

Raccordement de développements asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes

Patrick Joly, Sébastien Tordeux

▶ **To cite this version:**

Patrick Joly, Sébastien Tordeux. Raccordement de développements asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes. Séminaire de Mathématiques et de Physique Appliquées, INSTN, CEA, 2005, Saclay, France. inria-00528071

HAL Id: inria-00528071

https://inria.hal.science/inria-00528071

Submitted on 21 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Raccordement de développements asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes

Patrick Joly et Sébastien Tordeux

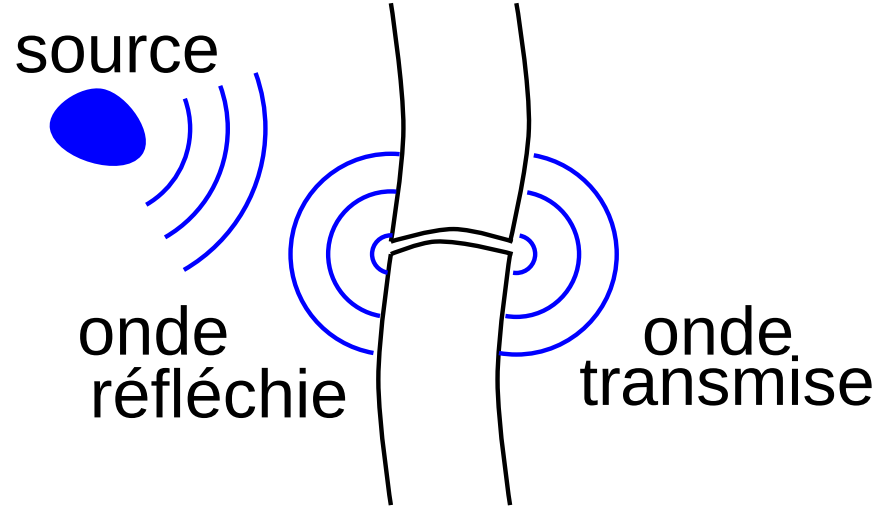
INSTN Séminaire de Mathématiques et de Physique Appliquées, Saclay, février 2005

Projet POems-INRIA-Rocquencourt

SAM-ETH Zürich

Une application typique

Comment peut-on étudier la diffraction des ondes dans les milieux incluant des fentes minces ?

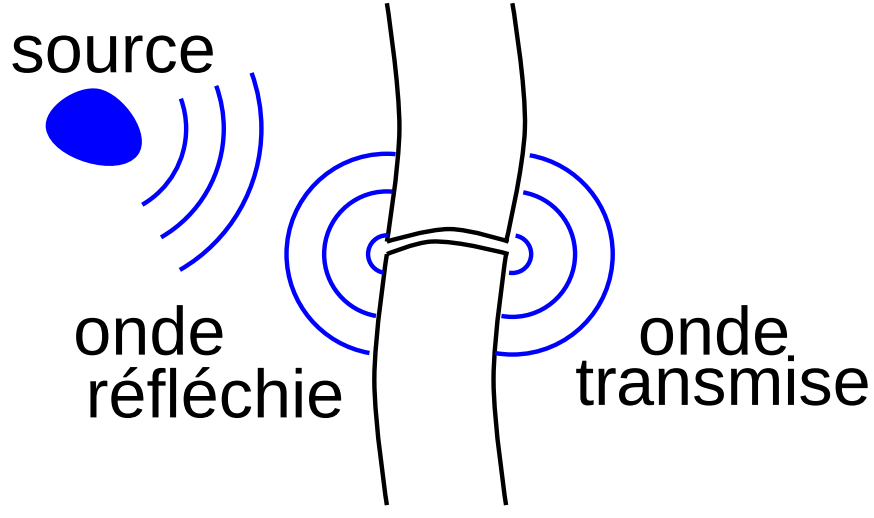


Un problème physique avec deux longueurs caractéristiques

- La longueur d'onde λ
- La largeur de la fente ε

Une application typique

Comment peut-on étudier la diffraction des ondes dans les milieux incluant des fentes minces ?

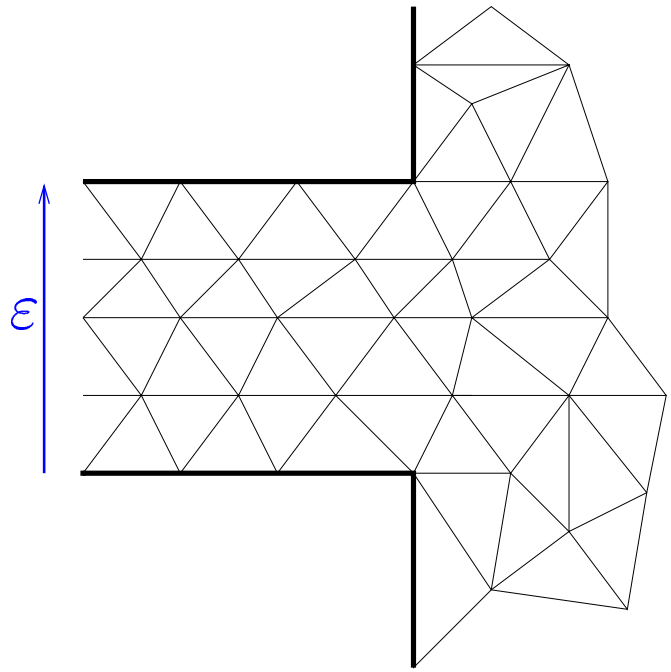


Une situation asymptotique:

$$\varepsilon \ll \lambda$$

La difficulté numérique

Un pas de maillage plus petit que ε



Ceci amène à des calculs coûteux

Quelques références

- Fentes minces:

  Harrington, Auckland (1980), Tatout (1996).

- Différences finies:

  Taflove (1995).

- Théorie des plaques, théorie des jonctions,...

  Ciarlet, Le Dret, Dauge-Costabel.

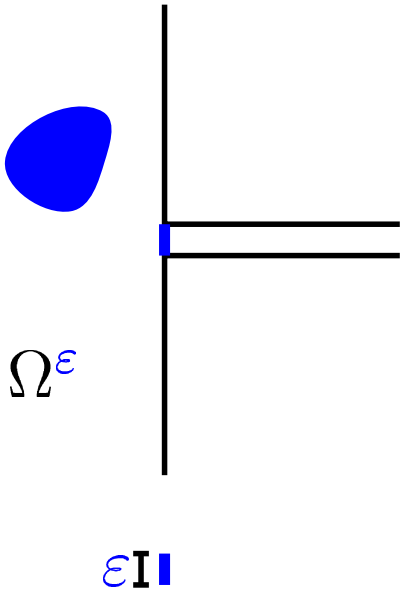
- Développements asymptotiques raccordés:

  McIver, Rawlins (1993), Il'in (1992).

- Techniques multi-échelles

  Maz'ya, Nazarov, Plamenevskii (1991)
  Oleinik, Shamaev, Yosifian (1992)

Un problème simple



Equation des ondes scalaires :

$$\frac{\partial^2 p^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta p^\varepsilon = f$$

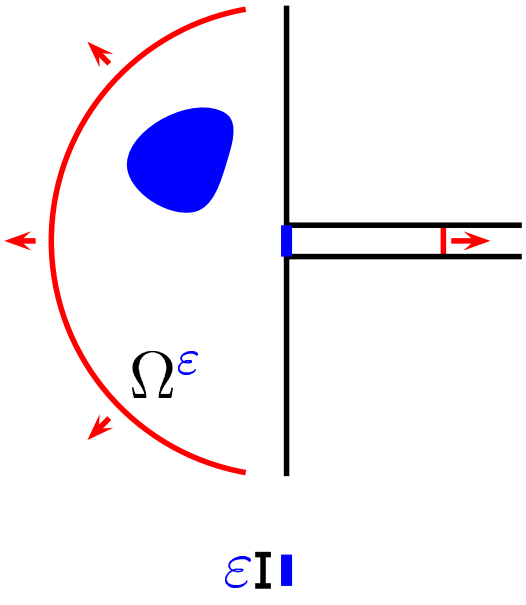
Régime harmonique:

$$p^\varepsilon(x, y, t) = exp(-i\omega t)\ u^\varepsilon(x, y)$$

Equation de Helmholtz :

$$\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f \quad \text{in } \Omega^\varepsilon$$

Un problème simple



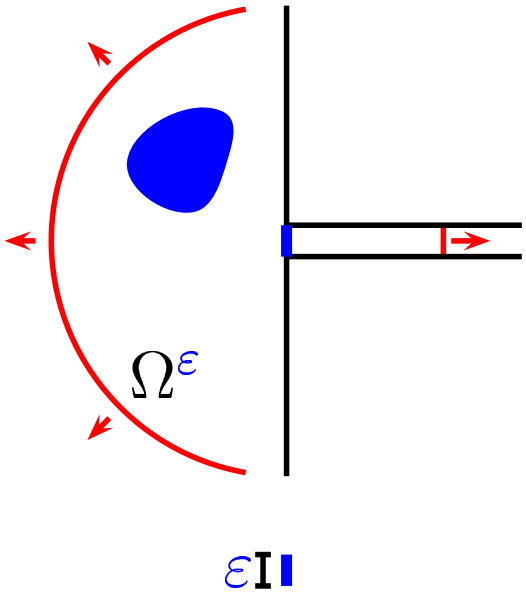
Solution sortante à l'infini:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - i\omega u^\varepsilon \leq \frac{C}{r^2}, \qquad \text{pour } r \text{ grand,}$$

Condition aux limites de Neumann (mur rigide)

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon$$

Un problème simple



Solution sortante à l'infini:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - i\omega u^\varepsilon \leq \frac{C}{r^2}, \qquad \text{pour } r \text{ grand,}$$

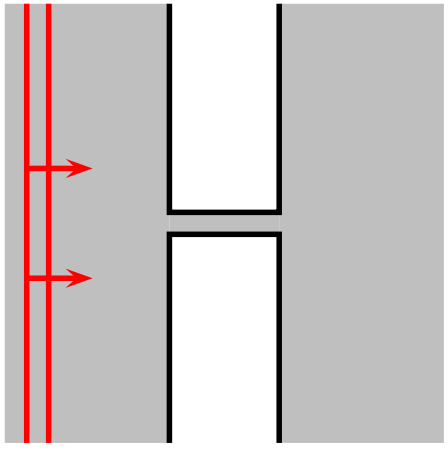
Condition aux limites de Neumann (mur rigide)

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon$$

Avec la condition aux limites de Dirichlet, la transmission dans la fente est négligeable ($o(\varepsilon^\infty)$).

Une simulation numérique

Neumann

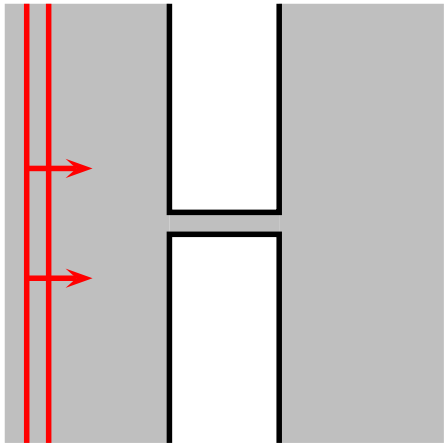


Dirichlet

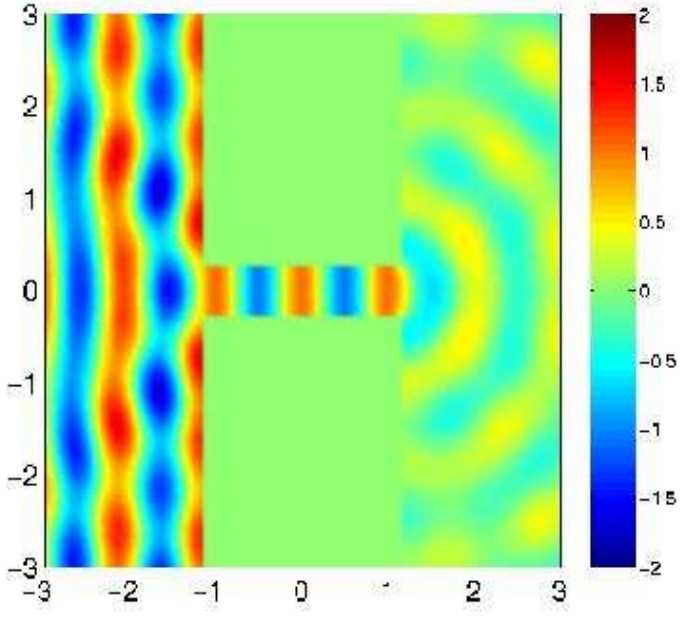
Simulation numérique effectuée avec le code éléments finis d'ordre élevé (M. Duruflé, INRIA)

Une simulation numérique

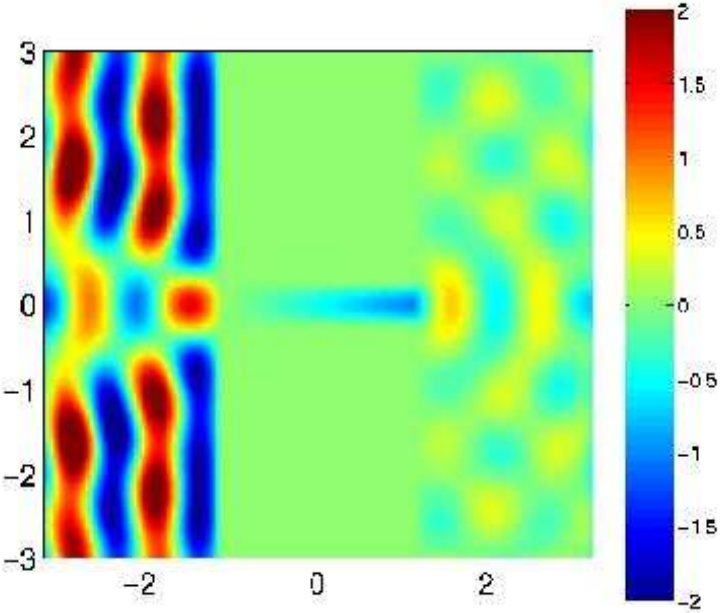
Neumann



Dirichlet

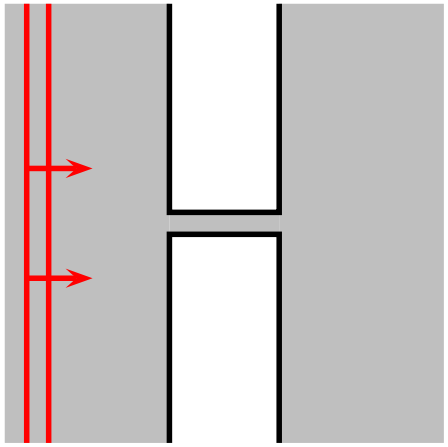


$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = 0.5$$

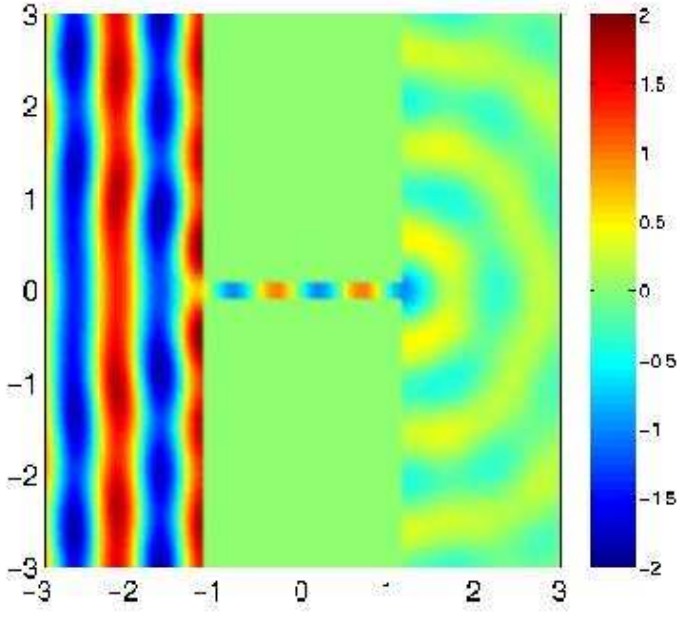


Une simulation numérique

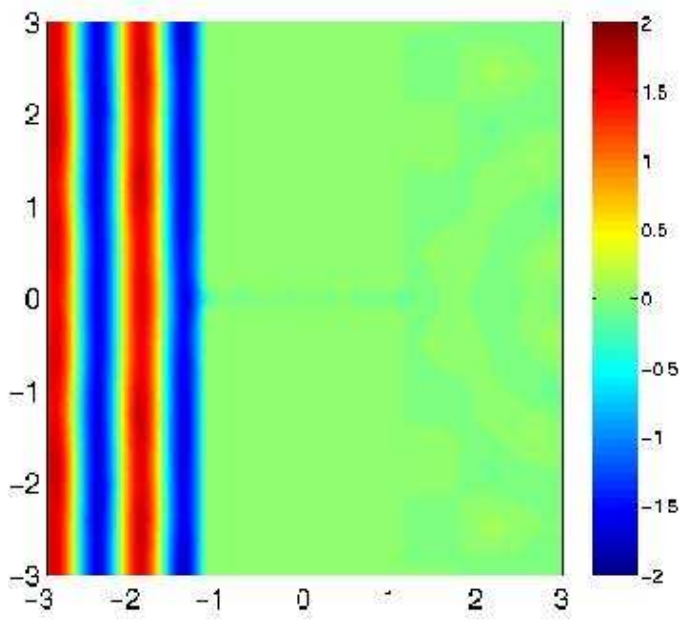
Neumann



Dirichlet

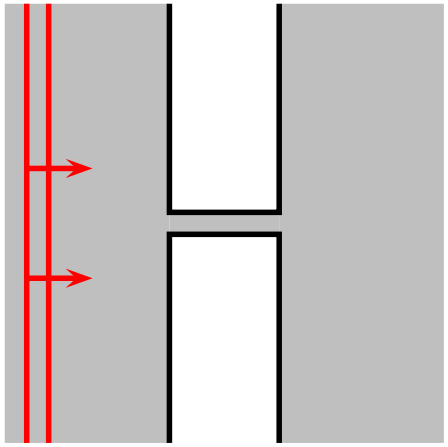


$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = 0.2$$

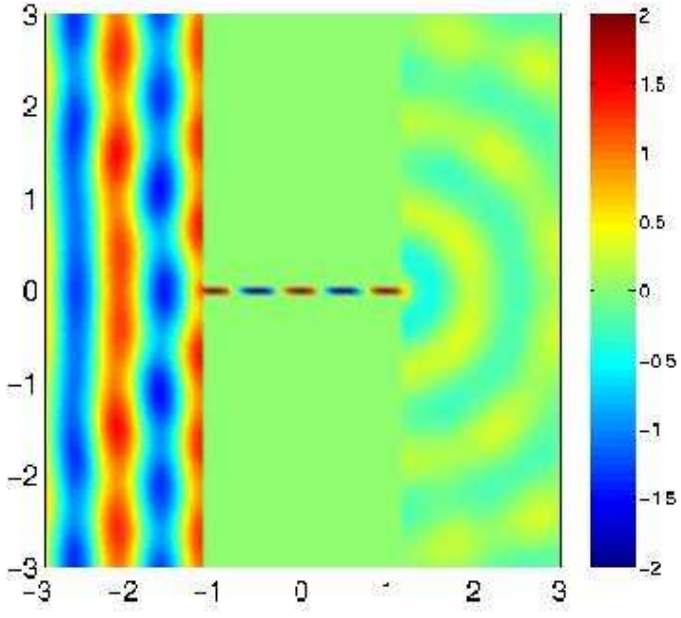


Une simulation numérique

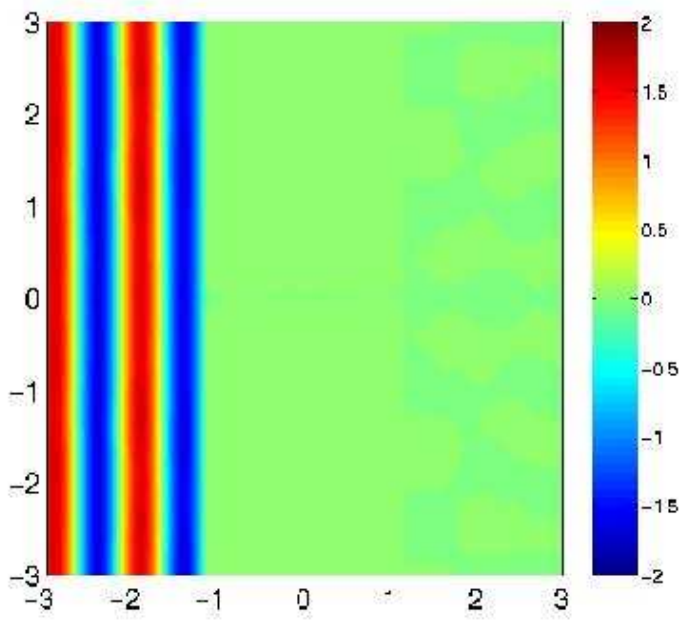
Neumann



Dirichlet



$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = 0.1$$

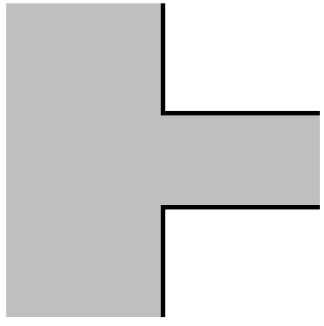


Objectifs

- Développer des méthodes de calcul précises

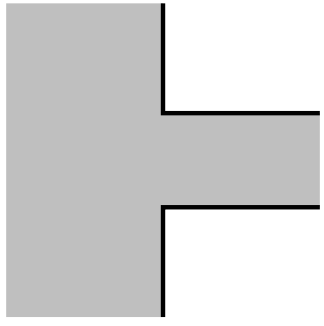
Objectifs

- Développer des méthodes de calcul précises
- Introduction d'une zone de transition



Objectifs

- Développer des méthodes de calcul précises
- Introduction d'une zone de transition



- Une technique appropriée: les développements asymptotiques raccordés
- Définir de nouveaux modèles approchés permettant de calculer la solution.
- Maîtriser l'utilisation de techniques "universelles" de calcul numérique (raffinement de maillage).

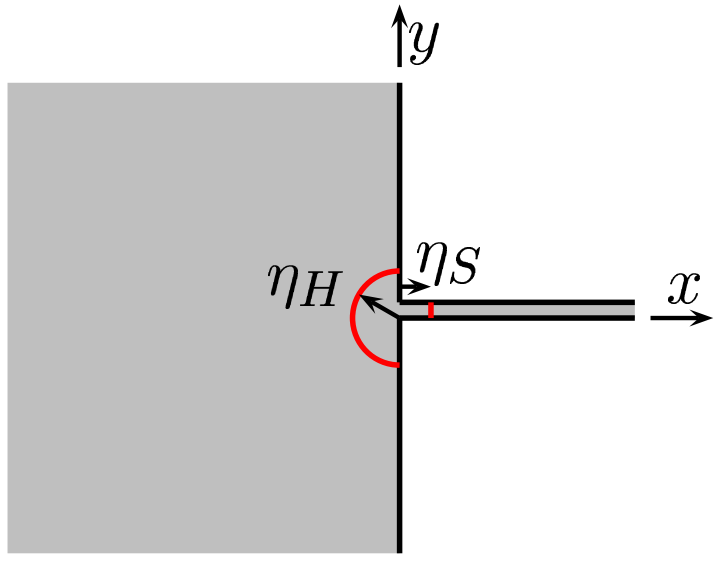
Apports aux rac. de dév. asympt.

- Reformuler les principes de raccord (pas toujours clairs) proposés par l'école anglo-saxonne.

Apports aux rac. de dév. asympt.

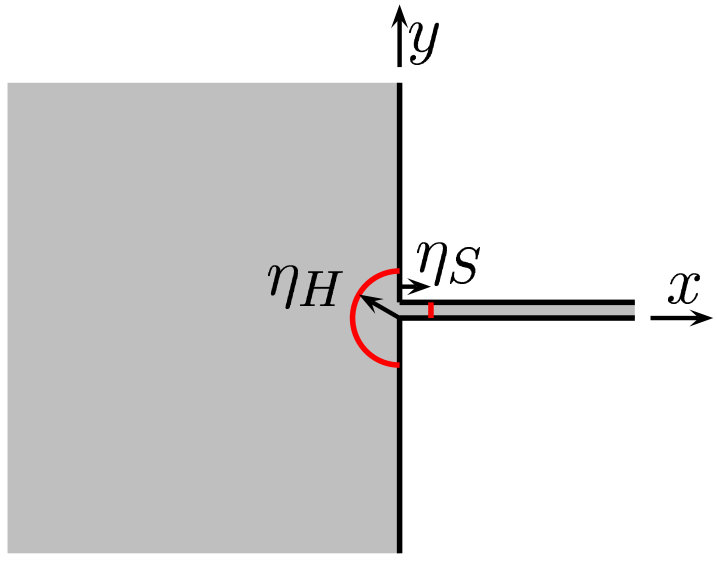
- Reformuler les principes de raccord (pas toujours clairs) proposés par l'école anglo-saxonne.
- Justification mathématique de cette technique.
  - Méthode inspirée des techniques multi-échelles
  - Existence et unicité des termes des développements asymptotiques.
  - Technique plus spécifique: estimations d'erreur.

Trois zones



- Champ lointain (champ 2D)
- Champ proche (couche limite)
- Champ de fente (champ 1D)

Trois zones

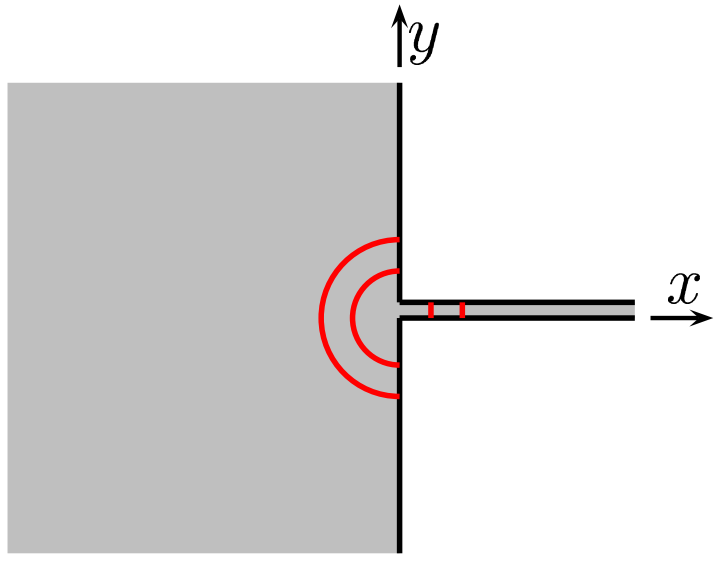


Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \qquad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \to 0 \qquad \eta(\varepsilon) \to 0 \qquad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \to +\infty$$

Trois zones

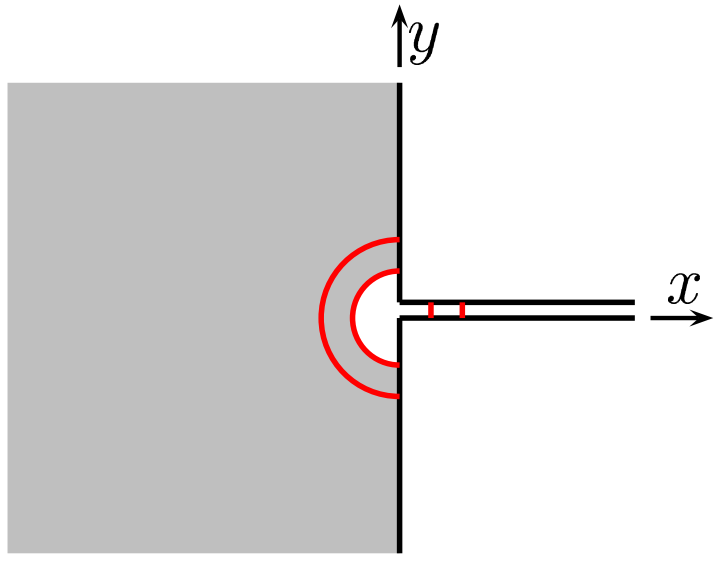


Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \qquad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \to 0 \qquad \eta(\varepsilon) \to 0 \qquad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \to +\infty$$

Trois zones



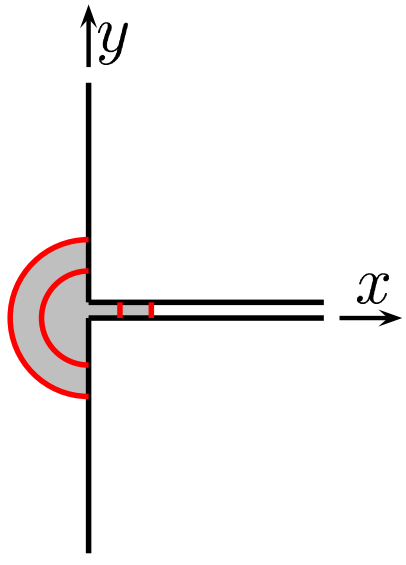
Champ lointain

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \qquad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \to 0 \qquad \eta(\varepsilon) \to 0 \qquad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \to +\infty$$

Trois zones



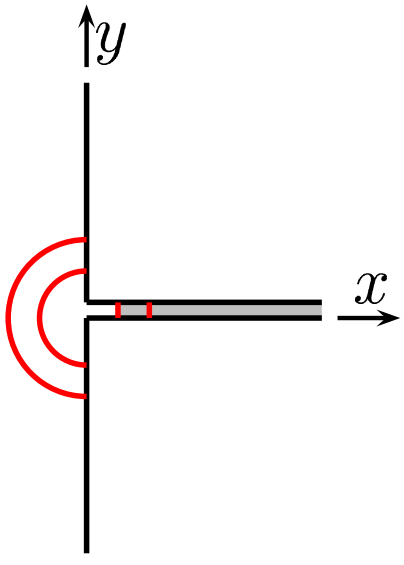
Champ proche

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \qquad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \to 0 \qquad \eta(\varepsilon) \to 0 \qquad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \to +\infty$$

Trois zones



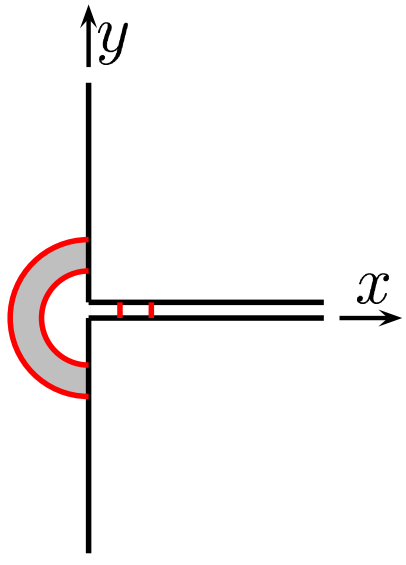
Champ de fente

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \qquad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \to 0 \qquad \eta(\varepsilon) \to 0 \qquad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \to +\infty$$

Trois zones



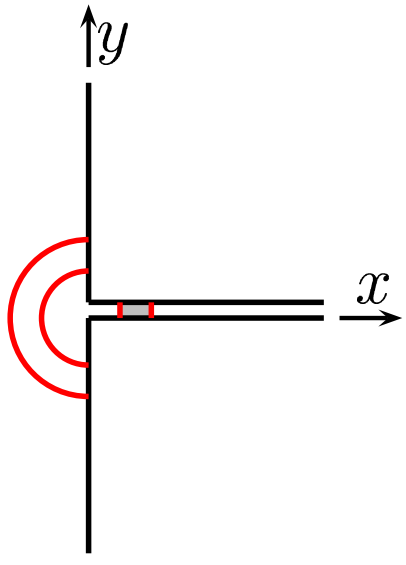
lointain et proche

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \qquad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \to 0 \qquad \eta(\varepsilon) \to 0 \qquad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \to +\infty$$

Trois zones



de fente et proche

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \qquad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \to 0 \qquad \eta(\varepsilon) \to 0 \qquad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \to +\infty$$

Les temps de la méthode

- Dérivation des développements asymptotiques:
  - Partie formelle
  - Plusieurs présentations possibles

Les temps de la méthode

- Dérivation des développements asymptotiques:
  - Partie formelle
  - Plusieurs présentations possibles
- Description des développements asymptotiques
  - Partie rigoureuse
  - Définition des termes de développements asymptotiques

Les temps de la méthode

- Dérivation des développements asymptotiques:
  - Partie formelle
  - Plusieurs présentations possibles
- Description des développements asymptotiques
  - Partie rigoureuse
  - Définition des termes de développements asymptotiques
- Validation mathématique du développement asymptotique
  - Partie rigoureuse
  - Estimations d'erreur

Les temps de la méthode

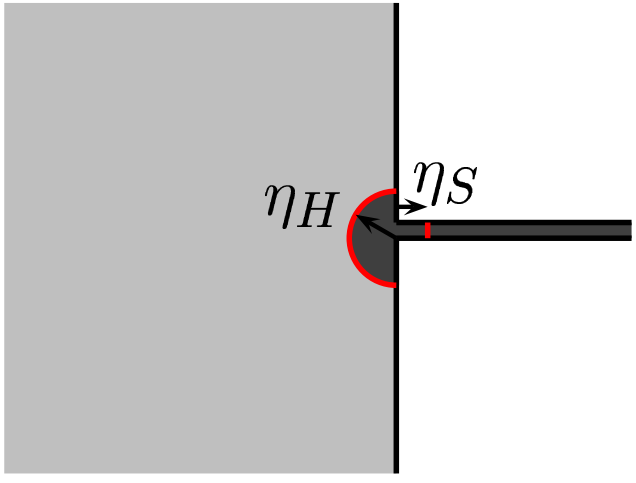
2 Dérivation des développements asymptotiques:
- Partie formelle
- Plusieurs présentations possibles

1 Description des développements asymptotiques
- Partie rigoureuse
- Définition des termes de développements asymptotiques

3 Validation mathématique du développement asymptotique
- Partie rigoureuse
- Estimations d'erreur

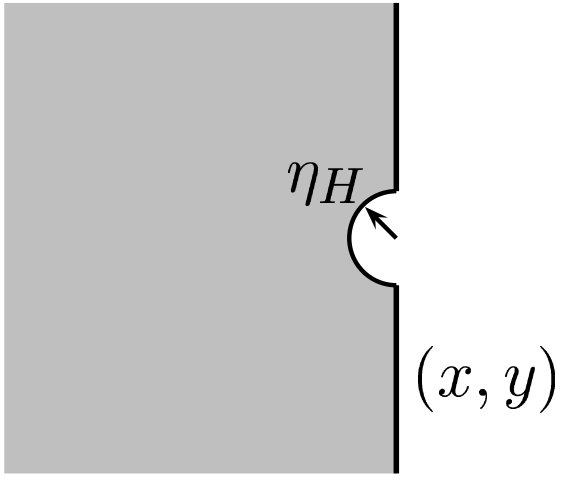
Champ lointain

Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$.



Champ lointain

Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$.

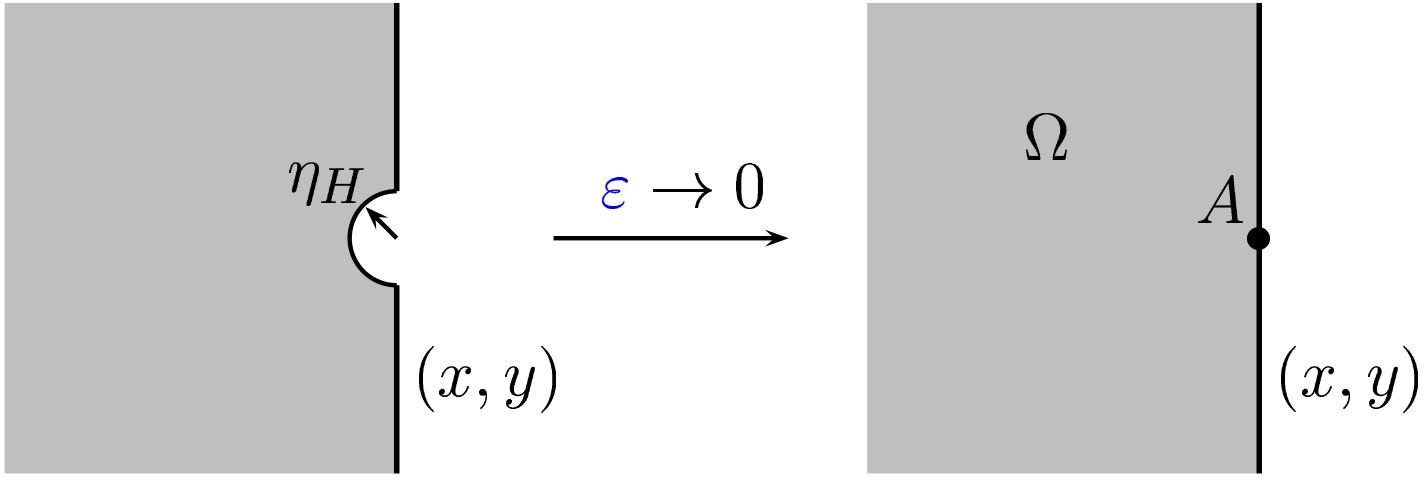


Pas de normalisation:

$$X = x, \qquad Y = y.$$

Champ lointain

Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$.

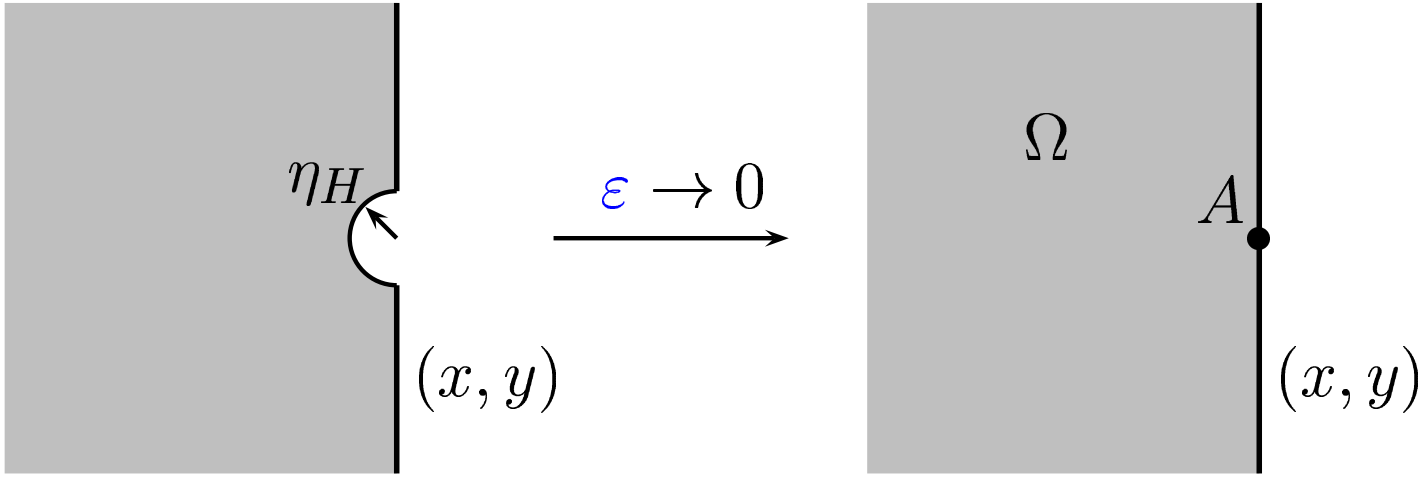


Pas de normalisation:

$$X = x, \qquad Y = y.$$

Champ lointain

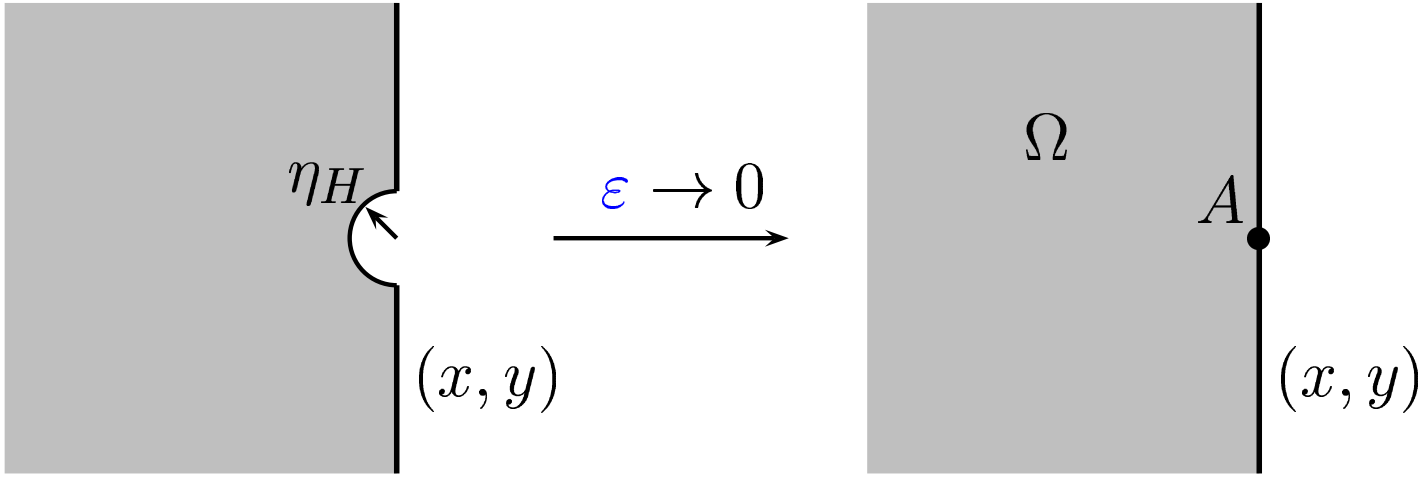
Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$.



$$u^\varepsilon = u^0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, u_i^k + o(\varepsilon^\infty), \qquad \text{dans } \Omega.$$

Champ lointain

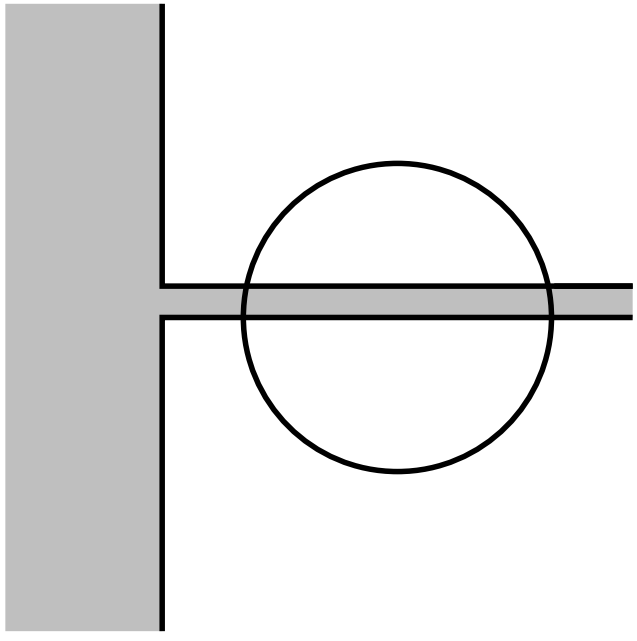
Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$.



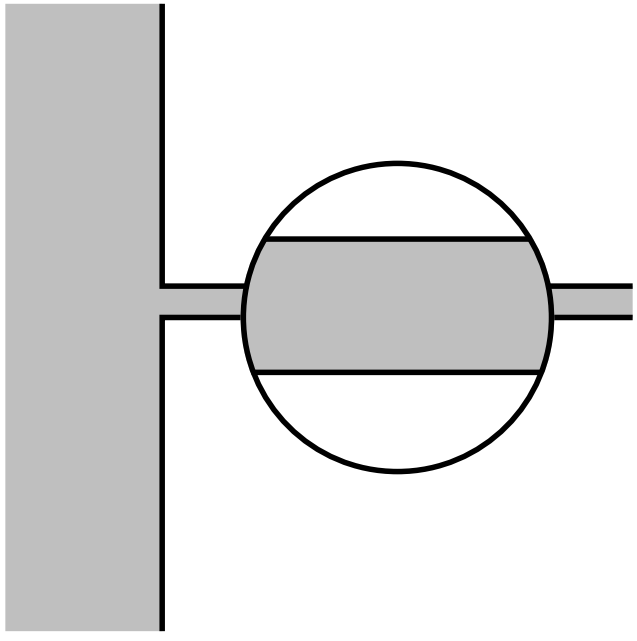
où les u_i^k vérifient l'équation de Helmholtz homogène

$$\Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k = 0.$$

Champ de fente

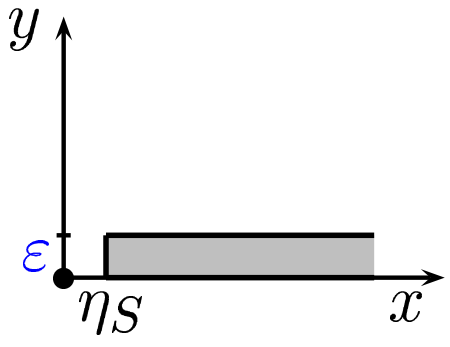


Champ de fente



$$u^\varepsilon(x,y) \;=\; U^\varepsilon(x,\frac{y}{\varepsilon})$$

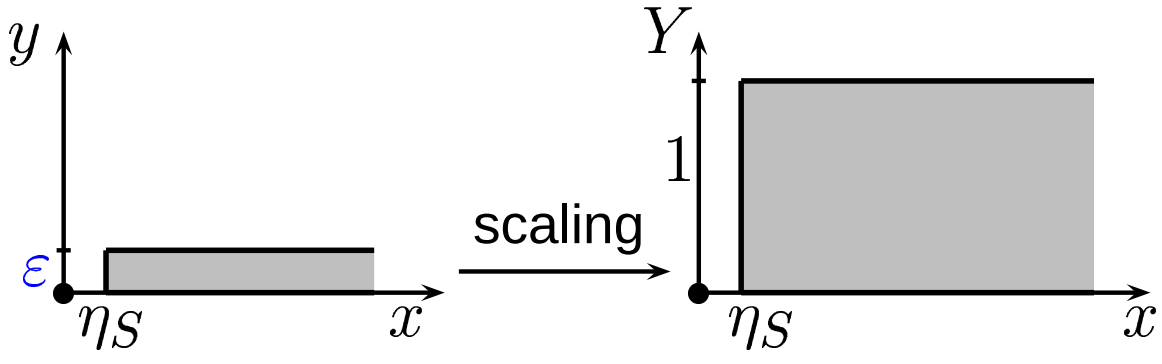
Champ de fente



Le contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda$.

La normalisation: $X = x, \quad Y = \dfrac{y}{\varepsilon}$

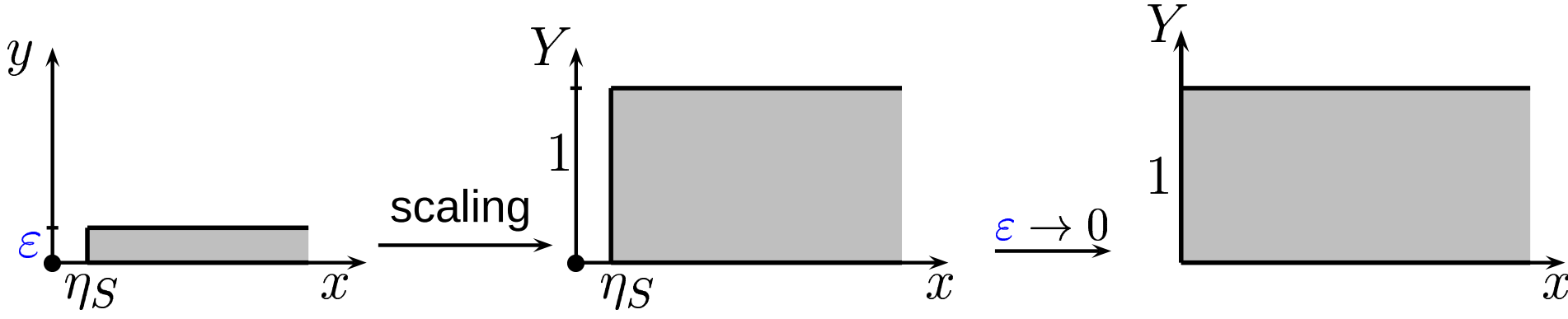
Champ de fente



Le contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda$.

La normalisation: $X = x, \quad Y = \dfrac{y}{\varepsilon}$

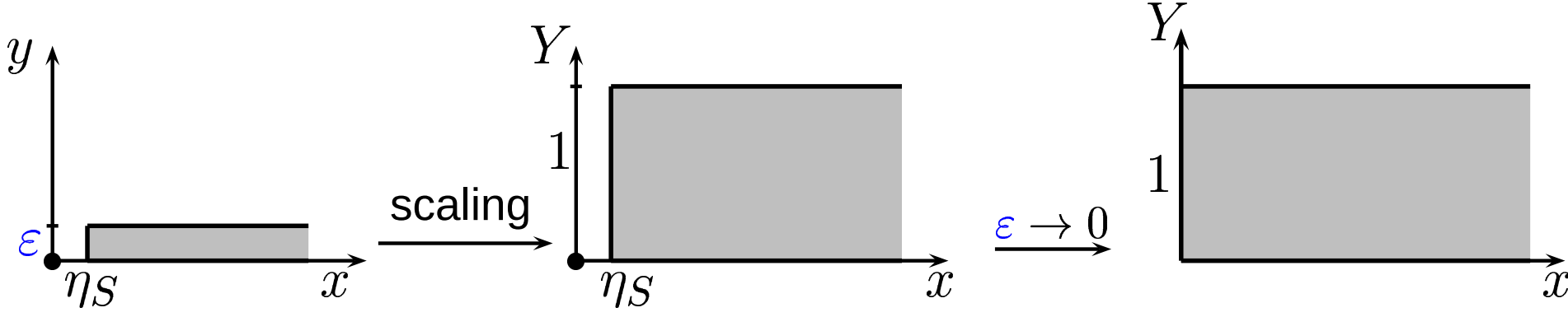
Champ de fente



Le contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda$.

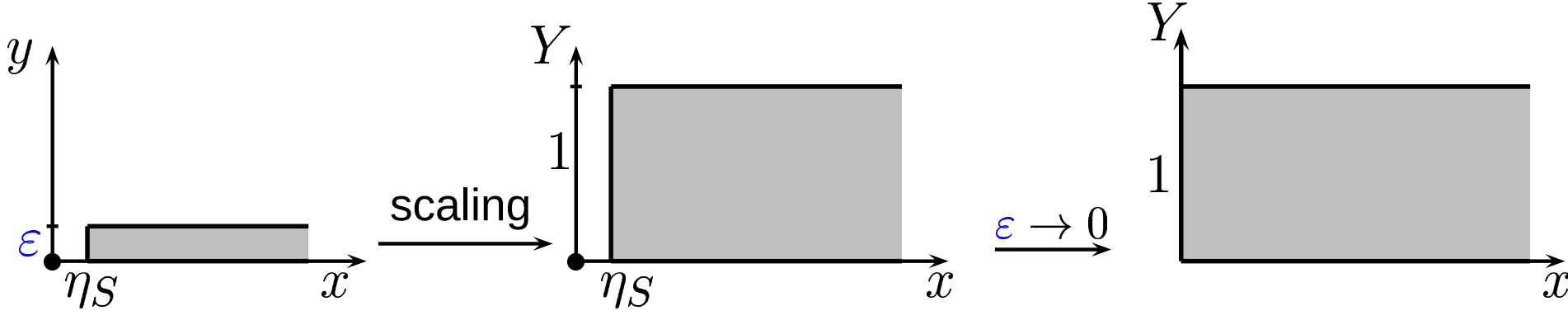
La normalisation: $X = x, \quad Y = \dfrac{y}{\varepsilon}$

Champ de fente



$$u^\varepsilon(x, Y\varepsilon) \;=\; U^\varepsilon(x, Y) \;=\; \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, U_i^k(x, Y) + o(\varepsilon^\infty),$$

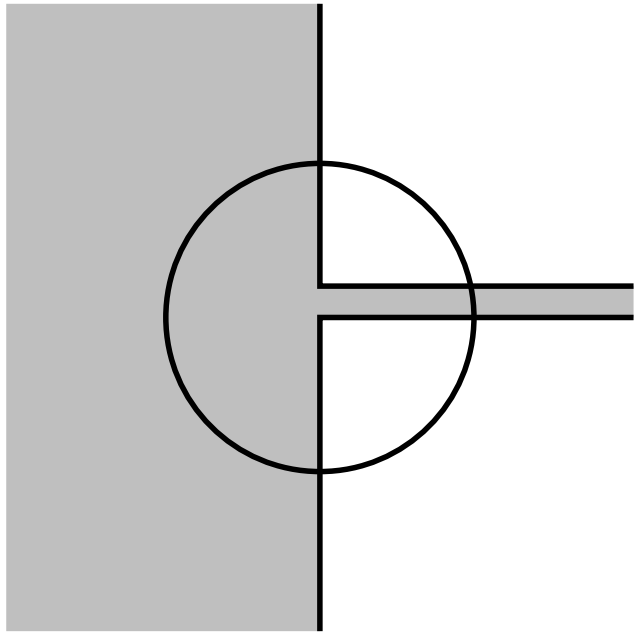
Champ de fente



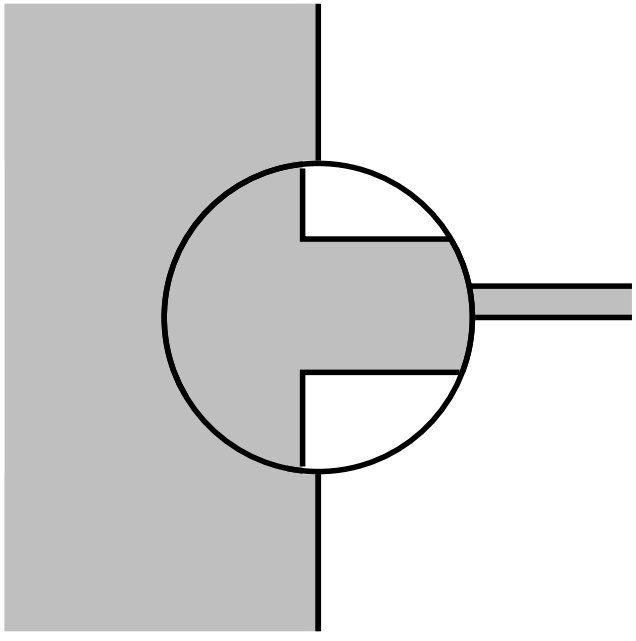
où les U_i^k vérifient l'équation de Helmholtz 1D:

$$\frac{d^2 U_i^k}{dx^2} + \omega^2 U_i^k = 0$$

Champ proche

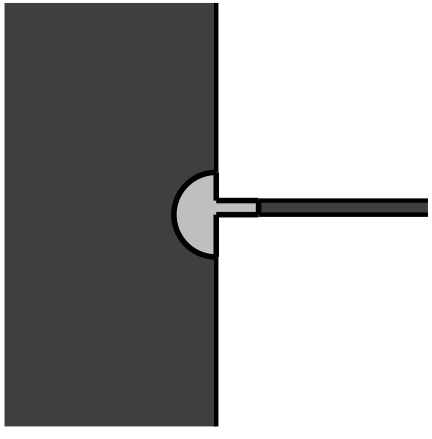


Champ proche



$$u^{\varepsilon}\,(x,y) = u_p^{\varepsilon}\,(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})$$

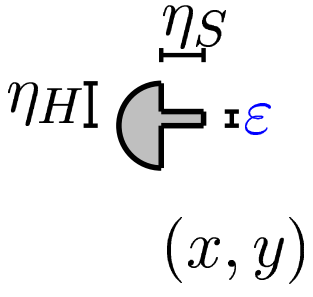
Champ proche



Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda.$

La normalisation: $X = \dfrac{x}{\varepsilon}, \quad Y = \dfrac{y}{\varepsilon}$

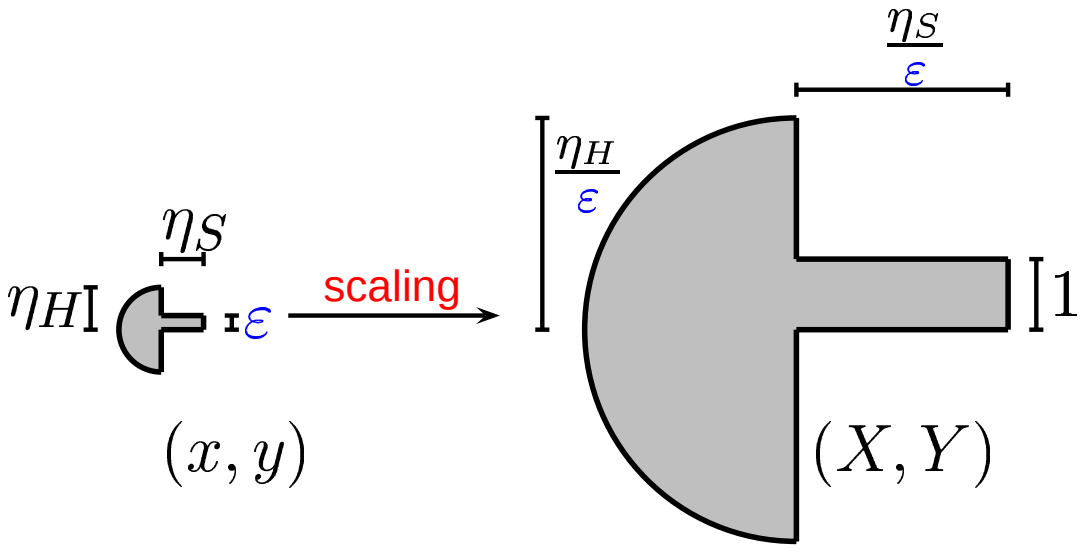
Champ proche



Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda.$

La normalisation: $X = \dfrac{x}{\varepsilon}, \quad Y = \dfrac{y}{\varepsilon}$

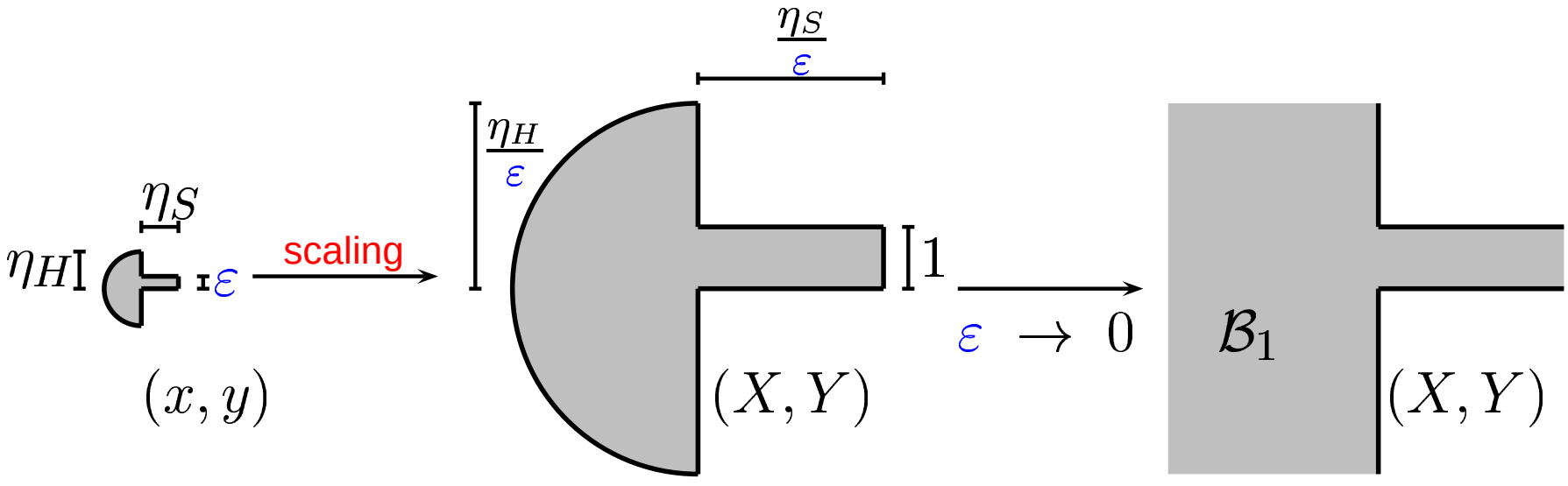
Champ proche



Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda.$

La normalisation: $X = \dfrac{x}{\varepsilon}, \quad Y = \dfrac{y}{\varepsilon}$

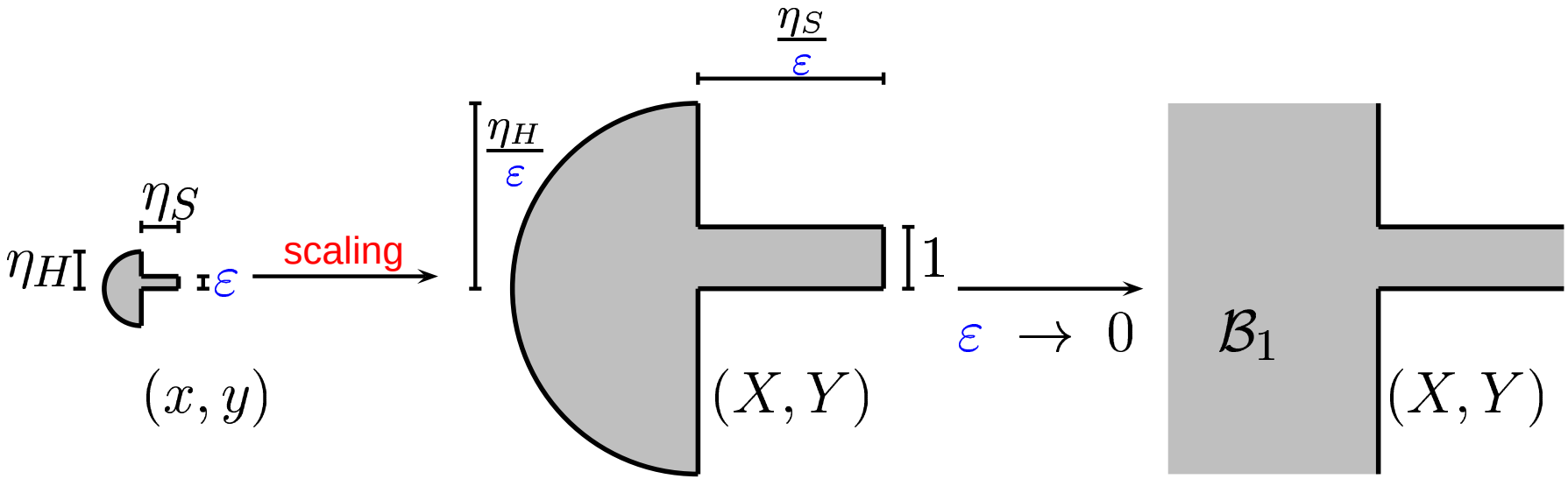
Champ proche



Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda.$

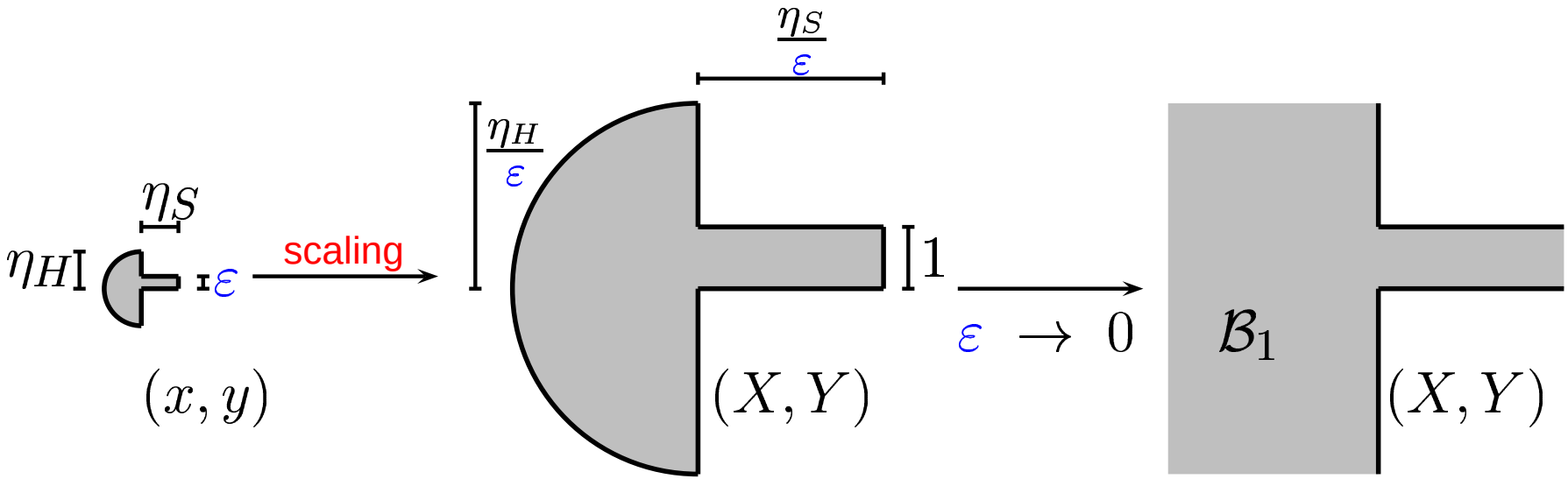
La normalisation: $X = \dfrac{x}{\varepsilon}, \quad Y = \dfrac{y}{\varepsilon}$

Champ proche



$$u^\varepsilon(\varepsilon X, \varepsilon Y) = u_p^\varepsilon(X, Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k \, (u_p)_i^k(X, Y) + o(\varepsilon^\infty)$$

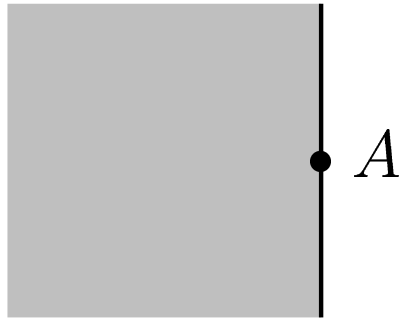
Champ proche



où les $(u_p)_i^k$ vérifient l'équation de Laplace (in)homogène.

$$\begin{cases} \Delta(u_p)_i^k = 0, & \text{si } i = k \text{ ou } k+1, \\ \Delta(u_p)_i^k = -\omega^2 (u_p)_{i-2}^k, & \text{sinon.} \end{cases}$$

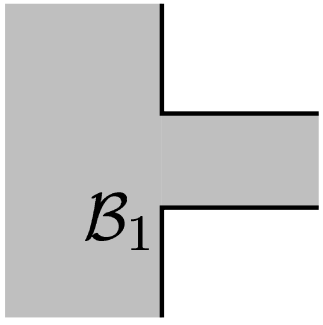
Ordre 0 : $\underline{u^0}$, $(u_p)_0^0$, U_0^0



Champ lointain:

$$\begin{cases} \text{Chercher } u^0 \in H^1_{loc}(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\Delta u^0 - \omega^2 u^0 = f, & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ u^0 \text{ est sortante.} \end{cases}$$

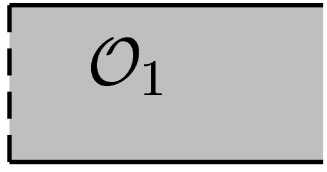
Ordre 0 : u^0, $\underline{(u_p)_0^0}$, U_0^0



Champ proche:

$$(u_p)_0^0\,(X,Y) \;=\; u^0(A), \qquad \text{dans } \mathcal{B}_1.$$

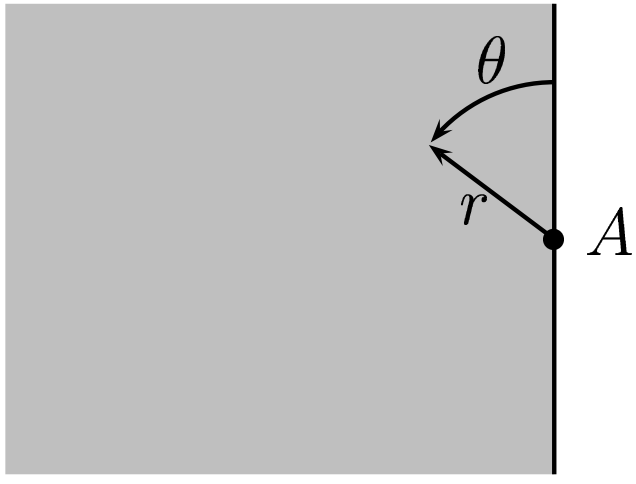
Ordre 0 : u^0, $(u_p)_0^0$, $\underline{U_0^0}$



Champ de fente:

$$U_0^0(x,Y) \;=\; u^0(A)\,\exp(i\omega\, x), \qquad \text{dans } \mathcal{O}_1.$$

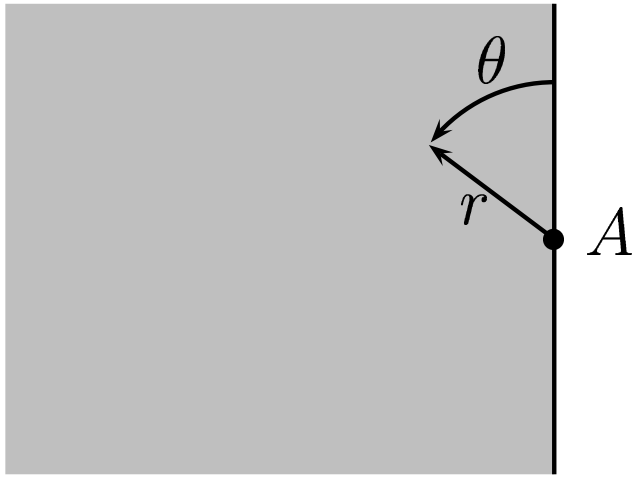
Ordre 1 : $\underline{u_1^0}$, $(u_p)_1^0$, $(u_p)_1^1$, U_1^0, U_1^1



Approximation de la solution exacte :

$$u^\varepsilon \simeq u^0 + \varepsilon\, u_1^0$$

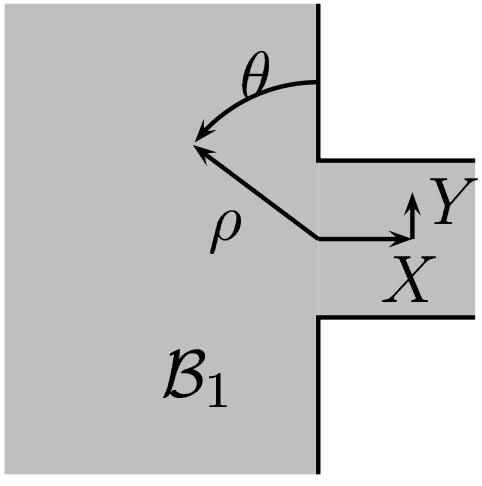
Ordre 1 : $\underline{u_1^0}$, $(u_p)_1^0$, $(u_p)_1^1$, U_1^0, U_1^1



Forme explicite de u_1^0

$$u_1^0(r,\theta) \;=\; -\,\frac{\omega}{2}\,u^0(A)\;H_0^{(1)}(\omega r).$$

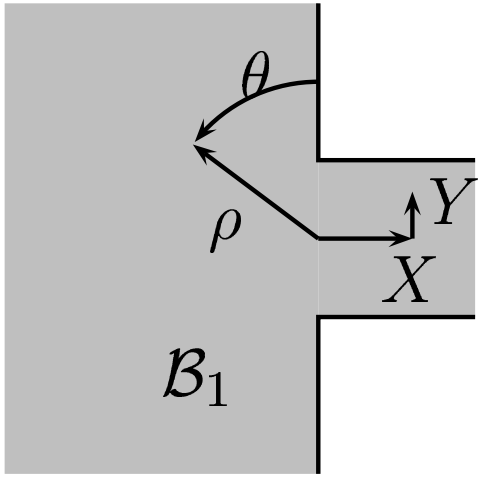
Ordre 1 : u_1^0, $\underline{(u_p)_1^0}$, $\underline{(u_p)_1^1}$, U_1^0, U_1^1



Approximation de la solution exacte :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(\varepsilon X, \varepsilon Y) \;=\; u_p^\varepsilon(X,Y), \\ u_p^\varepsilon \simeq (u_p)_0^0 \;+\; \varepsilon\,(u_p)_1^0 \;+\; \varepsilon\,\log\varepsilon\,(u_p)_1^1. \end{cases}$$

Ordre 1 : u_1^0, $(u_p)_1^0$, $(u_p)_1^1$, U_1^0, U_1^1

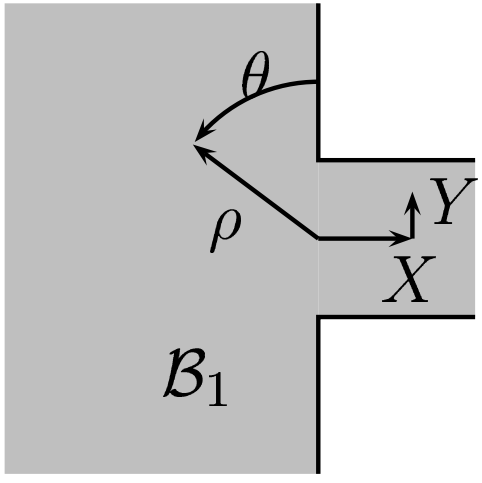


Champ proche :

Chercher $(u_p)_1^0 \in H^1_{loc}(\mathcal{B}_1)$ tel que:

$$\begin{cases} \Delta(u_p)_1^0 = 0, & \text{dans } \mathcal{B}_1 \\ \dfrac{\partial(u_p)_1^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{B}_1. \end{cases}$$

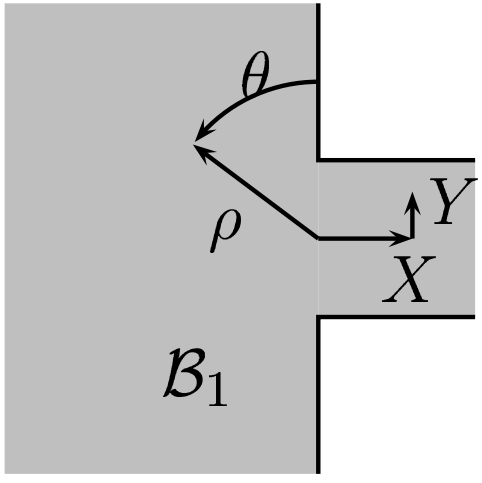
Ordre 1 : u_1^0, $(u_p)_1^0$, $(u_p)_1^1$, U_1^0, U_1^1



Le comportement à l'infini dans le demi-espace:

$$(u_p)_1^0(\rho,\theta) - \frac{\partial u^0}{\partial y}(A)\ \rho\ \cos\theta\ +\ \frac{\omega}{2}\ u^0(A)\ \Big[1+\frac{2\mathbf{i}}{\pi}\big(\log\rho+\gamma\big)\Big]\ =\ O(\frac{1}{\rho}).$$

Ordre 1 : u_1^0, $(u_p)_1^0$, $(u_p)_1^1$, U_1^0, U_1^1



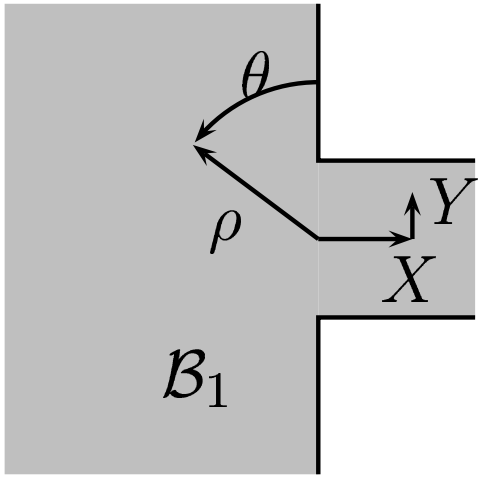
Le comportement à l'infini dans le demi-espace:

$$(u_p)_1^0(\rho,\theta) - \frac{\partial u^0}{\partial y}(A)\ \rho\ \cos\theta\ +\ \frac{\omega}{2}\ u^0(A)\ \Big[1+\frac{2\mathbf{i}}{\pi}\big(\log\rho+\gamma\big)\Big]\ =\ O(\frac{1}{\rho}).$$

Le comportement à l'infini dans la fente:

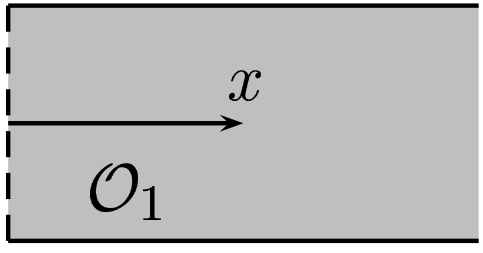
$$(u_p)_1^0\ (X,Y)\ -\ i\,\omega\ u^0(A)\ X\ =\ O(1).$$

Ordre 1 : u_1^0, $(u_p)_1^0$, $\underline{(u_p)_1^1}$, U_1^0, U_1^1



$$(u_p)_1^1 \;=\; -\frac{i\omega}{\pi}\, u^0(A)$$

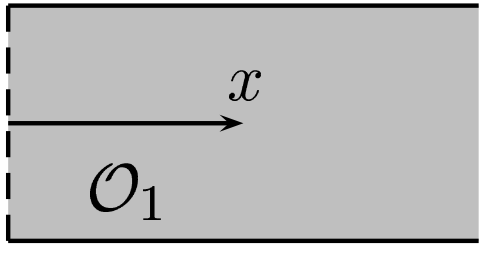
Ordre 1 : u_1^0, $(u_p)_1^0$, $(u_p)_1^1$, $\underline{U_1^0}$, $\underline{U_1^1}$



Approximation de la solution exacte :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x,\varepsilon Y) \;=\; U^\varepsilon(x,Y), \\ U^\varepsilon \;\simeq\; U_0^0 \;+\; \varepsilon\, U_1^0 \;+\; \varepsilon\, \log\varepsilon\, U_1^1. \end{cases}$$

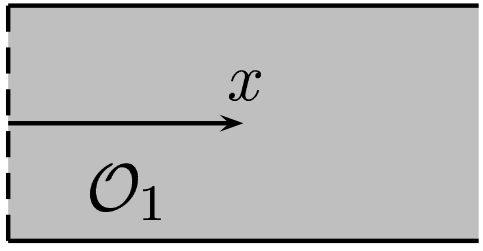
Ordre 1 : u_1^0, $(u_p)_1^0$, $(u_p)_1^1$, $\underline{U_1^0}$, U_1^1



Le champ de fente:

$$U_1^0(x) \;=\; \int_0^1 \mathcal{U}_1^0(0,Y)\; dY \;\; \exp\left(i\omega x\right),$$

Ordre 1 : u_1^0, $(u_p)_1^0$, $(u_p)_1^1$, U_1^0, $\underline{U_1^1}$

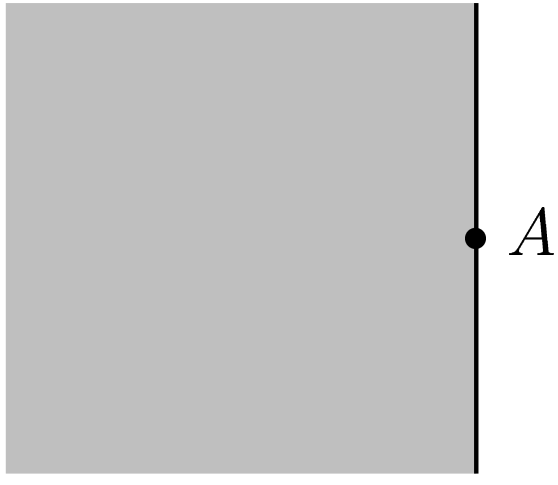


Le champ de fente:

$$U_1^1(x) \;=\; -\frac{i\omega}{\pi}\, u^0(A)\;\exp\left(i\omega x\right).$$

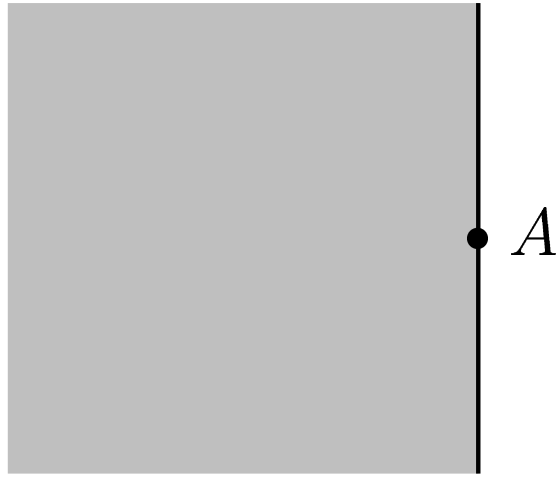
Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs u_i^k sont définis dans tout le demi-espace:



Les champs lointains d'ordre $i > 1$

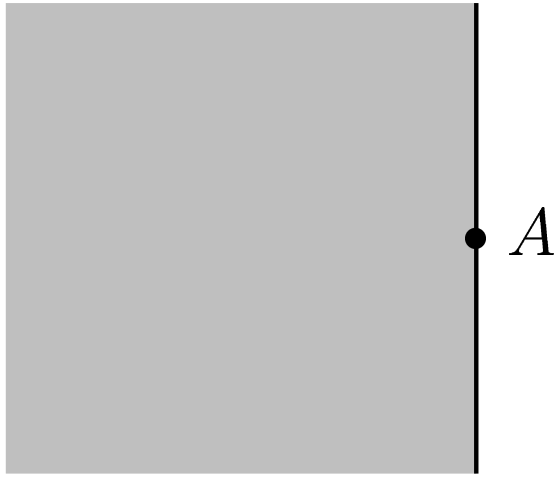
- Les champs u_i^k sont définis dans tout le demi-espace:



- Les champs lointains u_i^k
  - vérifient l'équation de Helmholtz homogène
  - sont singuliers au voisinage de l'origine
  - sont sortants à l'infini

Les champs lointains d'ordre $i > 1$

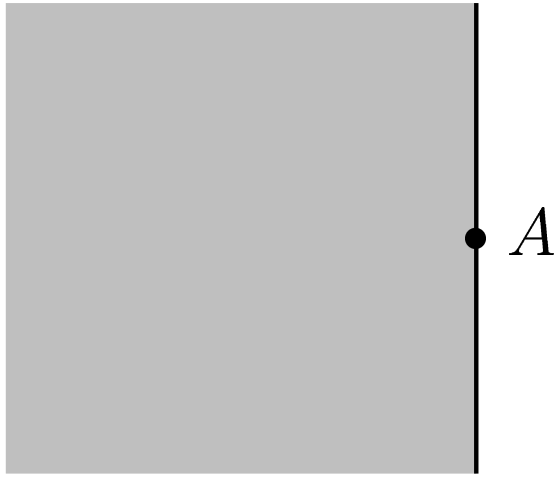
- Les champs u_i^k sont définis dans tout le demi-espace:



- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \; H_p^{(1)}(\omega r) \; \cos p\theta$$

Les champs lointains d'ordre $i > 1$

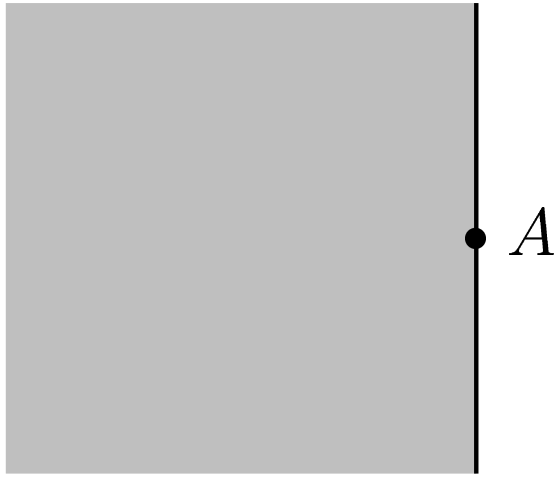
- Les champs u_i^k sont définis dans tout le demi-espace:



- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p \, H_p^{(1)}(\omega r) \, \cos p\theta$$

Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs u_i^k sont définis dans tout le demi-espace:



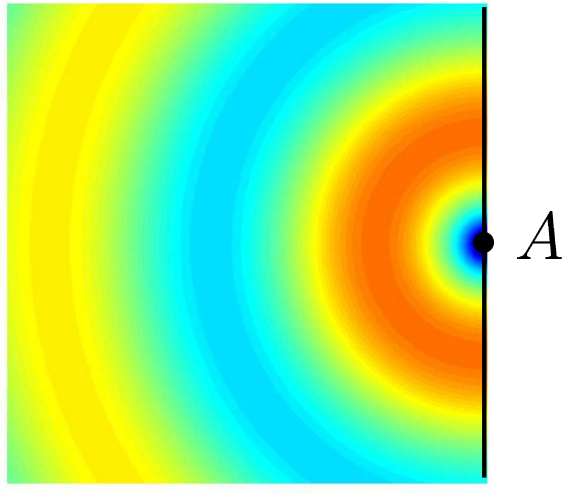
- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p \, H_p^{(1)}(\omega r) \, \cos p\theta$$

Les a_p sont fonctions des termes d'ordre inférieur

Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs u_i^k sont définis dans tout le demi-espace:

$\mathrm{Im}(H_0^{(1)}(\omega r))$



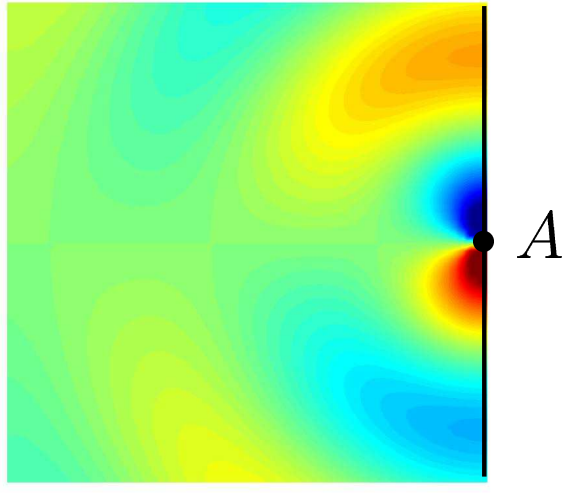
- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p \, H_p^{(1)}(\omega r) \, \cos p\theta$$

Les a_p sont fonctions des termes d'ordre inférieur

Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs u_i^k sont définis dans tout le demi-espace:

$\mathrm{Im}(H_1^{(1)}(\omega r)\ \cos\theta)$

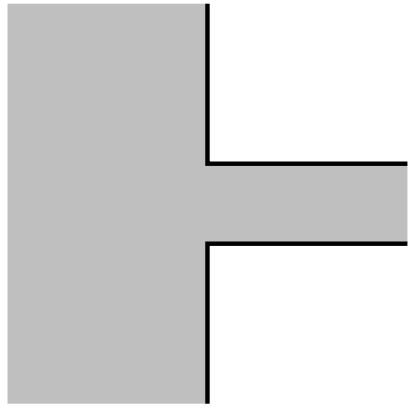


- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p\ H_p^{(1)}(\omega r)\ \cos p\theta$$

Les a_p sont fonctions des termes d'ordre inférieur

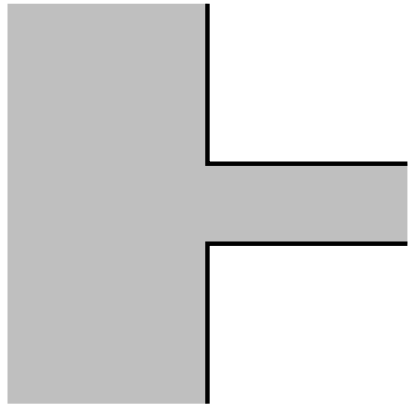
Les champs proches d'ordre $i > 1$

- Les $(u_p)_i^k(X, Y)$ sont définis sur le domaine canonique:



Les champs proches d'ordre $i > 1$

- Les $(u_p)_i^k(X,Y)$ sont définis sur le domaine canonique:



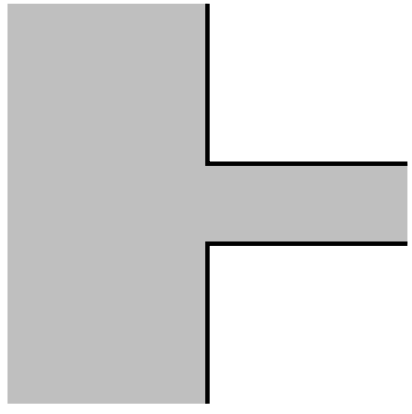
- par des équations de Laplace:

$$\Delta(u_p)_i^k = 0, \qquad (i = k \text{ ou } k+1),$$

$$\Delta(u_p)_i^k = -\omega^2\,(u_p)_{i-2}^k, \qquad (i \geqslant k+2),$$

Les champs proches d'ordre $i > 1$

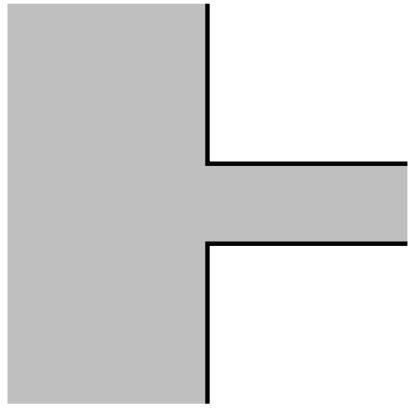
- Les $(u_p)_i^k(X, Y)$ sont définis sur le domaine canonique:



- par des équations de Laplace:
- par des croissances polynomiales à l'infini:
  - Les croissances dans le demi-espace sont fonctions des champs lointains d'ordre inférieur ou égal
  - Les croissances dans la fente sont fonctions des champs de fente d'ordre inférieur

Les champs proches d'ordre $i > 1$

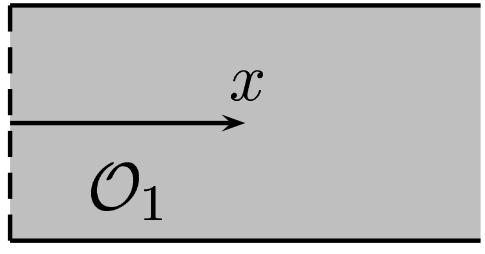
- Les $(u_p)_i^k(X, Y)$ sont définis sur le domaine canonique:



- Preuve de l'existence-unicité:
  - Avec des fonctions de troncature, on retire le comportement croissant à l'infini des $(u_p)_i^k$
  - On utilise la théorie variationnelle "classique" (espace de Sobolev à poids, Leroux, Hardy,...)

Les champs de fente d'ordre $i > 1$

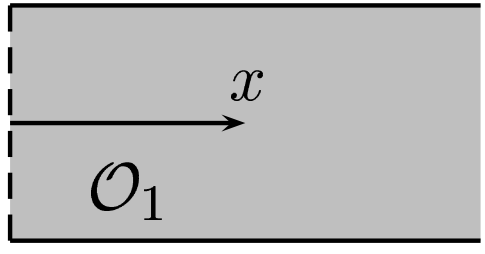
- Les U_i^k sont définis sur le domaine canonique:



- $U_i^k(x) = \int_0^1 (u_p)_i^k(0,Y)dY \ \exp i\omega x$

Les champs de fente d'ordre $i > 1$

- Les U_i^k sont définis sur le domaine canonique:



- Les U_i^k ne dépendent que de x.
- $U_i^k(x) \;=\; \displaystyle\int_0^1 (u_p)_i^k(0,Y)dY \;\; \exp i\omega x$

Quelques propriétés

On observe que:

- Plus $i-k$ est grand plus u_i^k est singulier à l'origine:

$$\text{Termes en } r^{-p}, \quad p = 0, ..., i-k-1$$

Quelques propriétés

On observe que:

- Plus $i-k$ est grand plus u_i^k est singulier à l'origine:

$$\text{Termes en } r^{-p}, \quad p=0,...,i-k-1$$

- Plus $i-k$ est grand plus $(u_p)_i^k$ est croissant:

$$\begin{cases} \text{Termes en } \rho^p, & p=0,...,i-k, \\ \text{Termes en } X^p, & p=0,...,i-k, \end{cases}$$

Quelques propriétés

On observe que:

- Plus $i-k$ est grand plus u_i^k est singulier à l'origine:

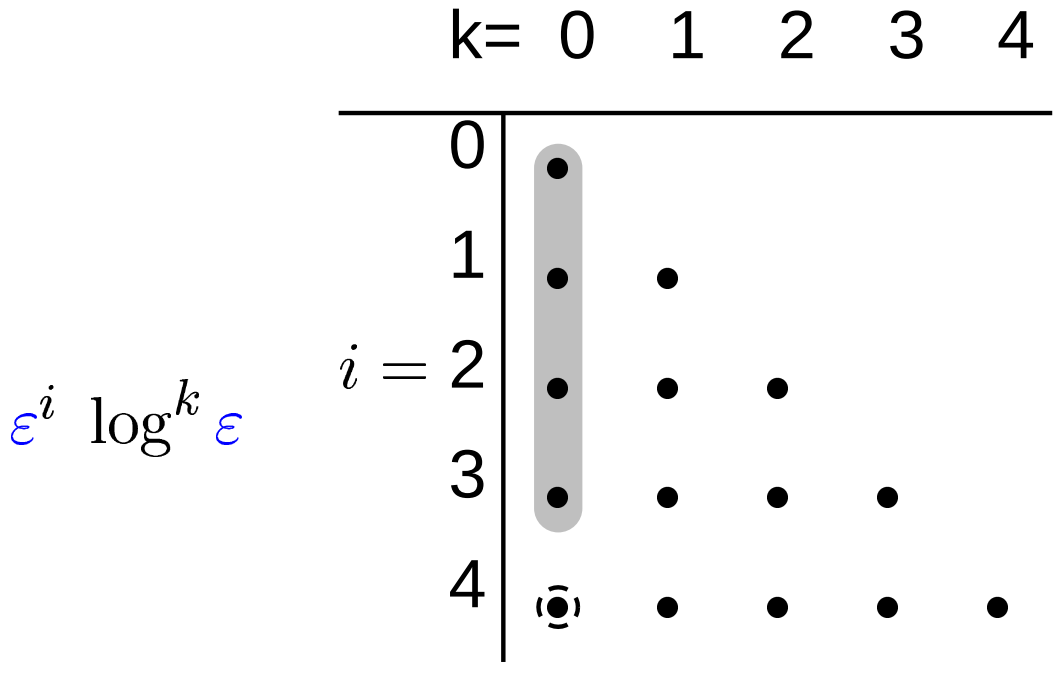
$$\text{Termes en } r^{-p}, \quad p=0,...,i-k-1$$

- Plus $i-k$ est grand plus $(u_p)_i^k$ est croissant:

$$\begin{cases} \text{Termes en } \rho^p, & p=0,...,i-k, \\ \text{Termes en } X^p, & p=0,...,i-k, \end{cases}$$

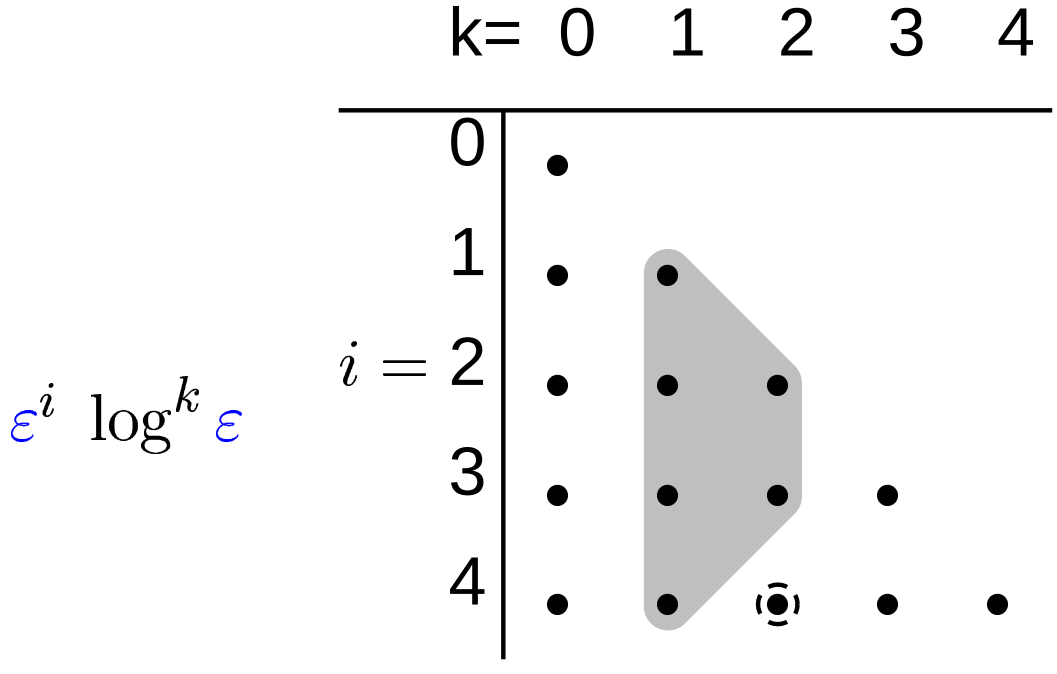
- Lorsque l'ordre i augmente, on a $O(\frac{i^2}{2})$ $(\times 3)$ termes à calculer...

Diagramme de dépendance des correcteur



Chaque point correspond au triplet $(u_i^k, (u_p)_i^k, U_i^k)$.

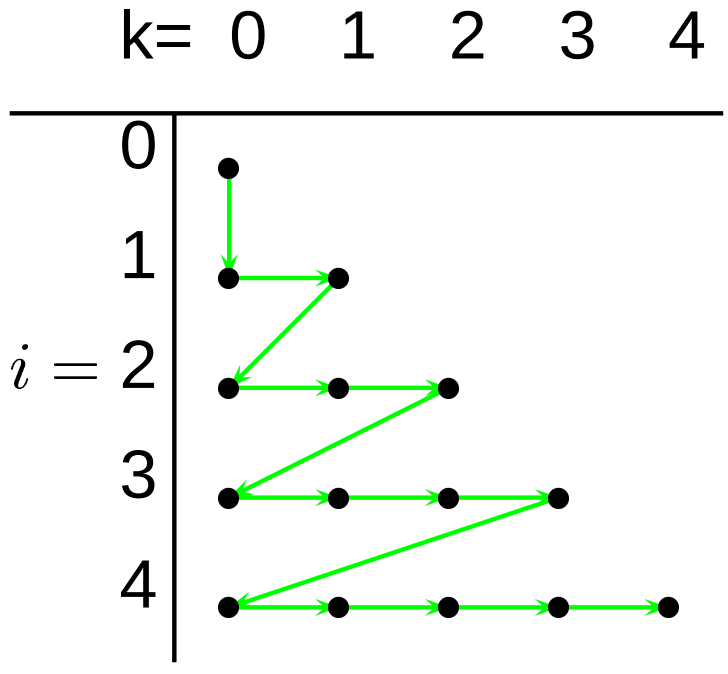
Diagramme de dépendance des correcteur



Chaque point correspond au triplet $(u_i^k, (u_p)_i^k, U_i^k)$.

Ordonnancement naturel des calculs

$\varepsilon^i \ \log^k \varepsilon$



Chaque point correspond au triplet $(u_i^k, (u_p)_i^k, U_i^k)$.

Dérivation des termes des dév. asympt.

- On recherche la solution sous la forme:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i(\log\varepsilon)^k\ u_i^k \qquad \text{(Champ lointain)}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i(\log\varepsilon)^k\ (u_p)_i^k \qquad \text{(Champ proche)}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i(\log\varepsilon)^k\ U_i^k \qquad \text{(Champ de fente)}$$

Dérivation des termes des dév. asympt.

- On recherche la solution sous la forme:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i(\log\varepsilon)^k\ u_i^k \qquad \text{(Champ lointain)}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i(\log\varepsilon)^k\ (u_p)_i^k \qquad \text{(Champ proche)}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i(\log\varepsilon)^k\ U_i^k \qquad \text{(Champ de fente)}$$

- On injecte les équations volumiques et surfaciques

Dérivation des termes des dév. asympt.

- On recherche la solution sous la forme:

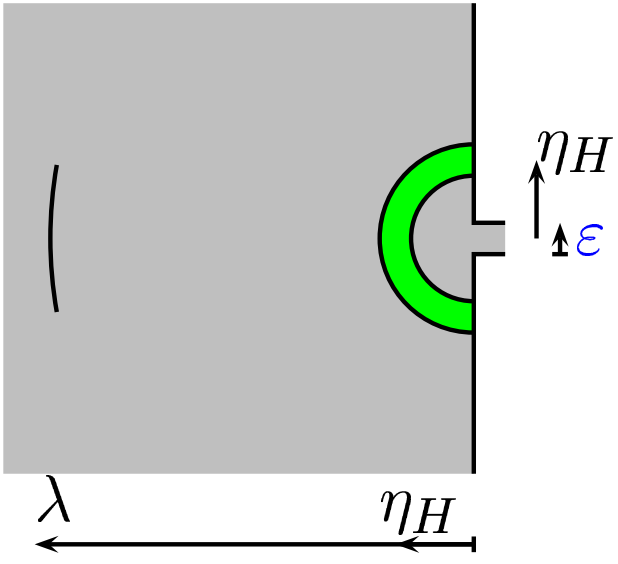
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i(\log\varepsilon)^k\ u_i^k \qquad \text{(Champ lointain)}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i(\log\varepsilon)^k\ (u_p)_i^k \qquad \text{(Champ proche)}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i(\log\varepsilon)^k\ U_i^k \qquad \text{(Champ de fente)}$$

- On injecte les équations volumiques et surfaciques
- Obtention des conditions de couplage (la difficulté)

Raccord lointain-proche



Dans une zone épaisse du type:

$$\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda.$$

On traduit le raccord:

$$u^\varepsilon(\eta_H, \theta) \;=\; (u_p)^\varepsilon(\frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta).$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i \,(\log\varepsilon)^k \; u_i^k(\eta_H,\theta) \quad\simeq\quad \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i \,(\log\varepsilon)^k (u_p)_i^k(\frac{\eta_H}{\varepsilon},\theta)$$

$$\eta_H \to 0 \qquad\qquad \frac{\eta_H}{\varepsilon} \to +\infty$$

Raccord lointain-proche

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i\ (\log\varepsilon)^k\ u_i^k(\eta_H,\theta) \quad\simeq\quad \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon^i\ (\log\varepsilon)^k (u_p)_i^k(\frac{\eta_H}{\varepsilon},\theta)$$

$$\eta_H \to 0 \qquad\qquad \frac{\eta_H}{\varepsilon} \to +\infty$$

On développe

- la série de gauche suivant η_H proche de 0
- la série de droite suivant η_H/ε proche de l'infini

On identifie terme à terme les deux séries.

Raccord lointain-proche

Nous obtenons ainsi des systèmes matricielles et non plus des égalités formelles entre des séries:

$$\begin{cases} u_i^k(r,\theta) & = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (a_i^k)^p \; H_p^{(1)}(\omega r) \; \cos p\theta \\ (u_p)_i^k(R,\theta) & = \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (A_i^k)_l^p \; R^l \; \cos p\theta \; + \; (B_i^k)_l^p \; R^l \; \cos p\theta \; \text{lo} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un nombre fini de $(a_i^k)^p$ différents de 0

$\Longrightarrow$ Le développement de u_i^k a donc un sens

Raccord lointain-proche

Nous obtenons ainsi des systèmes matricielles et non plus des égalités formelles entre des séries:

$$\begin{cases} u_i^k(r,\theta) & = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (a_i^k)^p \; H_p^{(1)}(\omega r) \; \cos p\theta \\ (u_p)_i^k(R,\theta) & = \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (A_i^k)_l^p \; R^l \; \cos p\theta \; + \; (B_i^k)_l^p \; R^l \; \cos p\theta \; \text{lo} \end{cases}$$

Pour $l \geqslant 0$, il n'y a qu'un nombre fini de

$$(A_i^k)_l^p \text{ et } (B_i^k)_l^p$$

différents de 0

Raccord lointain-proche

Nous obtenons ainsi des systèmes matricielles et non plus des égalités formelles entre des séries:

$$\begin{cases} u_i^k(r,\theta) & = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (a_i^k)^p \; H_p^{(1)}(\omega r) \; \cos p\theta \\ (u_p)_i^k(R,\theta) & = \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (A_i^k)_l^p \; R^l \; \cos p\theta \; + \; (B_i^k)_l^p \; R^l \; \cos p\theta \; \log \end{cases}$$

Pour $l < 0$, nous montrons alors le contrôle:

$$\left| \sum_{l=-\infty}^{0} \sum_{p=0}^{+\infty} (A_i^k)_l^p \; R^l \; \cos p\theta \; + \; (B_i^k)_l^p \; R^l \; \cos p\theta \; \log R \right| \; = \; O(1)$$

Raccord lointain-proche

Nous obtenons ainsi des systèmes matricielles et non plus des égalités formelles entre des séries:

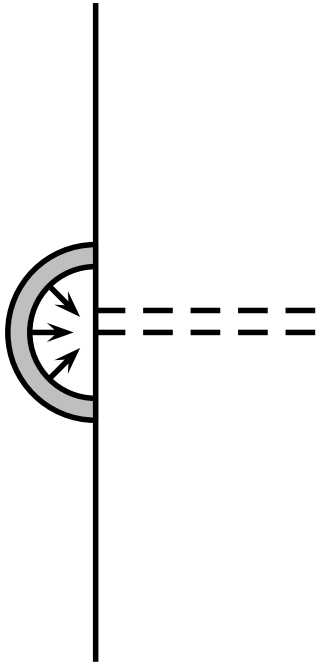
$$\begin{cases} u_i^k(r,\theta) & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (a_i^k)^p \; H_p^{(1)}(\omega r) \; \cos p\theta \\ (u_p)_i^k(R,\theta) & = & \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (A_i^k)_l^p \; R^l \; \cos p\theta \; + \; (B_i^k)_l^p \; R^l \; \cos p\theta \; \text{lo} \end{cases}$$

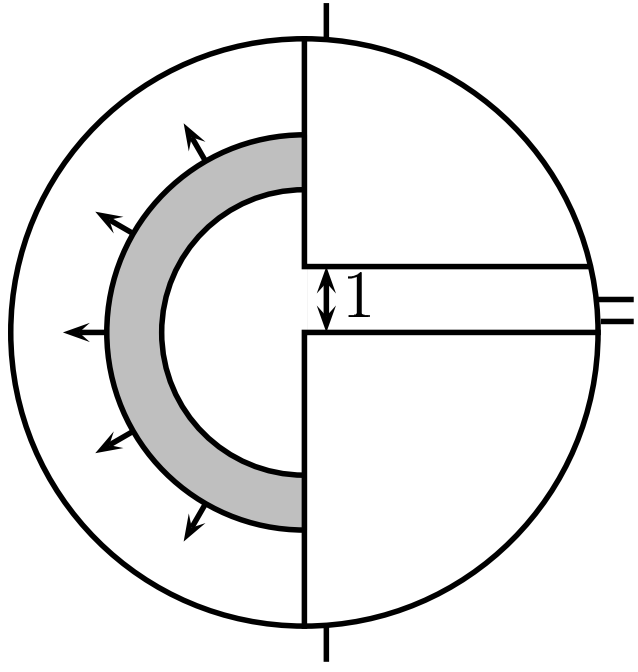
$\Longrightarrow$ Le développement de $(u_p)_i^k$ a donc un sens

Le couplage entre les champs

- Le couplage champ lointain-champ proche:

Le comportement du champ lointain en l'origine est couplé avec le comportement du champ proche à l'infini dans le demi-espace

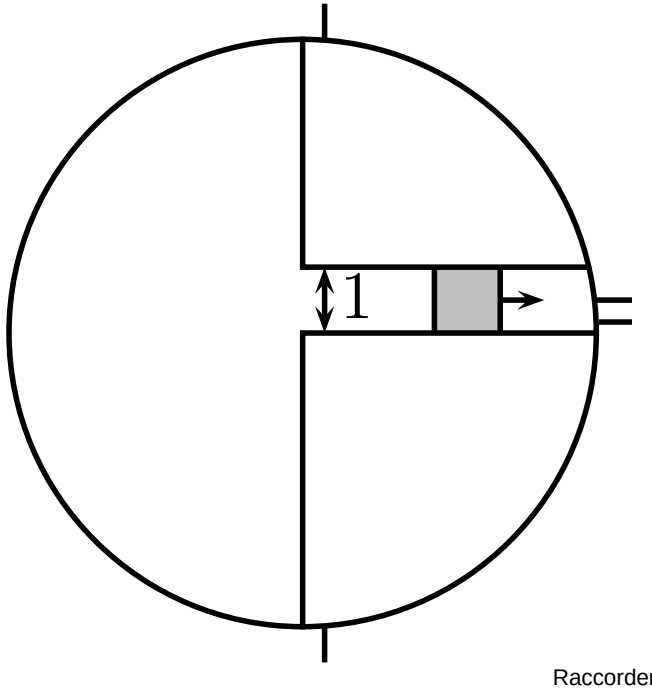


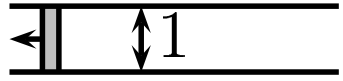


Le couplage entre les champs

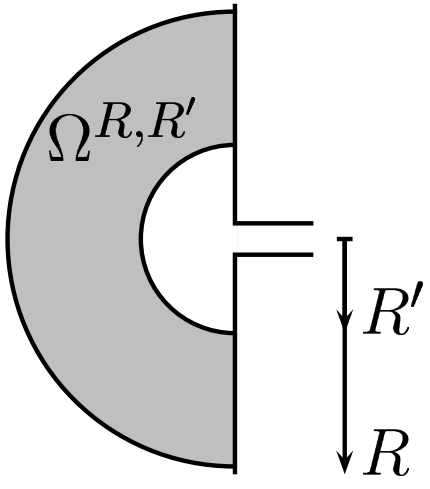
- Le couplage champ lointain-champ proche:
- Le couplage champ proche-champ de fente

Le comportement du champ proche dans la fente à l'infini est couplé avec le comportement à l'origine du champ de fente (valeurs des dérivées)



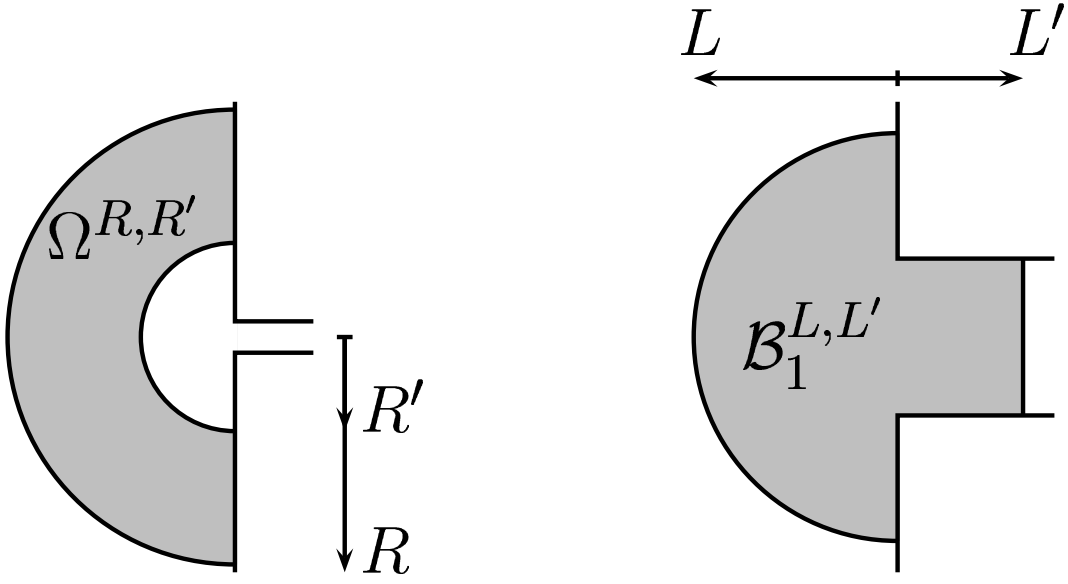


Analyse mathématique



$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \, \varepsilon^{n+1} \, (\log \varepsilon)^n \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

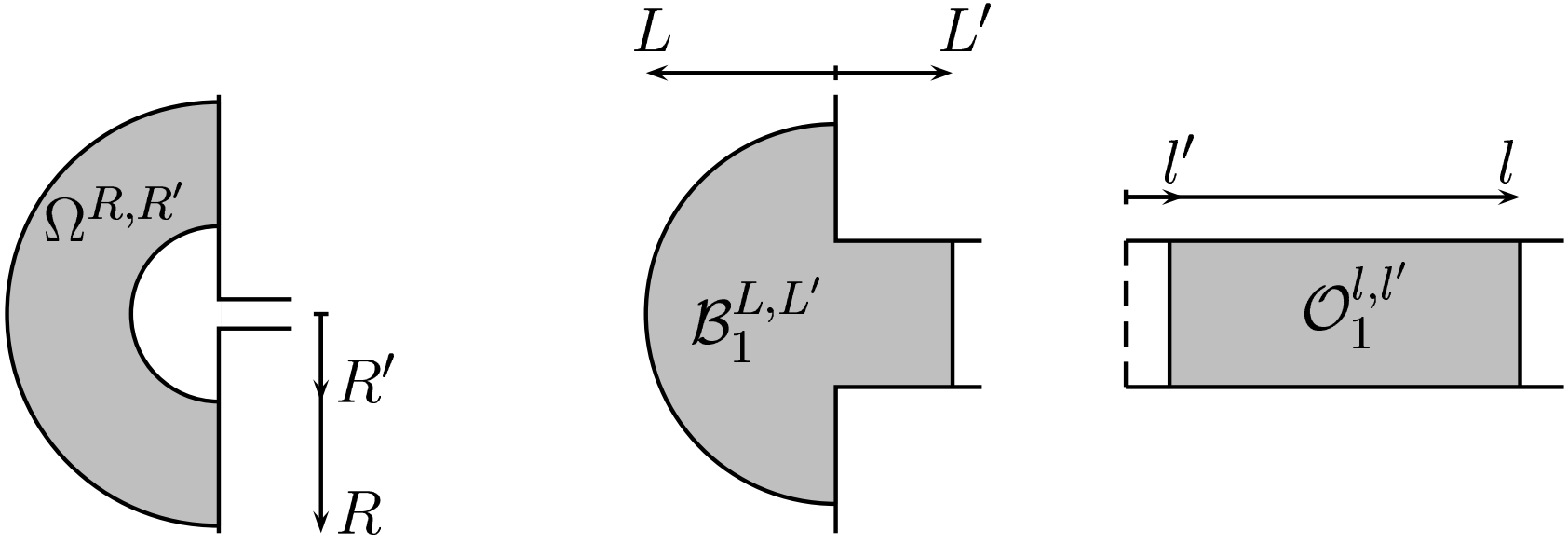
Analyse mathématique



$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \, \varepsilon^{n+1} \, (\log \varepsilon)^n \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| u_p^\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{B}_1^{L,L'})} \leq C \, \varepsilon^{n+1} \, (\log \varepsilon)^{n+1} \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Analyse mathématique



$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \, \varepsilon^{n+1} \, (\log \varepsilon)^n \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| u_p^\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{B}_1^{L,L'})} \leq C \, \varepsilon^{n+1} \, (\log \varepsilon)^{n+1} \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

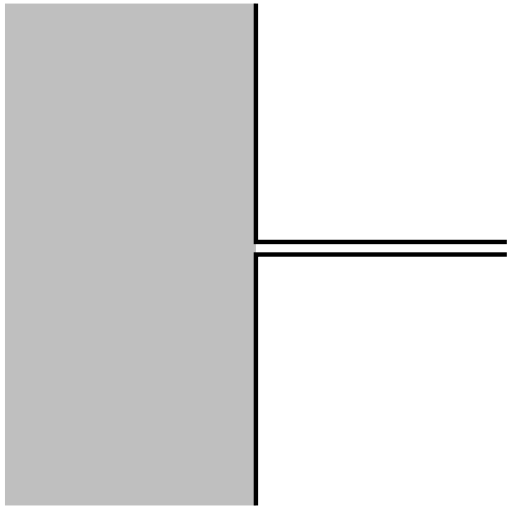
$$\left\| U^\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, U_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{O}_1^{l,l'})} \leq C \, \varepsilon^{n+1} \, (\log \varepsilon)^{n+1} \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Idée de la preuve

Nous souhaitons définir une approximation $\widetilde{u}_n^{\varepsilon}$ de la solution exacte qui coïncide avec:

- le développement tronqué du champ lointain loin de la fente dans le demi-espace

$$u_n^{H,\varepsilon}(x,y) \;=\; u^0(x,y) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \; u_i^k(x,y)$$

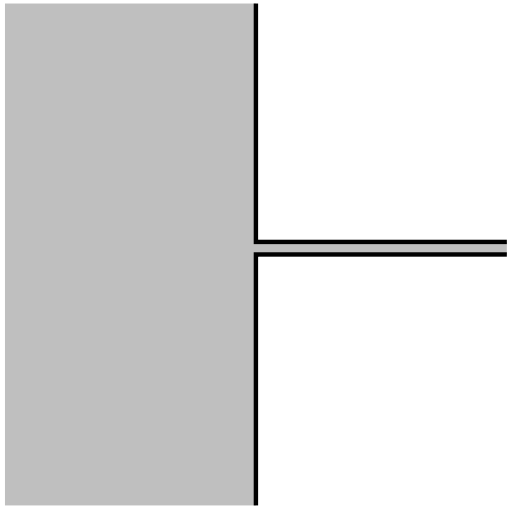


Idée de la preuve

Nous souhaitons définir une approximation $\widetilde{u}_n^{\varepsilon}$ de la solution exacte qui coïncide avec:

- le développement tronqué en champ proche au voisinage de l'embouchure de la fente

$$u_n^{N,\varepsilon}(x,y) \;=\; \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} \varepsilon^i \;(\log \varepsilon)^k \;(u_p)_i^k(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})$$

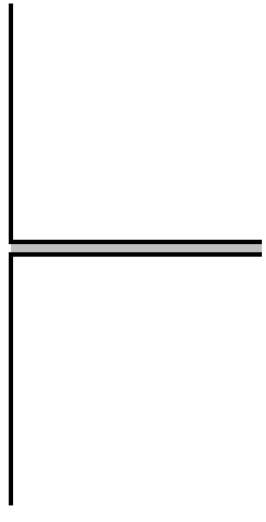


Idée de la preuve

Nous souhaitons définir une approximation $\widetilde{u}_n^\varepsilon$ de la solution exacte qui coïncide avec:

- le développement tronqué en champ de fente loin dans la fente

$$u_n^{S,\varepsilon}(x,y) \;=\; \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} \varepsilon^i \,(\log\varepsilon)^k \; U_i^k(x,\frac{y}{\varepsilon})$$



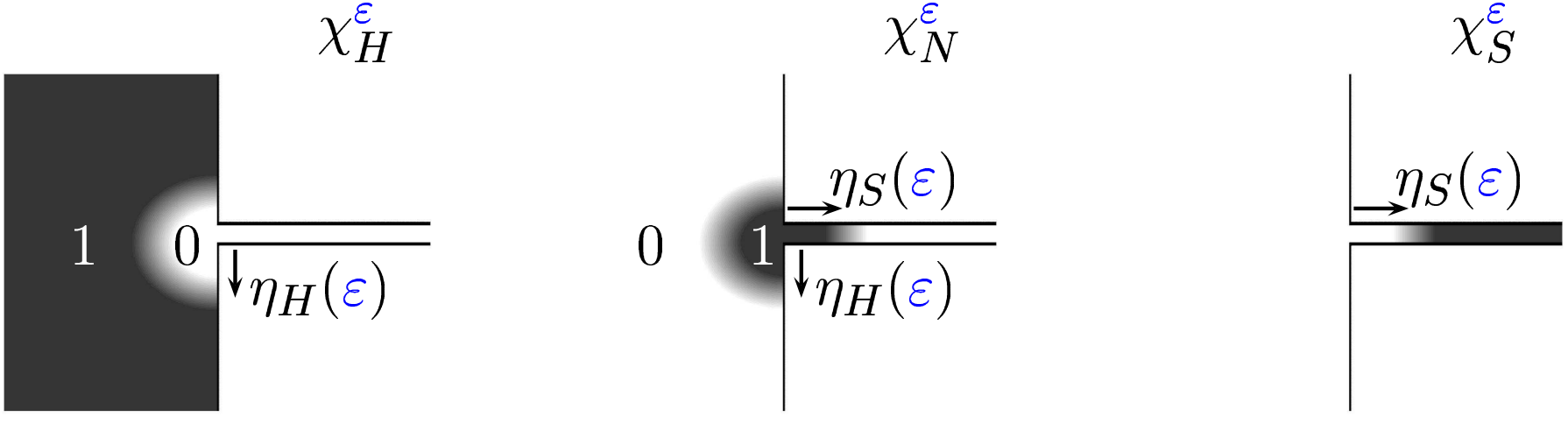
Idée de la preuve

Introduction d'une partition de l'unité

$$\widetilde{u}_n^{\varepsilon}(r,\theta) \;=\; \chi_H^{\varepsilon}\; u_n^{H,\varepsilon} \;+\; \chi_N^{\varepsilon}\; u_n^{N,\varepsilon} \;+\; \chi_S^{\varepsilon}\; u_n^{S,\varepsilon}$$

avec

$$\chi_H^{\varepsilon} \;+\; \chi_N^{\varepsilon} \;+\; \chi_S^{\varepsilon} \;=\; 1.$$

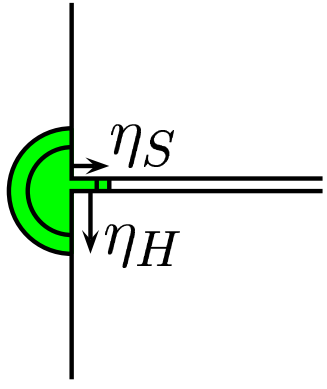


Idée de la preuve

Equation portant sur l'erreur $e_n^\varepsilon = \widetilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\begin{cases} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{cases}$$

$(\delta_N)_n^\varepsilon$ est relié à l'approximation de l'équation de Helmholtz par le champ proche

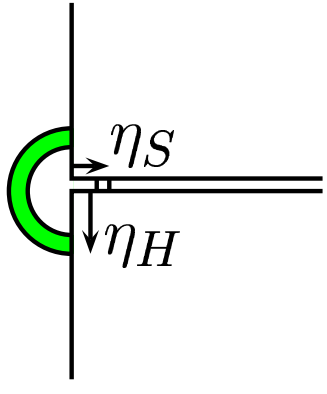


Idée de la preuve

Equation portant sur l'erreur $e_n^\varepsilon = \widetilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\begin{cases} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{cases}$$

$(\delta_{H-N})_n^\varepsilon$ est relié à l'erreur de raccord entre champ lointain et champ proche

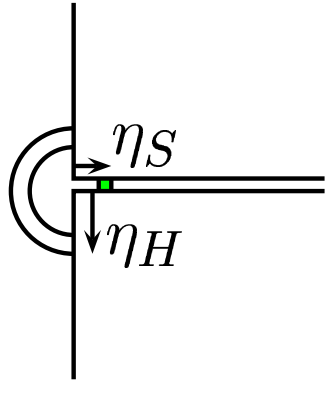


Idée de la preuve

Equation portant sur l'erreur $e_n^\varepsilon = \widetilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\begin{cases} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{cases}$$

$(\delta_{S-N})_n^\varepsilon$ est relié à l'erreur de raccord entre champ de fente et champ proche



Idée de la preuve

Equation portant sur l'erreur $e_n^\varepsilon = \widetilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\begin{cases} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{cases}$$

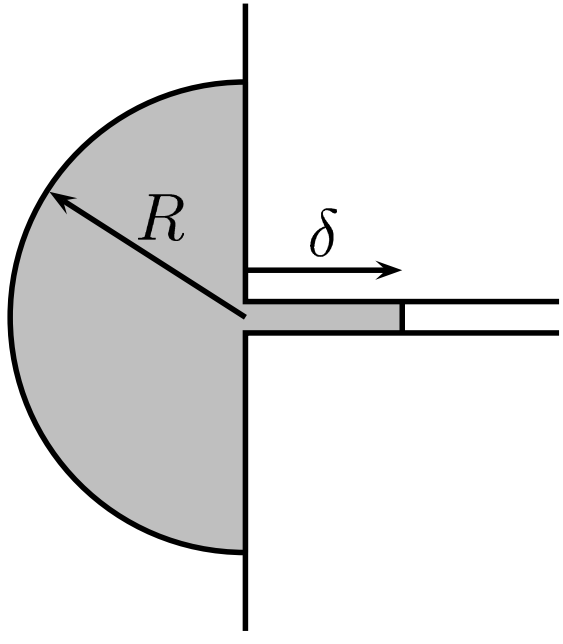
Démarche asymptotique classique:

- Stabilité: raisonnement par l'absurde (Helmholtz)
- Consistance: plus spécifique et technique (étude des singlularités et croissances par séparation de variables)

Idée de la preuve

L'estimation d'erreur globale

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left\| u^{\varepsilon} - \widetilde{u}_n^{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon}^{R,\delta})} & \leqslant & C \left[\left(\eta_H(\varepsilon) \right)^n + \left(\dfrac{\varepsilon}{\eta_H(\varepsilon)} \right)^n \right] \\ & & + C \left[\left(\eta_S(\varepsilon) \right)^n + \left(\dfrac{\varepsilon}{\eta_S(\varepsilon)} \right)^n \right]. \end{array} \right.$$



Idée de la preuve

L'estimation d'erreur globale

$$\begin{cases} \left\| u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leqslant & C \left[\left(\eta_H(\varepsilon) \right)^n + \left(\dfrac{\varepsilon}{\eta_H(\varepsilon)} \right)^n \right] \\ & + C \left[\left(\eta_S(\varepsilon) \right)^n + \left(\dfrac{\varepsilon}{\eta_S(\varepsilon)} \right)^n \right]. \end{cases}$$

On choisit $\eta_H(\varepsilon)$ et $\eta_S(\varepsilon)$ pour optimiser cette relation

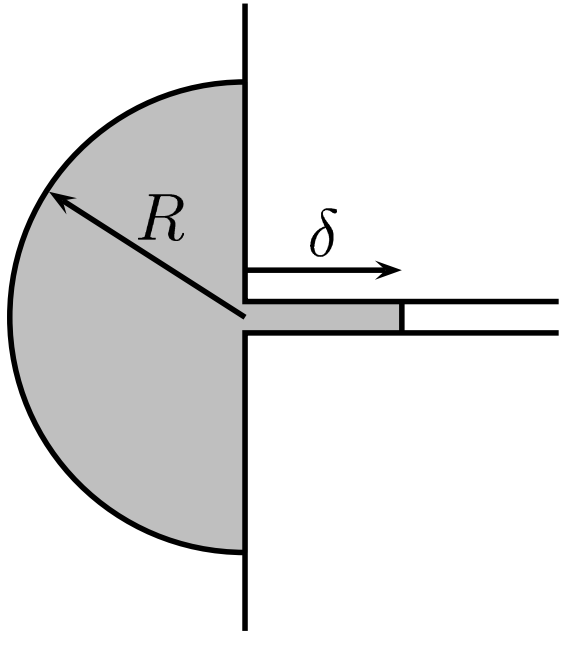
$$\eta_H(\varepsilon) \;=\; \eta_S(\varepsilon) \;=\; \sqrt{\varepsilon}$$

Nous tirons

$$\left\| u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \;\leqslant\; C\, \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

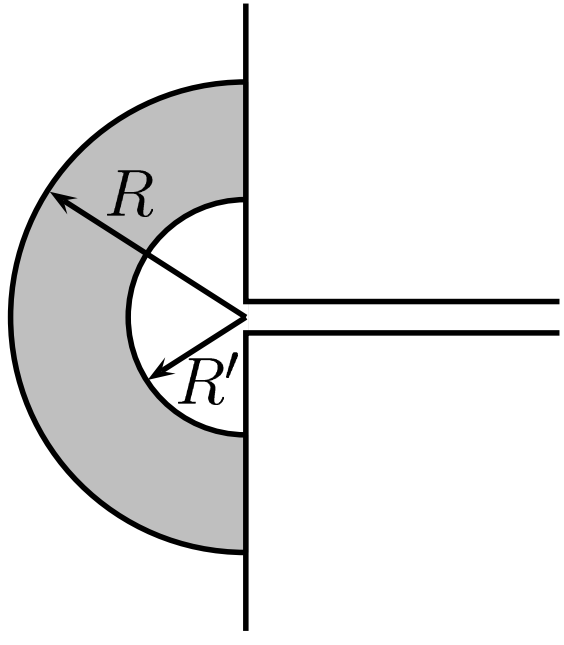
Idée de la preuve

$$\left\| u^{\varepsilon} - \widetilde{u}_n^{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon}^{R,\delta})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$



Idée de la preuve

$$\left\| u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{n}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \left\| u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$



Idée de la preuve

$$\left\| u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{n}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \left\| u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

Dans la zone de champ lointain:

$$\widetilde{u}_n^\varepsilon \;=\; u_n^{H,\varepsilon} \;=\; u^0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, u_i^k$$

Idée de la preuve

$$\left\| u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{n}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \left\| u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

Dans la zone de champ lointain:

$$\widetilde{u}_n^\varepsilon = u_n^{H,\varepsilon} = u^0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, u_i^k$$

$$\begin{cases} \left\| u^\varepsilon - u_{3n}^{H,\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{3n}{2}} \\ \left\| u_{3n}^{H,\varepsilon} - u_n^{H,\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leqslant C\, \varepsilon^{n+1} \, \log^n \varepsilon \end{cases}$$

Idée de la preuve

$$\left\| u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{n}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \left\| u^\varepsilon - \widetilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

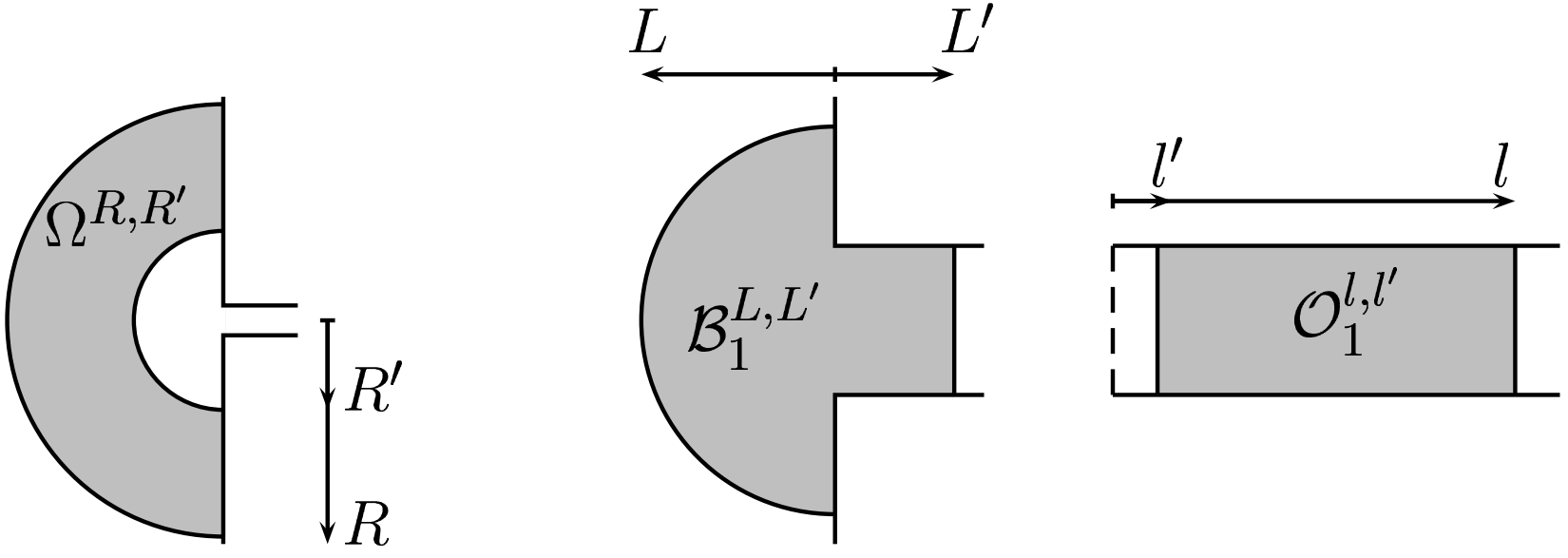
Dans la zone de champ lointain:

$$\widetilde{u}_n^\varepsilon = u_n^{H,\varepsilon} = u^0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, u_i^k$$

$$\begin{cases} \left\| u^\varepsilon - u_{3n}^{H,\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{3n}{2}} \\ \left\| u_{3n}^{H,\varepsilon} - u_n^{H,\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leqslant C\, \varepsilon^{n+1} \, \log^n \varepsilon \end{cases}$$

On conclut par inégalité triangulaire.

Analyse mathématique



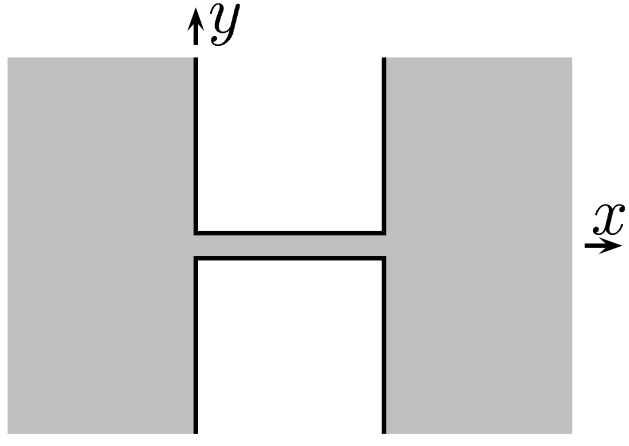
$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \, \varepsilon^{n+1} \, (\log \varepsilon)^n \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| u_p^\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{B}_1^{L,L'})} \leq C \, \varepsilon^{n+1} \, (\log \varepsilon)^{n+1} \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| U^\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \varepsilon^i \, (\log \varepsilon)^k \, U_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{O}_1^{l,l'})} \leq C \, \varepsilon^{n+1} \, (\log \varepsilon)^{n+1} \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de résonance)



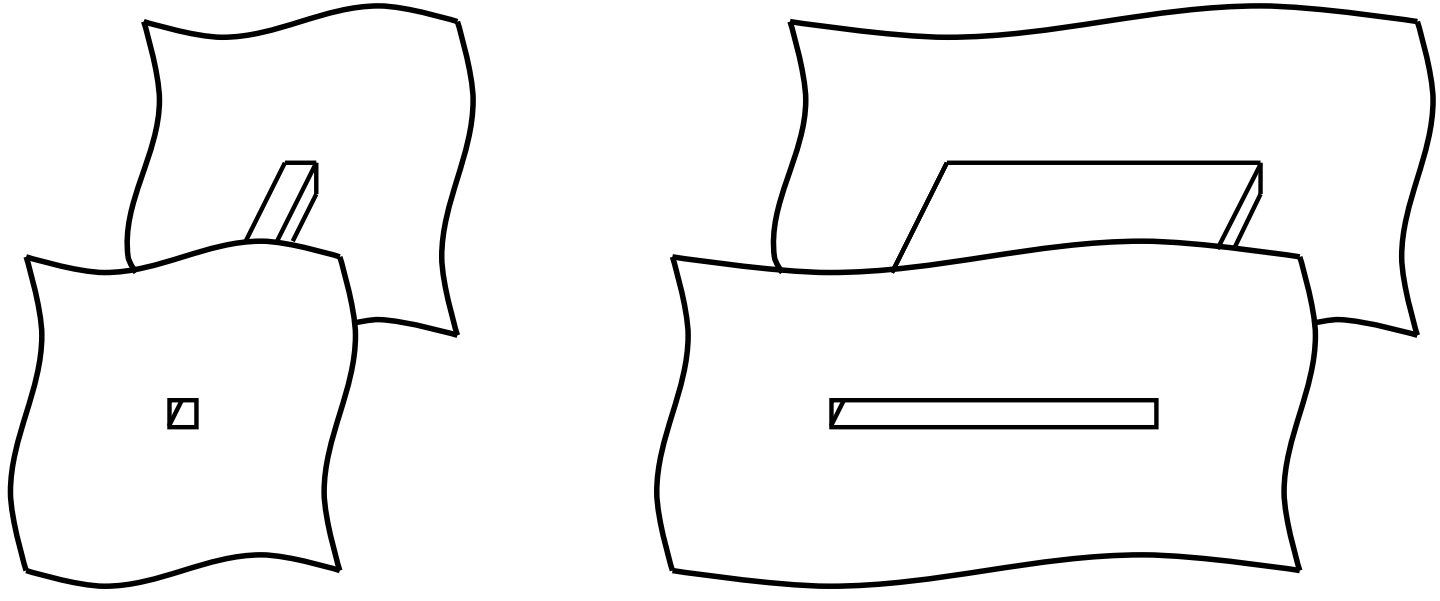
La difficulté: le résultat de stabilité.

Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de résonance)
2. Comparaison avec les techniques multi-échelles

Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de résonance)
2. Comparaison avec les techniques multi-échelles
3. Equations de Maxwell 3D



Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de résonance)
2. Comparaison avec les techniques multi-échelles
3. Equations de Maxwell 3D
4. Domaine temporel (équation d'évolution)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \, \Delta u = 0.$$