de déterminer un schéma aux différences finies généralisable en dimension supérieure et qui soit explicite et stable.

On considère un domaine $I =]a,b[$ occupé par un milieu viscoélastique avec des conditions de Dirichlet au bord et on cherche à déterminer le déplacement u et la contrainte σ vérifiant :

$$\rho\,\partial_{tt}^2 u - \partial_x\sigma = f, \qquad \text{dans } I\times]0,T], \tag{8a}$$

$$\sigma + \tau_0\partial_t\sigma = \mu\big(\partial_x u + \tau_1\partial_{xt}^2 u\big), \qquad \text{dans } I\times]0,T] \tag{8b}$$

$$u(x,0) = u_0,\ \partial_t u(x,0) = u_1,\ \sigma(x,0) = \sigma_0, \qquad \text{dans } I, \tag{8c}$$

$$u(a,t) = u(b,t) = 0, \qquad \text{dans }]0,T] \tag{8d}$$

avec $\tau_1(x) > \tau_0(x)$.

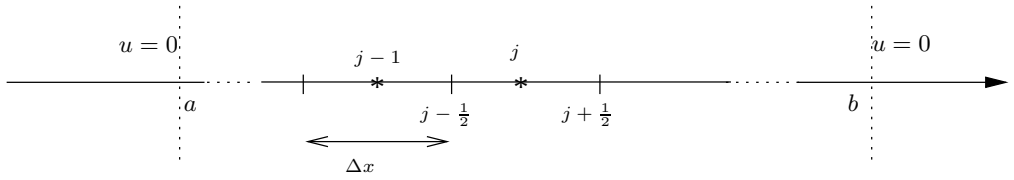


FIG. 1: *Discrétisation en espace*

2.1 Discrétisation en espace

On introduit un maillage régulier du domaine I de pas $h = \Delta x$ constitué de segments $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, \cdots, N$, avec $x_j = a + (j-1)h$ et $h = \dfrac{b-a}{N}$. On approche la première équation de (8) aux points x_j et la deuxième aux points milieux $x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \dfrac{1}{2}h$ (voir figure 1). On note par $u_j(t)$ l'approximation de $u(x_j, t)$ et par $\sigma_{j+\frac{1}{2}}$ l'approximation de $\sigma(x_{j+\frac{1}{2}}, t)$ et on propose d'approcher (8) par le schéma centré d'ordre 2 suivant :

$$
(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho_j \dfrac{d^2 u_j}{dt^2} - \dfrac{\sigma_{j+\frac{1}{2}} - \sigma_{j-\frac{1}{2}}}{h} = f_j, \\ \\ \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \tau_{0,j+\frac{1}{2}} \dfrac{d\sigma_{j+\frac{1}{2}}}{dt} = \dfrac{\mu_{j+\frac{1}{2}}}{h} \Big[\tau_{1,j+\frac{1}{2}} (\dfrac{du_{j+1}}{dt} - \dfrac{du_j}{dt}) + u_{j+1} - u_j \Big], \\ \\ u_j(0) = u_{0,j},\ \dfrac{du_j}{dt}(0) = u_{1,j},\ \sigma_{j+\frac{1}{2}}(0) = \sigma_{0,j+\frac{1}{2}}, \end{array} \right.
$$

où ρ_j, f_j, $\tau_{0,j+\frac{1}{2}}$, $\mu_{j+\frac{1}{2}}$, $\tau_{1,j+\frac{1}{2}}$, $u_{0,j}$, $u_{1,j}$ et $\sigma_{0,j+\frac{1}{2}}$ sont respectivement des approximations des données $\rho(x_j)$, $f(x_j, t)$, $\tau_0(x_{j+\frac{1}{2}})$, $\mu(x_{j+\frac{1}{2}})$, $\tau_1(x_{j+\frac{1}{2}})$, $u_0(x_j)$, $u_1(x_j)$ et $\sigma_0(x_{j+\frac{1}{2}})$.

2.2 Discrétisation en temps

On considère une discrétisation en temps avec un pas de temps Δt. On note par $t^n = n\Delta t$, u_j^n l'approximation de $u(x_j, t^n)$ et par $\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n$ l'approximation de $\sigma(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)$ (voir les figures 2-3). Si on approche la première équation à $t = t^n$ en utilisant le schéma saute mouton et la deuxième équation à $t = t^{n+\frac{1}{2}}$ en utilisant un schéma centré d'ordre 2, nous obtenons le schéma totalement discrétisé :

$$
(10) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \rho_j \dfrac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \dfrac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n - \sigma_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} & = & f_j^n, \\ \\ \dfrac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} + \tau_{0,j+\frac{1}{2}} \dfrac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} & = & \dfrac{\mu_{j+\frac{1}{2}}}{h} \Big[\tau_{1,j+\frac{1}{2}} (\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} - \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}) \\ & & + \dfrac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n}{2} - \dfrac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} \Big], \\ \\ u_j^0 = u_{0,j},\ u_j^1 = \tilde{u}_j^1,\ \sigma_{j+\frac{1}{2}}^0 = \sigma_{0,j+\frac{1}{2}}, & & \end{array} \right.
$$

où f_j^n est l'approximation de $f(x_j, t^n)$ et $\tilde{u}_j^1$ est une approximation de $u(x_j, \Delta t)$ d'ordre 2 :

$$
\tilde{u}_j^1 = u_j^0 + \Delta t\, u_{1,j} + \frac{\Delta t^2}{2\rho_j h} (\sigma_{j+\frac{1}{2}}^0 - \sigma_{j-\frac{1}{2}}^0).
$$

Remarque 2.1 *On remarque que le schéma ainsi défini est centré, totalement explicite, de plus il est consistant d'ordre deux (l'erreur est en $O(h^2, \Delta t^2)$)*

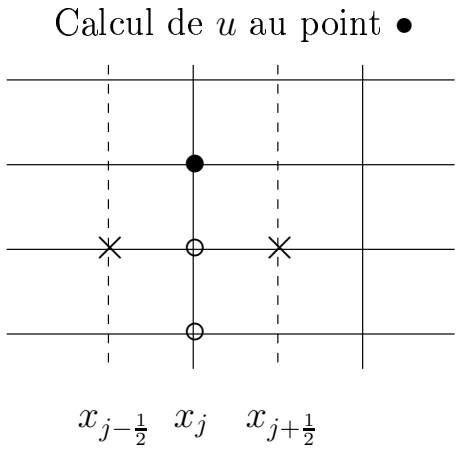


FIG. 2: *Calcul de* u_j^{n+1} *en fonction de* $u_j^n, u_j^{n-1}, \sigma_{j-\frac{1}{2}}^n$ *et* $\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n$

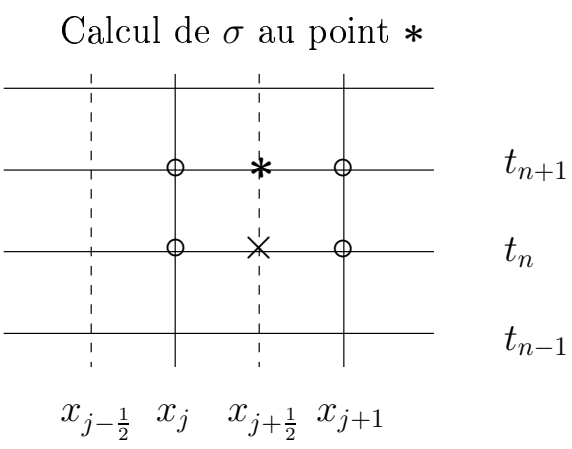


FIG. 3: *Calcul de* $\sigma_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ *en fonction de* $u_{j+1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j+1}^n, u_j^n$ *et* $\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n$

2.3 Analyse de stabilité

2.3.1 Stabilité par Fourier

Pour montrer la stabilité par Fourier nous considérons le problème dans un milieu homogène infini. On introduit les espaces normés discrets :

$$L^2_{h,0} = \{u_h = (u_j)_{j\in\mathbb{Z}}, \sum_j |u_j|^2 < +\infty\}. \tag{11}$$

$$L^2_{h,\frac{1}{2}} = \{\sigma_h = (\sigma_{j+\frac{1}{2}})_{j\in\mathbb{Z}}, \sum_j |\sigma_{j+\frac{1}{2}}|^2 < +\infty\}. \tag{12}$$

munis des produits scalaires

$$(u_h, v_h)_0 = h\sum_j u_j \bar{v}_j, \quad (\sigma_h, \tau_h)_{\frac{1}{2}} = h\sum_j \sigma_{j+\frac{1}{2}}\bar{\tau}_{j+\frac{1}{2}}$$

et des normes associées

$$||u_h||_0^2 = h\sum_j |u_j|^2, \quad ||\sigma_h||_{\frac{1}{2}}^2 = h\sum_j |\sigma_{j+\frac{1}{2}}|^2.$$

Le schéma (10) est alors équivalent à :

$$\begin{cases} \rho\dfrac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} &= \boldsymbol{B}\sigma_h^n, \\ \dfrac{\sigma_h^{n+1} + \sigma_h^n}{2} + \tau_0\dfrac{\sigma_h^{n+1} - \sigma_h^n}{\Delta t} &= \mu\tau_1\tilde{\boldsymbol{B}}(\dfrac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}) \\ & \quad +\mu\tilde{\boldsymbol{B}}(\dfrac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2}), \\ u_h^0,\ u_h^1,\ \sigma_h^0 \text{ données}, \end{cases} \tag{13}$$

avec

$$u_h = (u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in L^2_{h,0},\ \sigma_h = (\sigma_{j+\frac{1}{2}})_{j\in\mathbb{Z}} \in L^2_{h,\frac{1}{2}}$$

et

$$(14)\qquad \left\{ \begin{array}{rcccl} \boldsymbol{B} & : & L^2_{h,\frac{1}{2}} & \longrightarrow & L^2_{h,0} \\ & & \sigma_h & \longrightarrow & (\dfrac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}-\sigma_{j-\frac{1}{2}}}{h})_{j\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

$$(15)\qquad \left\{ \begin{array}{rcccl} \tilde{\boldsymbol{B}} & : & L^2_{h,0} & \longrightarrow & L^2_{h,\frac{1}{2}} \\ & & u_h & \longrightarrow & (\dfrac{u_{j+1}-u_j}{h})_{j\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

Le système (13) s'écrit de manière équivalente sous la forme :

$$(16)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} u_h^{n+1} = -u_h^{n-1} + 2u_h^n + \dfrac{\Delta t^2}{\rho}\boldsymbol{B}\sigma_h^n, & (i) \\ \sigma_h^{n+1} = \dfrac{2\tau_0-\Delta t}{2\tau_0+\Delta t}\sigma_h^n + \mu\dfrac{\Delta t+2\tau_1}{2\tau_0+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{B}}u_h^{n+1} + \mu\dfrac{\Delta t-2\tau_1}{2\tau_0+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{B}}u_h^n. & (ii) \end{array} \right.$$

Nous montrons la :

Proposition 2.1 *Les opérateurs $\boldsymbol{B}$ et $\tilde{\boldsymbol{B}}$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. $\tilde{\boldsymbol{B}} = -\boldsymbol{B}^*$.
2. $\|\boldsymbol{B}\| \leq \dfrac{2}{h}$.

Démonstration :

Soit $(u_h, \sigma_h) \in L^2_{h,0} \times L^2_{h,\frac{1}{2}}$, on a :

1.
$$\left| \begin{array}{rcl} (\tilde{\boldsymbol{B}}u_h, \sigma_h)_{\frac{1}{2}} & = & h\displaystyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{u_{j+1}-u_j}{h}\sigma_{j+\frac{1}{2}} \\ & = & \displaystyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} u_{j+1}\sigma_{j+\frac{1}{2}} - \sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j\sigma_{j+\frac{1}{2}} \\ & = & \displaystyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j\sigma_{j-\frac{1}{2}} - \sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j\sigma_{j+\frac{1}{2}} \\ & = & -h\displaystyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j\frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}-\sigma_{j-\frac{1}{2}}}{h} \\ & = & -(u_h, \boldsymbol{B}\sigma_h)_0. \end{array} \right.$$

2.
$$\left| \begin{array}{rcl} (\boldsymbol{B}\sigma_h, u_h)_{\frac{1}{2}} & = & h\displaystyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}-\sigma_{j-\frac{1}{2}}}{h}u_j \\ & \leq & \big(\displaystyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\sigma_{j+\frac{1}{2}}-\sigma_{j-\frac{1}{2}}|^2\big)^{\frac{1}{2}}\big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} |u_j|^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq & \dfrac{1}{h}\big[\big(h\displaystyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\sigma_{j+\frac{1}{2}}|^2\big)^{\frac{1}{2}} + \big(h\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\sigma_{j-\frac{1}{2}}|^2\big)^{\frac{1}{2}}\big]\big(h\sum_{j\in\mathbf{Z}} |u_j|^2\big)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{h}\|\sigma_h\|_{\frac{1}{2}}\|u_h\|_0 \end{array} \right.$$

ce qui montre que $\|\boldsymbol{B}\| \leq \dfrac{2}{h}$ ■

Soit $K_h = [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$, on introduit les transformées de Fourier discrètes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{F}_{h,0} & : & L^2_{h,0} \longrightarrow L^2(K_h) \\ & & u_h \longrightarrow \mathcal{F}_{h,0} u_h = \hat{u}_h \\ & & \hat{u}_h(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\sum_j u_j e^{-ikx_j}\, h \end{array} \right. \tag{17}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{F}_{h,\frac{1}{2}} & : & L^2_{h,\frac{1}{2}} \longrightarrow L^2(K_h) \\ & & \sigma_h \longrightarrow \mathcal{F}_{h,\frac{1}{2}} \sigma_h = \hat{\sigma}_h \\ & & \hat{\sigma}_h(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\sum_j \sigma_{j+\frac{1}{2}} e^{-ikx_{j+\frac{1}{2}}}\, h \end{array} \right. \tag{18}$$

Le schéma (13) est stable si la solution (u_h^n, σ_h^n) est bornée indépendemment des pas de discrétisation h et Δt. Pour montrer que la solution discrète est bornée dans $L^2_{h,0} \times L^2_{h,\frac{1}{2}}$, il suffit de montrer que sa transformée de Fourier discrète est bornée dans $L^2(K_h) \times L^2(K_h)$. On applique à (16)-(i) la transformée de Fourier (17) et à (16)-(ii) la transformée (18), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \hat{u}_h^{n+1} & = & -\hat{u}_h^{n-1} + 2\hat{u}_h^n + \dfrac{\Delta t^2}{\rho} \hat{\boldsymbol{B}}\, \hat{\sigma}_h^n, \\ \hat{\sigma}_h^{n+1} & = & \dfrac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t} \hat{\sigma}_h^n + \mu \dfrac{\Delta t + 2\tau_1}{2\tau_0 + \Delta t} \hat{\tilde{\boldsymbol{B}}} \hat{u}_h^{n+1} + \mu \dfrac{\Delta t - 2\tau_1}{2\tau_0 + \Delta t} \hat{\tilde{\boldsymbol{B}}} \hat{u}_h^n, \end{array} \right. \tag{19}$$

où $\hat{\boldsymbol{B}}$ et $\hat{\tilde{\boldsymbol{B}}}$ sont respectivement les symboles des opérateurs $\boldsymbol{B}$ et $\tilde{\boldsymbol{B}}$. Ils vérifient :

$$\hat{\boldsymbol{B}}(k) = \hat{\tilde{\boldsymbol{B}}}(k) = \frac{2i}{h} \sin(\alpha), \quad \alpha = \frac{kh}{2}.$$

On pose

$$w_h^n = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^{n-1} \\ \hat{u}_h^n \\ \hat{\sigma}_h^n \end{pmatrix}$$

le système (19) est équivalent à

$$C w_h^{n+1} = D w_h^n \tag{20}$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lll} c_{32} & = & -i \dfrac{2\mu \sin\alpha}{h} \left(\dfrac{2\tau_1 + \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t} \right), \\ d_{23} & = & i \dfrac{2\Delta t^2}{\rho h} \sin\alpha, \\ d_{32} & = & i \dfrac{2\mu \sin\alpha}{h} \left(\dfrac{\Delta t - 2\tau_1}{2\tau_0 + \Delta t} \right), \\ d_{33} & = & \dfrac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}. \end{array} \right.$$

La matrice C étant clairement inversible, (20) est équivalent à :

$$w_h^{n+1} = G w_h^n$$

où $G = C^{-1}D$ est la matrice d'**amplification**.

La stabilité du schéma est alors liée aux propriétés des valeurs propres de G, plus précisément :

Le schéma (10) est stable si et seulement si $\rho(G) \leq 1 \ \ \forall k \in \mathbb{R}$,

où $\rho(G)$ est le rayon spectral de G :

$$\rho(G) = \max\{|\lambda| / \lambda \ \text{ valeur propre de } \ G\}.$$

Le polynôme caractéristique associé à la matrice G est donné par :

$$P_G(\boldsymbol{\lambda}) = -(2\tau_0 + \Delta t)\boldsymbol{\lambda}^3 + \Big[\Delta t + 6\tau_0 - \beta^2(2\tau_1 + \Delta t)\Big]\boldsymbol{\lambda}^2 + \Big[\Delta t - 6\tau_0 + \beta^2(2\tau_1 - \Delta t)\Big]\boldsymbol{\lambda} + 2\tau_0 - \Delta t$$

avec

$$\beta = \frac{2c\Delta t}{h}\sin\alpha, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Si on désigne par $c_\infty = c\sqrt{\tau_1/\tau_0}$ la vitesse des ondes à hautes fréquences, la condition nécessaire et suffisante de stabilité est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Le schéma (10) est stable si et seulement si*

$$\frac{\Delta t}{h} \leq CFL = \frac{1}{c_\infty}. \tag{21}$$

Démonstration :

Le polynôme $P_{\boldsymbol{G}}$ vérifie :

$$P_G(1) = -2\beta^2\Delta t < 0, \ \ P_G(-1) = 16\tau_0 - 4\beta^2\tau_1 = 16(\tau_0 - \frac{c^2\Delta t^2\tau_1\sin^2\alpha}{h^2}). \tag{22}$$

1. **Supposons que la condition $\boldsymbol{CFL}$ (21) est vérifiée.**

   On remarque que cette condition impose que $P_G(-1) \geq 0 \ \ \forall\alpha \in \mathbb{R}\,(\forall k \in \mathbb{R})$. Le polynôme P_G est alors négatif en 1 et positif en -1. Il admet donc un zéro réel λ_0 dans l'intervalle $[-1, 1]$. Notons par λ_0, λ_1 et λ_2 les racines de P, elles vérifient :

   $$\lambda_0\lambda_1\lambda_2 = \frac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t} \tag{23}$$

   ce produit vérifie :

   $$P_G(\frac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}) = 4\frac{2\tau_0 - \Delta t}{(2\tau_0 + \Delta t)^2}\beta^2\Delta t(\tau_1 - \tau_0). \tag{24}$$

   On discute suivant le signe de $2\tau_0 - \Delta t$:

   si $2\tau_0 - \Delta t > 0$: $\dfrac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t} \in [0, 1]$ et d'après (24) P_G est positif en ce point (puisque $\tau_1 > \tau_0$). Le polynôme P_G a alors au moins un zéro réel $\lambda_0 \in \Big[\dfrac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}, 1\Big]$, ce qui implique :

   (a) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,
   $\lambda = \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ et comme $\lambda_0 \geq \dfrac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}$, on a $|\lambda| \leq 1$ d'après (23).

(b) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, d'après notre remarque précédente elles sont soit toutes les deux de module inférieur à 1, soit toutes les deux de module supérieur à 1. Ce dernier cas est impossible car d'après (23) le produit de leurs modules doit être inférieur à 1.

si $2\tau_0 - \Delta t < 0$: on suit la même démarche que dans le premier cas et on montre que $\rho(G) \leq 1$.

si $2\tau_0 - \Delta t = 0$: $\lambda_0 = 0$ et λ_1, λ_2 sont solutions de l'équation :

$$T(\lambda) = -2\tau_0\lambda^2 + [4\tau_0 - \beta^2(\tau_1 + \tau_0)]\lambda + \beta^2(\tau_1 - \tau_0) - 2\tau_0 = 0.$$

Elles vérifient :

$$\lambda_1\lambda_2 = 1 - \beta^2\frac{\tau_1 - \tau_0}{2\tau_0} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

(a) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$(25) \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = |\lambda|^2 \leq 1.$$

(b) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On remarque que :

$$T(1) = -2\beta^2\tau_0 \leq 0, \;\; T(-1) = 2\beta^2\tau_1 - 8\tau_0 = 8\tau_0(\frac{c_\infty^2\Delta t^2}{h^2} - 1) \leq 0.$$

Comme le montre la figure 4 ci-dessous on a deux possibilités : soit les deux racines sont de module inférieur à 1, soit elles sont de même signe et de module strictement supérieur à 1. Ce dernier cas est impossible d'après (25).

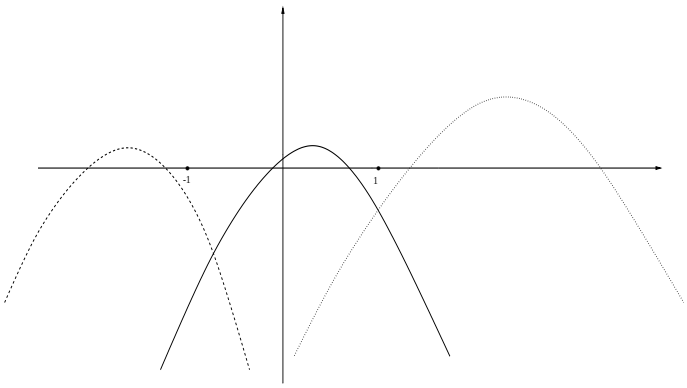


FIG. 4: *Les trois cas possibles*

2. **La condition (21) est aussi nécessaire.** Si $\Delta t > \dfrac{h}{c_\infty}$:

$$P_G(-1) < \tau_0\cos^2\alpha = \tau_0\cos^2(\frac{k\Delta x}{2}) = 0 \quad \forall k \in M = \{(2p+1)\frac{\pi}{h}/p \in \mathbb{Z}\}.$$

et comme P_G est positif au voisinage de $-\infty$, alors pour tout $k \in M$ on trouve $\lambda(k)$ racine de P_G et inférieur à -1.

Conclusion. Si Δt vérifie la condition CFL (21), alors il existe C_1 une constante positive indépendante de Δt et h telle que :

$$(\|\hat{u}_h^n\|_{L^2} + \|\hat{\sigma}_h^n\|_{L^2}) \leq C_1(\|\hat{u}_h^0\|_{L^2} + \|\hat{u}_h^1\|_{L^2} + \|\hat{\sigma}_h^0\|_{L^2}), \; \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui nous donne en utilisant l'identité de Plancherel-Parseval :

$$(\|u_h^n\|_{L^2_{h,0}} + \|\sigma_h^n\|_{L^2_{h,\frac{1}{2}}}) \leq C_1(\|u_h^0\|_{L^2_{h,0}} + \|u_h^1\|_{L^2_{h,0}} + \|\sigma_h^0\|_{L^2_{h,\frac{1}{2}}}),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En faisant l'hypothèse sur l'approximation des données initiales :

$$(\|u_h^0\|_{L^2_{h,0}} + \|u_h^1\|_{L^2_{h,0}} + \|\sigma_h^0\|_{L^2_{h,\frac{1}{2}}}) \leq C_2(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2} + \|\sigma_0\|_{L^2})$$

On montre que la solution est bornée indépendemment de Δt et h à tout instant ■

Remarque 2.2 *On peut étendre cette étude aux schémas numériques associés aux modèles visco-élastiques de Maxwell et de Kelvin-Voigt :*

- *Si on considère le modèle de Maxwell [11] :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\, \partial_{tt}^2 u - \partial_x \sigma = f \\ \sigma + \tau \partial_t \sigma = \mu \partial_{xt}^2 u \end{array} \right. \tag{26}$$

et l'extension du schéma (10) au problème (26) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j \dfrac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \dfrac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n - \sigma_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} = f_j^n, \\ \dfrac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} + \tau_{j+\frac{1}{2}} \dfrac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} = \dfrac{\mu_{j+\frac{1}{2}}}{h} \Big[\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} - \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \Big]. \end{array} \right. \tag{27}$$

On montre, en utilisant la même technique présenté dans la démonstration de la proposition 2.2 que le schéma (27) est stable dans le cas homogène si et seulement si Δt vérifie la condition de stabilité :

$$\Delta t \leq \frac{h\sqrt{\tau}}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{28}$$

- *Si on considère le modèle de Kelvin-Voigt [11] :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\, \partial_{tt}^2 u - \partial_x \sigma = f, \\ \sigma = \mu \partial_x u + \mu \tau \partial_{xt}^2 u. \end{array} \right. \tag{29}$$

et le schéma numérique associé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j \dfrac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \dfrac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n - \sigma_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} = f_j^n, \\ \dfrac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} = \dfrac{\mu_{j+\frac{1}{2}}}{h} \Big[\tau_{j+\frac{1}{2}} (\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} - \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}) + \dfrac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n}{2} - \dfrac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} \Big] \end{array} \right. \tag{30}$$

Ce schéma est inconditionnellement instable. Pour avoir la stabilité on utilise des schémas d'approximations implicites ou on le stabilise en modifiant l'équation de comportement en ajoutant $\epsilon \partial_t \sigma$ au premier terme de la deuxième équation de (30). Si nous utilisons l'approximation centrée de $\epsilon \partial_t \sigma(x_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}) \approx \epsilon(\sigma_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n)/\Delta t$ ($\epsilon \to 0$), le schéma est équivalent à (10) en considérant $\tau_0 = \epsilon$ et $\tau_1 = \tau$.

2.3.2 Stabilité par techniques énergétiques

On va montrer que la condition (21) est une condition suffisante de stabilité, en passant par une technique d'énergie qui reste valable pour des milieux à coefficients variables. De même que dans le cas continu où la quantité d'énergie jouait un rôle pour les estimations à priori de la solution, on établit un résultat de dissipation d'une énergie discrète qui nous conduit sous certaine condition à des estimations de la solution approchée. On rappelle les résultats de la décroissance d'énergie continue [2]. La quantité d'énergie :

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big[\|\partial_t u\|_\rho^2 + \|\partial_x u\|_\mu^2 + \|s\|^2_{\frac{\tau_0}{\mu(\tau_1-\tau_0)}}\Big]$$

vérifie :

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\|s\|^2_{\frac{1}{\mu(\tau_1-\tau_0)}}$$

avec

$$s = \sigma - \mu\partial_x u,\ \|v\|_\omega^2 = \int_\Omega \omega(x)|v(x)|^2\,dx\ \ \forall\,(v,\omega) \in L^2(\Omega)\times L^\infty(\Omega),\ \omega \geq 0.$$

Nous définissons la variable discrète qui correspond à s :

$$s_h^n = \sigma_h^n + A^{-1}B^*\,u_h^n.$$

Le schéma (10) est équivalent à :

$$\text{(31)}\qquad \begin{cases} M_u\,\dfrac{u_h^{n+1}-2u_h^n+u_h^{n-1}}{\Delta t^2} - B\,\sigma_h^n = f^n, \\ M_\tau\,\dfrac{s_h^{n+1}+s_h^n}{2} + M_s\,\dfrac{s_h^{n+1}-s_h^n}{\Delta t} + B^*\,\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t} = 0, \\ A\,\sigma_h^{n+1} - A\,s_h^{n+1} + B^*\,u_h^{n+1} = 0, \end{cases}$$

avec

$$\text{(32)}\qquad \left\| \begin{array}{ll} M_u\,u_h = (\rho_j u_j)_{j\in\mathbb{Z}}, & \forall u_h \in L^2_{h,0}, \\ M_\tau\,\sigma_h = \Big(\dfrac{1}{\mu_{j+\frac12}(\tau_{1,j+\frac12}-\tau_{0,j+\frac12})}\sigma_{j+\frac12}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}, & \forall\sigma_h \in L^2_{h,\frac12}, \\ M_s\,\sigma_h = \Big(\dfrac{\tau_{0,j+\frac12}}{\mu_{j+\frac12}(\tau_{1,j+\frac12}-\tau_{0,j+\frac12})}\sigma_{j+\frac12}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}, & \forall\sigma_h \in L^2_{h,\frac12}, \\ A\,\sigma_h = \Big(\dfrac{1}{\mu_{j+\frac12}}\sigma_{j+\frac12}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}, & \forall\sigma_h \in L^2_{h,\frac12}, \\ B \text{ est donnée par (14).} & \end{array} \right.$$

Définition 2.1 *On définit l'énergie discrète par*

$$\text{(33)}\qquad \left\| \begin{array}{l} \boldsymbol{E}^{n+\frac12} = \dfrac{1}{2}\|\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\|^2_{M_u} + \dfrac{1}{4}\big(\|s_h^{n+1}\|^2_{M_s} + \|s_h^n\|^2_{M_s}\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{\Delta t^2}{4}\big(B^*\,\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}, \dfrac{s_h^{n+1}-s_h^n}{\Delta t}\big) + \dfrac{1}{2}\big(M_\sigma^{-1}B^*\,u_h^{n+1}, B^*\,u_h^n\big) \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{cases} \|u_h\|^2_{M_u} = (M_u u_h, u_h) = u_h^t M_u u_h, & \forall\, u_h \in L^2_{h,0}, \\ \|s_h\|^2_{M_s} = (M_s s_h, s_h) = s_h^t M_s s_h, & \forall\, s_h \in L^2_{h,\frac12}. \end{cases}$$

On montre que l'énergie discrète est dissipative :

Théorème 2.1 *La quantité d'énergie discrète vérifie :*

$$\text{(34)}\qquad \frac{\boldsymbol{E}^{n+\frac12} - \boldsymbol{E}^{n-\frac12}}{\Delta t} = -\frac{1}{8}(\|s_h^{n+1}+s_h^n\|^2_{M_\tau} + \|s_h^n + s_h^{n-1}\|^2_{M_\tau})$$

de plus une condition suffisante de la stabilité du schéma est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.2 *Pour que le schéma numérique (31) soit L^2-stable, il suffit que le pas de temps vérifie :*

$$\frac{\Delta t}{2}\|B\| \leq 1. \tag{35}$$

avec

$$\|B\| = \sup_{u_h\neq 0,\sigma_h\neq 0} \frac{(B\sigma_h, u_h)}{\|u_h\|_{M_u}\|\sigma_h\|_K}$$

et

$$\mathbb{K} = (A^{-1} + M_s^{-1})^{-1}.$$

La démonstration de ces deux théorèmes est présentée d'une façon générale dans le cas d'une dimension supérieure (voir §3.5). Dans le cas 1D on trouve à partir de (32) :

$$\mathbb{K}\sigma_h = (\alpha_{j+\frac{1}{2}}\sigma_{j+\frac{1}{2}})_{j\in\mathbb{Z}},\ \forall \sigma_h \in L^2_{h,\frac{1}{2}}$$

où $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$ est une approximation de $\alpha = \mu\dfrac{\tau_1}{\tau_0}$ au point $x_{j+\frac{1}{2}}$ (la valeur moyenne sur $[x_j, x_{j+1}]$):

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} \alpha(x)\,dx$$

et on définit ρ_j comme la valeur moyenne de ρ sur $[x_{j-1}, x_{j+1}]$:

$$\rho_j = \frac{1}{2h}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \rho(x)\,dx = \frac{1}{2}(\rho_{j+\frac{1}{2}} + \rho_{j-\frac{1}{2}})$$

On détermine explicitement la condition de stabilité en majorant $\|B\|$:

$$\begin{aligned}
(B\,\sigma_h, u_h) &= (\sigma_h, B^*\,u_h)\\
&= \frac{1}{h}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sigma_{j+\frac{1}{2}}(u_j - u_{j+1})\\
&\leq \frac{1}{h}c_\infty^+ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_{j+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\sigma_{j+\frac{1}{2}}\,\rho_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(u_j - u_{j+1})\\
&\leq \frac{1}{h}c_\infty^+ \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_{j+\frac{1}{2}}^{-1}|\sigma_{j+\frac{1}{2}}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+\frac{1}{2}}|u_{j+1} - u_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{36}$$

avec $c_\infty^+ = \sup\limits_{x\in\Omega} c_\infty(x) = \sup\limits_{x\in\Omega} c(x)\sqrt{\dfrac{\tau_1(x)}{\tau_0(x)}}$. Comme $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+\frac{1}{2}}|u_{j+1} - u_j|^2$ vérifie l'inégalité :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+\frac{1}{2}}|u_{j+1} - u_j|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\rho_{j+\frac{1}{2}} + \rho_{j-\frac{1}{2}})|u_j|^2 - 2\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+\frac{1}{2}}u_{j+1}u_j\\
&\leq 2\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_j|u_j|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+\frac{1}{2}}|u_j|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+\frac{1}{2}}|u_{j+1}|^2 = 4\|u_h\|^2_{M_u}
\end{aligned}$$

on a d'après (36), l'inégalité :

$$(B\,\sigma_h, u_h) \leq \frac{2}{h}c_\infty^+\|u_h\|_{M_u}\|\sigma_h\|_K.$$

D'où

$$\|B\| \leq \frac{2}{h}c_\infty^+,$$

ce qui nous donne la condition de stabilité :

$$\frac{\Delta t}{h} \leq (\sup_{x\in\Omega} c_\infty)^{-1}. \tag{37}$$

Dans le cas homogène :

$$\begin{cases} M_u = \rho\, \boldsymbol{I},\ M_s = \dfrac{\tau_0}{\mu(\tau_1-\tau_0)}\, \boldsymbol{I}, \\ A = \dfrac{1}{\mu}\, \boldsymbol{I}. \end{cases}$$

et on retrouve la condition nécessaire et suffisante de la stabilité qu'on a établie en utilisant une analyse par Fourier :

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{c_\infty}.$$

3 Dimension supérieure - Éléments finis mixtes

Notre objectif est de développer une méthode numérique efficace pour résoudre le problème modèle (1). Nous adaptons les éléments finis mixtes avec condensation de masse présentés dans [5] pour l'équation de l'élastodynamique au problème de la viscoélasticité. La base de cette méthode est une formulation mixte du problème dans laquelle le tenseur des contraintes σ est recherché dans l'espace L^2 des tenseurs à divergence L^2 et symétriques qu'on note $H^{sym}(div)$ et le déplacement u dans L^2.

3.1 Reformulation du problème

Pour utiliser cette méthode dans le cas de la viscoélasticité, on passe par une reformulation du problème ce qui revient à réécrire la loi de comportement contrainte-déformation sous la forme d'une loi déformation-contrainte. Ceci est possible en introduisant à nouveau $s = \sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon$ comme la différence entre la contrainte viscoélastique et la contrainte dans le cas purement élastique. Dans le cas continu, dans la démonstration des résultats d'existence et d'unicité de la solution et de la décroissance d'énergie, cette nouvelle variable a joué un rôle important [2].

On considère le problème modèle dans un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathbf{div}\,\sigma = f, \\ \sigma + \tau_0\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = \boldsymbol{C}\varepsilon(u) + \tau_0 \boldsymbol{D}\varepsilon(\dfrac{\partial u}{\partial t}), \end{cases} \tag{38}$$

avec les conditions initiales :

$$u(t=0) = u_0\ ;\ \sigma(t=0) = \sigma_0\ ;\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \tag{39}$$

et la condition aux limites

$$\sigma.n = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \tag{40}$$

où n est la normale éxtérieure au domaine.
En introduisant la nouvelle variable s, le système (38) devient :

$$\rho\, \partial_t^2 u - \mathbf{div}\,\sigma = f, \tag{41a}$$

$$\mathcal{M}_\tau\, s + \mathcal{M}\, \partial_t s = \varepsilon(\partial_t u), \tag{41b}$$

$$\mathcal{A}\,\sigma - \mathcal{A}\, s = \varepsilon(u), \tag{41c}$$

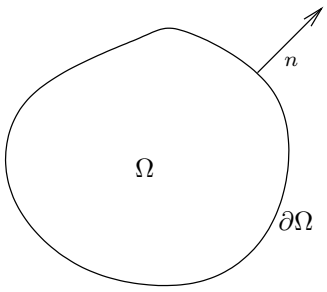


FIG. 5: *Domaine d'étude*

avec

$$\mathcal{M} = \boldsymbol{Z}^{-1},\ \mathcal{M}_\tau = \boldsymbol{Z}_\tau^{-1} = \tau_0^{-1}\,\mathcal{M},\ \mathcal{A} = \boldsymbol{C}^{-1}.$$

Dans tout ce qui suit nous prendrons comme problème modèle le problème (41) avec les conditions initiales (39), la condition

$$s(t=0) = s_0 = \sigma_0 - \boldsymbol{C}\varepsilon(u_0) \tag{42}$$

et la condition aux limites (40).

Remarque 3.1 *On remarque que*

- *L'introduction de la variable s ne joue qu'un rôle intermédiaire pour obtenir la formulation mixte et la discrétisation en espace. Nous verrons qu'on peut réduire par la suite le nombre des inconnues à deux en éliminant σ ou s en remplaçant l'une en fonction de l'autre.*
- *La reformulation du problème généralisé (7) se fait de la même manière :*

$$\begin{cases} \rho\,\partial_t^2 u - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \mathbf{div}\,\sigma_l = f, \\ \mathcal{M}_{l,\tau}\,s_l + \mathcal{M}_l\,\partial_t s_l = \varepsilon(\partial_t u), \quad \forall l = 1,\cdots,L, \\ \mathcal{A}_l\,\sigma_l - \mathcal{A}_l\,s_l = \varepsilon(u), \qquad\qquad \forall l = 1,\cdots,L, \end{cases} \tag{43}$$

avec

$$\mathcal{M}_l = (\boldsymbol{D}_l - \boldsymbol{C}_l)^{-1},\ \mathcal{M}_{l,\tau} = \tau_{0,l}^{-1}\,\mathcal{M}_l,\ \mathcal{A}_l = \boldsymbol{C}_l^{-1},\ \ \forall l = 1,\cdots,L.$$

3.2 Formulation variationnelle déplacement-contrainte

On considère les espaces fonctionnels de travail :

$$\underline{M} = (L^2(\Omega;\mathbb{R}^n))^n,\ \underline{\underline{H}} = L^2(\Omega;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)), \tag{44}$$

nous définissons l'espace des tenseurs

$$\underline{\underline{X}} = \{\sigma \in \underline{\underline{H}}\,/\,\mathbf{div}\,\sigma \in \underline{M}\} \tag{45}$$

et aussi l'espace des tenseurs symétriques

$$\underline{\underline{X}}^{sym} = \{\sigma \in \underline{\underline{X}}\,/\,\sigma \in \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^n)\}. \tag{46}$$

On obtient la formulation mixte, en appliquant à l'équation (41a) le produit par $\tilde{u} \in \underline{M}$, à (41b) par $\tilde{s} \in \underline{\underline{X}}^{sym}$, à (41c) par $\tilde{\sigma} \in \underline{\underline{X}}^{sym}$ et en intégrant sur Ω. Après une intégration par parties

des membres de droite des deux dernières équations (les termes où intervient le tenseur $\varepsilon(u)$) on obtient la formulation mixte suivante :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{Trouver } (u(t),p(t),\sigma(t)) : [0,T] \longrightarrow \underline{M} \times \underline{\underline{X}}^{sym} \times \underline{\underline{X}}^{sym} \text{ tels que :} & \\
\dfrac{d^2}{dt^2}(u(t),\tilde{u}) - \boldsymbol{b}(\tilde{u},\sigma(t)) = (f,\tilde{u}), & \forall v \in \underline{M}, \\
\boldsymbol{m_\tau}(s(t),\tilde{s}) + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{m}(s(t),\tilde{p}) + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{b}(u(t),\tilde{s}) = 0, & \forall \tilde{s} \in \underline{\underline{X}}^{sym}, \\
\boldsymbol{a}(\sigma(t),\tilde{\sigma}) - \boldsymbol{a}(s(t),\tilde{\sigma}) + \boldsymbol{b}(u(t),\tilde{\sigma}) = 0, & \forall \tilde{\sigma} \in \underline{\underline{X}}^{sym},
\end{array}
\right. \tag{47}
$$

avec

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
(u,\tilde{u}) = \displaystyle\int_\Omega \rho\, u.\tilde{u}\, dx, & \forall (u,\tilde{u}) \in \underline{M} \times \underline{M}, \\
\boldsymbol{m}(s,\tilde{s}) = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{M}\, s : \tilde{s}\, dx, & \forall (s,\tilde{s}) \in \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}}, \\
\boldsymbol{m_\tau}(s,\tilde{s}) = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{M}_\tau\, s : \tilde{s}\, dx, & \forall (s,\tilde{s}) \in \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}}, \\
\boldsymbol{a}(\sigma,\tilde{\sigma}) = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{A}\, \sigma : \tilde{\sigma}\, dx, & \forall (\sigma,\tilde{\sigma}) \in \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}},
\end{array}
\right. \tag{48}
$$

et

$$
\boldsymbol{b}(u,\sigma) = \int_\Omega \mathbf{div}\, \sigma.u\, dx, \ \forall (u,\sigma) \in \underline{M} \times \underline{\underline{H}}. \tag{49}
$$

3.3 Semi-discrétisation en espace

Nous supposons ici que le domaine Ω est une union de rectangles et nous considérons un maillage régulier $(\mathcal{T}_h)$ de Ω composé des carrés K de coté $h > 0$. On introduit les espaces d'approximations de dimension finies :

$$
\underline{M_h} \subset \underline{M},\ \underline{\underline{X_h}} \subset \underline{\underline{X}},\ \underline{\underline{X_h}}^{sym} = \underline{\underline{X_h}} \cap \underline{\underline{X}}^{sym}. \tag{50}
$$

Le problème approché de la formulation (47) consiste à chercher $(u_h(t), s_h(t), \sigma_h(t)) \in \underline{M_h} \times \underline{\underline{X_h}}^{sym} \times \underline{\underline{X_h}}^{sym}$ qui vérifient :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{Trouver } (u_h,p_h,\sigma_h) : [0,T] \longrightarrow \underline{M_h} \times \underline{\underline{X_h}}^{sym} \times \underline{\underline{X_h}}^{sym} \text{ tels que :} & \\
\dfrac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{\rho}(u_h,\tilde{u}_h) - \boldsymbol{b}(\tilde{u}_h,\sigma_h) = (f,\tilde{u}_h), & \forall \tilde{u}_h \in \underline{M_h}, \\
\boldsymbol{m_\tau}(s_h,\tilde{s}_h) + \dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{m}(s_h,\tilde{s}_h) + \dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{b}(u_h,\tilde{s}_h) = 0, & \forall \tilde{s}_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym}, \\
\boldsymbol{a}(\sigma_h,\tilde{\sigma}_h) - \boldsymbol{a}(s_h,\tilde{\sigma}_h) + \boldsymbol{b}(u_h,\tilde{\sigma}_h) = 0, & \forall \tilde{\sigma}_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym}.
\end{array}
\right. \tag{51}
$$

Puisqu'il n'y aucune continuité exigée dans l'espace $\underline{M}$ $((L^2(\mathbb{R}^n))^n)$, il sera approché avec des fonctions discontinues. Par conséquent la matrice de masse associée à $\boldsymbol{\rho}$ est diagonale par construction. Afin d'avoir la condensation de masse pour les matrices associées aux formes bilinéaires $\boldsymbol{m_\tau}$, $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{a}$, nous utilisons l'espace d'approximation $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$ décrit dans [5], avec ce choix, les espaces d'approximation abstraits seront définis par :

$$
\left|
\begin{array}{l}
\underline{M_h} = \{u_h \in \underline{M} \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h,\ u_h|K \in Q_0\}, \\
\underline{\underline{X_h}} = \{\sigma_h \in \underline{\underline{X}} \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h,\ \sigma_h|K \in Q_1\}, \\
\underline{\underline{X_h}}^{sym} = \{\sigma_h \in \underline{\underline{X_h}} \,/\, \sigma_h \in \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^n)\},
\end{array}
\right. \tag{52}
$$

où Q_0 et Q_1 sont les espaces des polynômes définis pour $k = 0$ ou 1 par :

$$Q_k = \{p \,/\, p(x,y) = \sum_{i,j \le k} a_{ij} x^i y^j,\ a_{ij} \in \mathbb{R}\}.$$

Avec ce choix, le déplacement u_h est constant par élément et le tenseur des contraintes σ_h (resp. s_h) est une fonction bilinéaire symétrique dans $H(div)$, ce qui impose la continuité de σ_{ii} dans la direction x_i et la continuité de $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $(i \neq j)$ dans les deux directions x_i et x_j. En conclusion, nous avons cinq degrés de liberté par sommet pour σ_h (resp. s_h) et un degré de liberté par élément pour u_h (voir Figure 6 pour $n = 2$).

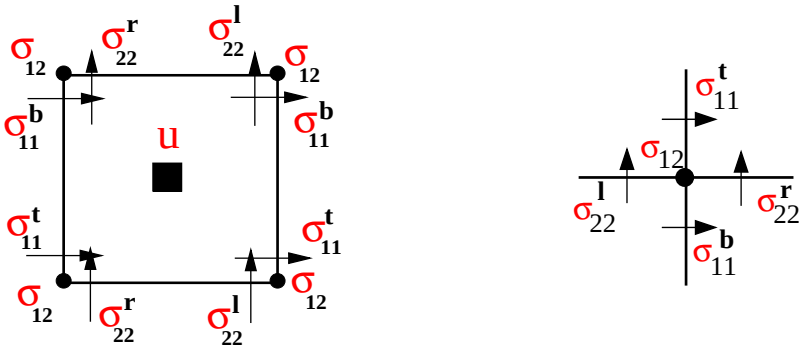


FIG. 6: *Les degrés de liberté pour* $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$ *et* $\underline{M_h}$

Les matrices de masse sont alors calculées à l'aide de la formule de Gauss-Lobatto :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{m}(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) \approx \boldsymbol{m}_h(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \mathcal{M}\, \sigma_h : \tilde{\sigma}_h, \\
\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}}(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) \approx \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau} h}(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \mathcal{M}_\tau\, \sigma_h : \tilde{\sigma}_h, \\
\boldsymbol{a}(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) \approx \boldsymbol{a}_h(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \mathcal{A}\, \sigma_h : \tilde{\sigma}_h,
\end{aligned}$$

avec $\displaystyle\oint_K f = \frac{h^2}{4} \sum_{x \in K_s} f(x),\ \ \forall f \in C^0(K)$ et $K_s = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x$ sommet de $K\}$.

On introduit $B_{N_1} = \{\omega_i \,/\, i = 1, \cdots N_1\}$ (resp. $B_{N_2} = \{\phi_i \,/\, i = 1, \cdots N_2\}$) les fonctions de base de $\underline{M_h}$ (resp. $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$) avec $N_1 = \dim \underline{M_h}$ (resp. $N_2 = \dim \underline{\underline{X_h}}^{sym}$). On considère $U_h = (U_1, \cdots, U_{N_1})$, $P_h = (S_1, \cdots, S_{N_2})$ et $\Sigma_h = (\Sigma_1, \cdots, \Sigma_{N_2})$ les coordonnées des fonctions u_h, s_h et σ_h sur ces bases, le problème (51) se réécrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$\text{(53)} \qquad \begin{cases} M_u \dfrac{d^2 U_h}{dt^2} - B\Sigma_h = F, \\ M_\tau\, S_h + M_s \dfrac{dS_h}{dt} + B^\star \dfrac{dU_h}{dt} = 0, \\ A\Sigma_h - AS_h + B^\star U_h = 0. \end{cases}$$

avec

$$
(54)\quad \left|\begin{array}{ll}
(M_u)_{i,j} = \boldsymbol{\rho}_h(\omega_i,\omega_j), & 1\le i,j\le N_1,\\
(M_\tau)_{i,j} = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}(\phi_i,\phi_j), & 1\le i,j\le N_2,\\
(M_s)_{i,j} = \boldsymbol{m}_h(\phi_i,\phi_j), & 1\le i,j\le N_2,\\
(A)_{i,j} = \boldsymbol{a}_h(\phi_i,\phi_j), & 1\le i,j\le N_2,\\
(B)_{i,j} = \boldsymbol{b}_h(\omega_i,\phi_j), & 1\le i\le N_1,\ 1\le j\le N_2,\\
(F)_i = (f,\omega_i), & 1\le i\le N_1.
\end{array}\right.
$$

La matrice M_u est diagonale et les matrices de masse M_τ, M_s et A sont diagonales par bloc, la dimension de chaque bloc est le nombre des degrés de liberté associés à chaque sommet.

3.4 Schéma totalement discrétisé

Pour la discrétisation en temps nous utilisons un schéma aux différences finies centré, explicite et d'ordre deux : en approchant la première équation à l'instant $t^n = n\Delta t$ en utilisant le schéma saute mouton, la deuxième éqution à $t^{n+\frac12} = (n+\frac12)\Delta t$ avec un schéma centré d'ordre 2 et la derniére à t^{n+1}, ce qui nous donne le schéma suivant :

$$
(55)\quad \left\{\begin{array}{l}
M_u\,\dfrac{U_h^{n+1}-2U_h^n+U_h^{n-1}}{\Delta t^2} - B\Sigma_h^n = F^n,\\[2ex]
M_\tau\,\dfrac{S_h^{n+1}+S_h^n}{2} + M_s\,\dfrac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t} + B^\star\dfrac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t} = 0,\\[2ex]
A\,\Sigma_h^{n+1} - A\,S_h^{n+1} + B^\star U_h^{n+1} = 0.
\end{array}\right.
$$

On remarque qu'on peut réduire le nombre des inconnues à deux, en remplaçant Σ_h ou S_h en utilisant la dernière équation du système (55), ce qui nous donne, en éliminant Σ_h^n de la première équation du système (55) :

$$
(56)\quad \left\{\begin{array}{l}
M_u\dfrac{U_h^{n+1}-2U_h^n+U_h^{n-1}}{\Delta t^2} - BS_h^n + BA^{-1}B^\star U_h^n = 0,\\[2ex]
M_\tau\dfrac{S_h^{n+1}+S_h^n}{2} + M_s\dfrac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t} + B^\star\dfrac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t} = 0.
\end{array}\right.
$$

On peut étendre ce schéma au problème généralisé (43) :

$$
(57)\quad \left\{\begin{array}{l}
M_u\dfrac{U_h^{n+1}-2U_h^n+U_h^{n-1}}{\Delta t^2} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} BS_{l,h}^n + \sum_{l=1}^{L} BA_l^{-1}B^\star U_h^n = F^n,\\[2ex]
M_{l,\tau}\dfrac{S_{l,h}^{n+1}+S_{l,h}^n}{2} + M_{l,s}\dfrac{S_{l,h}^{n+1}-S_{l,h}^n}{\Delta t} + B^\star\dfrac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t} = 0, \qquad \forall l = 1,\cdots,L.
\end{array}\right.
$$

avec

$$
(58)\quad \left|\begin{array}{ll}
(M_{l,\tau})_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{M}_{l,\tau}\,\phi_i : \phi_j, & 1\le i,j\le N_2,\quad \forall l = 1,\cdots,L,\\
(M_{l,s})_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{M}_l\,\phi_i : \phi_j, & 1\le i,j\le N_2,\quad \forall l = 1,\cdots,L,\\
(A_l)_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{A}_l\,\phi_i : \phi_j, & 1\le i,j\le N_2,\quad \forall l = 1,\cdots,L,\\
M_u \text{ et } B \text{ sont données par (54).}
\end{array}\right.
$$

3.5 Énergie discrète et analyse de stabilité

En utilisant une technique d'énergie nous avons établi la décroissance d'une quantité d'énergie discrète et une condition suffisante de stabilité. Si on considère le problème modèle avec un second membre $f = 0$, la quantité d'énergie continue E présentée dans [2] est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}[\|\partial_t u\|_\rho^2 + \|\varepsilon(u)\|_{\boldsymbol{C}}^2 + \|s\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}^2]$$

et le résultat de la décroissance de cette quantité :

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\|s\|_{\boldsymbol{Z}_\tau^{-1}}^2.$$

avec

$$\left|\begin{array}{l} \|u\|_\omega^2 = \displaystyle\int_\Omega \omega(x)|u(x)|^2\,dx \;\; \forall (v,\omega) \in L^2(\Omega)\times L^\infty(\Omega),\ \omega \geq 0, \\ \|\sigma\|_G^2 = \displaystyle\int_\Omega G(x)\sigma(x) : \sigma(x)\,dx \;\; \forall (\sigma, M) \in L^2(\Omega, \mathcal{L}^{sym}(\Omega)) \times L^\infty(\Omega, \mathcal{L}^{sym}\big(\mathcal{L}^{sym}(\Omega), \mathcal{L}^{sym}(\Omega))\big), \\ G \text{ défini positif.} \end{array}\right.$$

On définit l'énergie discrète du schéma numérique (55) :

Définition 3.1

$$(59) \qquad \left\| \begin{array}{rcl} \boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}} & = & \frac{1}{2}\|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\|_{\boldsymbol{\rho}_h}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1}-s_h^{n+1}, \sigma_h^n - s_h^n) \\ & & + \frac{1}{4}\Big[\|s_h^{n+1}\|_{\boldsymbol{m}_h}^2 + \|s_h^n\|_{\boldsymbol{m}_h}^2\Big] + \frac{\Delta t^2}{4}\boldsymbol{b}_h(\frac{s_h^{n+1}-s_h^n}{\Delta t}, \frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}), \end{array} \right.$$

avec

$$\|u_h\|_{\boldsymbol{\rho}_h}^2 = \boldsymbol{\rho}_h(u_h, u_h) \quad \forall\, u_h \in \underline{M_h},$$
$$\|s_h\|_{\boldsymbol{m}_h}^2 = \boldsymbol{m}_h(s_h, s_h) \quad \forall\, s_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym}.$$

Remarque 3.2 *On remarque que l'énergie discrète se décompose en trois parties :*

- *La première,* $\frac{1}{2}\|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\|_{\boldsymbol{\rho}_h}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1}-s_h^{n+1}, \sigma_h^n - s_h^n)$ *qu'on trouve dans le cas purement élastique* ($s = 0$) *et approche la première partie de l'énergie continue* $\frac{1}{2}[\|\partial_t u\|_\rho^2 + \|\varepsilon(u)\|_{\boldsymbol{C}}^2]$.
- *La deuxième,* $\frac{1}{4}\Big[\|s_h^{n+1}\|_{\boldsymbol{m}_h}^2 + \|s_h^n\|_{\boldsymbol{m}_h}^2\Big]$ *où intervient la variable* s_h *dûe à la viscoélasticité et approche le terme* $\frac{1}{2}\|s\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}^2$ *dans l'énergie continue.*
- *La dernière,* $\frac{\Delta t^2}{4}\boldsymbol{b}_h(\frac{s_h^{n+1}-s_h^n}{\Delta t}, \frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t})$ *est un terme assez petit en* $O(\Delta t^2)$*, dûe au schéma des différences finies.*

On a le résultat de dissipation de l'énergie discrète :

Théorème 3.1 *La quantité d'énergie discrète vérifie :*

$$(60) \qquad \frac{\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{E}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{1}{8}\Big[\|s_h^{n+1} + s_h^n\|_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}^2 + \|s_h^n + s_h^{n-1}\|_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}^2\Big],$$

avec $\|s_h\|_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}^2 = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}(s_h, s_h) \;\; \forall\, s_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym}$.

Démonstration :

On considère la formulation variationnelle associée au schéma (55) :

$$(61)\quad \begin{cases} \boldsymbol{\rho}_h(\frac{u_h^{n+1}-2u_h^n+u_h^{n-1}}{\Delta t^2},\tilde{u}_h)-\boldsymbol{b}_h(\tilde{u}_h,\sigma_h^n)=0 & \forall\,\tilde{u}_h\in \underline{M_h},\\ \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}(\frac{s_h^{n+1}+s_h^n}{2},\tilde{s}_h)+\boldsymbol{m}_h(\frac{s_h^{n+1}-s_h^n}{\Delta t},\tilde{s}_h)+\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},\tilde{s}_h)=0 & \forall\,\tilde{s}_h\in \underline{\underline{X_h}}^{sym},\\ \boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1},\tilde{\sigma}_h)-\boldsymbol{a}_h(s_h^{n+1},\tilde{\sigma}_h)+\boldsymbol{b}_h(u_h^{n+1},\tilde{\sigma}_h)=0 & \forall\,\tilde{\sigma}_h\in \underline{\underline{X_h}}^{sym}. \end{cases}$$

Prenons $\tilde{u}_h=\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t}$ (l'approximation centrée de $\partial_t u_h$ à l'instant t^n) et $\tilde{s}_h=s_h^{n+1}+s_h^n$, nous obtenons alors :

$$(62)\quad \frac{1}{2\Delta t}\Big[\|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h}-\|\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\Delta t}\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h}\Big]-\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},\sigma_h^n)=0$$

$$(63)\quad \frac{1}{2}\|s_h^{n+1}+s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}+\frac{1}{\Delta t}\Big[\|s_h^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h}-\|s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_h}\Big]+\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},s_h^{n+1}+s_h^n)=0.$$

En utilisant la dernière équation du système (61), nous avons :

$$(64)\quad \left|\begin{aligned} \boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},\sigma_h^n)&=\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},\sigma_h^n-s_h^n)+\boldsymbol{b}_h(h\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n)\\ &=-\frac{1}{2\Delta t}\Big[\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1}-s_h^{n+1},\sigma_h^n-s_h^n)-\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^n-s_h^n,\sigma_h^{n-1}-s_h^{n-1})\Big]\\ &\quad+\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n), \end{aligned}\right.$$

ce qui nous permet de réécrire (62) sous la forme :

$$(65)\quad \left|\begin{aligned} &\frac{1}{2\Delta t}\Big[\|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h}-\|\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\Delta t}\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h}\Big]-\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n)\\ &+\frac{1}{2\Delta t}\Big[\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1}-s_h^{n+1},\sigma_h^n-s_h^n)-\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^n-s_h^n,\sigma_h^{n-1}-s_h^{n-1})\Big]=0. \end{aligned}\right.$$

Si on fait la moyenne de l'équation (63) entre les deux instant $t^{n+\frac{1}{2}}$ et $t^{n-\frac{1}{2}}$, on obtient :

$$(66)\quad \left|\begin{aligned} &\frac{1}{4}\|s_h^{n+1}+s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}+\frac{1}{4}\|s_h^n+s_h^{n-1}\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}+\frac{1}{2\Delta t}\Big[\|s_h^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h}-\|s_h^{n-1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h}\Big]\\ &+\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{2\Delta t},s_h^{n+1}+s_h^n)+\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n+s_h^{n-1})=0. \end{aligned}\right.$$

On décompose les deux dernirs termes de cette égalité sous la forme :

$$(67)\quad \begin{cases} \boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{2\Delta t},s_h^{n+1}+s_h^n)=\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{2\Delta t},s_h^{n+1}-s_h^n)+2\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{2\Delta t},s_h^n),\\ \boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n+s_h^{n-1})=-\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n-s_h^{n-1})+2\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n). \end{cases}$$

Remplaçons (67) dans (66), on obtient :

$$(68)\quad -\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n)=\frac{1}{2\Delta t}(T_1^{n+\frac{1}{2}}-T_1^{n-\frac{1}{2}})+\frac{1}{4\Delta t}(T_2^{n+\frac{1}{2}}-T_2^{n-\frac{1}{2}})+T^n,$$

avec

$$T_1^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big[\|s_h^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h} + \|s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_h}\Big], \;\; T_2^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{b}_h(u_h^{n+1} - u_h^n, s_h^{n+1} - s_h^n)$$

et

$$T^n = \frac{1}{2}\Big[\|\frac{s_h^{n+1} + s_h^n}{2}\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}} + \|\frac{s_h^n + s_h^{n-1}}{2}\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}\Big] \geq 0.$$

Après la substitution de la quantité (68) dans (65), nous retrouvons (60) :

$$\frac{\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{E}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -T^n \leq 0,$$

ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Afin d'établir une condition de stabilité suffisante, grâce au théorème 60 , il suffit de prouver que l'énergie $\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}}$ est une forme quadratique positive (le reste de la preuve est classique [27]).

Pour établir cette condition, nous devrons revenir à la formulation de matricielle (56) de notre schéma et introduire une nouvelle matrice :

$$\mathbb{K} = (A^{-1} + M_s^{-1})^{-1}.$$

Nous utilisons également les notations suivantes pour les normes des vecteurs dans $\mathbb{R}^N$:

- $\|.\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$ et $(.,.)$ le produit scalaire associé.
- Si P désigne une matrice symétrique définie positive, on définit la norme :

$$\|U\|_P = \sup_{U \neq 0} \frac{(PU, U)^{\frac{1}{2}}}{\|U\|} \;\; \forall U \in \mathbb{R}^N.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de stabilité :

Théorème 3.2 *Une condition siffisante de stabilité du schéma numérique (55) dans L^2 est donnée par :*

$$\frac{\Delta t}{2}\|B\| \leq 1, \tag{69}$$

avec, par définition :

$$\|B\| = \sup_{U_h \neq 0, \Sigma_h \neq 0} \frac{(B\Sigma_h, U_h)}{\|U_h\|_{M_u}\|\Sigma_h\|_{\mathbb{K}}}. \tag{70}$$

Démonstration :

On cherche une condition sous laquelle l'énergie $\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}}$ est positive. On réécrit l énergie sous la forme suivante : $\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\Big\|\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t}\Big\|^2_{M_u} + \frac{1}{2}\big(A^{-1}B^\star U_h^{n+1}, B^\star U_h^n\big) + \frac{1}{4}\big(\big\|S_h^{n+1}\big\|^2_{M_s} + \big\|S_h^n\big\|^2_{M_s}\big) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{4}\big(B^\star\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t}, \frac{S_h^{n+1} - S_h^n}{\Delta t}\big).\end{aligned}$$

Comme les quantités suivantes vérifient :

$$\begin{cases} \big\|S_h^{n+1}\big\|^2_{M_s} + \big\|S_h^n\big\|^2_{M_s} &= \frac{1}{2}\big(\big\|S_h^{n+1} + S_h^n\big\|^2_{M_s} + \big\|S_h^{n+1} - S_h^n\big\|^2_{M_s}\big), \\ \big(A^{-1}B^\star U_h^{n+1}, B^\star U_h^n\big) &= \frac{1}{4}\big\|B^\star(U_h^{n+1} + U_h^n)\big\|^2_{A^{-1}} - \frac{1}{4}\big\|B^\star(U_h^{n+1} - U_h^n)\big\|^2_{A^{-1}}, \end{cases}$$

on peut réécrire $\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}}$ sous la forme : $\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{E}_1^{n+\frac{1}{2}} + \boldsymbol{E}_2^{n+\frac{1}{2}}$, avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{E}_1^{n+\frac{1}{2}} & = & \frac{1}{2}\big\|B^\star\frac{U_h^{n+1}+U_h^n}{2}\big\|^2_{A^{-1}} + \frac{1}{2}\big\|\frac{S_h^{n+1}+S_h^n}{2}\big\|^2_{M_s} \geq 0, \\ \boldsymbol{E}_2^{n+\frac{1}{2}} & = & \frac{1}{2}\big\|\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\big\|^2_{M_u} - \frac{\Delta t^2}{8}\big\|B^\star\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\big\|^2_{A^{-1}} + \frac{\Delta t^2}{8}\big\|\frac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t}\big\|^2_{M_s} \\ & & + \frac{\Delta t^2}{4}\big(B^\star\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t}\big). \end{array}\right.$$

De plus, la quantité $\boldsymbol{E}_2^{n+\frac{1}{2}}$ vérifie :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_2^{n+\frac{1}{2}} &\geq \frac{1}{2}\big([M_u - \frac{\Delta t^2}{4}BA^{-1}B^\star]\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\big) + \frac{\Delta t^2}{8}\big\|\frac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t}\big\|^2_{M_s} \\ &\quad -\frac{\Delta t^2}{8}(BM_s^{-1}B^\star\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}) - \frac{\Delta t^2}{8}\big\|\frac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t}\big\|^2_{M_s} \\ &= \frac{1}{2}\Big(M_u\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\Big) - \frac{\Delta t^2}{8}\Big(B(A^{-1}+M_s^{-1})B^\star\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\Big). \end{aligned}$$

Pour que $\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}} \geq 0$, il suffit qu'on ait l'inégalité :

$$\frac{\Delta t^2}{4}(B(A^{-1}+M_s^{-1})B^\star U_h, U_h) \leq (M_u U_h, U_h) \quad \forall\, U_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym},$$

Ce qui est équivalent à : $\frac{\Delta t^2}{4}\|\mathbb{L}\| \leq 1$, avec

$$\mathbb{L} = B(A^{-1}+M_s^{-1})B^\star \text{ et } \|\mathbb{L}\| = \sup_{U\neq 0}\frac{(\mathbb{L}U,U)}{(M_uU,U)}. \tag{71}$$

Ceci implique la condition de stabilité suffisante (69) grâce au lemme suivant :

Lemme 3.1 *Si $\|B\|$ et $\|\mathbb{L}\|$ sont respectivement définies par (70) et (71), nous avons l'identité $\|B\|^2 = \|\mathbb{L}\|$.*

Démonstration :

On montre les deux inégalités $\|B\|^2 \leq \|\mathbb{L}\|$ et $\|B\|^2 \geq \|\mathbb{L}\|$:

1. $\big\|B\big\|^2 \leq \big\|\mathbb{L}\big\|$. Soit $(\Sigma, U) \in \underline{\underline{X_h}}^{sym} \times \underline{M_h}$:

$$\begin{aligned} (B\Sigma, U) = (\Sigma, B^\star U) &\leq \|\Sigma\|_{\mathbb{K}}\|B^\star U\|_{\mathbb{K}^{-1}} \\ &= \|\Sigma\|_{\mathbb{K}}(B\mathbb{K}^{-1}B^\star U, U)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\Sigma\|_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}U, U)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\mathbb{L}\|^{\frac{1}{2}}\|\Sigma\|_{\mathbb{K}}\|U\|_{M_u}. \end{aligned}$$

2. $\big\|B\big\|^2 \geq \big\|\mathbb{L}\big\|$. Soit $U \in \underline{M_h}$, en utilisant le changement de variable $\Sigma = \mathbb{K}^{-1}B^\star U$, on a :

$$(\mathbb{L}U, U) = (B\mathbb{K}^{-1}B^\star U, U) = (B\Sigma, U) \leq \|B\|\ \|U\|_{M_u}\|\Sigma\|_{\mathbb{K}}. \tag{72}$$

Or, la norme $\|\Sigma\|^2_{\mathbb{K}}$ s'écrit :

$$\|\Sigma\|^2_{\mathbb{K}} = (\mathbb{K}\Sigma, \Sigma) = (B^\star U, \Sigma) = (B\Sigma, U) \leq \|B\|\ \|U\|_{M_u}\|\Sigma\|_{\mathbb{K}}, \tag{73}$$

ce qui nous donne d'après (72): $\big\|\mathbb{L}\big\| \leq \big\|B\big\|^2$. ■

Remarque 3.3 *Nous n'avons pas réussi à exprimer la norme $\|B\|$ (voir (70)) en fonction des formes bilinéaires $\boldsymbol{b}_h$, $\boldsymbol{\rho}_h$, $\boldsymbol{a}_h$ et $\boldsymbol{m}_h$. Cependant, quand on tend vers le cas purement élastique, c'est-à-dire quand la matrice $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}$ tend vers zéro, alors la matrice M_s tend vers 0 et $\mathbb{K}$ tend vers A. Par conséquent, à la limite $\boldsymbol{Z} \to 0$, nous obtenons :*

$$\|B\| = \sup_{U_h \neq 0, S_h \neq 0} \frac{(B\Sigma_h, U_h)}{\|U_h\|_{M_u} \|\Sigma_h\|_{\mathbb{K}}} = \sup \frac{\boldsymbol{b}_h(\sigma, u)}{\|u\|_{\boldsymbol{\rho}_h} \|\sigma\|_{\boldsymbol{a}_h}}. \tag{74}$$

et on retrouve la condition de stabilité de l'équation de l'élastodynamique [34].

Cas particulier d'un milieu homogène isotrope. Dans ce cas, les deux tenseurs $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ s'écrivent sous la forme :

$$(\boldsymbol{C}\sigma)_{ij} = \lambda \sigma_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\sigma_{ij},\ (\boldsymbol{D}\sigma)_{ij} = \lambda\gamma_\lambda \sigma_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\gamma_\mu\sigma_{ij}\ \ \forall i,j = 1,n,$$

on trouve $\|B\| = v_p \dfrac{2\sqrt{\tau_p}}{h\sqrt{\tau_0}}$, d'où la condition suffisante de stabilité du schéma :

$$\Delta t \leq \frac{h}{c_{p,\infty}},\ c_{p,\infty} = v_p\sqrt{\frac{\tau_p}{\tau_0}},\ \tau_p = \tau_0 \frac{\lambda\gamma_\lambda + 2\mu\gamma_\mu}{\lambda + 2\mu}. \tag{75}$$

$c_{p,\infty}$ est la vitesse des ondes P à hautes fréquences [2, 3].

La condition (75) est aussi nécessaire, car on peut se ramener à l'étude de la stabilité par Fourier présentée dans le cas unidimensionnel §2.3.1 en faisant une étude dans une seule direction.

Remarque 3.4 *Pour le problème généralisé (43), on obtient aisément des résultats de décroissance d'énergie discrète et de stabilité. Dans ce cas la quantité d'énergie est donnée par :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_g^{n+\frac{1}{2}} \quad = \quad & \frac{1}{2}\|\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h} + \sum_{i=1}^{k}\Big[\frac{1}{4}(\|s_{i,h}^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h^i} + \|s_{i,h}^n\|^2_{\boldsymbol{m}_h^i}) \\ & + \frac{\Delta t^2}{4}\boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, \frac{u_{i,h}^{n+1} - u_{i,h}^n}{\Delta t}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_h^i(\sigma_{i,h}^{n+1} - s_{i,h}^{n+1}, \sigma_{i,h}^n - s_{i,h}^n)\Big], \end{aligned}$$

et le résultat de la dissipation par :

$$\frac{\boldsymbol{E}_g^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{E}_g^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{k}\Big[\|s_{i,h}^{n+1} + s_{i,h}^n\|^2_{\boldsymbol{m}^i_{\boldsymbol{\tau}_h}} + \|s_{i,h}^n + s_{i,h}^{n-1}\|^2_{\boldsymbol{m}^i_{\boldsymbol{\tau}_h}}\Big].$$

Par conséquent la condition suffisante de stabilité est donnée par :

$$\frac{\Delta t^2}{4}\Big\|\sum_{l=1}^{L}\mathbb{L}_{l,h}\Big\| \leq 1. \tag{76}$$

avec

$$\mathbb{L}_{l,h} = B(A_l^{-1} + M_{l,s}^{-1})B^\star\ \ \forall l = 1, \cdots, L.$$

En pratique, au lieu de travailler avec la condition générale (76) nous utilisons :

$$\frac{\Delta t^2}{4}\sum_{l=1}^{L}\big\|\mathbb{L}_{l,h}\big\| \leq 1, \tag{77}$$

ce qui nous donne dans le cas isotrope homogène la condition suffisante :

$$\Delta t \leq h(\sum_{l=1}^{L} c_l^2)^{-\frac{1}{2}},\ \ c_l = v_{p,l}\sqrt{\frac{\tau_{p,l}}{\tau_{0,l}}}, \tag{78}$$

$v_{p,l}$ (resp. $\tau_{0,l}$ et $\tau_{p,l}$) est la vitesse (resp. les deux temps de relaxation) des ondes $\mathbf{P}$ correspondant à la $l^{ème}$ loi élémentaire dans le modèle généralisé (7).

4 Traitement des milieux ouverts

Nous traitons la propagation des ondes viscoélastique dans les milieux ouverts en appliquant un modèle des couches absorbantes parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layers). Le principe général de la méthode est d'accoler au milieu de propagation, un milieu absorbant qui ne génère aucune réflexion à l'interface tel que : la restriction de la solution au "domaine propagatif" coïncide avec la solution exacte et l'onde transmise décroît exponentiellement au cours de la propagation. Le modèle PML a été introduit la première fois par Bérenger [6] pour les équations de Maxwell dans les milieux non bornés et a été adapté pour d'autre problèmes, par exemple en elastodynamiques [18, 22] et en acoustique [20, 23, 24]. Nous l'avons adapté ici aux équations de la viscoélasticité.

4.1 Application des PML au problème de la viscoélasticité

Nous présentons le modèle PML, en adaptant la méthode utilisée pour les équations de l'élastodynamique [18] au problème de la visco-élastodynamique. Dans [18] les auteurs présentent les principes de base de la méthode pour un système hyperbolique du premier ordre, et ils les appliquent aux équations de l'élastodynamique avec une formulation mixte vitesse-contrainte. Ces principes consistent essentiellement en deux étapes. D'abord à décomposer les opérateurs différentiels comme somme de deux opérateurs : le premier ne comporte que des dérivées parallèles à la couche et le deuxième ne comporte que des dérivées perpendiculaires. Le deuxième étape consiste à ajouter un coefficient d'amortissement uniquement sur les composantes faisant intervenir des dérivées normales à l'interface (la dérivée associée à x_1 pour une couche verticale). Ici nous présentons la méthode pour une formulation déplacement-contrainte au second ordre en temps des équations de la visco-elastodynamique. On considère donc notre problème sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\partial_t^2 u - \mathbf{div}\,\sigma = 0, \\ \\ \mathcal{M}_\tau\, s + \mathcal{M}\,\partial_t s - \varepsilon(\partial_t u) = 0, \\ \\ \mathcal{A}\,\sigma - \mathcal{A}\,s - \varepsilon(u) = 0. \end{array}\right. \tag{79}$$

On décompose les opérateurs différentiels en deux parties suivants les dérivées par rapport à x_1 et par rapport à x_2, le système (79) se réécrit alors sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\partial_t^2 u = D_2\partial_{x_2}\sigma + D_1\partial_{x_1}\sigma, \\ \\ \mathcal{M}_\tau\, s + \mathcal{M}\,\partial_t s = E_2\partial^2_{x_2 t} u + E_1\partial^2_{x_1 t} u, \\ \\ \mathcal{A}\,\sigma - \mathcal{A}\,s = E_2\partial_{x_2} u + E_1\partial_{x_1} u, \end{array}\right. \tag{80}$$

avec

$$\sigma = (\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12})^t,\ D_2 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right],\ D_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],\ E_2 = (D_2)^t \text{ et } E_1 = (D_1)^t.$$

Le système (80) est alors équivalent à :

$$u = u_2 + u_1,\ \sigma = \sigma_2 + \sigma_1,\ s = s_2 + s_1 \tag{81a}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\partial_t^2 u_2 = D_2\partial_{x_2}\sigma, \\ \\ \mathcal{M}_\tau\, s_2 + \mathcal{M}\,\partial_t s_2 = E_2\partial^2_{x_2 t} u, \\ \\ \mathcal{A}\,\sigma_2 - \mathcal{A}\,s_2 = E_2\partial_{x_2} u. \end{array}\right. \tag{81b}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\partial_t^2 u_1 = D_1\partial_{x_1}\sigma, \\ \\ \mathcal{M}_\tau\, s_1 + \mathcal{M}\,\partial_t s_1 = E_1\partial^2_{x_1 t} u, \\ \\ \mathcal{A}\,\sigma_1 - \mathcal{A}\,s_1 = E_1\partial_{x_1} u. \end{array}\right. \tag{81c}$$

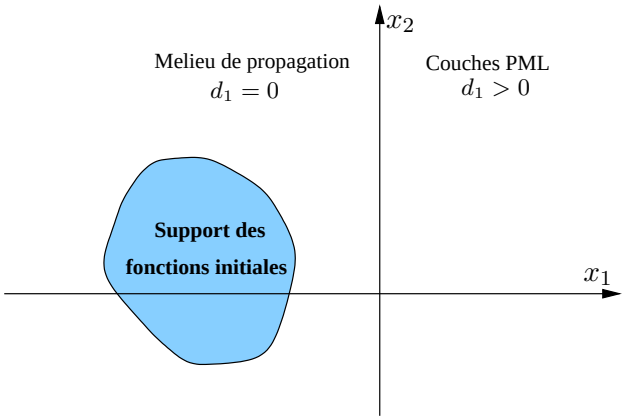


FIG. 7: *Couches PML dans la directions des* x_1

Nous supposons que le support des fonctions initiales est contenu dans le demi-espace à gauche, comme elles sont representées sur la figure ci-dessus (pour une couche parallèle à Ox_2).

L'amortissement ne concerne que le système (81c) qui fait intervenir des dérivées normales à l'interface avec la couche. Afin d'introduire les termes d'absorption, nous rappelons l'interprétation des PMLs dans le domaine fréquentiel (voir [14, 17, 18, 30]) qui consiste à faire le changement de variable dans le plan complexe :

$$x_1 \longrightarrow x_1 + \frac{1}{i\omega}\int_0^x d_1(s)\,ds. \tag{82}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\partial_{x_1} \longrightarrow \eta_1\,\partial_{x_1}, \quad \eta_1 = \frac{i\omega}{i\omega + d_1(x_1)}, \tag{83}$$

où $d_1(x_1)$ est un coefficient d'amortissement égal à 0 dans le milieu de propagation et positif dans les couches (voir Figure 7).

Pour appliquer ce principe, nous écrirons le système (81c) en domaine fréquentiel :

$$\begin{cases} -\rho\,\omega^2 u_1 = D_1 \partial_{x_1}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, s_1 + i\omega\mathcal{M}\, s_1 = i\omega E_1 \partial_{x_1} u, \\ \mathcal{A}\,\sigma_1 - \mathcal{A}\, s_1 = E_1 \partial_{x_1} u. \end{cases} \tag{84}$$

Appliquons le changement de variable (83) à (84), nous obtenons alors :

$$\begin{cases} -\rho\,\omega^2 (i\omega + d_1(x_1)) u_1 = i\omega\, D_1 \partial_{x_1}\sigma, \\ (i\omega + d_1(x_1))\mathcal{M}_\tau\, s_1 + i\omega(i\omega + d_1(x_1))\mathcal{M}\, s_1 = -\omega^2\, E_1 \partial_{x_1} u, \\ (i\omega + d_1(x_1))\mathcal{A}\,\sigma_1 - (i\omega + d_1(x_1))\mathcal{A}\, s_1 = i\omega\, E_1 \partial_{x_1} u. \end{cases} \tag{85}$$

Pour revenir au domaine temporel, il est utile d'introduire quelques inconnues auxiliaires (U_1, S_1 et Σ_1) :

$$\left\{\begin{array}{l} i\omega U_1 = (i\omega + d_1(x_1))u_1, \\ i\omega \Sigma_1 = (i\omega + d_1(x_1))\sigma_1, \\ i\omega S_1 = (i\omega + d_1(x_1))s_1, \end{array}\right. \tag{86}$$

et il est facile de prouver que nous obtenons finalement le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\, \partial_t^2 U_1 = D_1 \partial_{x_1}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, S_1 + \mathcal{M}\, \partial_t S_1 = E_1 \partial^2_{x_1 t} u, \\ \mathcal{A}\, \Sigma_1 - \mathcal{A}\, S_1 = E_1 \partial_{x_1} u, \\ \partial_t U_1 = \partial_t u_1 + d_1(x_1) u_1, \\ \partial_t \Sigma_1 = \partial_t \sigma_1 + d_1(x_1)\sigma_1, \\ \partial_t S_1 = \partial_t s_1 + d_1(x_1) s_1. \end{array}\right. \tag{87}$$

On remplace $\partial_t^2 U_1$ par $\partial_t^2 u_1 + d(x_1)\partial_t u_1$. comme s_1 n'intervient pas dans les trois premières équations, on peut l'éliminer et ne garder que l'inconnue S_1. Pour des raisons de cohérence de notation avec les équations sans PML, nous désignons par la suite par s_1 cette inconnue (remarquons que dans le milieu sans PML, d_1 étant nul, les deux inconnues s_1 et S_1 coïncident). Le système (87) s'écrit alors sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\, (\partial_t^2 u_1 + d_1(x_1)\partial_t u_1) = D_1 \partial_{x_1}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, s_1 + \mathcal{M}\, \partial_t s_1 = E_1 \partial^2_{x_1 t} u, \\ \mathcal{A}\, \Sigma_1 - \mathcal{A}\, s_1 = E_1 \partial_{x_1} u, \\ \partial_t \Sigma_1 = \partial_t \sigma_1 + d_1(x_1)\sigma_1. \end{array}\right. \tag{88}$$

Finalement le modèle PML (dans la direction des x_1) associé au problème (79) est donné par le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u = u_2 + u_1 & ; & \sigma = \sigma_2 + \sigma_1, \\ \rho\, \partial_t^2 u_2 = D_2 \partial_{x_2}\sigma & ; & \rho\, (\partial_t^2 u_1 + d_1(x_1)\partial_t u_1) = D_1 \partial_{x_1}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, s_2 + \mathcal{M}\, \partial_t s_2 = E_2 \partial^2_{x_2 t} u & ; & \mathcal{M}_\tau\, s_1 + \mathcal{M}\, \partial_t s_1 = E_1 \partial^2_{x_1 t} u, \\ \mathcal{A}\, \sigma_2 - \mathcal{A}\, s_2 = E_2 \partial_{x_2} u & ; & \mathcal{A}\, \Sigma_1 - \mathcal{A}\, s_1 = E_1 \partial_{x_1} u, \\ & & \partial_t \Sigma_1 = \partial_t \sigma_1 + d_1(x_1)\sigma_1. \end{array}\right. \tag{89}$$

On traite de la même façon une couche PML dans la direction des x_2 et finalement le modèle PML général s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u = u_2 + u_1 & ; & \sigma = \sigma_2 + \sigma_1, \\ \rho\, (\partial_t^2 u_2 + d_2(x_2)\partial_t u_2) = D_2 \partial_{x_2}\sigma, & & \rho\, (\partial_t^2 u_1 + d_1(x_1)\partial_t u_1) = D_1 \partial_{x_1}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, s_2 + \mathcal{M}\, \partial_t s_2 = E_2 \partial^2_{x_2 t} u, & & \mathcal{M}_\tau\, s_1 + \mathcal{M}\, \partial_t s_1 = E_1 \partial^2_{x_1 t} u, \\ \mathcal{A}\, \Sigma_2 - \mathcal{A}\, s_2 = E_2 \partial_{x_2} u, & & \mathcal{A}\, \Sigma_1 - \mathcal{A}\, s_1 = E_1 \partial_{x_1} u, \\ \partial_t \Sigma_2 = \partial_t \sigma_2 + d_2(x_2)\sigma_2, & & \partial_t \Sigma_1 = \partial_t \sigma_1 + d_1(x_1)\sigma_1. \end{array}\right. \tag{90}$$

4.2 Approximation des PML

Pour l'approximation on utilise la méthode des éléments finis mixtes avec condensation de masse présentée dans § 3.3 pour la discrétisation en espace et un schéma aux différences finies centré d'ordre deux pour la discrétisation en temps, ce qui nous donne le système suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u_h = u_{h,1} + u_{h,2}, \quad \sigma_h = \sigma_{h,1} + \sigma_{h,2}, \quad s_h = s_{h,1} + s_{h,2}, \\
M_u \Big[\dfrac{u_{h,m}^{n+1} - 2u_{h,m}^n + u_{h,m}^{n-1}}{\Delta t} + D_{u,m} \dfrac{u_{h,m}^{n+1} - u_{h,m}^n}{\Delta t} \Big] - B_i \, \sigma_{h,m}^n = f^n, \\
M_\tau \, \dfrac{s_{h,m}^{n+1} + s_{h,m}^n}{2} + M_s \, \dfrac{s_{h,m}^{n+1} - s_{h,m}^n}{\Delta t} + B_i^\star \dfrac{u_{h,m}^{n+1} - u_{h,m}^n}{\Delta t} = 0, \\
A \, \Sigma_{h,m}^{n+1} - A \, s_{h,m}^{n+1} + B_i^\star u_{h,m}^{n+1} = 0, \\
\dfrac{\Sigma_{h,m}^{n+1} - \Sigma_{h,m}^n}{\Delta t} - \dfrac{\sigma_{h,m}^{n+1} - \sigma_{h,m}^n}{\Delta t} - D_{\sigma,m} \dfrac{\sigma_{h,m}^{n+1} + \sigma_{h,m}^n}{2} = 0, \\
\text{pour } m = 1,\, 2,
\end{array}
\right. \tag{91}
$$

où M_u, M_s, M_τ et A sont données par (54) et

$$
\left|
\begin{array}{ll}
(B_m)_{i,j} = b_m(\omega, \phi_j) = \displaystyle\int_\Omega D_m \, \partial_{x_m} \phi_j \omega_i \, dx, & 1 \le i \le N_1,\, 1 \le j \le N_2, \\
(D_{u,m})_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega d_m(x_m) \, \omega_i \omega_j \, dx, & 1 \le i \le N_1,\, 1 \le j \le N_1, \\
(D_{\sigma,m})_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega d_m(x_m) \, \phi_i : \phi_j \, dx, & 1 \le i \le N_2,\, 1 \le j \le N_2 \\
\text{pour } m = 1,\, 2.
\end{array}
\right. \tag{92}
$$

5 Conception de modèles réalistes

Quand on a à sa disposition un modèle mathématique faisant appel à de nombreux paramètres, comme c'est le cas des modèles de Zener généralisés que nous étudions dans ce travail, une difficulté de modélisation est le calage de ces paramètres sur la réalité physique. C'est dans cette direction que se situe le contenu de ce chapitre. Nous commençons au paragraphe §5.1 par définir quelques notions qui sont plus accessibles aux mesures physiques, en particulier celles de facteur de qualité. Puis, au paragraphe §5.2, nous montrons comment on peut décrire à l'aide de nos modèles des milieux dits à facteur de qualité quasi-constant, lesquels sont fréquemment rencontrés en géophysique.

5.1 Définitions

En faisant une analyse par ondes planes nous avons montré dans [2] que la dissipation du modèle viscoélastique est liée à la fréquence. Une façon d'étudier cette dissipation est de définir le facteur de qualité Q qui la caractérise d'une manière quantitative. Dans un premier temps, on définit le module complexe et le facteur de qualité dans le cas 1D et on généralisera cette étude dans le cas d'une dimension supérieure (voir § 5.3). On considère la loi de comportement (8b) :

$$
\sigma + \tau_0 \dot{\sigma} = \mu(\varepsilon + \tau_1 \dot{\varepsilon}), \tag{93}
$$

et la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction f définie par :

$$
\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt.
$$

En appliquant la transformée de Fourier à (93), on obtient :

$$\hat{\sigma}(\omega) = M(\omega)\hat{\varepsilon}(\omega), \tag{94}$$

où $\hat{\sigma}$ et $\hat{\varepsilon}$ sont respectivement les transformées de Fourier des fonctions σ et ε et $M(\omega)$ est appelé **module complexe** :

$$M(\omega) = \mu\frac{1+i\omega\tau_1}{1+i\omega\tau_0}. \tag{95}$$

On sépare M en sa partie réelle et imaginaire :

$$M = \Re e\,(M) + i\Im m\,(M),$$

ce qui implique :

$$\hat{\sigma}(\omega) = \hat{\varepsilon}(\omega)|M|e^{i\varphi(\omega)}, \tag{96}$$

avec

$$\tan\varphi(\omega) = \frac{\Im m\,(M)}{\Re e\,(M)},$$

φ est l'angle de déphasage entre la contrainte et la déformation, on l'appelle **angle de pertes** et il est relié à la viscoélasticité. Dans le cas d'un milieu élastique ($\tau_0 = \tau_1 = 0$) la fonction M est égale à μ, d'où $\Re e\,(M) = \mu$, $\Im m\,(M) = 0$ et $\varphi = 0$, ce qui entraîne que la partie imaginaire $\Im m\,(M)$ caractérise la dissipation des modèles viscoélastiques, par contre la partie réelle $\Re e\,(M)$ est liée à la réponse instantanée. On définit alors le facteur de qualité Q par [9, 11] :

$$Q(\omega) = \frac{\mathcal{R}e(M)}{\mathcal{I}m(M)} = \frac{1}{\tan\varphi(\omega)}. \tag{97}$$

Pour un milieu élastique non dissipatif, le facteur Q est infini, par contre un facteur de qualité nul implique un milieu absorbant.

Les parties réelle et imaginaire du modèle complexe M défini par l'équation (95), sont données par :

$$\Re e\,(M) = \mu\frac{1+\omega^2\tau_1\tau_0}{1+\omega^2\tau_0^2}, \quad \Im m\,(M) = \mu\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{1+\omega^2\tau_0^2},$$

d'où le facteur de qualité et l'angle de pertes associés à la loi élémentaire (93) :

$$Q(\omega) = \frac{1+\omega^2\tau_1\tau_0}{\omega(\tau_1-\tau_0)} \tag{98a}$$

$$\tan\varphi(\omega) = Q^{-1} = \frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{1+\omega^2\tau_1\tau_0} = \frac{\tau_1-\tau_0}{\sqrt{\tau_1\tau_0}}\frac{\omega\sqrt{\tau_1\tau_0}}{1+\omega^2\tau_1\tau_0} \tag{98b}$$

Si on note par θ le rapport $\dfrac{\tau_1}{\tau_0}$, le maximum de Q^{-1}, représentant la dissipativité maximale, est atteint pour la pulsation $\omega_{max} = \dfrac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_0}}$, la fonction $Q^{-1}(\omega_{max},\theta) = \dfrac{\tau_1-\tau_0}{2\sqrt{\tau_1\tau_0}} = \dfrac{\theta-1}{\sqrt{\theta}}$ est croissante par rapport à θ, ce qui implique que plus le rapport θ est grand, plus il y a d'amortissement. La figure 8 donne les variations de l'inverse de Q en fonction de la pulsation ω.

5.2 Facteur de qualité quasi-constant

On voit que le facteur de qualité dépend de la fréquence (voir la figure 8). Or en géophysique une classe importante des matériaux est caractérisée par des facteurs de qualité constants sur une large bande de fréquence [33], on parle de matériaux à facteur de qualité constant ou

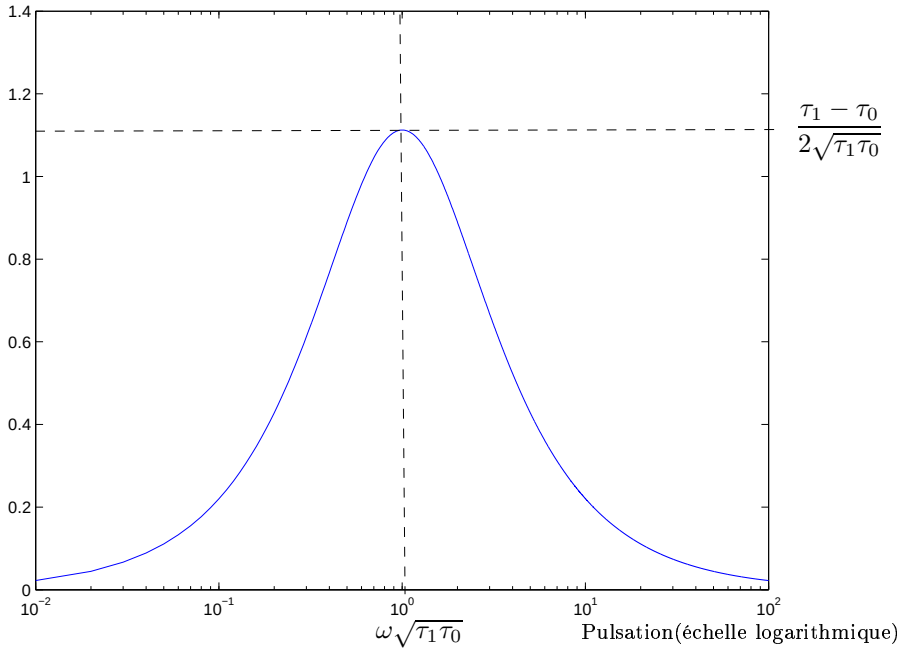


FIG. 8: *La variation de Q^{-1} en fonction de ω*

quasi-constant. Le modèle de Zener élémentaire n'est pas suffisant (voir 98a), c'est pourquoi il est intéressant de considérer le modèle de Zener généralisé.

Nous déterminons un modèle avec un facteur de qualité quasi-constant, en superposant plusieurs modèles de Zener élémentaire ayant tous le même module relâché μ et on détermine les temps de relaxation pour avoir un facteur de qualité quasi-constant sur une bande de fréquence donnée. On considère la loi de comportement générale :

$$\sigma_l + \tau_l^0 \dot{\sigma}_l = \mu\varepsilon(u) + \mu\tau_l^1\varepsilon(\dot{u}) \quad \forall\, l = 1, \cdots, L, \tag{99a}$$

$$\sigma = \sum_{l=1}^{L} \sigma_l. \tag{99b}$$

et on désigne respectivement par M_l et $Q_l = \dfrac{\Re e\, M_l}{\Im m\, M_l}$ le module complexe et le facteur de qualité associés à la $l^{\text{ième}}$ loi élémentaire. Le facteur de qualité associé à la loi (99) est donné par :

$$Q(\omega) = \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \Re e\,(M_l)}{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \mathcal{I}m(M_l)}, \tag{100}$$

avec

$$\Re e\, M_l(\omega) = \mu\frac{1+\omega^2\tau_{1,l}\tau_{0,l}}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2} \text{ et } \Im m\, M_l(\omega) = \mu\frac{\omega(\tau_{1,l}-\tau_{0,l})}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}. \tag{101}$$

On écrit alors l'inverse du facteur de qualité sous la forme :

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega(\tau_{1,l} - \tau_{0,l})}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}}{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \frac{1+\omega^2\tau_{1,l}\tau_{0,l}}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}}. \tag{102}$$

On écrit les coefficients d'amortissements $\tau_{1,l}$ pour tout $l = 1, \cdots, L$ sous la forme :

$$\tau_{1,l} = \tau_{0,l}(1+\gamma_l),\ \gamma_l > 0. \tag{103}$$

$Q^{-1}(\omega)$ se réécrit alors :

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega\tau_{0,l}}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}\gamma_l}{L + \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega^2\tau_{0,l}^2}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}\gamma_l}. \tag{104}$$

Pour déterminer des modèles à facteur de qualité constant, on donne les $\tau_{0,l}$ et on cherche γ_l de façon que Q approche bien le facteur de qualité donné Q_0 sur une bande de fréquence $[f_a, f_b]$. Dans la littérature géophysique on trouve plusieurs algorithme pour approcher Q [7, 19, 21]. Blanch et al. [7] ont utilisé pour modéliser un modèle à facteur de qualité presque constant (Nearly constant) l'approximation τ-method qui consiste à prendre les $\gamma_l = \tau$ constants pour tous les modèles élémentaires et à approcher $Q^{-1}(\omega)$ par $\tilde{Q}^{-1}(\omega,\tau) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega\tau_{0,l}}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}\tau$ ($\tau << 1$) et à déterminer τ qui minimise la fonctionelle $F(\tau) = \displaystyle\int_{\omega_a}^{\omega_b} (\tilde{Q}^{-1}(\omega,\tau) - Q_0^{-1})^2\, d\omega$. On s'est intéressé à adapter la méthode présentée dans [21] pour un modèle généralisé de Maxwell à notre problème.

Le principe de la méthode consiste à approcher $Q^{-1}(\omega)$ par :

$$\tilde{Q}^{-1}(\omega) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega\tau_{0,l}(1 - Q_0^{-1}\omega\tau_{0,l})}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}\gamma_l \tag{105}$$

et de déterminer les coefficients γ_l pour $l = 1, \cdots, L$ satisfaisant le système linéaire :

$$\tilde{Q}^{-1}(\tilde{\omega}_k) = Q_0^{-1},\ \ k = 1, \cdots, K, \tag{106}$$

avec $K = 2L - 1$ et $\{\tilde{\omega}_1, \cdots, \tilde{\omega}_K\}$ une subdivision de l'intervalle $[\omega_a, \omega_b]$ equidistant à l'échelle logarithmique ($\omega = 2\pi f$ la pulsation associée à la fréquence f). Résoudre les équation (106) est équivalent à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} A\gamma = q, & \text{(i)} \\ A_{kl} = \dfrac{\omega_k\tau_{0,l}(1 - Q_0^{-1}\omega_k\tau_{0,l})}{1+\omega_k^2\tau_{0,l}^2}\ \ k = 1, \cdots, K,\ l = 1, \cdots, L, & \text{(ii)} \\ \gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_L)^t \in \mathbb{R}^L,\ q = LQ_0^{-1}(1, \cdots, 1)^t \in \mathbb{R}^K. & \text{(iii)} \end{cases} \tag{107}$$

La résolution de ce système linéaire ne donne pas toujours des $\gamma \geq 0$. Nous réécrirons alors le dernier système sous la forme d'un problème de moindre carré en exigeant la contrainte $\gamma \geq 0$:

$$\begin{cases} \min\limits_{\gamma\in\mathbb{R}^L} \|A\gamma - q\|, \\ \gamma \geq 0, \end{cases} \tag{108}$$

ce qui est équivalent à résoudre le problème de la minimisation d'une fonction quadratique avec contrainte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{\gamma \in \mathbb{R}^L} \dfrac{1}{2}\gamma^t H\gamma - f\gamma, \\ \gamma \geq 0 \end{array} \right. \tag{109}$$

avec $H = A^t A$ et $f = A^t q$.

Pour la résolution du problème (109), on trouve dans la littérature plusieurs méthodes [29]. Nous avons choisi d'utiliser la routine "**quapro**" de Scilab qui utilise des méthodes de projection avec activation de contraintes. Pour le choix des $\tau_{0,l}$, on a vu que pour chacun des modèles élémentaires le maximum de Q^{-1} est atteint pour une pulsation :

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\tau_{1,l}\tau_{0,l}}} = \frac{1}{\tau_{0,l}\sqrt{1+\tilde{\gamma}_l}} \approx \frac{1}{\tau_{0,l}}.$$

On prend pour chaque modèle élémentaire $\omega_{max} = \omega_l$, d'où le choix : $\tau_{0,l} = \omega_l^{-1} = \tilde{\omega}_{2l-1}^{-1}$. Après la résolution de (108), on considère $\tilde{L}$ le nombre des $\gamma_l \neq 0$ et une permutation α sur $S_{\tilde{L}} = \{1, \cdots, \tilde{L}\}$ telle que : $\gamma_{\alpha(l)} \neq 0 \ \forall l = 1, \cdots, \tilde{L}$ et $\tilde{\gamma}_{\alpha(1)} < ... < \tilde{\gamma}_{\alpha(L)}$. Comme on s'est intéressé à des valeurs de $\tilde{\gamma}_l > 0$ ($\tau_{1,l} > \tau_{0,l}$), on néglige les termes nuls et au lieu de travailler avec L modèles on utilise seulement les modèles physique qui correspondent à $\gamma_l > 0$ pour les quels on pose :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\gamma}_l = \dfrac{\tilde{L}}{L}\gamma_{\alpha(l)}, & l = 1, \cdots, \tilde{L}, \\ \tau_{0,l} = \omega_{\alpha(l)}^{-1}, & l = 1, \cdots, \tilde{L}, \\ \tau_{1,l} = \tau_{0,l}(1+\tilde{\gamma}_l), & l = 1, \cdots, \tilde{L}. \end{array} \right.$$

■

En récapitulant, l'algorithme de la méthode est donné par :

Validation de la méthode

On présente sur la figure 9 les résultats obtenus par la méthode présentée ci-dessus, en approchant $Q = 50$ sur une bande de fréquence entre 20 et 200 Hz et en faisant varier le nombre des modèles élémentaires qui constituent la loi viscoélastique.

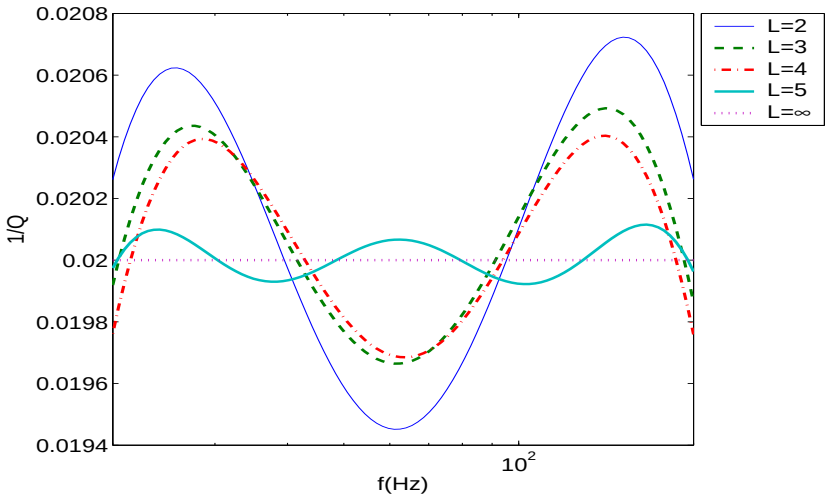


FIG. 9: *Facteur de qualité*

Algorithme 1 Algorithme d'approximation du facteur de qualité

1: Données : L, $K = 2L-1$, f_a, f_b et Q_0.
2: Calculer :

- $\Delta\omega = \dfrac{1}{K-1}\log\dfrac{\omega_b}{\omega_a}$ avec $\omega_a = 2\pi f_a$ et $\omega_b = 2\pi f_b$.
- $\tilde{\omega}_k = \omega_a\, e^{(k-1)\Delta\omega}\ \forall\, k = 1, \cdots, K$.

3: Résoudre le problème :

$$(110) \qquad \begin{cases} \min\limits_{\gamma\in\mathbb{R}^L} \dfrac{1}{2}\gamma^t A^t A\gamma - A^t e\gamma, \\ \gamma \geq 0. \end{cases}$$

avec $A_{kl} = \dfrac{\omega_k\tau_{0,l}(1 - Q_0^{-1}\omega_k\tau_{0,l})}{1+\omega_k^2\tau_{0,l}^2}$ $k = 1, \cdots, K$, $l = 1, \cdots, L$ et $e = (1, \cdots, 1)^t \in \mathbb{R}^K$.

4: Définir :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{\gamma_l > 0\,/\,\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_L) \text{ solution de (110)}\} \\ &= \{\gamma_{\alpha(l)}\ l = 1, \cdots, \tilde{L}\,/\,\gamma_{\alpha(1)} < ... < \gamma_{\alpha(\tilde{L})},\ \alpha \text{ une permutation sur } S_L\}. \end{aligned}$$

5: Calculer : $\forall l = 1, \cdots, \tilde{L}$:

$$\begin{cases} \tau_{0,l} = \tilde{\omega}_{\alpha(l)}^{-1}, \\ \tilde{\gamma}_l = \tilde{L}Q_0^{-1}\gamma_{\alpha(l)}, \\ \tau_{1,l} = \tau_{0,l}(1+\tilde{\gamma}_l). \end{cases}$$

5.3 Cas d'un milieu isotrope de dimension supérieure à 2

Dans le cas d'un milieu isotrope de dimension $n \geq 2$, ces milieux sont caractérisés par les facteurs de qualité Q_p et Q_s associés respectivement aux ondes P et S. On considère la loi de comportement viscoélastique :

$$\sigma_{ij} + \tau_0\dot{\sigma}_{ij} = \lambda[\varepsilon_{kk} + \tau_0\gamma_\lambda\dot{\varepsilon}_{kk}]\delta_{ij} + 2\mu[\varepsilon_{ij} + \tau_0\gamma_\mu\dot{\varepsilon}_{ij}] \quad \forall\, i,j = 1,n$$

Une analyse par ondes planes dans [2, 3] nous a permis de montrer que l'onde viscoélastique isotrope se décompose en deux types d'ondes :

- Les ondes P ou ondes de compression pour lesquelles on associe les coefficients d'amortissement : τ_0 et $\tau_p = \tau_0\dfrac{\lambda\gamma_\lambda + 2\mu\gamma_\mu}{\lambda+2\mu}$.
- Les ondes S ou ondes de cisaillement pour lesquelles on associe les coefficients d'amortissement : τ_0 et $\tau_s = \tau_0\mu$.

Pour modéliser des milieux viscoélastiques à facteurs de qualité Q_p (resp. Q_s) constants, on utilise la méthode présentée dans la section précédente en remplaçant τ_1 par τ_p (resp. τ_1 par τ_s). Nous présentons sur la figure 10 des instantanés de la norme du champs de déplacement u pour deux milieux ayant le même facteur de qualité $Q_s = 100$ et deux différents Q_p. Le premier a un facteur de qualité $Q_p = 10$ ce qui correspond à de forts amortissements (les figures du haut) et le deuxième a un facteur de qualité $Q_p = 200$ correspondant à de faibles amortissements (les figures du bas).

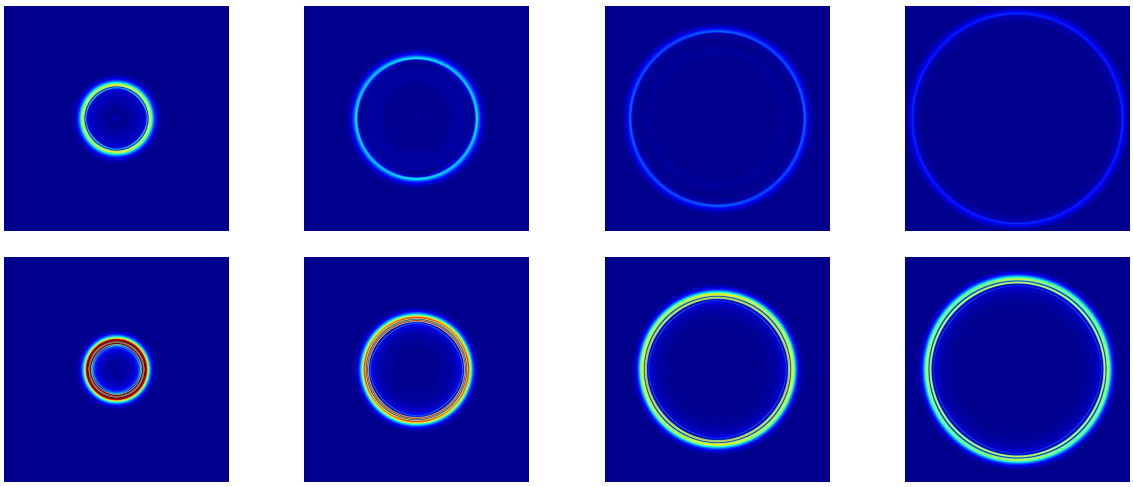


FIG. 10: *Ondes viscoélastiques associées à deux différents facteurs de qualité*

6 Simulations numériques

Dans cette section nous validons les résultats et les méthodes numériques développées dans les sections précedentes. Nous présentons dans la première partie des résultats de propagation d'ondes viscoélastiques dans un milieu unidimensionnel et dans la deuxième des simulations dans le cas bi-dimensionnel en comparant la propagation d'ondes dans le cas élastique et viscoélastique.

6.1 Solution analytique du problème 1D

Pour le problème 1D, il est facile de valider le schéma numérique proposé car on dispose d'une solution exacte pour des conditions initiales particulières. On suppose ici que le domaine Ω est le segment unité $]0,1[$ et on considère les données suivantes :

$$\begin{cases} f(x,t) = u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) = \sin(\pi x), \\ u_t(x,0) = u_1(x) = 0, \\ \sigma(x,0) = \dfrac{\mu\tau_1}{\tau_0}\pi\cos(\pi x), \end{cases}$$

et les coefficients :

$$\rho = 1,\ \mu = 1,\ \tau_0 = 1,\ \tau_1 = 1.2.$$

La solution exacte (u,σ) du problème (8) est calculée par la méthode de séparation des variables, c'est à dire en la cherchant sous la forme :

$$\begin{cases} u(x,t) = U(t)\sin(\pi x), \\ \sigma(x,t) = \Sigma(t)\pi\cos(\pi x), \\ U(0) = 1,\ \dot{U}(0) = 0,\ \Sigma(0) = \dfrac{\mu\tau_1}{\tau_0}. \end{cases} \tag{111}$$

En remplaçant (111) dans (8) on trouve facilement :

$$\begin{cases} \ddot{U} + \pi^2\Sigma = 0, \\ \Sigma + \tau_0\dot{\Sigma} = U + \tau_1\dot{U}. \end{cases} \tag{112}$$

Ce qui implique que U est solution de :

$$\begin{cases} \tau_0 \dfrac{d^3U}{dt^3} + \dfrac{d^2U}{dt^2} + \pi^2\tau_1 \dfrac{dU}{dt} + \pi^2 U = 0, \\ U(0) = 1,\ \dot{U}(0) = 0,\ \ddot{U}(0) = -\dfrac{\pi^2\mu\tau_1}{\tau_0}. \end{cases} \tag{113}$$

En faisant la transformée de Fourier, on remarque que la solution de ce système est nécessairement de la forme :

$$U(t) = Ce^{S^*t} + e^{\eta t}[A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t],$$

où S^* et $\eta \pm i\omega^*$ sont les solutions de :

$$\tau_0 X^3 + X^2 + \tau_1\pi^2 X + \pi^2 = 0.$$

et A, B, et C sont des constantes réelles qu'on détermine à partir des conditions initiales.

Pour le calcul de la solution numérique on choisit comme paramètres de discrétisation $\Delta t = 0.01$ (vérifie la condition de stabilité), $h = \dfrac{1}{80}$. On note par u_{exa} le déplacement associé à la solution exacte et par u_{num} le déplacement associé à la solution obtenue par notre schéma numérique. On présente sur la figure 11 la variation de $|u_{exa} - u_{num}|$ en fonction du temps et de l'espace et sur la figure 12 on compare la variation du déplacement maximale (au point $x = 0.5$) en fonction du temps pour les deux solutions exacte et numérique. A partir des figures ci-dessous, on voit que le schéma numérique approche bien le problème initial (l'erreur relative est inférieur à 0.022%).

On fait ensuite varier les paramètres de discrétisation h et Δt pour étudier la convergence de notre schéma, tout en maintenant le rapport $\dfrac{\Delta t}{h}$ fixé égal à 0.9 ($\leq$ CFL=0.91287). Dans le tableau 1 nous avons présenté la norme infinie de l'erreur correspondant à différents pas de temps et d'espace et sur la figure 13 on présente la variation de la norme L^∞ de l'erreur en fonction de h (en échelle loglog). Ceci nous permet d'affirmer que la solution approchée converge bien vers la solution exacte et que l'erreur est d'ordre 2.

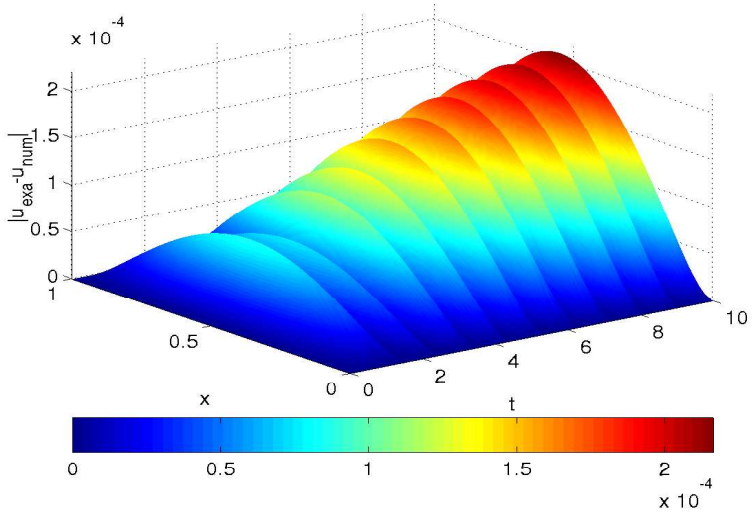


FIG. 11: *La variation d'erreur*

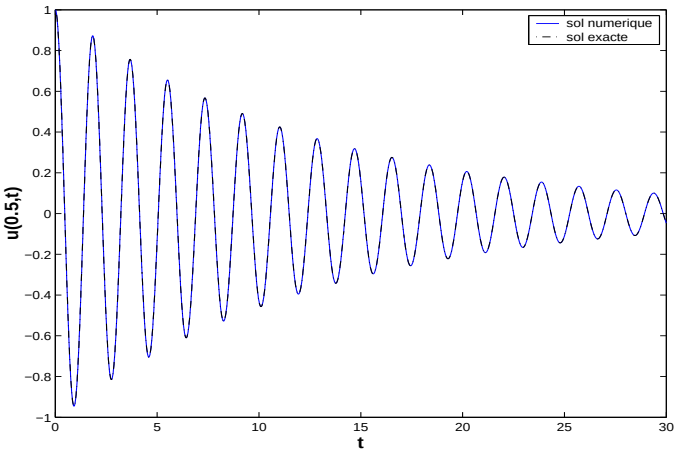


FIG. 12: *Déplacement numérique et exact au point $x = 0.5$ en fonction du temps*

h	Δt	$\|u_{exa} - u_{num}\|_\infty$
10^{-1}	$9\ 10^{-2}$	$6.11162\ 10^{-03}$
$5\ 10^{-2}$	$4.5\ 10^{-2}$	$1.46935\ 10^{-03}$
$2.5\ 10^{-2}$	$2.25\ 10^{-2}$	$3.61645\ 10^{-04}$
$1.25\ 10^{-2}$	$1.125\ 10^{-2}$	$8.97108\ 10^{-05}$
$6.25\ 10^{-3}$	$5.625\ 10^{-3}$	$2.23409\ 10^{-05}$
$3.125\ 10^{-3}$	$2.8125\ 10^{-3}$	$5.57442\ 10^{-06}$

TAB. 1: *Tableau des résultats*

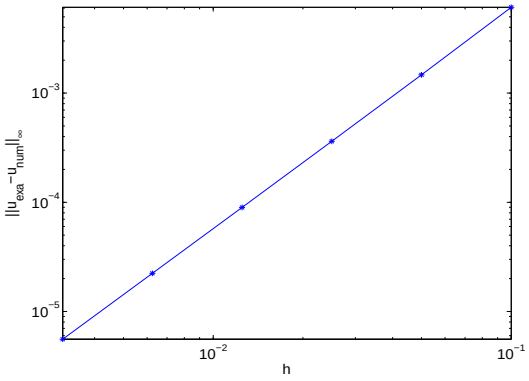


FIG. 13: *Convergence*

6.2 Tests numériques dans le cas 1D

Dans une première expérience, afin de montrer l'influence des coefficients d'amortissement τ_0 et τ_1 sur l'atténuation et la vitesse de propagation des ondes viscoélastiques, nous présentons sur la figure 14 une expérience numérique où on fait varier le rapport $\theta = \tau_1/\tau_0$ ($\theta = 4$ pour la courbe rouge, $\theta = 2$ pour la courbe bleu et $\theta = 1.2$ pour la courbe verte). On voit que l'absorption et la vitesse de propagation sont liées au rapport θ: pour une grande valeur de θ on a plus d'amortissement et une plus grande vitesse de propagation.

Dans une deuxième expérience, on présente des résultats numériques en appliquant la méthode PML au problème homogène de la viscoélasticité. On s'intéresse à la simulation de la propagation d'onde viscoélastique dans un milieu semi borné $\Omega =]-1, +\infty[$. On considère une couche PML de longueur δ, on discrétise le nouveau domaine $D =]-1, \delta[$ et on utilise la restriction du schéma numérique (91) dans le cas 1D avec des conditions au bord de Dirichlet, un pas de temps Δt qui vérifie la condition de stabilité et

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-1, 0], \\ d_0(\frac{x}{\delta})^2 & \text{si} \quad x \in [0, \delta[,\ d_0 > 0 \end{cases}$$

Pour la présente étude, on a pris :

1. Les coefficients qui caractérisent le milieu : $\rho = 1,\ \mu = 1,\ \tau_0 = 1,\ \tau_1 = 1.2$.
2. Les constantes : $d_0 = 45,\ h = 1/150,\ \Delta t = CFL\, h,\ \delta = 20h$.
3. Les conditions initiales :

$$u_0(x) = \begin{cases} (1 - \dfrac{(12x+6)^2}{4})^3 & \text{si} \quad -\dfrac{2}{3} \le x \le -\dfrac{1}{3}, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x) = 0,\ \sigma_0 = \frac{\mu\tau_1}{\tau_0}\frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

On présente sur la figure 15 l'évolution de la solution numérique au cours du temps. On remarque que les ondes traversent l'interface sans réflexion et qu'elles sont amorties dans la couche $[0, \delta]$.

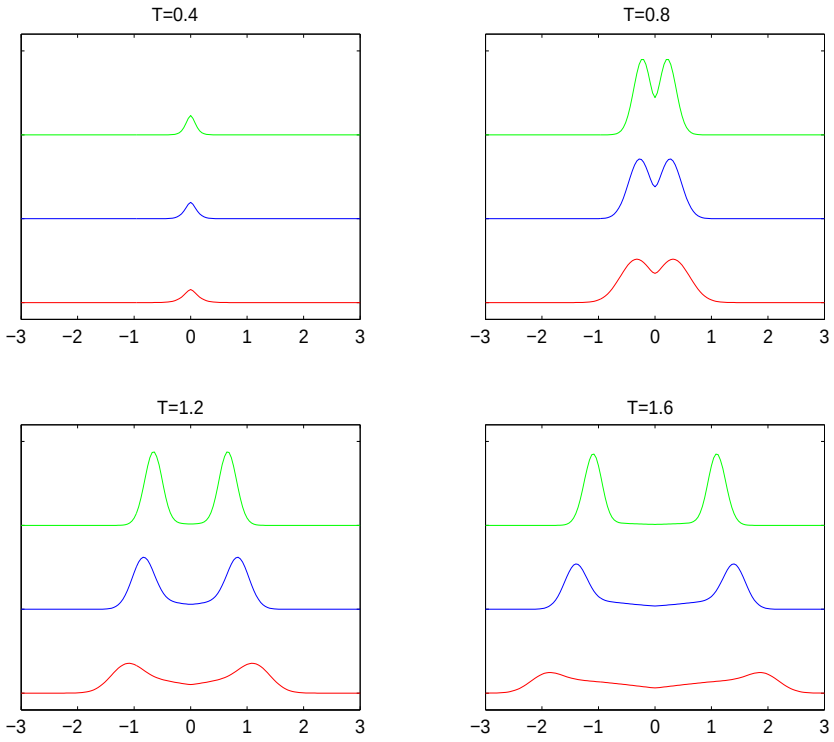


FIG. 14: *Qualité d'amortissement et de propagation*

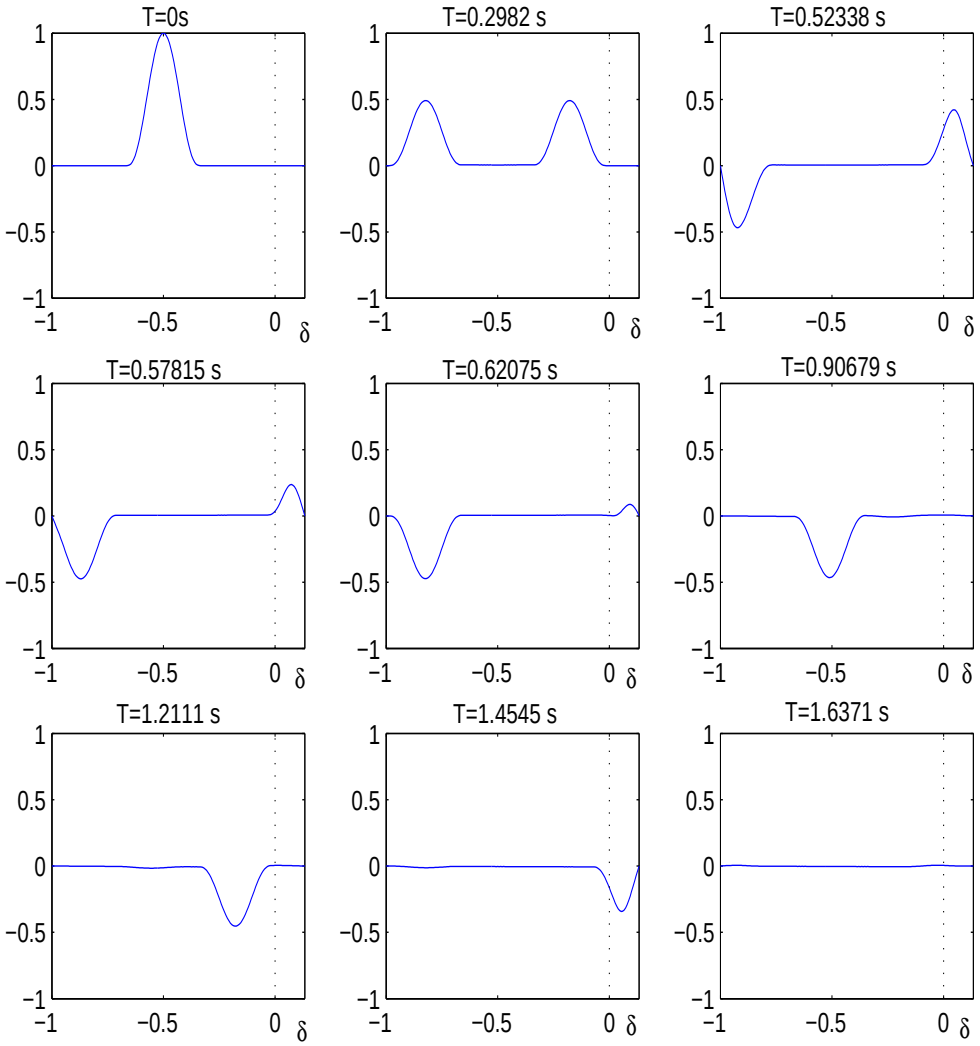


FIG. 15: *Propagation d'onde viscoélastique au cours du temps avec couches PML*

6.3 Résultats bi-dimensionnels

Dans les expériences qui vont suivre nous considérons un domaine $\Omega = [0,10] \times [0,10]$ et un maillage régulier composé de carrés de coté $h = 0.1$, un pas de discrétisation en temps vérifiant la condition de stabilité :

$$\Delta t = CFL\, h,$$

avec $CFL = (v_p \sqrt{\frac{\tau_p}{\tau_0}})^{-1}$ (resp. $CFL = v_p^{-1}$) dans le cas d'un comportement viscoélastique (resp. comportement élastique) et on considère une source f comme second membre à support compact dans Ω située au point $S(x_s, z_s)$ et vérifiant :

$$f(x,t) = F(t)\vec{g}(r),\ r = \left[(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{114}$$

avec

$$
\begin{aligned}
&F(t) = \begin{cases} -2\pi^2 f_0^2 (t-t_0) e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&t_0 = \frac{1}{f_0}, f_0 = \frac{v_s}{hN_L} \text{ la fréquence centrale,} \\
&g(r) = (1 - \frac{r^2}{a^2}) \mathbf{1}_{B_a} \vec{e},\ \vec{e} = (\frac{x - x_s}{r}, \frac{z - z_s}{r}),
\end{aligned}
\tag{115}
$$

où $\mathbf{1}_{B_a}$ est la fonction indicatrice du disque B_a, le disque de centre S et de rayon $a = 5h$ et N_L le nombre de points par longueur d'onde S.

Nous donnons les caractéristiques des milieux viscoélastiques isotropes : les vitesses des ondes P et S, la densité volumique ρ et les trois temps de relaxation τ_0, τ_p et τ_s.

6.3.1 Dissipation d'énergie discrète

Nous présentons une expérience numérique concernant la dissipation de l'énergie discrète en comparant les deux cas : le cas élastique où on a la conservation d'énergie et la cas viscoélastique.

Le milieu élastique est caractérisé par :

$$\rho = 1.,\ v_p = 2.74,\ v_s = 1.43 \tag{116}$$

et le milieux viscoélastique par les mêmes v_p, ρ, v_s et les temps de relaxation :

$$\tau_0 = 0.7,\ \tau_p = 1.0133,\ \tau_s = 1.01470 \tag{117}$$

L'expérience est considérée dans un milieu borné avec la condition de surface libre et une source située au centre (voir la figure ci-dessous).

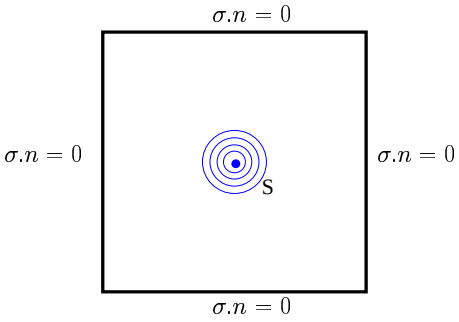


FIG. 16: *Surface libre*

On voit sur la figure 17 que après l'extinction de la source f, l'énergie élastique est constante alors que l'énergie viscoélastique est décroissante, ce qui confirme nous résultats théoriques [2].

6.3.2 Du viscoélastique à l'élastique

Dans cette partie nous validons les résultats théoriques présentés dans [2] concernant le comportement de l'onde viscoélastique quand le coefficient d'amortissement $\tau_0 \longrightarrow 0$. On se place dans un milieu homogène isotrope caractérisé par (116) et $\tau_0 = \varepsilon,\ \tau_p = 1.447\tau_0,\ \tau_s = 1.451\tau_0$.

Dans une première expérience (Fig 18 et Fig 19) nous présentons la variation de la norme de

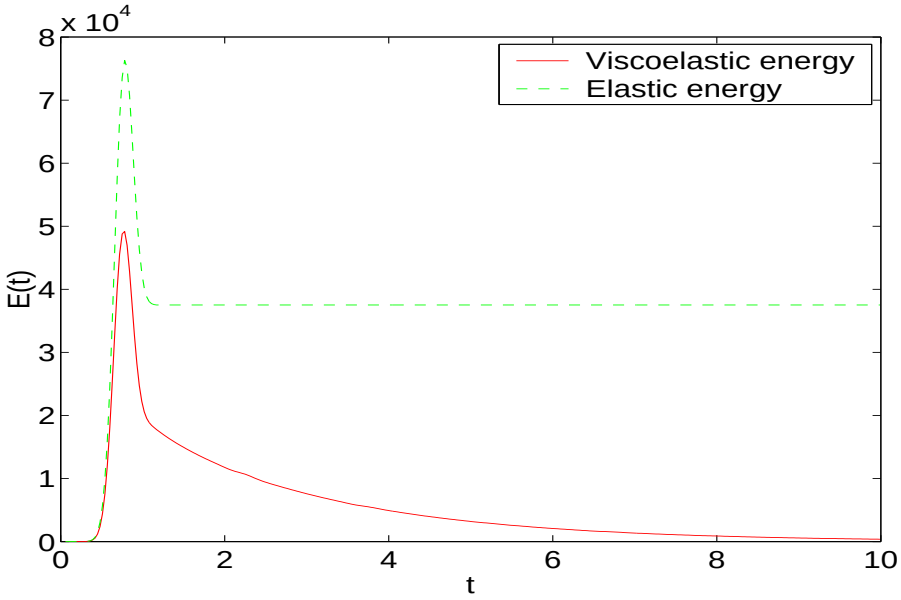


FIG. 17: *Variation de l'énergie discrète*

la différence entre la solution viscoélastique et la solution élastique ($\varepsilon = 0$) en fonction de ε dans les espaces $(L^2(\Omega))^2$ et $(H^1(\Omega))^2$ à l'instant $t = 4$. Sur les deux figures on remarque que la solution du problème viscoélastique converge vers la solution élastique.

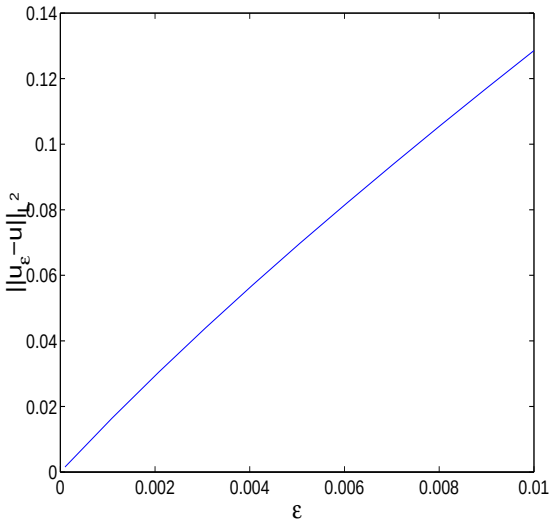


FIG. 18: *La variation de $\|u_\varepsilon - u\|$ dans L^2 en fonction de ε*

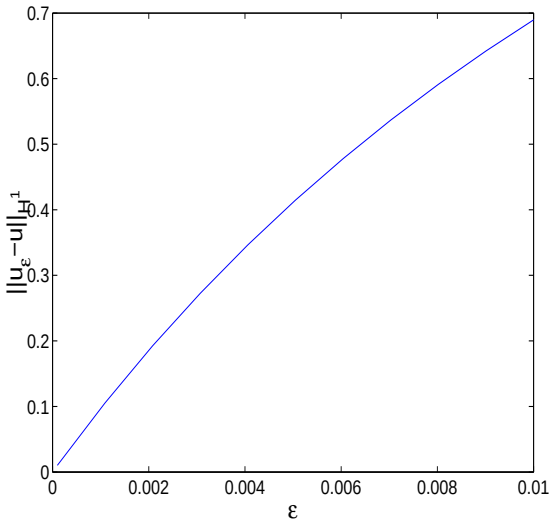


FIG. 19: *La variation de $\|u_\varepsilon - u\|$ dans H^1 en fonction de ε*

Dans une deuxième expérience (Fig 20) on présente la variation de l'énergie viscoélastique en fonction de ε à l'instant $t = 4$ et on la compare avec l'énergie élastique ($\varepsilon = 0$).

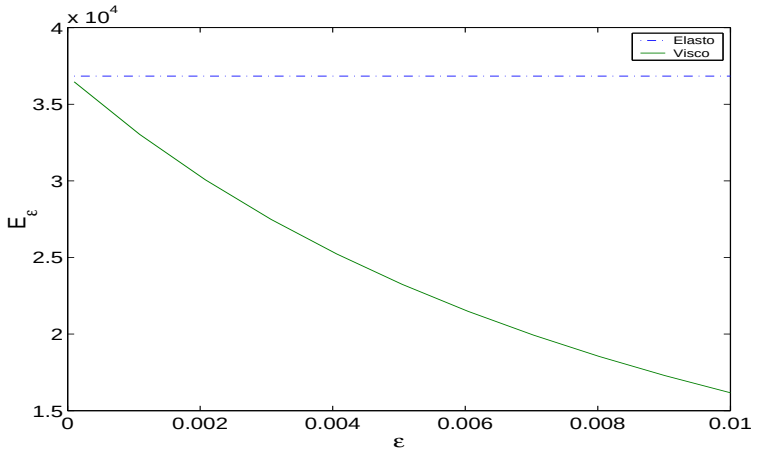


FIG. 20: *La variation des énergies élastique et viscoélastique en fonction de* ε

Dans la dernière expérience (Fig 21) nous présentons La variation des énergies élastique et viscoélastique en fonction du temps pour différentes valeurs de ε. Sur les deux figures 20 et 21 on

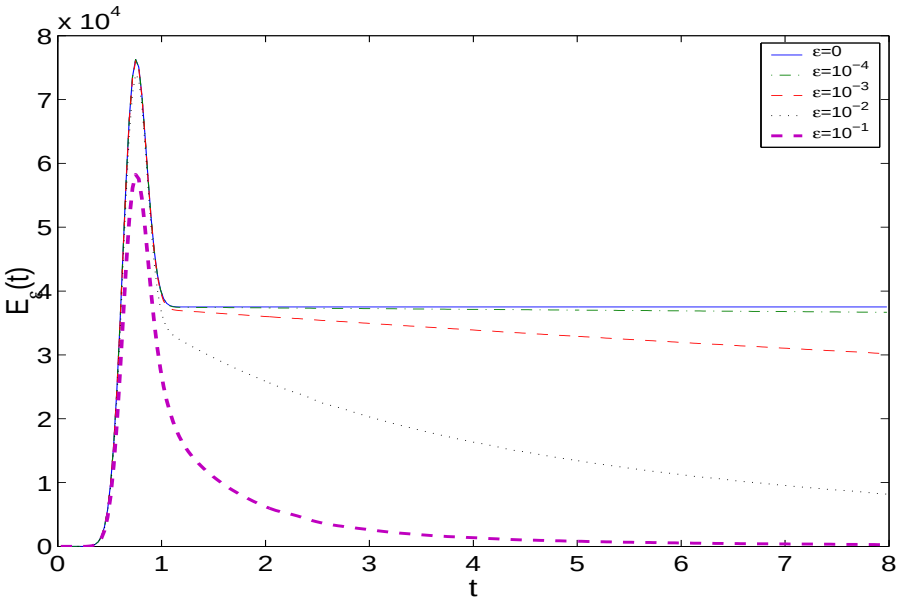


FIG. 21: *La variation des énergie pour des différentes* ε

montre que l'énergie viscoélastique tend vers l'énergie élastique quand le coefficient d'amortissement $\tau_0 = \varepsilon$ tend vers zéro.

6.3.3 Simulation de la propagation d'onde viscoélastique dans un milieu homogène isotrope

Dans cette simulation, nous faisons une comparaison entre la propagation d'ondes dans des milieux ouverts : élastique caractérisé par (116) et viscoélastique caractérisé par (116)-(117). Pour modéliser les milieux ouverts nous utilisons la méthode des couches PML développée dans la section §4. On entoure le domaine Ω avec des couches absorbantes PML de longueur $\delta = 10h$ (voir

la figure 23). Pour le choix des coefficients d'absorption, nous utilisons la fonction définie par [18] :

$$d(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{3v_p}{2\delta^3}\log(1/R)r^2 & \text{dans la couche,} \end{cases} \tag{118}$$

où v_p est la vitesse des ondes P, $R = 1/1000$ le pourcentage d'énergie réfléchie par le bord extérieur de la PML et $r = dist(x, \text{Interface})$ est la distance entre le point de coordonnées x et l'interface avec la couche.

Sur la figure 22 nous avons présenté la restriction du déplacement de l'onde viscoélastique (resp. élastique) sur le sous domaine inférieur $[-\delta, 10+\delta]\times[-\delta, 5]$ (resp. supérieur $[-\delta, 10+\delta]\times[5, 10+\delta]$) en bas (resp. haut). Nous observons sur cette figure que les ondes viscoélastiques se propagent plus vite que les ondes élastiques et qu'elles sont plus amorties. De plus on voit que les couches PML absorbent bien les ondes transmises.

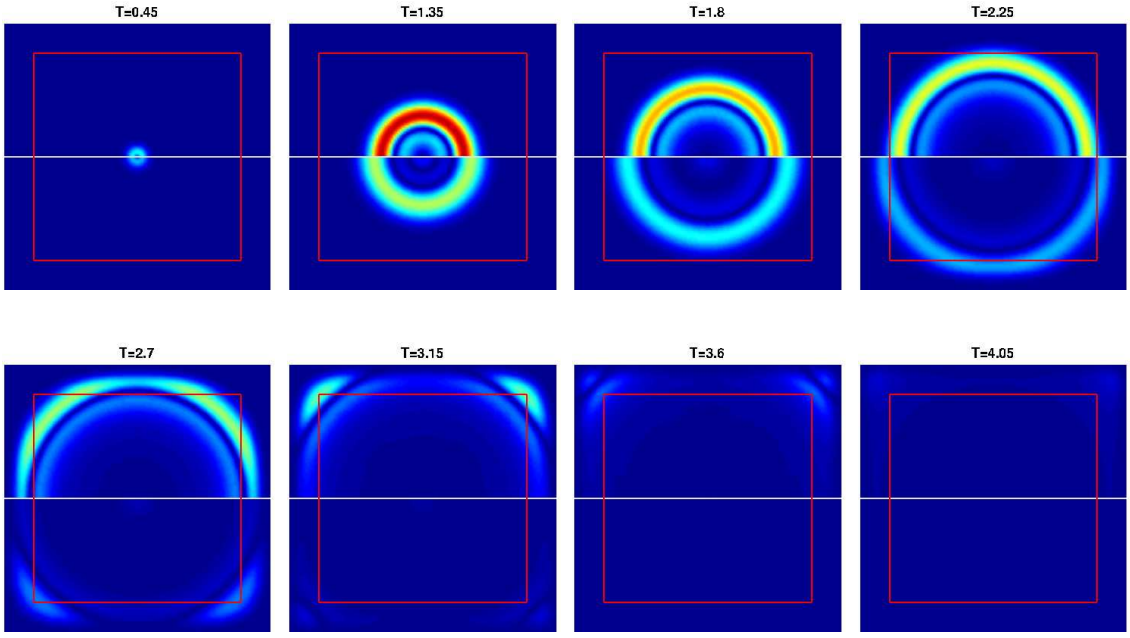


FIG. 22: *Comparaison entre la propagation d'onde dans un milieu élastique (en haut) et dans un milieu viscoélastique (en bas)*

6.3.4 Efficacité des couches PML

Afin de montrer que les couches absorbantes sont bien adaptées au problème de la viscoélasticité, nous présentons la variation au cours du temps du déplacement en un point d'observation X_o (voir Fig 23) au voisinage de l'interface avec la couche ($X_o(x_o, z_o) = (9.9, 5)$), en comparant les trois expériences :

1. Domaine borné sans couche PML avec condition au bord de type Dirichlet (voir Fig 24).
2. Domaine ouvert et domaine borné avec des couches PML de longueur $\delta = 10h$ (voir Fig 25)

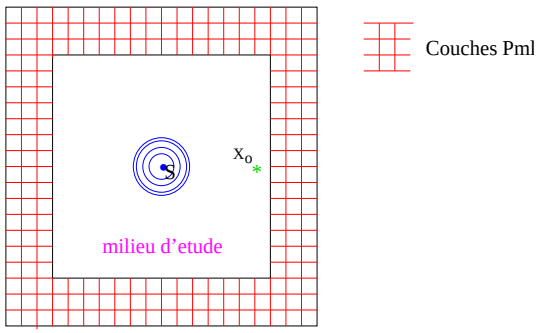


FIG. 23: *Domaine borné, couches PML*

Domaine borné sans couche PML

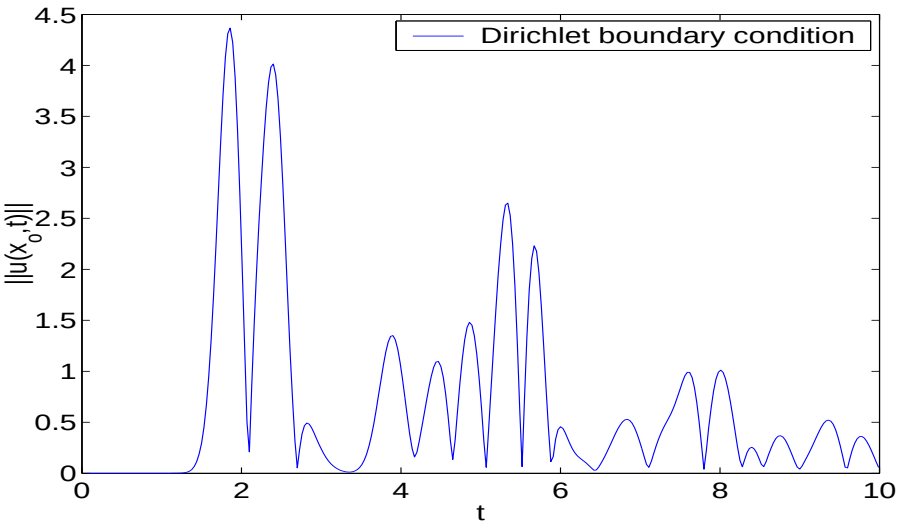


FIG. 24: *Sismo dans un milieu borné sans PML*

Malgré l'amortissement des ondes viscoélastiques, la réflection de l'onde est clairement visible lorsqu'on met une condition de Dirichlet sur le bord extérieur du domaine, d'où la nécessité des couches PML.

Domaine ouvert et domaine borné avec couches PML

Dans cette expérience on illustre la variation du déplacement au point X_o dans deux simulations : dans un domaine ouvert en noir pointillé et dans un domaine borné avec couches PML en vert (Fig 25).

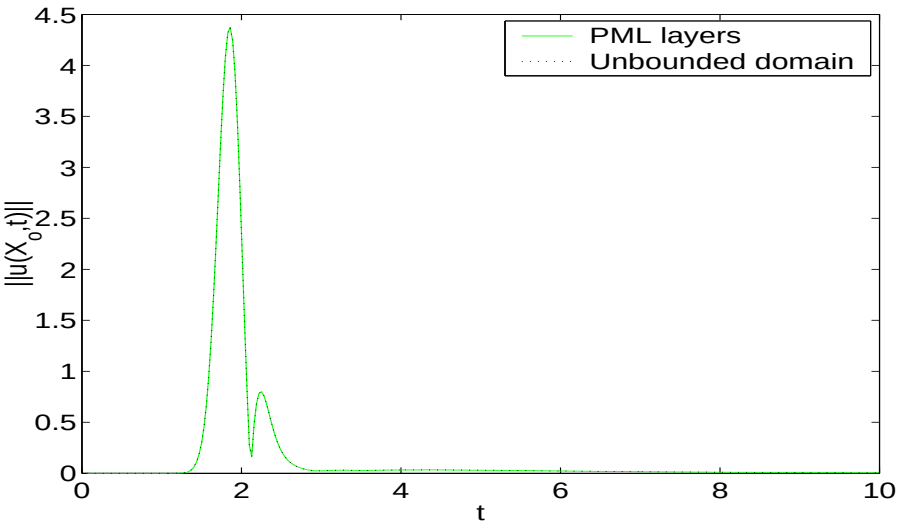


FIG. 25: *Sismo dans un milieu avec couche PML et dans un milieu ouvert*

La réflexion dûe à l'utilisation des PML est trop faible pour être visible et les deux graphes paraissent confondus. Pour voir l'ordre de cette réflexion, nous présentons la différence entre les deux déplacements sur la figure 26

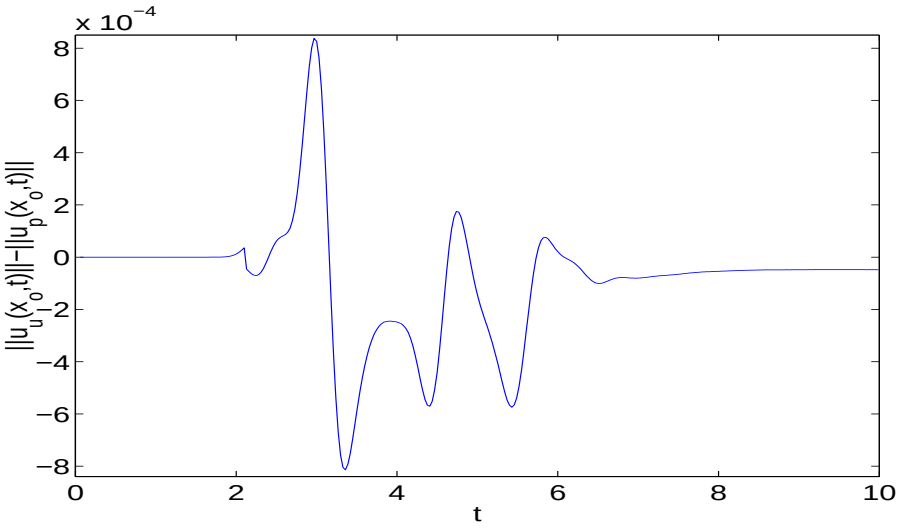


FIG. 26: *Réflextion dû aux couches PML*

Nous constatons que cette réflexion est très faible et ne dépasse pas 8.10^{-4} c'est-à-dire 0.017% du maximum de déplacement (égal à 4.5).

6.3.5 Propagation d'ondes viscoélastiques dans un milieu hétérogène isotrope

On considère ici une expérience réaliste modélisant un réservoir pétrolier situé dans un domaine $\Omega = [0, 270] \times [800, 960]$ (champ Mc Elroy au Texas) avec une zone productive forte entre 880 m et 900 m. Le milieu hétérogène est caractérisé par les données physiques :

depth(m)	Vp(m/s)	Vs(m/s)	Qp	Qs	rho(kg/m^3)
800.00	5924.884	2928.865	67.06922	20.00	2280.533900
810.00	5773.175	2738.594	35.43660	20.00	2242.557601
820.00	5313.743	3004.746	21.44790	20.00	2295.163535
830.00	5311.784	2564.933	17.41970	20.00	2206.127967
840.00	5986.338	2993.962	31.28279	20.00	2293.101428
850.00	6176.533	3050.588	40.08961	20.00	2303.867950
860.00	5619.798	3065.524	34.76888	20.00	2306.682782
870.00	5163.070	2940.252	53.11094	20.00	2282.747271
880.00	5191.213	2473.413	36.02421	20.00	2186.179681
890.00	5613.954	2583.599	24.61245	20.00	2210.130769
900.00	5579.241	2644.431	31.45738	20.00	2223.027083
910.00	5712.608	2905.288	57.79010	20.00	2275.930476
920.00	6219.111	2876.129	47.12633	20.00	2270.198248
930.00	6386.336	3111.822	27.59576	20.00	2315.343230
940.00	6489.850	2866.232	133.56708	20.00	2268.242737
950.00	6517.794	2866.232	24.26944	20.00	2268.242737
960.00	6111.120	2866.232	63.14770	20.00	2268.242737

Remarque 6.1 *ρ est calculé à partir des valeurs de v_s par la loi de Gardner [1] : $\rho = a v_s^{\frac{1}{4}}$ avec $a = 0.31$ lorsque ρ est en g/cm^3 et v en m/s.*

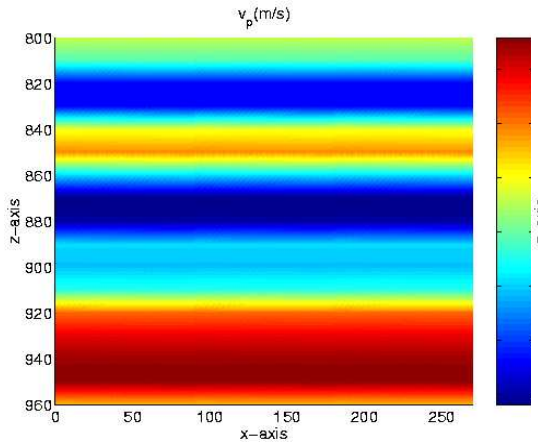


FIG. 27: *Vitesse des ondes P*

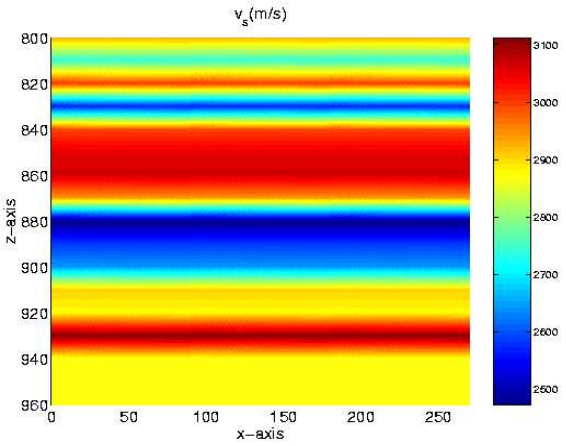


FIG. 28: *Vitesse des ondes S*

Pour approcher les facteurs de qualité Q_p et Q_s nous utilisons l'algorithme présenté dans §5.2 sur une bande de fréquence $[f_a, f_b] = [20, 200]$ et le modèle de Zener généralisé avec 3 lois élémentaires (voir la figure 30 pour $Q_s = 20$ et $Q_p = 57.7901$). Nous considérons un maillage régulier composé de carrés de coté $h = 1$ m, le pas de temps $\Delta t = 8.272\,10^{-5}$ satisfait la condition de stabilité ($\Delta t = CFL\,h$) et une source f à support compact dans Ω située en un point $S(x_s, z_s)$ et vérifiant : (114)-(115) avec $f_0 = 100$ Hz. Nous présentons sur les figures 31 et 32 des instantanés de la composante

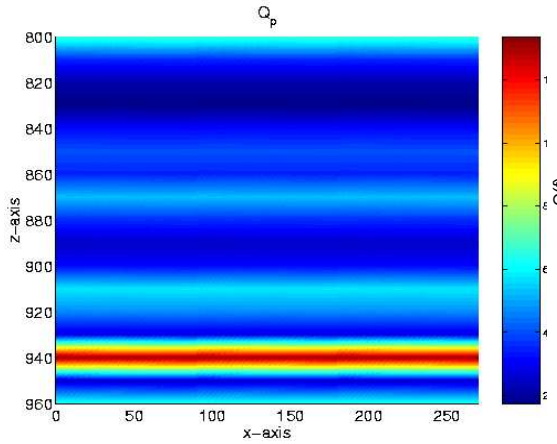


FIG. 29: *Facteur de qualité associé aux ondes P*

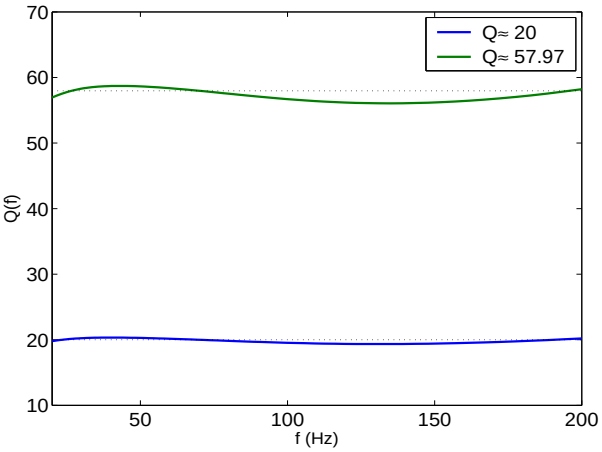


FIG. 30: *Exemple d'approximation de* $Q_s = 20$ *et* $Q_p = 57.7901$

u_z avec deux différents point source. Un intérêt de ces expériences est que les deux localisations de la source provoquent différents phénomènes. Dans le premier cas, on peut observer les ondes guidées, tandis que dans le deuxième on observe des phénomènes de transmission-réflexion.

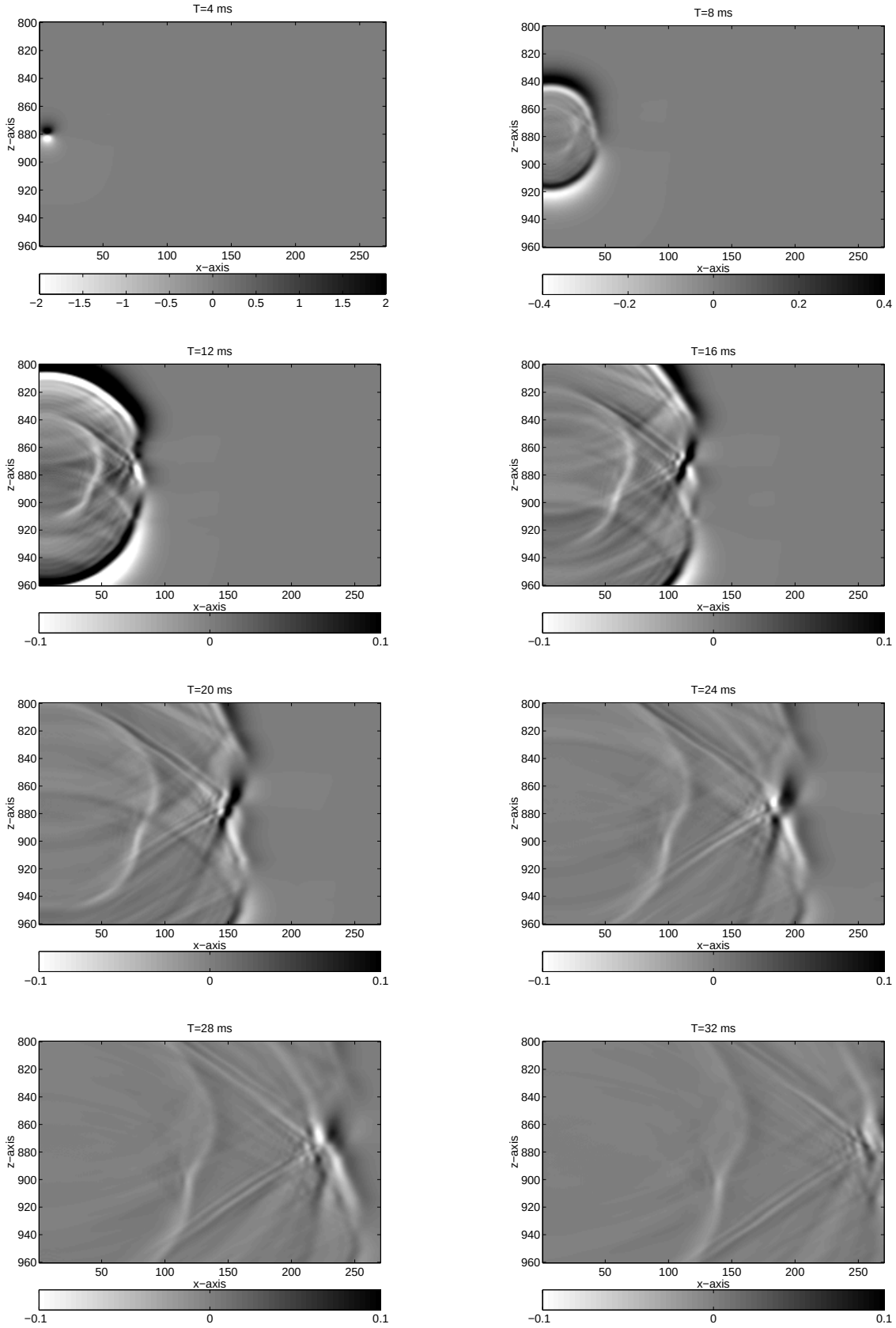


FIG. 31: $x_s = 5\,m,\ z_s = 880\,m$

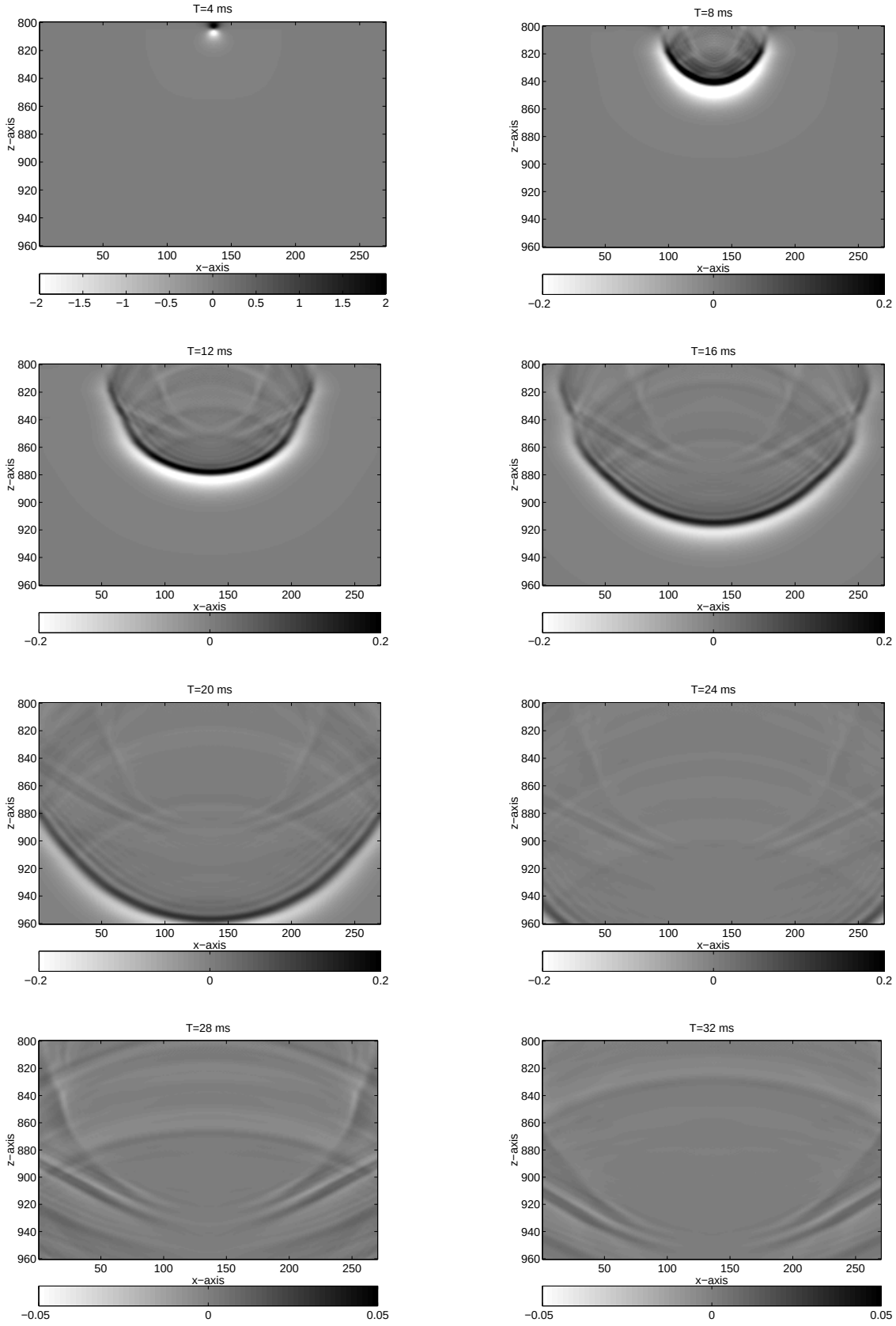


FIG. 32: $x_s = 135\,m$, $z_s = 805\,m$

Références

[1] K. D. Ayon and R. S. Robert. Predicting density using v_s and gardner's relationship. Technical report, CREWES, 1997.

[2] E. Bécache, A. Ezziani, and P. Joly. Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoéelastiques linéaires. I. Analyse mathématique. Technical Report 4785, INRIA, 2003.

[3] E. Bécache, A. Ezziani, and P. Joly. Modeling of wave propagation in linear viscoelastic media. In *Mathematical Modelling of Wave Phenomena*, volume 7. Mathematical modelling in physics, engineering and cognitive sciences, 2004.

[4] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka. Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers dor 2-D elastic wave propagation. *J. Comput. Acoust.*, 9(3):1175–1201, 2001.

[5] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka. A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem. *SIAM J. on Num. Anal.*, 39(6):2109–2132, 2002.

[6] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Comp. Physics*, 1994.

[7] J. O. Blanch, J. O. A. Robertsson, and W. W. Symes. Modeling of a constant Q: Methodology and algorithm for an efficient and optimaly inexpensive viscoelastic technique. *Geophysics*, 60(1):179–184, 1995.

[8] T. Bohlen. Parallel 3-D viscoelastic finite-difference seismic modelling. *Computers & Geosciences*, 28(8):887–899, 2002.

[9] T. Bourbié, O. Coussy, and B. Zinszner. *Acoustique des milieux poreux.* Publications de l'Institut Français du Pétrole, 1986.

[10] J. M. Carcione. Seismic modeling in viscoelastic media. *Geophysics*, 58:110–120, 1995.

[11] J. M. Carcione. *Wave Fields in Real Media : Wave propagation in Anisotropic, Anelastic and Porous Media.* Pergamon, 2001.

[12] J. M. Carcione, D. Kosloff, and R. Kosloff. Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 93:393–407, 1988.

[13] J. M. Carcione, D. Kosloff, and R. Kosloff. Wave propagation simulation in a visco-elastic medium. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 95:597–611, 1988.

[14] W. C. Chew and W. H. Weedon. A 3D perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates. *IEEE Mocrowave. Opt. Technol Lett.*, 7:599–604, 1994.

[15] T. Chichinina, G. R. Jarillo, and V. Sabinin. Numerical model of seismic wave propagation in viscoelastic media. In *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 922–927. Springer, 2003.

[16] F. Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems : application to electromagnetic scattering. *J. Comput. Phys.*, 138(2):907–938, 1997.

[17] F. Collino and P. B. Monk. Optimizing the perfectly matched layer. exterior problems of wave propagation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1998.

[18] F. Collino and C. Tsogka. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heteregeneous media. *Geophysics*, 66:294–307, 2001.

[19] S. M. Day and J. B. Minster. Numerical simulation of wave fields using a pad'e approximant method. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 78:105–118, 1984.

[20] J. Diaz and P. Joly. Stabilized perfectly matched layer for advective acoustics. In *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 115–119. Springer, 2003.

[21] H. Emmerich and M. Korn. Incorporation of attenuation into time-domain computations. *Geophysics*, 52(9):1252–1264, 1987.

[22] S. Fauqueux. *Eléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d' ondes élastiques en regime transitoire.* PhD thesis, Université Paris 9, 2003.

[23] T. Hagstrom and I. Nazarov. Absorbing layers and radiation boundary conditions for jet flow simulations. In *Proc. of the 8th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, 17-19 june 2002, Breckenridge, CO, USA*. AIAA paper 2002-2606.

[24] F. Q. Hu. A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables. *J. Comput. Phys.*, 173:455–480, 2001.

[25] A. Idesman, R. Niekamp, and E. Stein. Finite elements in space and time for generalized viscoelastic maxwell model. *Computational Mechanics*, 27:49–60, 2001.

[26] V. Janovský, S. Shaw, M. K. Warby, and J. R Whiteman. Numerical methods for treating problems of viscoelastic isotropic solid deformation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 63:91–107, 1995.

[27] P. Joly. Variational methods for time-dependent wave propagation problems. In *Topics in Computational Wave Propagation Direct and Inverse Problems*, volume 31 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 201–264. Springer, 2003.

[28] G. A. McMechan and T. Xu. Efficient 3-D viscoelastic modeling with application to near-surface land seismic data. *geophysics*, 69(2):601–612, 1998.

[29] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization.* Springer Series in Operations Research. Springer, New York, 1999.

[30] C. M. Rappaport. Perfectly matched absorbing conditions based on anisotropic lossy mapping of space. *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, 3:90–92, 1995.

[31] J. O. A. Robertsson, J. O. Blanch, and W. W. Symes. Viscoelastic finite difference modeling. *Geophysics*, 59(9):1444–1456, 1994.

[32] S. Shaw, M. K. Warby, J. R Whiteman, C. Dawson, and M. F Wheeler. Numerical techniques for the treatment of quasistatic viscoelastic stress problems in linear isotropic solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 118:211–237, 1994.

[33] T. A. Spencer, J. R. Sonnad, and T. M. Butler. Seismic Q. stratigraphy or dissipation. *Geophysics*, 47:16–24, 1982.

[34] C. Tsogka. *Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans les milieux fissurés.* PhD thesis, Université Paris 9, 1999.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399