Modélisation numérique de la guitare acoustique.

Grégoire Derveaux

▶ **To cite this version:**

Grégoire Derveaux. Modélisation numérique de la guitare acoustique.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2002. Français. NNT : . pastel-00002585

HAL Id: pastel-00002585
https://pastel.hal.science/pastel-00002585

Submitted on 28 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

spécialité

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Grégoire DERVEAUX

Sujet de la thèse :

Modélisation numérique de la guitare acoustique

Directeur de thèse : **Patrick JOLY**

Soutenue le 4 juin 2002 devant le jury composé de :

Antoine CHAIGNE	Examinateur
Dominique CHAPELLE	Examinateur
Dominique HABAULT	Examinatrice
Patrick JOLY	Directeur
Patrick LE TALLEC	Examinateur
Serge PIPERNO	Rapporteur
Olivier PIRONNEAU	Rapporteur
Bernard RICHARDSON	Examinateur

à Soazig et Enora

MERCI BEAUCOUP

*Merci à Patrick Joly de m'avoir accueilli au sein du projet Ondes à l'*INRIA*. Je ne sais pas si j'ai toujours su mesurer la chance que j'ai eue d'avoir été encadré par une personne dont l'incroyable gentillesse n'a d'égale que l'immense culture mathématique.*

Merci à Antoine Chaigne d'avoir proposé ce sujet captivant. Merci de m'avoir initié avec une si grande patience à l'acoustique musicale et au fonctionnement de la guitare.

Merci à Eliane Bécache d'avoir toujours été disponible, toujours avec le sourire, pour répondre à mes petites questions.

Merci à Ian Solliec pour tout ce temps passé à discuter dans notre bureau, à deviser sur le sens des ding, bling et blang d'une guitare et d'autres sources de bruit.

Merci à Francis Collino pour ses remarques et son aide précieuses.

Merci à François Clément pour sa disponibilité permanente pour résoudre toute sorte de problèmes techniques et informatiques avec une telle sérénité.

Merci à Michel Kern, mon gourou en algèbre matricielle, pour son aide dans le choix bien difficile des bons algorithmes de résolution de problèmes linéaires.

Merci à Olivier Pironneau et à Serge Piperno d'avoir accepté avec gentillesse d'être rapporteurs de ma thèse. Merci beaucoup de vous être plongés aussi rapidement dans les détails de ce manuscrit et de m'avoir fait part de vos remarques.

Merci à Patrick Le Tallec de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Merci à Dominique Chapelle pour l'intérêt qu'il a toujours porté à ce travail et pour ses remarques judicieuses. Je suis très heureux qu'il ait fait partie du jury de thèse.

Merci à Dominique Habault et à Bernard Richardson d'avoir accepté de venir de si loin pour participer au jury de thèse.

Merci à Bernard Larrouturou pour m'avoir mis sur les rails de la recherche. Sa confiance et ses conseils m'ont bien aidé à franchir le pas.

Merci à l'équipe multimedia de l'Inria Rocquencourt, en particulier à Arghyro Paouri, pour l'énorme travail de réalisation d'un film d'animation. Merci pour sa patience, pour sa curiosité et pour les merveilleuses images qu'elle a réalisées.

Merci à Marie-Claude Bour et à Yves Duval de m'avoir enseigné les mathématiques avec tant de qualité. Je ne les oublierai jamais.

Merci aussi à tous les membres des projets Ondes, Estime et Otto. Helena, Muriel, Leila, Claire, Clarisse, Thierry, Jean-Marc, Kevin, Sandrine, Houssem, Chrysoula, Benoit, Dolores, Wang, Vincent, Jeronimo, Abelaziz, Gilles, Sebastien, Isabelle, Fabrice, Jacopo, Hussein, Etienne, Christine, Jean-David, Gary, Jacques, Jean, Jerome,... Merci d'avoir contribué à la bonne ambiance qui règne dans le long couloir tordu du bâtiment 13.

Table des matières

Introduction **1**

I Un modèle numérique de guitare **9**

1 La guitare, une description et un modèle physique **11**

1.1 Un mot sur le fonctionnement de la guitare 12

1.2 La corde 15

1.3 La table d'harmonie 23

1.4 L'équation des ondes acoustiques 31

1.5 Un modèle pour la guitare 33

2 Analyse mathématique du modèle **41**

2.1 Le théorème de Hille-Yosida 41

2.2 Solution forte pour le modèle de guitare 43

2.3 Identité de l'énergie – Estimations a priori 57

3 Présentation générale de la méthode de résolution numérique **61**

3.1 Présentation des difficultés 61

3.2 Démarche pour établir un schéma de résolution 62

3.3 Choix effectués pour la résolution numérique 63

II Résolution numérique de l'équation de plaque de Kirchhoff-Love **69**

1 Une formulation mixte de l'équation de plaque orthotrope de Kirchhoff-Love **71**

1.1 Les inconvénients de la formulation variationnelle naturelle 72

1.2 Survol de quelques méthodes existantes 77

1.3 Une nouvelle formulation mixte 82
1.4 Formulation variationnelle du problème amorti 91

2 Discrétisation spatiale de l'équation de plaque orthotrope de Kirchhoff-Love 95
2.1 Discrétisation spatiale du problème $\mathcal{P}^1$ 96
2.2 Discrétisation spatiale du problème $\mathcal{P}^{\text{div}}$ 97
2.3 Approximation des espaces $H^1(\omega)$ et $(H^1(\omega))^4$ 99
2.4 Approximation de l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l)$ 107
2.5 Approximation de l'espace $H(Div, \omega)$ 107
2.6 A propos d'estimations d'erreurs concernant le problème semi-discret 128

3 Analyse de dispersion numérique des problèmes semi-discret 137
3.1 Relation de dispersion du problème continu 138
3.2 Dispersion numérique du problème semi-discret 139
3.3 Courbes de dispersion 152

4 Discrétisation temporelle de l'équation de plaque 163
4.1 Forme général du problème semi-discret 163
4.2 Résolution par différences finies en temps 165
4.3 Une autre approche : la résolution exacte en temps 186
4.4 Comparaison des différentes approches 198

5 Résultats numériques 207
5.1 Fréquences propres d'une plaque rectangulaire homogène isotrope encastrée 207
5.2 Fréquences propres d'une plaque rectangulaire hétérogène encastrée 211
5.3 Fréquences propres d'une plaque circulaire homogène isotrope encastrée . . . 214
5.4 Comparaison des trois discrétisations en temps 216
5.5 Troncature et fréquence de coupure 222

III Résolution numérique du modèle de guitare 225

1 Analyse du couplage plaque-corde 227
1.1 Le problème non amorti 228
1.2 Le problème amorti 232
1.3 Discrétisation spatiale 235

1.4 Discrétisation temporelle 240

2 Analyse du couplage plaque-air **259**

2.1 Avantages et inconvénients des méthodes usuelles 260

2.2 Une formulation en domaines fictifs 264

2.3 Discrétisation spatiale 269

2.4 Discrétisation temporelle 276

3 Résolution du problème complet **287**

3.1 Formulation variationnelle mixte 287

3.2 Discrétisation spatiale 288

3.3 Discrétisation temporelle 290

3.4 Résolution du schéma S_g 294

3.5 Complément : présentation d'un autre schéma possible 299

3.6 Une guitare à 6 cordes 302

3.7 Aspects numériques 306

IV Résultats numériques **309**

1 Expériences de validation **311**

1.1 Validation de la méthode des domaines fictifs : le cas d'une boîte parallélépipédique 311

1.2 Etude de convergence par raffinement de maillage 313

1.3 Influence des composantes modales 319

1.4 Fréquences propres d'une table d'harmonie de guitare non raidie 319

2 Modèle numérique de guitare **323**

2.1 Influence des raidisseurs et du chevalet sur les modes de la table d'harmonie 324

2.2 Spectres temps-fréquence des six cordes à vide 327

2.3 Admittance au chevalet 330

2.4 Influence du rayonnement sur l'amortissement de la table 333

2.5 Les modes de cavité 336

2.6 Le rayonnement du son 337

2.7 Visualisation des vibrations mises en jeu par la guitare 341

Bilan et perspectives **343**

Annexes **345**

A Le modèle de plaque mince de Kirchhoff-Love **347**

A.1 Le modèle élastique tridimensionnel 347

A.2 Les hypothèses de Kirchhoff-Love 352

A.3 Le modèle de plaque mince de Kirchhoff-Love 357

A.4 Equations locales du modèle de Kirchhoff-Love 362

B La problématique de la condensation de masse **367**

B.1 Un exemple : l'équation des ondes 367

B.2 Echec de la condensation de masse dans $H^2(]0,1[)$ 370

C Solutions stationnaires de l'équation de corde amortie **375**

Introduction

Les enjeux de la construction d'une guitare

La guitare classique est un instrument de musique à corde pincée, descendant de la *vihuela espagnole* datant du XVI^{e} siècle, elle-même d'origine antique. Elle évolua rapidement au cours des XVIII^{e} et XIX^{e} siècles pour se stabiliser vers la fin de ce dernier sous sa forme actuelle.

FIG. 1: *— à gauche, une vihuela — à droite une guitare classique*

Le propos de la guitare est d'amplifier le son extrêmement faible rayonné par une corde, à l'aide d'un mécanisme acoustique. Les vibrations de la corde sont donc transmises à la table d'harmonie, qui grâce à sa large surface interagit plus efficacement avec l'air. En fait, lorsqu'on pince une corde de guitare, l'essentiel de l'énergie est dissipé au sein de la corde, et seule une toute petite partie d'entre elle est transmise jusqu'à nos oreilles. **L'effort le plus remarquable des luthiers au cours des années de perfectionnement de cet instrument est certainement la recherche d'une plus grande puissance sonore.**

Dans ce but, le corps de la guitare a été agrandie et la table d'harmonie affinée, pour favoriser sa mobilité. La masse des cordes a été augmentée, ce qui a eu pour conséquence d'augmenter

leur tension, afin de conserver la même hauteur de note. Ces transformations fragilisant l'instrument, un système de barrage plus ou moins sophistiqué, réalisé à l'aide de baguettes de bois dur collées sous la table de l'instrument a permis de garantir la solidité de la table, et en particulier la résistance à la tension des six cordes. Cette contribution majeure est attribuée au luthier espagnol Antonio de Torres (1817 - 1892).

Le travail du luthier consiste ainsi, entre autres, en la recherche d'un savant équilibre entre les dimensions de la table d'harmonie et sa raideur, pour obtenir le meilleur rendement acoustique possible. *Mais la qualité d'une guitare ne repose bien entendu pas sur le seul critère de la puissance sonore*. L'amélioration de la justesse, l'homogénéisation du timbre, le faible bruit engendré par les vibrations de la table d'harmonie, la fiabilité mécanique dans le temps, le confort de l'exécution et l'esthétique sont également des éléments déterminants intervenant dans l'appréciation de la qualité d'un instrument. Celle-ci repose en outre sur des critères subjectifs qui dépendent de la sensibilité de chacun, ou encore du type de musique que l'on désire jouer. On ne peut donc pas parler d'une guitare *idéale*, dont la reproductibilité serait assurée par l'exécution d'un plan bien établi.

Les luthiers cherchent ainsi en permanence à faire évoluer la guitare pour obtenir une qualité sonore nouvelle et adaptée aux besoins de chacun. Pour cela une bonne compréhension du fonctionnement intime de l'instrument est nécessaire. Celle ci repose essentiellement sur leur expérience personnelle et la transmission des savoirs faire techniques.

Le contexte scientifique

Dans ce contexte, le travail du chercheur en acoustique musicale est de contribuer à une meilleure compréhension de la physique de l'instrument, afin de préciser les phénomènes vibroacoustiques mis en jeu. *"L'un des défis des années à venir réside probablement dans le développement de techniques d'optimisation et de prédiction qui devraient permettre aux luthiers d'avancer plus sûrement vers le but visé, sans être obligé de tâtonner dans le flou d'un empirisme total"* (A. Chaigne [10]).

L'étude présentée ici fait suite aux travaux initiés par Antoine Chaigne il y a une dizaine d'année au groupe acoustique de l'ENST sur **l'élaboration de modèles physiques destinés à la prédiction fine du comportement vibratoire des instruments de musique**, appliquée en particulier à la synthèse sonore [1].

La démarche générale adoptée consiste en l'élaboration d'un modèle qui s'attache à décrire le plus précisément possible les phénomènes vibratoires mis en jeu lors de l'utilisation d'un instrument de musique. Celui ci est considéré comme un assemblage plus ou moins sophistiqué de structures élémentaires. **Le modèle se traduit alors par l'écriture d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles couplées entre elles, régissant les vibrations de chacune de ces structures élémentaires, et complété par des conditions aux limites faisant intervenir la géométrie de l'instrument.**

On s'attache alors à **mettre en œuvre une méthode numérique** que l'on veut bien sûr **ef-**

1. On parle dans de cas de *synthèse sonore par modèle physique.* La technique utilisée par la plupart des synthétiseurs repose sur un enregistrement préalable du son produit par un instrument réel, et cherche à le reproduire en utilisant des techniques de traitement du signal. Il s'agit alors de *synthèse sonore par analyse*

ficace, précise et fiable, pour résoudre le système d'équations obtenu dans le domaine temporel.

Ce choix original d'une résolution dans le domaine temporel est une une caractéristique de la démarche, qui rompt avec l'approche fréquentielle, intimement liée à la notion de modes de résonances, adoptée généralement pour décrire le comportement vibratoire des instruments de musique. L'intérêt de l'approche temporelle réside dans la finesse de description des couplages ainsi que dans la modélisation des transitoires d'attaque, particulièrement lorsque ceux-ci font intervenir des phénomènes non linéaires comme la percussion d'un maillet sur la membrane d'une timbale ou le frottement d'un archet sur une corde de violon ou encore le frottement du doigt pinçant une corde de guitare.

Outre le développement d'outils d'aide à la conception pour la facture instrumentale, de tels modèles constituent un outil de production de sons variés, fort utile dans le domaine de la psychoacoustique, en plein essor actuellement. On peut en effet faire varier comme on le désire les paramètres physiques ou géométriques de l'instrument, ce qui met à notre disposition une véritable "bibliothèque sonore" pouvant être utilisée dans le cadre d'étude dont l'objet est l'analyse de la façon dont on perçoit les sons. [2]

L'oreille humaine étant un outil extrêmement puissant pour évaluer la pertinence des signaux calculés, l'écoute des sons de synthèse constitue une étape de validation essentielle du modèle. Mais il convient de remarquer que les résultats obtenus sont *beaucoup plus riches* que la simple production d'un son, comme on peut le constater à la lecture du dernier chapitre de ce manuscrit, consacré à l'exploitation systématique du modèle de guitare. Son réalisme permet en effet de simuler un grand nombre d'expériences effectuées sur instrument réel : calcul des modes de la table d'harmonie, mesures de l'admittance au chevalet, diagrammes de directivités, intensité acoustique, rendement...

Parmi les travaux réalisés dans le cadre de ce thème de recherche, on peut citer *l'analyse des cordes de guitare* (Antoine Chaigne [8]), *l'analyse des instruments de percussion à clavier* (Vincent Doutaut [20]), *l'analyse des vibrations de plaques minces rectangulaire* (Christophe Lambourg [46]) et *la modélisation numérique de la timbale* (Leila Rhaouti [54]), réalisée en collaboration avec l'INRIA, premier modèle d'un instrument complet faisant intervenir des méthodes numériques modernes.

La contribution du travail présenté dans ce document concerne la *modélisation numérique de la guitare acoustique*.

Un modèle physique de la guitare

S'attachant à décrire le fonctionnement de cet instrument, le modèle retenu inclut :

- **le mouvement transverse de la table d'harmonie**, décrit par le modèle de plaque mince de Kirchhoff-Love pour un matériau orthotrope (comme le bois) et hétérogène (pour prendre en compte les raidisseurs),

2. Les travaux de C. Lambourg, développés dans le cadre de ce thème de recherche sur les vibrations de plaques minces, ont par exemple été utilisés par l'IRCAM, pour réaliser des études psychoacoustiques

- **le mouvement transverse de la corde**, décrit par une simple équation des ondes monodimensionnelle,
- **le rayonnement du son**, à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité qui communiquent par l'intermédiaire de la rose. Le champ acoustique est décrit à l'aide des équations d'Euler linéarisés et de conditions d'interaction fluide-structure à la surface de l'instrument,
- **la prise en compte des phénomènes de pertes internes** au sein de la corde et de la table d'harmonie, qui interviennent de manière fondamentale dans le timbre du son produit. Ces pertes sont décrites à l'aide de deux termes d'amortissement, l'un de type fluide, l'autre d'origine viscoélastique.

Jusqu'à ce jour, à notre connaissance, les modèles proposés pour rendre compte du couplage fluide-structure reposent sur une approximation, comme par exemple l'utilisation de l'intégrale de Rayleigh ou la réduction du comportement de la cavité à celui d'un simple oscillateur [13]. **L'originalité de cette étude par rapport aux travaux antérieurs réalisés sur la guitare est de modéliser complètement le champ acoustique rayonné.**

Résolution numérique du modèle

D'un point de vue mathématique, le problème à résoudre apparaît comme un problème linéaire d'évolution. Il rentre à ce titre dans le cadre des hypothèses du théorème de Hille-Yosida, ce qui permet de vérifier, en guise de préliminaire, qu'**il s'agit d'un problème bien posé, c'est à dire qu'il possède une unique solution dans un espace fonctionnel adéquat**. Ce résultat repose en grande partie sur une identité de l'énergie qui assure que l'énergie totale du système décroît en régime libre. Cette propriété est bien sûr fondamentale du point de vue de la physique, mais elle nous intéresse aussi pour la résolution numérique, puisqu'on cherchera à obtenir une propriété similaire au niveau discret, ce qui permettra d'assurer la stabilité de notre schéma de résolution.

S'il existe bien une solution, il n'est pas du tout envisageable de chercher à la déterminer analytiquement. Il nous faut donc mettre en œuvre une méthode numérique pour la calculer. Les difficultés qui surgissent alors sont nombreuses. Les principales d'entre elles sont les suivantes :

- problème de grande taille (3D) posé dans un domaine infini et de géométrie complexe,
- résolution de l'équation de plaque dynamique de Kirchhoff-Love, tant pour l'approximation spatiale que temporelle,
- stabilité de la méthode,

La recherche d'une méthode numérique de résolution de ce problème nous a conduit a explorer assez systématiquement un nombre important d'alternatives possibles. Nous avons donc été amené à effectuer un choix en s'appuyant sur des critères de précision, d'efficacité, tant en terme de mémoire que de temps de calcul, de fiabilité, de stabilité numérique mais aussi de simplicité d'implémentation informatique.

La résolution numérique repose avant tout sur une réécriture sous une forme variationnelle mixte du problème global, qui permet d'utiliser la méthode des éléments finis pour l'approximation spatiale, particulièrement adaptée aux problèmes de géométrie complexe. D'autre part, c'est un moyen élégant d'obtenir une identité d'énergie discrète similaire à celle obtenue dans le cas continue, qui permet d'assurer la stabilité numérique de la méthode.

Les aspects essentiels de la méthode numérique retenue sont les suivants :

- L'approximation spatiale de l'équation de corde est effectuée par élément finis mixtes, de type Lagrange du premier ordre, sur maillage régulier. L'approximation temporelle repose sur l'utilisation de différences finies explicites centrées en temps d'ordre 2.
- De même, l'approximation spatiale de l'équation des ondes acoustiques est effectuée par éléments finis mixtes de Raviart-Thomas du premier ordre sur maillage cubique régulier. L'approximation temporelle repose elle aussi sur l'utilisation de différences finies explicites centrées en temps d'ordre 2.
- **L'équation de plaque est résolue par une méthode spectrale**. Les modes de la table d'harmonie sont calculés par une méthode d'éléments finis mixte originale basée sur une formulation en vitesse-moment. L'approximation spatiale est effectuée à l'aide d'éléments finis de type Lagrange, du second ordre, développés par Nathalie Tordjmann pour obtenir la condensation de masse [62]. Le système semi-discrétisé en espace est ensuite résolu analytiquement en temps.
- **Le problème d'interaction fluide-structure est résolu par une méthode de domaine fictifs** introduite par Glowinsky dans le cas du problème de Laplace stationnaire, et adapté ici des travaux de Leila Rhaouti sur la modélisation numérique de la timbale [54]. L'introduction d'une nouvelle inconnue λ, qui s'interprête comme le saut de pression à travers la surface de l'instrument permet d'écrire une formulation variationnelle de type mixte dans laquelle la guitare n'apparaît que via le multiplicateur de Lagrange λ, ce qui permet d'utiliser un maillage régulier cubique pour approcher le champ acoustique. Il suffit alors de mailler la surface de la guitare pour approcher λ par éléments finis mixtes de type Lagrange d'ordre 1. On prend ainsi en compte de manière très précise la géométrie de l'instrument tout en préservant l'efficacité de la méthode des différences finies pour la résolution du problème 3D.
- Le couplage entre la corde et la table d'harmonie au niveau du chevalet est également assuré par un multiplicateur de Lagrange qui n'est autre que la contrainte exercée par la corde sur le chevalet, naturellement introduite dans la formulation mixte de l'équation de corde mentionnée ci dessus.
- Les calculs sont restreints à un domaine borné à l'aide de **conditions aux limites absorbantes d'ordre élevé**, développées par Francis Collino [17].
- **La stabilité numérique du schéma global de résolution est obtenue par une méthode énergétique.** En pratique, cette stabilité est garantie sous deux conditions de type CFL reliant le pas de discrétisation en temps aux pas d'espace des maillages de la corde et de l'air. Ce résultat de stabilité est intéressant à double titre :
  - ⋆ **Il s'agit d'une méthode originale qui couple deux techniques de résolution en temps radicalement différentes** : une méthode de résolution exacte pour la

plaque et une méthode de différences finies en temps pour la corde et pour l'air. **Ce point est certainement l'aspect le plus innovant de la méthode numérique développée ici.**

⋆ Les conditions de stabilités obtenues ne sont autres que les très usuelles conditions CFL des schémas aux différences finies explicites couramment utilisés la résolution de l'équation des ondes 1D et 3D. On a donc écrit un **schéma robuste pour lequel la condition de stabilité n'est pas pénalisé par les termes de couplages.**

Concernant la résolution numérique de l'équation de plaque

Une grosse partie de ce travail a porté sur la recherche d'une méthode de résolution de l'équation de plaque de Kirchhoff-Love, pour laquelle on a trouvé peu de références dans la littérature concernant le problème d'évolution. L'étude de cette équation fait donc l'objet d'une partie entière de ce manuscrit dans laquelle sont décrites un grand nombre de solutions envisagées pour l'approximation spatiale et pour l'approximation temporelle.

- La formulation variationnelle naturelle de l'équation de plaque conduit à chercher l'inconnue dans $H^2(\omega)$, de sorte que son approximation conforme repose sur l'utilisation d'éléments finis sophistiqués de classe C^1. Pour contourner ce problème, on propose une formulation mixte non standard dans laquelle intervient le moment fléchissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$.

  Cette formulation est non standard dans la mesure où elle ne vérifie pas les hypothèses de la théorie des méthodes mixtes de Babuskă-Brezzi. Une des conséquences est que l'espace dans lequel on peut choisir le moment fléchissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ n'est pas fixé par les conditions requises par ce théorème. On est ainsi amené à étudier deux choix possibles pour cet espace, à savoir $(H^1(\omega))^4$ et $H(\underline{\mathrm{Div}}\,,\omega) \equiv (H(\mathrm{div},\omega))^2$.

- L'introduction du moment $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$, qui est un tenseur du deuxième ordre, augmente sérieusement la taille du problème. Un moyen de la réduire est d'éliminer le moment lors de l'approximation spatiale. Pour cela, **la matrice de masse du moment est réduite à une matrice diagonale par bloc, aisément inversible, à l'aide de la technique de condensation de masse.**

  Si la problématique de la condensation de masse pour les éléments de Lagrange dans le cas de l'approximation de l'espace H^1 est un problème bien connu, il n'en est pas de même pour l'approximation de l'espace $H(\mathrm{div},\omega)$. Une grande partie du chapitre 2 est consacrée à la **construction d'un élément fini $H(\mathrm{div},\omega)$ conforme pour lequel on obtient la condensation de masse** et qui ne sera finalement pas retenu...

- En outre, pour limiter le phénomène de dispersion numérique, c'est à dire pour obtenir une estimation correcte des fréquences propres de la table d'harmonie de la guitare, **on étend cette étude aux éléments finis d'ordre 2.**

- **Une analyse de dispersion numérique complète sur maillage régulier infini** concernant toute les approximations spatiales envisagées de cette formulation justifie le bien

fondé de la méthode (sa consistance), l'intérêt de la montée en ordre, et en outre est un indicateur précieux permettant de comparer la performance des différents choix proposés.

- N'entrant pas dans le cadre de la théorie des méthodes mixtes, on ne peut exploiter les résultats usuels concernant l'analyse d'erreur. Plusieurs auteurs ont étudié des formulations variationnelles de ce type dans le cas particulier d'une plaque homogène isotrope et en prenant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ dans $(H^1(\omega))^4$. Une brève synthèse bibliographique est présentée à la section 2.6.

- Il s'avère que pour des raisons d'efficacité ou de précision, l'utilisation d'un classique schéma aux différences finies en temps n'est pas adapté, qu'il soit explicite ou implicite. **On est donc amené à résoudre exactement en temps continu le schéma semi-discrétisé en espace**, ce qui nécessite de diagonaliser la matrice de raideur. Le principal intérêt de cette approche est de permettre d'utiliser n'importe quel pas de temps d'échantillonage pour calculer la solution sans nuire à la précision du schéma semi-discret. A posteriori, cette méthode s'interprête tout simplement comme une méthode spectrale.

Organisation du document

Ce document est composé de cinq parties :

1. La première partie est consacrée à la présentation du modèle et à son analyse mathématique ainsi qu'à la présentation générale de la méthode numérique retenue.

2. La deuxième partie est consacrée à l'analyse de la résolution de l'équation de plaque : formulation variationnelle, discrétisations spatiale et temporelle, analyse de dispersion. Cette partie se conclut par une présentation de résultats numériques permettant de comparer les différents schémas de discrétisation spatiale et temporelle proposés.

3. La troisième partie s'attache à résoudre le modèle complet en trois étapes. On résout tout d'abord le problème couplant la plaque à la corde puis le problème couplant la plaque à l'air. On réalise ensuite une synthèse de ces deux problèmes pour obtenir un schéma de résolution du modèle complet.

4. La quatrième partie présente une exploitation du modèle numérique obtenu. Après quelques expériences de validation, on réalise un nombre important de simulations numériques qui montrent les potentialités extrêmement riche de ce modèle. Les résultats obtenus présentent de nombreuses caractéristiques bien connues de la guitare, comme le couplage entre la première fréquence propre de la table d'harmonie et la fréquence de Helmholtz de la cavité. Un aspect innovant et très intéressant du modèle est qu'il permet de mesurer l'influence du couplage de la table d'harmonie à l'air environnant sur l'amortissement, quantité difficilement accessible voire inaccessible à des mesures.

5. Enfin, on présente en annexe la construction du modèle de plaque mince de Kirchhoff-Love, la problématique de la condensation de masse, ainsi que le détails de calculs concernant la solution générale de l'équation de corde amortie.

Première partie

Un modèle numérique de guitare

Chapitre 1

La guitare, une description et un modèle physique

L'objet de ce chapitre est de présenter le modèle de guitare retenu pour cette étude. C'est en particulier l'occasion de définir les notation utilisées.

Ce modèle doit prendre en compte les phénomènes physiques susceptibles de contribuer au son produit par l'instrument tout en restant abordable dans le cadre d'une résolution numérique. Il faut dans ce sens rester modeste quand au degré de finesse désiré pour une telle modélisation. Il s'agit donc de proposer un modèle à la fois simple et suffisamment pertinent par rapport aux objectifs que nous nous sommes fixés.

Avant de proposer un modèle, il convient de comprendre, très brièvement, le fonctionnement d'une guitare (section 1.1.) Ce fonctionnement général étant entendu, on considère la guitare comme un assemblage de structures élémentaires couplées entre elles. Ici, une corde couplée à la table d'harmonie par l'intermédiaire du chevalet. La table est elle même couplée à l'air environnant, situé à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité. On suppose que seule la table d'harmonie vibre, c'est à dire que le reste du corps de la guitare est totalement rigide.

Il est important de préciser que le timbre du son produit dépend très fortement des phénomènes de dissipations internes au sein des matériaux qui constituent la guitare. Cette caractéristique est fondamentale pour l'élaboration d'un modèle destiné à la synthèse sonore (voir section 1.1.2).

On présente tout d'abord les équations régissant les vibrations de chacune des trois composantes de la guitare indépendamment les unes des autres : équation de corde (1.2), équation de plaque (1.3) et équation des ondes acoustiques (1.4). Ces trois équations sont alors couplées entre elles selon un modèle présenté en section 1.5. L'ensemble du chapitre est repris lors de la présentation globale des équations (section 1.5.4).

Notation 1.1 *D'une manière générale dans ce document, pour distinguer les quantités scalaires des grandeurs vectorielles ou tensorielles, les vecteurs sont représentés par des variables simplement soulignées (comme cela $\underline{\theta}$), les tenseurs d'ordre deux sont représentés par des variables doublement soulignées (comme ceci $\underline{\underline{M}}$), et les tenseurs du quatrième ordre sont représentés par des majuscules en gras ($\mathbf{C}$).*
D'autre part, de manière à distinguer les diverses parties de l'instrument, l'indice c représentera la corde, l'indice p représentera la plaque supérieure de la guitare et l'indice a représentera l'air.
On se donne un repère $(Oxyz)$ muni d'une base orthonormale $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, dans lequel l'axe (Oz), dirigé selon la verticale, correspondra à la direction normale à la table supérieure de la guitare, qui se trouve donc dans un plan horizontal. Dans la mesure où dans ce qui suit, on néglige systématiquement la pesanteur, il n'y a aucune raison particulière de choisir la direction verticale plutôt qu'une autre. Il s'agit juste d'un choix conventionnelle.

1.1 Un mot sur le fonctionnement de la guitare

Le propos de cette section est de décrire sommairement le fonctionnement vibroacoustique de la guitare. Cet instrument fait l'objet de nombreuses recherches en acoustiques depuis une trentaine d'années. Le lecteur soucieux d'en savoir plus trouvera par exemple une présentation plus approfondie de la guitare dans [56] ou bien dans *"The physics of musical instruments"* [32] qui constitue une introduction générale à l'acoustique des instruments de musique.

1.1.1 Principe général

La caisse de la guitare est composée d'une part de la table d'harmonie, qui est une fine plaque de bois percée d'un trou appelée la rose, et d'autre part des bords, nommés éclisses, et du fond, qui sont dans un bois plus dur. Les six cordes sont fixées d'un côté au manche et de l'autre au chevalet, lui même collé sur la table d'harmonie (voir figure (1.1)).

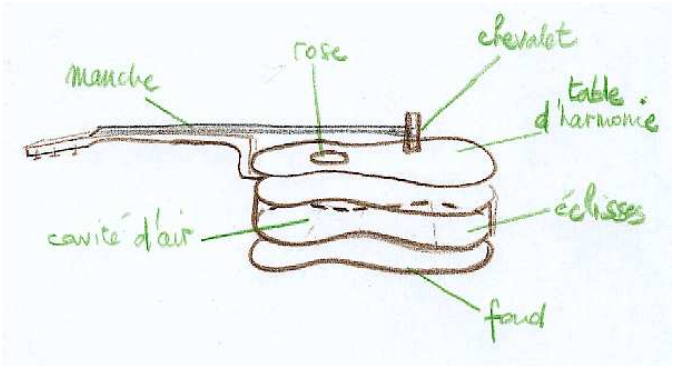


FIG. 1.1: *Vue éclatée d'une guitare*

Usuellement les six cordes sont numérotées de la plus aigüe à la plus grave. Les six notes à vide sont Mi6 (82,5 Hz), La5 (110 Hz), Ré4 (147 Hz), Sol3 (196 Hz), Si2 (247 Hz), Mi1 (330Hz), (le chiffre indiqué entre parenthèses est la fréquence fondamentale de chacune de ces cordes).

La source sonore est la corde (bien sûr), appréciée dès l'antiquité pour ses qualités harmoniques naturelles, qui produisent un son agréable à l'oreille. Malheureusement, bien que le mouvement de la corde soit de forte amplitude, le son qu'elle émet est pratiquement inaudible, car son diamètre est beaucoup trop petit pour rayonner efficacement dans l'air.

Le propos de la guitare, comme de tous les instruments à corde, est d'amplifier ce son par un mécanisme acoustique. Les vibrations de la corde sont donc transmises à la table d'harmonie par l'intermédiaire du chevalet. Grâce à sa large surface, la table rayonne plus efficacement dans l'air. Mais, compte tenu de ses petites dimensions, le rayonnement émis de part et d'autre de la table a tendance à s'annuler pour les grandes longueurs d'onde, c'est à dire en basses fréquences (figure (1.2)) On coupe donc l'onde arrière en l'enfermant dans une cavité.

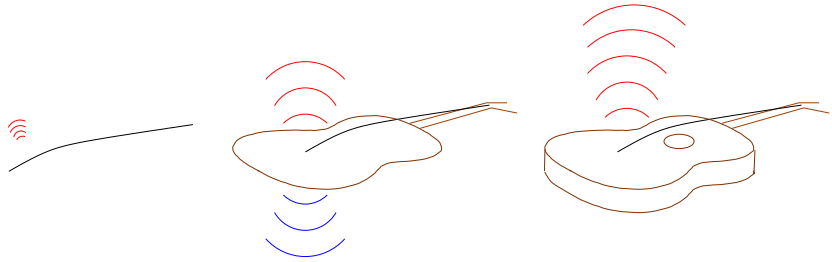


FIG. 1.2: *fonctionnement schématique d'une guitare*

Il s'avère que la fréquence fondamentale d'une table d'harmonie de guitare est de l'ordre de 200 Hz, alors que le fondamentale de la corde la plus grave vibre à 82 Hz. Pour renforcer la puissance aux alentours de cette fréquence , on perce un trou dans la caisse de la guitare (la rose), de manière à la transformer en résonateur de Helmholtz.

D'une manière générale, le fait de percer un trou de petites dimensions dans une cavité fermée a pour effet de créer une fréquence de résonance nettement plus grave que le fondamental de cette même cavité dépourvue de trou : c'est la fréquence de résonance de Helmholtz (voir par exemple [9]). Ce principe est utilisé par exemple pour construire les enceintes (ou caisson) de graves. Dans le cas de la guitare, cette fréquence se situe aux alentours de 100Hz. La caisse a donc un rôle acoustique fondamental dans le registre grave de la guitare.

1.1.2 A propos des phénomènes d'amortissement

En acoustique musicale, les phénomènes d'amortissement jouent un rôle très important sur la perception du son. La perception d'une note dépend à la fois de sa hauteur, c'est à dire de sa fréquence fondamentale, mais aussi de son timbre, de sa couleur, c'est à dire de la façon dont l'amplitude des harmoniques décroissent au cours du temps. Les tous premiers essais de synthèse sonore d'instruments à corde par modèle physique, réalisées par Hiller et Ruiz en 1971 [40], montrèrent en effet que l'introduction d'un simple terme d'amortissement

fluide, agissant identiquement sur toutes les fréquences, conduit à un son artificiel, de type électronique.

Ce qui, entre autres, distingue le bruit sec d'une lame de bois par rapport au tintement d'un lame de métal par exemple, c'est la vitesse à laquelle les hautes fréquences s'atténuent : très rapidement pour l'un, plus doucement pour l'autre. Le même phénomène est également perceptible lorsque l'on pince une corde en nylon ou une corde en métal.

Illustrons quantitativement ce phénomène, dans le cas du son produit par une guitare, pour un peu mieux le comprendre. La figure (1.3) représente l'évolution au cours du temps de la pression acoustique générée par le pincer de la corde grave d'une guitare, enregistrée à environ deux mètres de l'instrument. Une caractéristique évidente de ce signal est sa décroissance au cours du temps, mais on ne voit ici que l'enveloppe du signal, ce qui nous fournit peu d'informations..

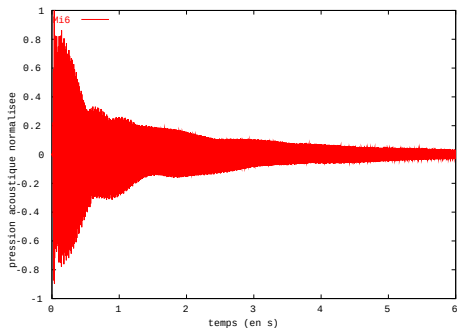


FIG. 1.3: *Évolution au cours du temps de la pression acoustique générée par une guitare pincée sur sa corde grave (Mi6).*

Une représentation plus judicieuse, sous la forme d'un spectre temps-fréquence, présentée sur la figure (1.4), permet de mieux caractériser l'extinction du son. Sur ce spectrogramme, on visualise l'évolution au cours du temps (en abscisse) de l'amplitude de chaque composante fréquentielle du signal (en ordonnée — en rouge, l'amplitude est élevée, en vert, elle est faible).

- Comme précisé ci dessus, on constate une forte dépendance de l'amortissement en fonction de la fréquence : les partiels d'ordre élevé sont beaucoup plus vite amortis.
- Le fondamental de la corde grave de la guitare vibre à 83 Hz. En fait, très rapidement, seuls les harmoniques de la corde, *ie.* les multiples de 83 Hz, sont encore présents. On observe, au tout début du signal, des pics qui correspondent aux vibrations de la table d'harmonie et qui sont très rapidement amortis. La suite des fréquence propres de la table n'est pas harmonique, ce qui a pour conséquence de produire un bruit sourd au moment de l'attaque. Ce bruit caractérise le son d'une guitare.

L'introduction de phénomènes dissipatifs dans le modèle est donc fondamentale. Ceux-ci doivent rendre compte à la fois du phénomène de dépendance temporelle et également de l'importance relative de l'amortissement des modes de table par rapport à celui des modes de corde.

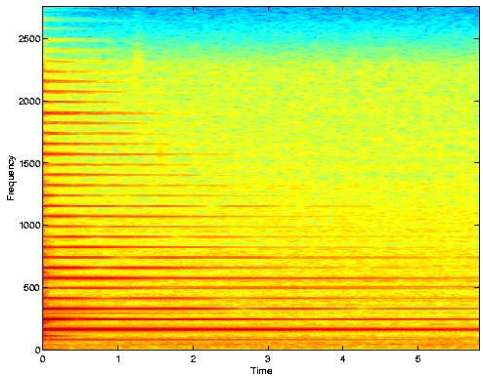


FIG. 1.4: *Spectrogramme du signal de pression acoustique générée par une guitare pincée sur sa corde grave (Mi6).*

1.2 La corde

1.2.1 Corde vibrante non amortie

L'étude des vibrations des cordes est très ancienne. Pythagore élabora sa gamme musicale en observant que les sons émis par deux cordes de même nature dont les longueurs avait un rapport simple (1:2, 1:3, 2:3 *etc* ...) produisaient un son agréable à l'oreille. D'une manière générale, la fréquence des sons émis par une corde dépend de sa masse, de sa tension, de sa longueur et des conditions imposées à ses extrémités. On rappelle quelques résultats élémentaires concernant la solution générale de la très classique équation de cordes vibrantes.

1.2.1.a Equation de corde vibrante

On considère une corde sans raideur, de longueur l_c, inextensible, de masse linéique constante ρ_c, soumise à une tension T. On néglige l'action de la pesanteur devant la tension imposée, de sorte que sa position au repos est droite et confondue avec l'axe Ox. On s'intéresse aux déplacements transversaux de part et d'autre de cette position d'équilibre dans le plan vertical xOz. Cette corde est soumise à une force extérieure de densité linéique $f_c(x,t)$ qui représentera l'effort exercé par le doigt de l instrumentiste. On suppose que ses déplacements sont suffisamment petits pour que la tension reste constante au cours du temps, ce qui permet de linéariser les équations fondamentales de la dynamique appliquées à une petite portion de corde. Cette hypothèse est justifiée dans la mesure où les vibrations d'une corde de guitare longue de 60 cms sont de l'ordre de quelques millimètres.

Un point M_0 d'abscisse x au repos est situé au point M à l'instant t. Le mouvement de la corde est donc décrit par le déplacement $\underline{M_0M}$ représenté par une seule inconnue scalaire u_c (voir la figure (1.5)). On note ainsi :

$$\underline{M_0M} = u_c(x,t)\underline{e}_z. \tag{1.1}$$

La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x,t)$ que l'on suppose également

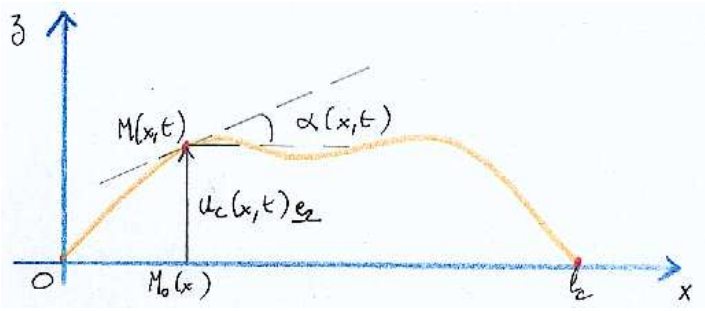


FIG. 1.5: *Géométrie de la corde*

petit. On aura donc :

$$\alpha(x,t) \approx \tan(\alpha(x,t)) = \frac{\partial u_c}{\partial x}(x,t). \tag{1.2}$$

La contrainte exercée au point x par la corde sur une portion de corde $[x, x+dx]$ est en fait la composante normale de la tension en ce point. Dans la suite, cette contrainte sera notée q. On a (voir la figure (1.13) concernant le couplage corde-plaque) :

$$q(x,t) = T\alpha(x,t) \approx T\frac{\partial u_c}{\partial x}(x,t). \tag{1.3}$$

Sous ces hypothèses, et en l'absence d'effort extérieur, **le déplacement u_c est régi par l'équation des cordes vibrantes non amorties** :

$$\boxed{\rho_c \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x,t) - T\frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} = f_c(x,t), \quad \forall x \in]0, l_c[, \forall t,} \tag{1.4}$$

où le terme $\rho_c \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x,t)$ représente l'inertie d'accéleration locale tandis que le terme $T\dfrac{\partial^2 u_c}{\partial x^2}$ représente le rappel du à la tension de la corde.

On reconnaît ici la très classique équation des ondes monodimensionnelle, de célérité $c_c = \sqrt{T/\rho_c}$, dont la solution générale, due à d'Alembert, est donnée par la superposition de deux ondes se propageant sans se déformer à la vitesse c_c, l'une dans le sens des x croissants, l'autre dans le sens des x décroissants. Ces solutions sont dites propagatives car elles mettent en évidence le phénomène de propagation d'un signal, intuitivement associé à la notion d'onde.

Remarque 1.1 *En toute généralité, on aurait pu également autoriser des mouvements dans l'autre direction transversale à la corde, c'est à dire autoriser des déplacements selon la direction (Oy). Dans ce cas le déplacement d'un point M_0 serait noté $\underline{M_0M} = u_y(x,t)\underline{e}_y + u_c(x,t)\underline{e}_z$. Il s'avère que les deux composantes u_y et u_c sont indépendantes l'une de l'autre : leur mouvement est régi par la même équation de corde vibrante (1.4).*

1.2.1.b Conditions aux bords

La longueur de la corde l_c est en fait déterminée par la position du doigt du musicien le long du manche. Soit celui ci pince la corde à vide, soit il exerce une pression sur la corde entre deux frets avec son doigt. Dans le premier cas, l'extrémité de la corde est en contact avec le sillet, dans le second, elle est en contact avec la fret, comme on peut le voir sur la figure (1.6). On néglige les vibrations du manche, de sorte que celui ci est totalement immobile dans le référentiel de la pièce. Il est alors naturel de supposer dans un cas comme dans l'autre que **le déplacement de la corde est nul à cette extrémité**, ce qui s'écrit :

$$\boxed{u_c(0,t) = 0,\ \forall t.} \tag{1.5}$$

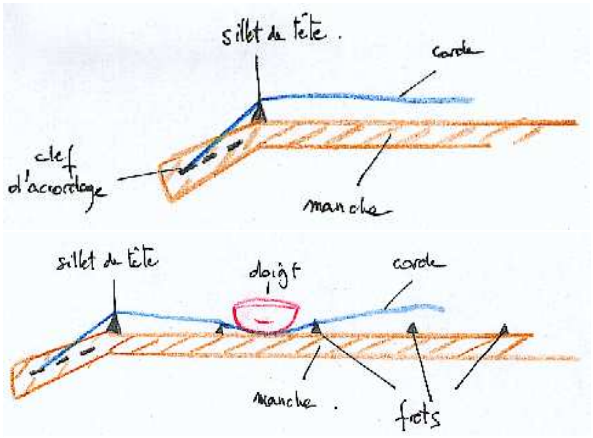


FIG. 1.6: *Contact de la corde au sillet ou sur une fret*

Remarque 1.2 *En situation de jeu, de la longueur de la corde est en fait amenée à varier. Nous nous contentons ici de considérer que l_c est un paramètre fixé.*

A l'autre extrémité, la corde est fixée au chevalet. Ici encore, elle est en contact permanent avec une sillet rigidement liée au chevalet. C'est par ce point que la corde transmet une partie de son énergie à la table d'harmonie, ce qui la met en vibration. Le chevalet est donc lui même en mouvement. Cet aspect est décrit plus en détail à la section 1.5. Disons juste, pour fixer les idées que si l'on suppose que le chevalet est un solide rigide possédant un seul degré de liberté, animé d'un mouvement vertical, décrit par le déplacement de son centre de gravité, noté u_{chev}(t), on aura :

$$\boxed{u_c(l_c,t) = u_{chev}(t),\ \forall t.} \tag{1.6}$$

1.2.1.c Rappel : solution générale de l'équation de corde vibrante

Dans l'immédiat, pour rappeler brièvement quelques résultats classiques concernant l'équation de cordes vibrantes, nous supposerons que le chevalet est immobile, soit :

$$u_c(l_c,t) = 0,\ \forall t, \tag{1.7}$$

ce qui nous conduit finalement à de simples conditions aux limites de type *Dirichlet*, et nous supposerons également que les forces extérieures sont nulles (soit $f_c(x,t) = 0$).

Le problème de corde vibrante homogène fixée à ses deux extrémités est alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \rho_c \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} - T \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} & = & 0, & \forall x \in]0, l_c[, \forall t, \\ u_c(l_c, t) & = & 0, & \forall t, \\ u_c(0,t) & = & 0, & \forall t. \end{array} \right. \tag{1.8}$$

On peut dans ce cas décomposer toute solution à l'aide de la base $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des modes propres du laplacien monodimensionnel avec conditions de Dirichlet. Rappelons que cette base est donnée par :

$$\xi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l_c}x\right), \text{ pour } x \in [0, l_c] \text{ et } n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.9}$$

Et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 \xi_n}{\partial x^2}(x) = \lambda_n^2 \xi_n(x), \forall x \in [0, l_c], \\ \xi_n(0) = \xi_n(l_c) = 0, \end{array} \right. \tag{1.10}$$

où

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{l_c^2}.$$

On cherche alors des solutions du problème (1.4-1.5-1.7) sous la forme :

$$u_c(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\xi_n(x), \tag{1.11}$$

et on trouve aisément :

$$\alpha_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t), \tag{1.12}$$

où

$$\omega_n = c_c \frac{n\pi}{l_c}$$

est la pulsation du n$^{\text{ème}}$ mode. Celui ci vibre donc à la fréquence $f_n = \dfrac{\omega_n}{2\pi} = n\dfrac{c_c}{2l_c}$. Le premier mode est appelé "fondamental" et les suivants sont appelés les partiels. Ces modes sont dits *harmoniques* car leur fréquence est un multiple de la fréquence fondamentale $f_1 = \dfrac{c_c}{2l_c}$.

On peut montrer que la solution générale du problème (1.4) avec conditions de type Dirichlet peut s'ecrire :

$$u_c(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))\xi_n(x). \tag{1.13}$$

FIG. 1.7: *Les premiers modes de vibrations d'une corde*

Pour être complet, il reste à choisir des conditions initiales $u_c(x,0)$ et $\partial_t u_c(x,0)$ qui permettront de déterminer de manière unique les coefficients A_n et B_n.

Remarque 1.3 *On appelle solution stationnaire toute solution à variable séparée de (1.4-1.5-1.7), c'est à dire toute solution de la forme $u_c(x,t) = f(t)g(x)$. On montre alors très simplement que les solution stationnaires sont données par :*

$$u_c(x,t) = (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))\xi_n(x), \quad A_n, B_n \in \mathbb{R} \tag{1.14}$$

Ainsi, la solution générale du problème (1.4) avec conditions de type Dirichlet est une superposition de solutions stationnaires.

Précisons que ces solutions sont dites stationnaires en opposition aux solutions propagatives décrites sommairement ci dessus, puisqu'ici il n'y a justement aucune propagation ici : il s'agit simplement d'un mode qui vibre sur place *à une vitesse donnée.*

On a représenté schématiquement sur la figure (1.7) les vibrations des trois premiers modes. Les points d'amplitude nulles sont appelés nœuds de vibrations *et sont situés en $\frac{kl_c}{n}$, pour $k \in \{0 \dots\}$. Les points d'amplitude maximale sont appelés* ventres de vibration *et sont situés en $\frac{l_c}{n}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.*

Remarque 1.4 *Dans le cas d'une corde, le spectre fréquentiel est naturellement* harmonique, *c'est à dire que les fréquences sont un multiple de la fréquence fondamentale. Mais ce n'est pas le cas de toutes les structures vibrantes que l'on peut trouver dans les instruments de musique. Par exemple, les modes d'une membrane de timbale sont totalement inharmoniques. Pour obtenir un son plus agréable à l'oreille, on couple cette membrane à une cavité fermée ce qui a pour effet de rapprocher ses modes d'une suite harmonique. Un autre exemple est donné par les lames d'un xylophone. Si celles ci étaient de simples parallélépipèdes en bois, leur spectre serait inharmonique. Les lames ont donc une section variable (en forme d'arche de pont) de manière à s'assurer que la fréquence des deux premiers partiels est dans un rapport entier avec les fondamental. On parle alors de vibration pseudo-harmonique ([20]).*

1.2.2 Prise en compte des phénomènes de dissipation dans la corde

1.2.2.a Les origines diverses des pertes vibratoires

Les origines des pertes vibratoires sont très variées. Du fait de leur multiplicité, il est très difficile de distinguer telle cause plutôt qu'une autre, et par conséquent plus difficile encore

de les quantifier. On peut néanmoins distinguer :

les pertes aux bords, ici, par exemple, les extrémités de la corde sont en contact avec des sillets qui absorbent en réalité une partie de l'énergie transportée par la corde. Nous ne les prenons pas en considération.

les pertes par rayonnement, négligeables dans le cas d'une corde car ses dimensions n'ont pas d'effet sur l'air.

les pertes par couplage, fondamentales dans le cas d'une guitare, puisque c'est une partie de l'énergie transmise à la caisse via le chevalet qui parviendra à notre oreille. Ces pertes seront prises en compte naturellement dans le modèle, puisque justement un modèle de couplage au chevalet y est proposé.

les pertes internes au matériau, dues à des dissipations d'énergie au sein même de sa structure. Les phénomènes de pertes internes sont eux mêmes délicat à décrire. Ils peuvent être par exemple d'origine thermique, mais ce phénomène est négligeable pour un matériau comme le nylon, ou d'origine viscoélastique. Il existe une grande variété de modèles qui cherchent à prendre en compte ces phénomènes.

1.2.2.b Un modèle d'amortissement intrinsèque

Nous avons choisi ici d'introduire deux termes d'amortissement linéaires plutôt classiques et relativement aisés à manipuler dans le cadre d'une résolution numérique :

un terme d'amortissement visqueux :

$$-\beta c_c^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2}, (\beta > 0)$$

qui illustre les phénomènes de relaxation du matériau, c'est à dire la prise en compte d'un effet de retard entre la force exercée sur une portion de corde et la déformation qui en résulte (ce phénomène est également qualifié de phénomène d'hystérésis). Ce type d'amortissement affecte davantage les hautes fréquences et est très faible voire négligeable pour les basses fréquences (ce qu'on peut comprendre intuitivement on considérant que le retard est d'autant plus grand que le mouvement est rapide).

un terme d'amortissement fluide appelé ainsi car il est proportionnel à la vitesse :

$$R_c \partial_t u_c, (R_c > 0).$$

Ce type d'amortissement extrêmement simple ne dépend pas de la fréquence comme on va le voir ci dessous, mais uniquement du coefficient R_c. Usuellement, l'amortissement fluide décrit l'effet des forces de frottement exercées sur un solide en mouvement au sein d'un fluide ou en contact avec un autre solide. Les pertes de ce type pour une corde en contact avec l'air sont en fait négligeables. On ne peut donc pas mettre ce terme directement en relation avec une cause physique précise. Si on l'introduit ici, c'est plutôt pour assurer un amortissement minimal en basse fréquence, que ne permet pas l'amortissement visqueux.

Introduisant les deux termes d'amortissement par pertes internes, l'équation de corde vibrante (1.8) devient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x,t) - c_c^2 \left(1 + \beta \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + R_c \partial_t u_c = 0, \forall x \in]0, l_c[, \forall t,} \tag{1.15}$$

1.2.2.c Solution générale du modèle d'amortissement

Afin de déterminer plus quantitativement l'effet de ces deux termes, regardons comment en sont affectées les solutions stationnaires non amorties (1.14) déterminées plus haut.

Si on se restreint aux fréquences audibles, comprises entre 16Hz et 20000 Hz, et en prenant des valeurs typiques de β et R_c, (typiquement $R_c \approx 1 s^{-1}$ et $\beta \approx 10^{-7} s$), on montre que les solutions stationnaires de l'équation de corde vibrante amortie (1.15) correspondent quasiment aux solutions de l'équation non amortie, pondérées par un coefficient d'amortissement exponentiel (voir annexe C) :

$$u_c(x,t) = e^{-C_n t}(A\cos(\tilde{\omega}_n t) + B\sin(\tilde{\omega}_n t))\xi_n(x), \tag{1.16}$$

où

$$C_n = \frac{R_c + \beta\omega_n^2}{2} \text{ et } \tilde{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1 - \frac{C_n^2}{\omega_n^2}}$$

Cette analyse permet de faire les remarques suivantes :

- la fréquence des solutions stationnaires non amortie est à peine perturbée par l'amortissement, puisque le facteur de perturbation $\sqrt{1 - C_n^2/\omega_n^2}$ est très proche de 1
- le taux d'amortissement introduit par le terme visqueux vaut $(\beta\omega_n^2)/2$ et croit donc rapidement avec la fréquence du mode considéré. Tandis que le taux d'amortissement introduit par le terme de type fluide vaut $R_c/2$ et touche donc de la même manière toutes les fréquences.
- A basses fréquences, l'amortissement fluide est prépondérant devant l'amortissement visqueux. En effet, pour $\omega_n \leq \sqrt{1/\beta}$, soit, dans le cas de notre exemple, pour une fréquence inférieure à environ 500 Hz, on a $R_c \geq \beta\omega_n^2$. Le coefficient d'amortissement fluide permet donc bien de modéliser un amortissement en basses fréquences qui serait insuffisant avec par le seul terme d'amortissement visqueux.

Finalement, ce simple modèle d'amortissement est donc satisfaisant dans la mesure où il répond à notre exigence minimale de croître avec la fréquence, et il sera amplement suffisant pour cette étude.

Remarque 1.5 *Ici on considère que la courbe représentant le taux d'amortissement en fonction de la fréquence est une parabole ($C_n = \frac{R_c + \beta 4\pi^2 f_n^2}{2}$). Il nous faut alors ajuster les deux paramètres β et R_c*

pour que cette parabole "colle" au mieux des données obtenues par des mesures de taux d'amortissement effectuées sur des cordes réelles. [1] *On remarque ici que l'approche naturel de l'amortissement doit être faite dans le domaine fréquentiel, puisque cette courbe que l'on désire est définie dans le domaine fréquentiel. Toute la difficulté consiste alors à proposer un modèle qui soit transposable simplement dans le domaine temporel, ce qui revient à pouvoir l'écrire à l'aide d'opérateurs différentiels locaux.*

Remarque 1.6 *On pourrait proposer d'autres modèles d'amortissement interne. Une généralisation du modèle présenté ici est donnée par le modèle de Wiechert (voir par exemple [46]). Celui ci consiste à écrire un modèle plus sophistiqué de la relation contrainte-déformation au sein du matériau. Dans le cas d'une corde, on introduit la contrainte q, qui, dans le cas non amorti n'est autre que la composante normale de la tension, soit $q = T\partial_x u_c$. Le modèle de Wiechert s'écrit :*

$$\begin{cases} \rho_c \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} - \dfrac{\partial q}{\partial x} + R_c \dfrac{\partial u_c}{\partial t} = 0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \gamma_n \frac{\partial^n q}{\partial t^n} = T \sum_{m=0}^{M} \mu_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \partial_x u_c. \end{cases} \tag{1.17}$$

Notons que notre modèle consiste alors à prendre $N = 0$ et $M = 1$, avec $\gamma_0 = 1$, $\mu_0 = 1$ et $\mu_1 = \beta$. Dans ce cas, la contrainte q est définie par :

$$q = T\frac{\partial u_c}{\partial x} + T\beta \frac{\partial^2 u_c}{\partial x \partial t} \tag{1.18}$$

FIG. 1.8: *Intérieur d'une table d'harmonie*

1. Quoique, en pratique, il ne faut pas totalement chercher à fitter des courbes expérimentales, puisque les taux d'amortissement mesurés sont dus à toutes les pertes, dont les pertes au bords, et non seulement aux pertes internes.

1.3 La table d'harmonie

1.3.1 Présentation

La table d'harmonie est une fine plaque de bois, en général en épicéa. Elle est raidie localement par un barrage, réalisé à l'aide de baguettes de bois plus rigide, par exemple de l'acajou ou du cèdre canadien, dont la première fonction est de la consolider suite à un rabotage important (figure (1.8)). La table supérieure doit en effet résister à l'effort permanent exercé par la tension des six cordes attachées au chevalet.

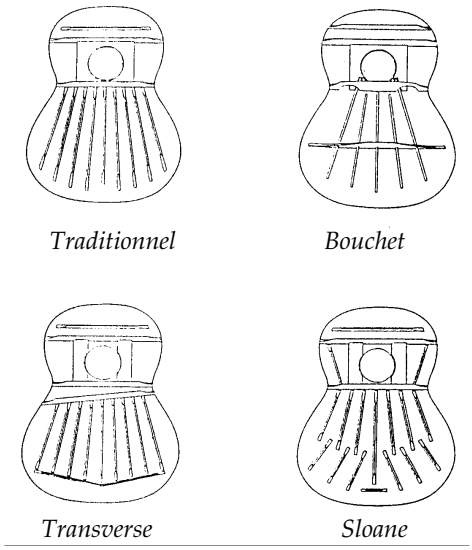


FIG. 1.9: *Quelques barrages de guitare (*in Sloane [58]*)*

Ce barrage a également une influence considérable sur la fréquence et sur la forme des modes, et par conséquent sur le rayonnement de la table. En particulier, l'effet du barrage est de concentrer les vibrations des modes dans le "ventre" de l'instrument et d'augmenter notablement les fréquences propres de la table. Ces barres peuvent être arrangées de différentes manières, et c'est un élément critique de la qualité d'une guitare. Quelques barrages sont présentés sur la figure (1.9). **La prise en compte d'un barrage le plus général possible est donc un des objectifs de la modélisation.**

Une difficulté de la modélisation réside dans le matériau. Le bois, substance naturelle, est un matériau vivant qui ne peut de ce fait entrer dans le cadre d'une modélisation très rigoureuse. Ses propriétés sont très variables d'un échantillon à l'autre, puisqu'elles dépendent directement de l'histoire de l'individu (l'arbre) dont il provient. Suivant les années, les cernes du bois ne sont pas toujours pareillement espacées. En outre, des nœuds correspondant au départ des branches induisent une inhomogéneité flagrante, qui n'est pas désiré pour le bois de lutherie. Si bien qu'un luthier aura beau construire deux instruments exactement de la même taille et de la même forme, à l'aide des mêmes techniques, les fréquences de résonances varieront de quelques Hz, et ce sera un instrument complètement différent. On peut également noter que ses propriétés dépendent très fortement des conditions atmosphériques (en particulier la température et l'humidité).

Néanmoins on pourra considérer que le bois utilisé pour la lutherie a été choisi avec soin, de sorte qu'il ne présente pas de nœud apparent. On supposera que les cernes sont régulièrement espacées et toutes dans la même direction. Un simple contrôle visuel sur la moindre guitare confirme, au moins grossièrement, ces deux hypothèses. La raideur d'une plaque de bois est bien évidemment beaucoup plus importante dans la direction parallèle aux cernes que dans la direction perpendiculaire aux cernes. **On considérera donc que le bois est un matériau élastique linéaire orthotrope.**

1.3.2 Equation de plaque non amortie

1.3.2.a Modèle de Kirchhoff-Love

La table supérieure d'une guitare mesure typiquement 50cm de long pour une épaisseur de 2 à 3 mm, si bien qu'il est complètement justifié de la modéliser à l'aide du modèle de plaque de Kirchhoff-Love, décrit en détail à l'annexe A.

On confond alors la plaque avec sa surface médiane de sorte que l'on considère qu'elle occupe le domaine ω de $\mathbb{R}^2$. Son bord $\delta\omega$, noté γ est composé de deux parties, son bord extérieur noté γ_0 (on suppose donc que $\mu(\gamma_0) > 0$) et le bord du trou noté γ_l. La normale extérieure à ω est notée $\underline{n} = (n_x, n_y)$ et la tangente au bord, choisie de manière à ce que le trièdre $(\underline{n}, \underline{\tau}, \underline{e}_z)$ soit orthonormé direct, est notée $\underline{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ (voir la figure (1.10)).

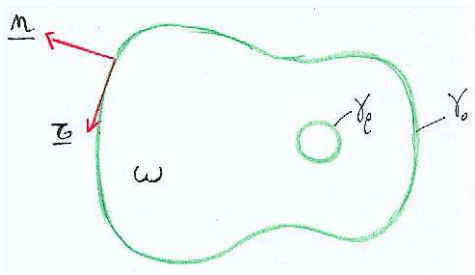


FIG. 1.10: *Description géométriques de la table d'harmonie*

Les vibrations de la table sont alors décrites *en toute généralité* par un champ de déplacement $\underline{u}_p(x, y)$ défini sur ω par :

$$\underline{u}_p(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y), u_z(x, y))$$

Le déplacement $\underline{u}_m(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y))$, parallèle à la table, est appelé *mouvement membranaire* et le déplacement vertical $u_z(x, y)$ est appelé *mouvement de flexion*.

Nous n'avons pris en compte que la polarisation verticale de la corde, si bien que l'effort exercé par la corde sur la table consistera en une charge surfacique perpendiculaire à la table, comme on le verra plus loin (*cf.* section 1.5). D'autre part la charge de l'air consiste en une force de pression exercée sur les faces supérieures et inférieures de la table. Ici encore, il s'agit d'une charge surfacique perpendiculaire à la table (voir la modélisation des couplages à la section 1.5). Au total, dans le modèle que nous utiliserons, le chargement de la table est donc un *chargement de flexion pure* (voir page 361).

Faisant momentanément abstraction des raidisseurs, et si on suppose que la plaque est équilibrée, on est dans la situation particulière où un tel chargement induit un mouvement de flexion pure, c'est à dire que le déplacement de la surface médiane, est uniquement vertical.

On décrira donc le mouvement de la plaque l'aide du seul déplacement de flexion $u_z(x, y)$ défini sur le domaine ω occupé par la surface médiane de la table.

Notation 1.2 *Dans la mesure où nous ne nous intéressons pas aux mouvements membranaires, l'indice "z" de cette inconnue u_z aurait quelque chose d'incongru dans la suite de ce document. Pour des raisons de commodité, nous noterons donc désormais $u_z(x, y) = u_p(x, y)$ le déplacement (vertical) de la table supérieure, qui est une* inconnue scalaire.

1.3.2.b Modélisation des raidisseurs et du chevalet

Les raidisseurs Dans un premier temps, les raidisseurs sont modélisés de la façon la plus simple qui soit. On les considère comme une *variation locale des propriétés de la table d'harmonie*, c'est dire comme **une variation de l'épaisseur, de la densité ou des modules de rigidité.**

De cette manière on prend effectivement en compte la nature différente de ces baguettes de bois, qui sont en générale construite dans un bois nettement plus dur que celui utilisé pour la table. Vu leur dimension particulière (il s'agit en fait plus de barres que de plaques), on pourra considérer qu'il s'agit d'un matériau isotrope, de sorte que l'orientation des raidisseurs n'est pas assujettie aux seules directions donnée par l'orthotropie de la table.

Cette modélisation a l'avantage essentiel de ne pas ajouter d'inconnue supplémentaire : **la table supérieure raidie est vue comme un solide global décrit à l'aide du seul déplacement vertical de la surface médiane de la plaque**. Elle s'avérera satisfaisante dans la mesure ou elle permet d'obtenir des résultats conformes avec l'expérience tant sur la forme des modes propres que sur les fréquences propres de ces modes (voir la section 2.1).

Remarque 1.7 *La plus importante amélioration à laquelle il faudrait s'attacher à mes yeux est d'enrichir la modélisation de la table d'harmonie et du système de barrage qui est exagérément simplifiée ici. En effet :*

- *Les raidisseurs ont, en général, une largeur de moins de 1 cm et une épaisseur qui peut atteindre 1,5 cm, auquel cas les hypothèses de plaque mince ne sont plus justifiées pour de tels solides.*
- *Afin de conserver la confortable propriété de découplage des mouvements membranaires et de flexion on suppose toujours que la plaque est symétrique par rapport à sa surface médiane. Or les raidisseurs induisent une dissymétrie flagrante de la table d'harmonie. Ainsi, même si on se contente d'un chargement de flexion pure, perpendiculaire à la plaque, le mouvement membranaire n'est pas rigoureusement nul.*

Le chevalet quant à lui est modélisé de la même façon que les raidisseurs, c'est à dire qu'il est considéré comme une inhomogénéité de la table. Ici encore, a priori, celui ci induit un déséquilibre de la table qui n'est pas pris en compte. En revanche, ses dimensions permettent effectivement de le considérer comme une plaque mince orthotrope, et il s'avère que l'orthotropie du chevalet a le bon goût de suivre les mêmes directions que celle de la table. La seule différence étant que la direction la plus raide pour le chevalet est la plus souple pour la table.

1.3.2.c Conditions au bord

Sur son bord extérieur γ_0, la table supérieure est collée sur une baguette de bois, la contre éclisse, elle même collée (et parfois clouée) sur les éclisses (*cf.* figure (1.11)). Il paraît raisonnable de supposer qu'**il s'agit d'un encastrement**. Enfin, le bord du trou, noté γ_l, n'est soumis à aucune contrainte particulière et il convient de supposer qu'on a une **condition libre le long de γ_l.**

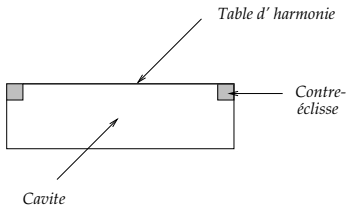


FIG. 1.11: *Collage de la table sur les éclisses*

1.3.2.d Equations régissant le mouvement de la table d'harmonie

Au total, la table d'harmonie est modélisée par l'équation en flexion du modèle de Kirchhoff-Love pour un matériau inhomogène, orthotrope, encastrée sur une partie de son bord γ_0 et libre sur l'autre partie de son bord γ_l.

Le mouvement est décrit par le déplacement vertical u_p, régi par les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \delta\rho_p \dfrac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} & = & f_p, & \text{dans } \omega, \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} - \delta^3 \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p) & = & 0, & \text{dans } \omega, \\ u_p & = & 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \partial_n u_p & = & 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\ \underline{n}).\underline{n} & = & 0, & \text{sur } \gamma_l, \\ (\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{\tau}] & = & 0, & \text{sur } \gamma_l. \end{array}\right. \tag{1.19}$$

- $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ est appelé le *moment fléchissant*, et la quantité $\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}$ est l'effort tranchant. Les deux conditions portant sur le bord libre γ_l correspondent donc, d'une manière approchée à une condition de moment et d'effort nul.

- ρ_p est la densité de la plaque,

- $\mathbf{C}$ est le tenseur orthotrope de rigidité de plaque de Kirchhoff-Love [2]. Si on utilise la classique correspondance entre les tenseurs symétriques d'ordre deux et les vecteurs à trois composantes :

$$(M_{xx} \leftrightarrow M_1), \quad (M_{yy} \leftrightarrow M_2), \quad (M_{xy} \leftrightarrow M_3),$$

on peut écrire :

$$\mathbf{C}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} \dfrac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & -\dfrac{E_y\nu_{xy}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ -\dfrac{E_x\nu_{yx}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \dfrac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy}, \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

où E_x et E_y sont les modules de Young, ν_{xy} et ν_{yx} sont les coefficients de Poisson et G_{xy} est le module de cisaillement.

- δ est l'épaisseur de la table.

- f_p est la densité surfacique du chargement.

- ∂_τ et ∂_n désignent respectivement la dérivée tangentielle et la dérivée normale le long du bord γ_l.

- div désigne la divergence usuelle appliquée à des vecteurs de dimension 2. Il s'agit donc d'un scalaire. $\mathrm{div}\,\underline{\theta} = \partial_z\theta_x + \partial_y\theta_y$.

- $\underline{\nabla}$ est le gradient usuel appliqué à fonction suffisamment régulière de deux variables. Il s'agit donc d'un vecteur de dimension 2. $\underline{\nabla} u_p = (\partial_x u_p, \partial_y u_p)$.

- $\underline{\underline{\varepsilon}}$ représente l'opérateur des déformations linéarisées usuel. Il s'agit d'un tenseur symétrique d'ordre deux.

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{\theta}) = \frac{1}{2}(\partial_\beta\theta_\alpha + \partial_\alpha\theta_\beta), \text{ pour } \alpha,\beta \in \{x,y\}$$

- $\underline{\mathrm{Div}}$ est la divergence appliquée à des tenseurs d'ordre 2. $\underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ est un vecteur de dimension 2 dont les composantes sont données par la divergence de chacun des vecteurs lignes du tenseur $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$.

$$\underline{\mathrm{Div}} \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x M_{xx} + \partial_y M_{xy} \\ \partial_x M_{yx} + \partial_y M_{yy} \end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{C}$ est noté $\bar{\mathbf{R}}$ en annexe, *cf.* page (A.2.3)

Remarque 1.8 *La plaque étant supposée hétérogène, les trois paramètres ρ_p, $\mathbf{C}$ et δ sont en fait variables; il s'agit donc de fonctions définies sur ω. En pratique, elles sont choisies constantes par morceaux. En outre, on suppose qu'elles sont bornées et qu'elles vérifient les hypothèses de positivité usuelles.*

Notation 1.3 *Dans la suite de ce document, pour simplifier la présentation, on ne fera plus apparaître l'épaisseur δ. Il est ainsi sous entendu que $\rho_p \equiv \delta\rho_p$ et $\mathbf{C} = \delta^3\mathbf{C}$.*

Remarque 1.9 *On peut éliminer le moment fléchissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ dans l'équation (1.19) afin d'obtenir une équation portant uniquement sur u_p. :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \delta\rho_p\dfrac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \operatorname{div}\underline{\operatorname{Div}}\,\delta^3\mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p) &=& f_p & \textit{dans } \omega \\ u_p &=& 0, & \textit{sur } \gamma_0, \\ \partial_n u_p &=& 0, & \textit{sur } \gamma_0, \\ (\delta^3\mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p)\underline{n}).\underline{n} &=& 0, & \textit{sur } \gamma_l, \\ [\underline{\operatorname{Div}}\,(\delta^3\mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p))].\underline{n} + \partial_\tau[(\delta^3\mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p)\underline{n}).\underline{\tau}] &=& 0, & \textit{sur } \gamma_l. \end{array}\right. \tag{1.21}$$

1.3.3 Prise en compte des phénomènes de dissipation dans la table

1.3.3.a Les diverses origines des pertes dans la table d'harmonie

L'équation précédente ne prend en compte aucun phénomène de perte. Rappelons que les phénomènes de dissipations jouent un rôle crucial dans la perception du son produit par l'instrument. Il s'agit donc ici aussi de proposer un modèle suffisant pour rendre compte de ces phénomènes. De même que pour la corde (*cf.* section 1.2.2), diverses causes sont à l'origine de ces phénomènes de perte. Reprécisons, plus brièvement, ce qu'il en est dans le cas de la table d'harmonie :

les pertes aux bords dues à l'absorption d'une partie de l'énergie par les colles utilisées au bord ou pour fixer les raidisseurs et le chevalet. Les vernis absorbent également une partie de l'énergie. Nous ne les prenons pas en considération ici.

les pertes par rayonnement qui seront automatiquement prises en compte, grâce à la modélisation du couplage entre la plaque et l'air.

les autres pertes par couplage également prises en compte par la modélisation du couplage avec la corde

les pertes internes que nous supposerons uniquement dus à des phénomènes de pertes viscoélastiques (*ie.*nous négligerons ici aussi les pertes d'origine thermique)

1.3.3.b Modèle d'amortissement intrinsèque

Nous choisirons de les modéliser de la même manière que pour la corde, à l'aide de deux termes :

un terme d'amortissement visqueux qui simule les phénomènes de retard dans la loi de comportement du matériau et permet d'introduire une dépendance fréquentielle de l'amortissement. La deuxième équation du système (1.19), c'est à dire la loi de comportement du matériau, est alors modifiée de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \delta^3 \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) + \eta \frac{\partial}{\partial t} \delta^3 \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p), (\eta > 0), \tag{1.22}$$

où, pour simplifier, le coefficient d'amortissement visqueux η est supposé constant sur toute la plaque.

un terme d'amortissement fluide

$$\delta \rho_p R_p \frac{\partial u_p}{\partial t}, (R_p > 0),$$

dont le rôle essentiel est d'assurer un amortissement minimal aux basses fréquences, non pris en compte par l'amortissement visqueux ci dessus (voir le paragraphe équivalent à la section 1.2.2).

En introduisant ces deux termes d'amortissement, l'équation de plaque de Kirchhoff-Love devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \delta \rho_p \dfrac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} + \delta \rho_p R_p \dfrac{\partial u_p}{\partial t} & = & f_p & \text{dans } \omega, \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} - \delta^3 \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) - \eta \dfrac{\partial}{\partial t} \delta^3 \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) & = & 0, & \text{dans } \omega, \\ u_p & = & 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \partial_n u_p & = & 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{n} & = & 0, & \text{sur } \gamma_l, \\ (\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{\tau}] & = & 0, & \text{sur } \gamma_l. \end{array} \right. \tag{1.23}$$

1.3.3.c Solution générale du modèle de table amortie

On peut éliminer le moment fléchissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ dans cette équation. Dans ce cas, l'équation intérieure devient :

$$\delta \rho_p \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + (1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}) \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \delta^3 \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) + \delta \rho_p R_p \frac{\partial u_p}{\partial t} = f_p, \text{ dans } \omega. \tag{1.24}$$

On peut faire une analyse similaire à celle effectuée à la section 1.2.2, pour comprendre l'effet de ces deux termes d'amortissement.

On définit l'opérateur de plaque $\mathcal{K}$ de Kirchhoff-Love :

$$\mathcal{K} \ : u_p \mapsto \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \delta^3 \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}\, (\underline{\nabla} u_p) \tag{1.25}$$

L'équation de plaque amortie, sans second membre, s'écrit alors :

$$\begin{cases} \delta\rho_p \dfrac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \left(1 + \eta \dfrac{\partial}{\partial t}\right) \mathcal{K} u_p + \delta\rho_p R_p \dfrac{\partial u_p}{\partial t} = f \text{ dans } \omega \\ + \text{conditions au bord.} \end{cases} \tag{1.26}$$

Sans entrer dans les détails d'une analyse mathématique rigoureuse, admettons formellement que, compte tenu des conditions aux limites données par (1.21), $\mathcal{K}$ est un opérateur symétrique positif diagonalisable. On note $[(\Xi)_n(\underline{x})]_n$ la base de $L^2(\omega)$ des modes propres de $\mathcal{K}$ associés à la suite de valeurs propres $(\mu_n)_n$.

On montre alors que toute solution du problème (1.26) dans le cas non amorti peut s'écrire comme une somme de modes stationnaires, *ie.* sous la forme :

$$u_p(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \Xi_n(x,y), \tag{1.27}$$

où, dans le cas d'une plaque de densité constante, la pulsation ω_n est donnée par $\omega_n^2 = \dfrac{\mu_n}{\rho_p}$.

Si on se restreint aux fréquences audibles, l'effet des deux termes d'amortissement R_p et η sur les solutions stationnaires est essentiellement d'introduire un facteur d'amortissement exponentiellement décroissant de taux $C_n = \frac{\eta\mu_n^2 + R_p}{2\rho_p}$, ce qui conduit, en négligeant l'influence de l'amortissement sur la pulsation propre du mode n, à une solution générale de la forme (voir la section 1.2.2) :

$$u_p(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-C_n t} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \Xi_n(x,y), \tag{1.28}$$

Remarque 1.10 *Nous avons présenté ici un choix particulier d'amortissement essentiellement pour fixer les idées (mais également car c'était la forme d'amortissement choisie dans un premier temps au cours de ce travail). Il s'avère que la méthode spectrale employée pour la résolution de cette équation de plaque donnera beaucoup plus de latitude pour décrire les phénomènes de pertes internes dans la table d'harmonie.*

Cette résolution se fait en deux étapes. D'abord une discrétisation spatiale de l'opérateur $\mathcal{K}$, noté $\mathcal{K}_h$, fournit une approximation $\Xi_{n,h}$ des modes de $\mathcal{K}$. La seconde étape consiste en une résolution exacte *en temps de l'équation approchée en espace. Cela revient à résoudre pour chaque mode l'équation scalaire :*

$$\ddot{\alpha}_{n,h}(t) + 2C(\mu_{n,h})\dot{\alpha}_{n,h}(t) + \mu_{n,h}^2 \alpha(t) = f_{n,h}(t).$$

D'une certaine façon, on est dans le domaine fréquentiel. L'utilisation du modèle d'amortissement décrit ci dessus mène, on l'a vu, à $C(\mu_{n,h}) = \frac{\eta\mu_n^2}{2\rho_p} + \frac{R_p}{2}$. Mais on a toute latitude pour choisir une fonction C plus sophistiquée, même si celle ci n'a pas d'équivalent local dans le domaine temporel.

En pratique d'ailleurs, on choisit $C(\mu) = \frac{\eta\mu}{2\rho_p} + \frac{R_p}{2}$, *ce qui, très formellement, mènerait, dans le domaine temporel, à l'équation suivante :*

$$\delta\rho_p \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \left(\sqrt{\mathcal{K}} + \delta\rho_p R_p\right) \frac{\partial u_p}{\partial t} + \mathcal{K}u = 0.$$

1.4 L'équation des ondes acoustiques

Les vibrations de la table d'harmonie sont transmises à l'air par un mécanisme de couplage de type fluide structure. Ces vibrations se propagent dans l'air jusqu'à notre oreille, et nous percevons le son qu'elle produit. On parle de rayonnement acoustique de la table. Nous présentons dans cette section les équations qui permettent de décrire la propagation des ondes acoustiques dans l'air. La question des conditions aux limites sera abordée à la section section 1.5.2.

On suppose que l'air ambiant est un gaz parfait, homogène isotrope, occupant un domaine Ω. Celui ci est décrit, selon les hypothèses de la mécanique des fluides, à l'aide de trois grandeurs caractéristiques définies à chaque instant t en tout point (x, y, z) de Ω :

la pression acoustique $p(x, y, z, t)$**,** fonction scalaire exprimée en Pascals (Pa). Elle est définie comme l'écart de la pression avec la pression atmosphérique au repos noté P_0 (il s'agit donc en fait d'une *surpression* algébrique). Ainsi, si $P(x, y, z, t)$ représente la pression totale, on aura :

$$p(x, y, z, t) = P(x, y, z, t) - P_0.$$

La vitesse $\underline{\mathbf{v}}_a(x, y, z, t)$**,** vecteur à trois composantes, exprimé en $m.s^{-1}$. Il s'agit de la vitesse moyenne des particules situées dans un volume élémentaire centré autour du point (x, y, z) à l'instant t.

la densité $\rho(x, y, z, t)$**,** , fonction scalaire exprimée en $kg.m^{-3}$. Il s'agit de la densité moyenne d'un volume élémentaire centré autour du point (x, y, z) à l'instant t. On notera - $\rho'(x, y, z, t)$ l'écart de de la densité avec la densité au repos notée ρ_a. Ainsi :

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_a + \rho'(x, y, z, t).$$

L'air est supposé initialement au repos, ce qui s'écrit :

$$p(x, y, z, 0) = 0, \quad \underline{\mathbf{v}}_a(x, y, z, 0) = 0, \quad \rho'(x, y, z, 0) = 0.$$

Enfin, le fluide est supposé divariant, ce qui signifie que la pression totale P ne dépend que de sa masse volumique ρ et de l'entropie spécifique s via l'équation d'état :

$$P = P(\rho, s).$$

Le comportement des grandeurs p, $\underline{\mathbf{v}}_a$ et ρ est régi par les équations de la mécanique des fluides. En l'absence de toute source de débit, et en négligeant la pesanteur, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{\mathbf{v}}_a) & = & 0 & \text{équation de conservation de la masse,} \\ \rho\left(\dfrac{\partial \underline{\mathbf{v}}_a}{\partial t} + (\underline{\mathbf{v}}_a.\underline{\nabla})\underline{\mathbf{v}}_a\right) & = & -\underline{\nabla} p & \text{équation d'Euler,} \\ P & = & P(\rho, s) & \text{loi de comportement du fluide.} \end{array}\right. \tag{1.29}$$

La célérité des ondes sonores étant petite devant la célérité des ondes thermiques, on supposera que les transformations sont adiabatiques, c'est à dire sans échange de chaleur. On néglige donc les phénomènes de perte thermique. La loi de comportement d'un fluide parfait en transformation adiabatique est donnée par :

$$P = \text{Cte}\rho^{\gamma}, \tag{1.30}$$

où γ est la constante caractéristique d'une transformation adiabatique. Pour l'air, $\gamma = 1.4$.

On supposera que les perturbations induites par la propagation des ondes sonores sont suffisamment faibles pour pouvoir linéariser les équations précédentes autour de la position de repos initiale. A titre d'exemple, le seuil d'audibilité correspond à une variation de pression de $2.10-5$ Pa, et le bruit assourdissant d'un avion au décollage correspond à une variation de l'ordre de 60 Pa (pour une pression atmosphérique au repos d'environ 10^5 Pa. Un développement limité des équations (1.29), au premier ordre, autour des fluctuations p, $\underline{\mathbf{v}}_a$ et ρ', donne :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_a \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \rho_a \dfrac{\partial \underline{\mathbf{v}}_a}{\partial t} + \underline{\nabla} p & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ p = \left(\dfrac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_a} \rho' & = & c_a^2 \rho', & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{1.31}$$

où $c_a^2 = \left(\dfrac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_a}$ est la célérité des ondes acoustiques. Dans le cas d'une transformation adiabatique, on aura :

$$\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}, \text{ soit } c_a = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_a}}.$$

Pour l'air, à température ambiante, on trouve $c_a = 340 m.s^{-1}$, ce qui est en bonne adéquation avec l'expérience et justifie donc a posteriori l'hypothèse de transformation adiabatique.

Il est alors possible d'éliminer ρ' dans les équations (1.31). On aboutit aux **équations d'Euler linéarisée formulées en vitesse-pression :**

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcll} \rho_a \dfrac{\partial \underline{\mathbf{v}}_a}{\partial t} + \underline{\nabla} p & = & 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mu_a \dfrac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a & = & 0, & \text{dans } \Omega. \end{array}\right.} \tag{1.32}$$

où $\mu_a = \dfrac{1}{\rho_a c_a^2}$ est le coefficient de compressibilité adiabatique.

Remarque 1.11 *On peut encore éliminer $\underline{\mathbf{v}}_a$ afin d'obtenir une équation portant sur le seul champ de pression acoustique p. On obtient alors l'équation des ondes acoustiques :*

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_a^2 \Delta p = 0, \ \textit{dans } \Omega. \tag{1.33}$$

La propagation des ondes sonores est donc régie par une simple équations des ondes scalaire tridimensionnelle de célérité c_a.

1.5 Un modèle pour la guitare

1.5.1 Modélisation du pincer de corde

Le modèle de pincer de corde le plus simple et le plus communément utilisé consiste à considérer que l'on écarte la corde de sa position au repos et qu'on la lâche sans vitesse initiale. En fait, la corde possède une vitesse au moment où elle est relâchée. C'est pourquoi nous préférons considérer que le joueur exerce sur la corde une force $\vec{f}_c$ modélisant *idéalement* le pincer (voir figure (1.12)). On suppose tout d'abord que l'on peut séparer la dépendance spatiale et temporelle de ce pincer, de sorte que l'on aura :

$$\underline{f_c}(x,t) = f_c(x,t)\underline{e}_z = g(x)h(t)\underline{e}_z, \tag{1.34}$$

où g est une fenêtre répartissant cette force sur une petite portion de la corde de longueur δ_c symbolisant la largeur du doigt, centrée au point d'abscisse x_0.

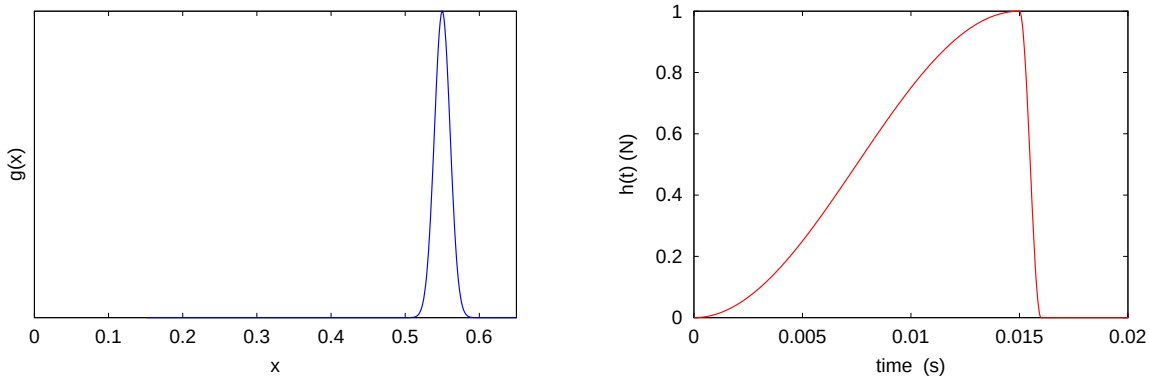


FIG. 1.12: *Modélisation idéale du pincer de corde. Dépendance spatiale (à gauche) et temporelle (à droite)*

$h(t)$ est une version simplifiée du phénomène d'adhérence glissement mis en jeu lors du pincer de corde : on tire sur corde pendant 15 millisecondes, puis elle soudainement relâchée, en glissant sur le doigt, en une demi milliseconde.

Remarque 1.12 *En pratique, g est donnée par:*

$$g(x) = \exp\left(-\left(\frac{x - x_0}{\delta_c}\right)^2\right), \tag{1.35}$$

normalisée de façon que $\int_0^{l_c} g(x)dx = 1$.

h est donnée par :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f_m}{2}(1 - \cos(\pi t/t_1)) & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{f_m}{2}(1 + \cos(\pi(t - t_1)/t_2)) & \text{pour } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.36}$$

où f_m est l'amplitude de cette force.

1.5.2 Le couplage entre la corde et la table d'harmonie

1.5.2.a Effort exercé par la corde sur la table d'harmonie

On note (x_0, y_0) la position du point d'attache de la corde sur la table d'harmonie. Rappelons que le chevalet est modélisé comme une variation locale des propriétés de la table supérieure et donc, du point de vue de la modélisation, qu'il se confond avec celle-ci.

Considérons tout d'abord le cas où la corde n'est pas amortie. Elle exerce sur la plaque une force $\mathcal{F}$ égale à la composante verticale de tension exercée par celle ci au point d'attache au chevalet (x_0, y_0) (*cf.* figure (1.13)).

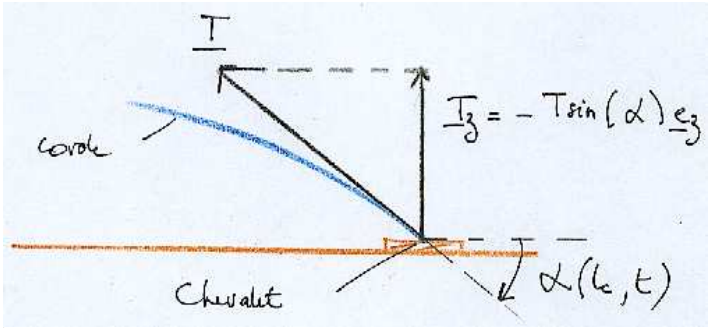


FIG. 1.13: *Force exercée par la corde sur le chevalet*

Concrètement, T étant la tension de la corde et $\alpha(l_c, t)$ l'angle entre la tangente à la corde et l'axe (Ox) en ce point, on aura $\mathcal{F} = -T\sin(\alpha(l_c, t))$, ce qui s'écrit également, compte tenu de l'hypothèse des petits déplacements de la corde :

$$\mathcal{F} = -T\partial_x u_c(l_c, t)\underline{e}_z. \tag{1.37}$$

Cette force est répartie sur une petite surface centrée autour du point d'attache de la corde au chevalet (x_0, y_0). C'est à dire qu'elle est pondérée par une fenêtre spatiale $G(x, y)$ positive, normalisée de sorte que $\int_\omega G = 1$. Ainsi, la force exercée par la corde non amortie sur la table d'harmonie, est une force surfacique de densité :

$$\mathcal{F} = -T\partial_x u_c(l_c, t)G(x, y)\underline{e}_z. \tag{1.38}$$

Dans le cas où corde est amortie , il faut tenir compte de l'effet de retard entre l'effort et la déformation qui en résulte. On a vu à la remarque (1.6) que dans le cas d'amortissement viscoélastique proposé dans ce modèle, l'effort $q(x, t)$ exercé par la corde en un point x est donné par :

$$q(x, t) = T\partial_x u_c(x, t) + T\beta\frac{\partial^2 u_c}{\partial x \partial t}(x, t)$$

Il faut alors modifier l'équation (1.38). On obtient :

$$\boxed{\mathcal{F} = -T\left(\partial_x u_c(l_c, t) + \beta\frac{\partial^2 u_c}{\partial x \partial t}(l_c, t)\right)G(x, y)\underline{e}_z.} \tag{1.39}$$

1.5.2.b Condition au chevalet pour la corde

Au point d'attache au chevalet, la corde est en contact permanent avec le sillet. On considère donc que le déplacement de la corde à cette extrémité est égale au déplacement moyen de la plaque au chevalet. On écrira ainsi :

$$\boxed{u_c(l_c, t) = \int_\omega G(x, y)u_p(x, y, t)dxdy,} \tag{1.40}$$

où G est bien entendu la même fonction de poids que ci dessus.

1.5.3 Les interactions fluide-structure

On suppose que **seule la table d'harmonie est mise en vibration lorsque la corde est pincée.** Le reste du corps de la guitare, les éclisses et le fond, est supposé totalement rigide, et donc est immobile.

1.5.3.a Continuité de la composante normale de la vitesse acoustique

Selon le principe fondamental des interaction fluide structure, la composante normale de la vitesse acoustique $\underline{\mathbf{v}}_a$ es continue en tout point de la surface de la guitare [59]. Cette propriété de continuité exprime en fait la conservation de la masse à travers l'interface fluide-solide.

Ainsi, la composante normale de la vitesse acoustique est égale au déplacement u_p en tout point de la table d'harmonie ω, tandis qu'elle est nulle sur le éclisses et sur le fond, ce qui

s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{\mathbf{v}}_a(x,y,0,t).\underline{e}_z &=& \partial_t u_p(x,y,t) & \text{pour tout } (x,y)\in\omega, \text{ pour tout } t>0, \\ \underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,t).\underline{N} &=& 0 & \text{pour tout } (x,y,z)\in\Sigma, \text{ pour tout } t>0, \end{cases}} \tag{1.41}$$

où $\underline{N}$ est la normale extérieure définie sur Σ.

Remarque 1.13 *Dans la mesure où nous n'avons considéré jusqu'à présent que des mouvements dans la direction verticale, l'hypothèse d'immobilité des éclisses est cohérente avec le reste de nos choix.*

Il peut paraître plus contestable de supposer que le fond ne vibre pas. On peut néanmoins considérer qu'en situation de jeu, la guitare est appuyée contre le guitariste, si bien que les vibrations du fond sont amorties par son corps, ou tout au moins, que le fond de rayonne pas. En outre cette simplification n'est pas vraiment nécessaire, puisque l'équation qu'on utiliserait pour prendre en compte les vibrations de la table inférieure est la même que celle utilisée pour la table supérieure. Cela n'introduirait de ce fait aucune complication supplémentaire au modèle présent. On peut donc ne voir ici qu'un soucis d'allègement des équations globales.

1.5.3.b Effort exercé par l'air sur la table d'harmonie

D'autre part, la table d'harmonie est soumise à des forces de pression exercées par l'air environnant de part et d'autre de la cavité. Si on note $p_e(x,y,t) = p(x,y,0^+,t)$ la pression extérieure en tout point $(x,y)\in\omega$, c'est à dire la pression en tout point situé immédiatement au dessus de la table d'harmonie, et $p_i(x,y,t) = p(x,y,0^-,t)$ la pression intérieure en tout point $(x,y)\in\omega$, c'est à dire la pression en tout point situé immédiatement au dessous de la table d'harmonie, alors celle ci est soumise à un effort surfacique de densité $\underline{g}$, où

$$\underline{g}(x,y,t) = -(p_e(x,y,t) - p_i(x,y,t))\underline{e}_z = -[p]_{|\omega}\,\underline{e}_z, \tag{1.42}$$

où $[p]_{|\omega} = p_e - p_i$ est le saut de pression à la surface de la table d'harmonie défini en tout point de ω.

1.5.4 Le modèle complet

On peut maintenant présenter l'ensemble du modèle de guitare proposé dans ce chapitre.

1.5.4.a Hypothèses retenues du modèle

Les hypothèses retenues sont les suivantes :

- On se place dans le cadre des petites déformations, de sorte que l'ensemble du modèle est entièrement linéaire.
- La caisse de la guitare est infiniment mince; il s'agit donc d'une surface.

- Seule la table d'harmonie vibre. Les éclisses et le fond sont donc supposés totalement rigides. En outre, on fait abstraction du manche.
- On ne prend en compte que les mouvements de flexion de la table d'harmonie, c'est à dire les mouvements perpendiculaires au plan de la table. Les mouvements membranaires sont donc négligés.
- Cela nous conduit naturellement à ne nous intéresser qu'aux vibrations de la corde qui sont orthogonales à la table.
- Les raidisseurs et le chevalet sont considérés comme des hétérogénéités de la table, c'est à dire comme des variations locales de la masse, de l'épaisseur ou de la raideur. Ce choix permet de modéliser l'ensemble de la table d'harmonie à l'aide d'une seule inconnue, le déplacement de flexion de la table.
- On modélise les pertes internes au sein de la corde et de la plaque à l'aide de deux termes, l'un de type fluide, l'autre d'origine viscoélastique.
- Le modèle de pincer consiste en une force (connue) imposée sur un petit segment de corde.

1.5.4.b Description

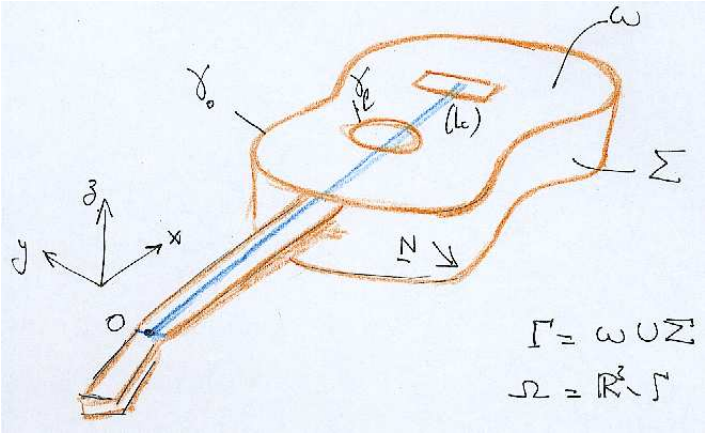


FIG. 1.14: *Description géométrique de la guitare*

L'ensemble des notations apparaît sur la figure (1.14) La caisse de la guitare est donc une surface notée Γ. Elle est composée de deux parties. La table d'harmonie occupe le domaine ω, situé dans le plan horizontal xOy. On note γ_0 le bord extérieur de ω et γ_l le pourtour de la rose. Le reste du corps de la guitare, éclisses et fond, est noté Σ. La normale extérieure en tout point de la caisse, qui est un vecteur à trois dimensions, est notée $\underline{N}$.

L'air environnant occupe le domaine Ω. Il s'agit de tout l'espace privé de la surface de l'instrument, soit $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$.

Enfin, la corde est attachée sur le manche en un point noté O et on note l_c sa longueur, qui permettra de repérer le point d'attache au chevalet.

1.5.4.c Les inconnues

Les inconnues du modèle sont toutes des fonctions du temps.

* **Le mouvement de la corde est décrit par son déplacement vertical** $u_c(x,t)$, défini pour $x \in]0, l_c[$ et régi par une équation de corde vibrante amortie. Elle est soumise à une force modélisant idéalement le pincer. Elle est immobile à une extrémité et vibre comme la table d'harmonie à l'autre extrémité. Initialement, elle est au repos.

* **Le mouvement de la table d'harmonie est décrit par son déplacement vertical** $u_p(x,y,t)$, défini pour $(x,y) \in \omega$ et régi par une équation de Kirchhoff-Love amortie pour un matériau inhomogène orthotrope. Elle est soumise d'une part à l'action de la corde au point d'ancrage au chevalet et d'autre part à l'action des forces de pression exercée par l'air environnant. Elle est encastrée sur son bord extérieur tandis qu'elle est soumise à une condition de bord libre le long de la rose. Elle est au repos initialement.

* **Les vibrations de l'air environnant sont décrites par la pression acoustique** $p(x,y,z,t)$ **et la vitesse acoustique** $\underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,t)$, définies pour $(x,y,z) \in \Omega$ et régies par les équations de l'acoustique linéaire. Sur la surface de la guitare, l'interaction fluide-structure impose la continuité de la composante normale de la vitesse acoustique. Initialement, l'air est au repos.

1.5.4.d Les équations du modèle complet

L'ensemble des équations du modèle est ainsi :

Corde :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} - c_c^2 \left(1 + \beta \dfrac{\partial}{\partial t}\right) \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + R_c \dfrac{\partial u_c}{\partial t} = f_c(x,t), \quad \text{dans }]0, l_c[, \\
\left\{
\begin{array}{ll}
u_c(0,t) = 0, & \forall t > 0, \\
u_c(l_c,t) = \displaystyle\int_\omega G(x,y) u_p(x,y,t) dx dy, & \forall t > 0,
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{ll}
u_c(x,0) = 0, & \text{dans }]0, l_c[, \\
\partial_t u_c(x,0) = 0, & \text{dans }]0, l_c[,
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Table d'harmonie :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left\{
\begin{array}{ll}
\delta \rho_p \dfrac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} + R_p \delta \rho_p \dfrac{\partial u_p}{\partial t} = -T \partial_x u_c(l_c,t) G(x,y) & \\
\qquad\qquad + \beta \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial x \partial t}(l_c,t) G(x,y) - [p]_{|\omega}, & \text{dans } \omega, \\
\underline{\underline{\mathcal{M}}} - \delta^3 \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) - \eta \dfrac{\partial}{\partial t} \delta^3 \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) = 0, & \text{dans } \omega,
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{ll}
u_p = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\
\partial_n u_p = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\
(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{n} = 0, & \text{sur } \gamma_l, \\
(\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{\tau}] = 0, & \text{sur } \gamma_l,
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{ll}
u_p(x,y,0) = 0, & \text{dans } \omega, \\
\partial_t u_p(x,y,0) = 0, & \text{dans } \omega,
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Fluide environnant :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left\{
\begin{array}{ll}
\rho_a \dfrac{\partial \underline{\mathbf{v}}_a}{\partial t} + \underline{\nabla} p = 0, & \text{dans } \Omega, \\
\mu_a \dfrac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a = 0, & \text{dans } \Omega,
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{ll}
\underline{\mathbf{v}}_a(x,y,0,t).\underline{e}_z = u_p(x,y,t), & \text{pour tout } (x,y) \in \omega, \\
\underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,t).\underline{N} = 0, & \text{pour tout } (x,y) \in \Sigma,
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{ll}
p(x,y,z,0) = 0, & \text{dans } \Omega, \\
\underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,0) = 0, & \text{dans } \Omega.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

(1.43)

Chapitre 2

Analyse mathématique du modèle

Le but de ce chapitre est de montrer que le modèle de guitare introduit dans le chapitre précédent conduit à un problème bien posé, c'est à dire qu'il possède une et une seule solution dans un sens à préciser. Pour cela, nous le faisons entrer dans le cadre du théorème de Hille-Yosida, outil fondamental pour résoudre les équations d'évolution. L'essentiel de ce chapitre consiste donc tout d'abord à reformuler le problème sous la forme d'un problème d'évolution d'ordre un en temps, puis surtout à vérifier les hypothèses dudit théorème.

Il n'y a pas à proprement parler de difficulté pour obtenir ce résultat. Compte tenu du nombre d'équations, la démonstration du caractère maximal monotone de l'opérateur non borné A qui décrit notre problème est un peu laborieuse, mais elle se fait bien.

Signalons toutefois deux aspects qui méritent d'être mentionnés. Tout d'abord, l'opérateur de plaque invoquant des dérivées d'ordre 4 en espace, on ne peut avoir de résultat de régularité suffisant pour introduire les conditions portant sur le bord libre dans un sens fort dans le domaine de l'opérateur A. On doit se contenter d'écrire ces conditions dans un sens faible (voir section 2.2.3.a). D'autre part, on ne peut pas éliminer $\underline{\mathbf{v}}_a$ de l'équation des ondes acoustiques pour se ramener à une simple équation des ondes scalaires, comme on pourrait le faire dans le cas d'un problème non couplé, même avec une condition de Neumann homogène. On doit donc résoudre le problème avec $\underline{\mathbf{v}}_a$ et p (mais ça ne pose aucun soucis) (*cf.* remarque (2.1)).

On obtient en outre des estimations a priori sur les inconnues du problème à partir d'une propriété d'identité d'énergie.

2.1 Le théorème de Hille-Yosida

Soit H un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $(.,.)_H$. On considère un opérateur A, non borné dans H, c'est à dire une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset H$, à valeurs dans H. $D(A)$ est le domaine de A. Le théorème de Hille-Yosida est un outil fondamental pour résoudre les problèmes d'évolution dans H de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(t) : \mathbb{R}_+ \to D(A) \subset H, \\ \dfrac{du}{dt} + Au = F, \quad \forall t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $F(t)$ est une fonction donnée de $\mathbb{R}_+$ dans H et u_0 est une condition initiale donnée.

Définition 2.1 *On appelle solution classique (ou solution forte) de (2.1) toute fonction u vérifiant :*

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C^0(\mathbb{R}_+, D(A)),$$

où $D(A)$ est muni de la topologie hilbertienne induite par la norme du graphe, définie par :

$$\|u\|^2_{D(A)} = \|u\|^2_H + \|Au\|^2_H. \tag{2.2}$$

Le théorème de Hille-Yosida fait appel à la notion d'opérateur maximal monotone pour résoudre ce problème.

Définition 2.2 *Soit $A : D(A) \subset H \to H$, un opérateur linéaire non borné.*
*On dit que A est **monotone** si :*

$$(Au, u)_H \geq 0, \quad \forall u \in D(A). \tag{2.3}$$

*On dit que A est **maximal monotone** si de plus $A + I$ est surjectif de $D(A)$ dans H,* ie. *:*

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que : } u + Au = f. \tag{2.4}$$

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème de Hille-Yosida, dont on trouvera une démonstration dans [5] ou [44] :

Théorème 2.1 (Hille-Yosida) *On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A + \lambda I$ est maximal monotone.*
Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ et tout $F(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, il existe une unique fonction

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C^0(\mathbb{R}_+, D(A)),$$

telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F, \quad \forall t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2 Solution forte pour le modèle de guitare

2.2.1 Écriture sous la forme d'un système d'ordre un en temps

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution forte de notre modèle, donné en (1.43), on le fait entrer dans les hypothèses du théorème de Hille-Yosida. Pour cela, on le réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_c}{\partial t} - v_c = 0, \\ \dfrac{\partial v_c}{\partial t} - c_c^2 \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + \beta \dfrac{\partial^2 v_c}{\partial x^2} + R_c v_c = \dfrac{f_c}{\rho_c}, \\ \dfrac{\partial u_p}{\partial t} - v_p = 0, \\ \dfrac{\partial v_p}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_p}\mathcal{K} u_p + \dfrac{\eta}{\rho_p}\mathcal{K} v_p + R_p v_p + \dfrac{T\partial_x u_c(l_c,t)G}{\rho_p} + \dfrac{T\beta\partial_x v_c(l_c,t)G}{\rho_p} + \dfrac{[p]_{|\omega}}{\rho_p} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{1}{\mu_a} \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a = 0, \\ \dfrac{\partial \underline{\mathbf{v}}_a}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_a} \underline{\nabla} p = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

où $\mathcal{K}$ est l'opérateur de plaque :

$$\mathcal{K} \ : u_p \mapsto \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}\, (\underline{\nabla} u_p), \tag{2.7}$$

Les conditions aux limites de (1.43) s'écrivent maintenant (précisons juste que les conditions vérifiées par v_c et v_p sont de simples conséquences de celles vérifiées par u_c et u_p, par dérivation en temps) :

$$\begin{cases} u_c(0) = 0, \\ u_c(l_c) = \displaystyle\int_\omega G u_p, \\ v_c(0) = 0, \\ v_c(l_c) = \displaystyle\int_\omega G v_p, \\ u_p = \partial_n u_p = 0 \text{ sur } \gamma_0, \\ v_p = \partial_n v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0, \\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l, \\ (\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}\,).\underline{n} + \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{\tau}] = 0, \text{ sur } \gamma_l, \\ \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{e}_z = v_p, \text{ sur } \omega, \\ \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N} = 0, \text{ sur } \Sigma, \end{cases} \tag{2.8}$$

où on a posé :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}\, (\underline{\nabla} u_p) + \eta \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}\, (\underline{\nabla} v_p), \tag{2.9}$$

Enfin, il convient d'y ajouter des conditions initiales. Nous les avons choisies nulles dans notre problème, mais on peut prendre des conditions initiales plus générales, soit :

$$\begin{cases} u_c(t=0) = u_c^0, \\ v_c(t=0) = (\dfrac{\partial u_c}{\partial t})_{t=0} = u_c^1, \\ u_p(t=0) = u_p^0, \\ v_p(t=0) = (\dfrac{\partial u_p}{\partial t})_{t=0} = u_p^1, \\ p\,(t=0) = p^0, \\ \underline{\mathbf{v}}_a(t=0) = \underline{\mathbf{v}}_a^0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Remarque 2.1 *On pourrait chercher à éliminer la vitesse acoustique de l'équation de ondes acoustiques pour se ramener à une simple équation des ondes scalaires. Mais ce n'est pas possible. En effet, en éliminant $\underline{\mathbf{v}}_a$, la condition d'interaction fluide structure entre la plaque et l'air à l'aide de la pression se réécrit de la façon suivante :*

$$\frac{1}{\rho_a}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}, \ \textit{sur } \omega. \tag{2.11}$$

Cette nouvelle condition invoquant la dérivée seconde en temps de u_p, on ne peut pas l'introduire dans l'espace H, puisque justement celui ci ne connaît pas le temps. On est donc obligé de garder $\underline{\mathbf{v}}_a$, ce qui ne gêne en rien la démonstration.

On introduit alors l'inconnue U et l'opérateur A définis par :

$$U = \begin{pmatrix} u_c \\ v_c \\ u_p \\ v_p \\ p \\ \underline{\mathbf{v}}_a \end{pmatrix} \text{ et } AU = \begin{pmatrix} -v_c \\ -c_c^2 \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + \beta \dfrac{\partial^2 v_c}{\partial x^2} + R_c v_c, \\ -v_p \\ \dfrac{1}{\rho_p}\mathcal{K}u_p + \dfrac{\eta}{\rho_p}\mathcal{K}v_p + R_p v_p + \dfrac{T\partial_x u_c(l_c,t)G}{\rho_p} + \dfrac{T\beta\partial_x v_c(l_c,t)G}{\rho_p} + \dfrac{[p]_{|\omega}}{\rho_p} \\ \dfrac{1}{\mu_a}\operatorname{div}\underline{\mathbf{v}}_a \\ \dfrac{1}{\rho_a}\underline{\nabla} p \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

et on pose également :

$$\boxed{F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{f_c}{\rho_c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_c^0 \\ u_c^1 \\ u_p^0 \\ u_p^1 \\ p^0 \\ \underline{\mathbf{v}}_a^0 \end{pmatrix}} \tag{2.13}$$

Ainsi, le problème (2.6, 2.8, 2.10) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.14}$$

2.2.2 Définition de H

On introduit l'espace H, incluant les conditions aux limites de "type Dirichlet" du problème (2.6, 2.8, 2.10) :

$$\boxed{\begin{aligned} H = \Big\{ & U \in H^1(]0,l_c[) \times L^2(]0,l_c[) \times H^2(\omega) \times L^2(\omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \ ; \ \text{tel que :} \\ & \bullet\ u_c(0) = 0, \quad u_c(l_c) = \int_\omega G u_p, \\ & \bullet\ v_c(0) = 0, \quad v_c(l_c) = \int_\omega G v_p, \\ & \bullet\ u_p = \partial_n u_p = 0 \text{ sur } \gamma_0, \\ & \bullet\ v_p = \partial_n v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \qquad \Big\} \end{aligned}} \tag{2.15}$$

Précisons les notations suivantes pour le produit scalaire à poids dans les espaces L^2 :

Notation 2.1 *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, où n vaut 1, 2 ou 3. Pour toutes fonctions f et f^* de $L^2(\mathcal{O})$ et pour tout $\alpha > 0$, on note :*

$$(f, f^*)_\alpha = \int_{\mathcal{O}} \alpha f f^*, \tag{2.16}$$

et $\|.\|_\alpha$ désigne la norme associée.

D'autre part, pour tout tenseur du quatrième ordre symétrique défini positif $\mathbf{C}$ *, et pour tous tenseurs d'ordre 2* $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ *et* $\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*$ *de ,* $(L^2(\omega))^4$*, on note :*

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*)_{\mathbf{C}} = \int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \tag{2.17}$$

où le ":" désigne le double produit tensoriel.

On munit alors H du produit scalaire :

$$\begin{aligned} &\forall U, U^* \in H, \\ &(U, U^*)_H = (\partial_x u_c, \partial_x u_c^*)_T + (v_c, v_c^*)_{\rho_c} + (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p), \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p))_{\mathbf{C}} \\ &\qquad + (v_p, v_p^*)_{\rho_p} + (p, p^*)_{\mu_a} + (\underline{\mathbf{v}}_a, \underline{\mathbf{v}}_a^*)_{\rho_a}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

et on note $\|\|_H$ la norme associée.

Les théorèmes généraux d'analyse fonctionnelle nous permettent de montrer simplement le :

Lemme 2.1 *H, muni de la norme $\|.\|_H$, est un espace de Hilbert.*

▷ PREUVE : Les applications de traces :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} H^1(]0, l_c[) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u_c & \mapsto & (u_c(0), u_c(l_c)), \end{array} \right. \tag{2.19}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ccc} H^2(\omega) & \longrightarrow & H^{\frac{3}{2},\gamma_0} \times H^{\frac{1}{2}}(\gamma_0) \\ u_p & \mapsto & (u_{p|\gamma_0}, \partial_n u_{p|\gamma_0}) \end{array} \right. \tag{2.20}$$

sont continues. Comme $G \in L^2(\omega)$, l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} H^1(]0, l_c[) \times H^2(\omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_c, u_p) & \mapsto & u_c(l_c) - \int_\omega G u_p, \end{array} \right. \tag{2.21}$$

est également continue. On en déduit que H est un sous espace vectoriel *fermé* de l'espace de Hilbert :

$$\mathcal{X} = H^1(]0, l_c[) \times L^2(]0, l_c[) \times H^2(\omega) \times L^2(\omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \tag{2.22}$$

et donc que c'est un Hilbert pour la norme hilbertienne canonique définie sur $\mathcal{X}$.

D'autre part, puisque $T > 0$, on a l'inégalité de Poincaré (voir par exemple [5]) :

$$\exists \nu > 0, \int_0^{l_c} T \left|\partial_x u_c\right|^2 \geq \nu \|u_c\|^2_{H^1(]0,l_c[)}, \quad \forall u_c \in \left\{u_c \in H^1(]0,l_c[) \; ; \; u_c(0) = 0\right\}, \tag{2.23}$$

et aussi, compte tenu des propriétés de positivité du tenseur $\mathbf{C}$, on a une inégalité similaire dans $H^2(\omega)$, conséquence immédiate de l'inégalité de Korn en dimension 2, valable dés que γ_0 est de mesure non nulle (voir par exemple [16] ou [22]), et des propriétés usuelles des espaces de Sobolev :

$$\exists \nu > 0, \int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) \geq \nu \|u_p\|^2_{H^2(\omega)}, \quad \forall u_p \in \left\{u_p \in H^2(\omega) \; ; \; u_{p_{|\gamma_0}} = 0\right\}. \tag{2.24}$$

Par conséquent, la forme bilinéaire symétrique positive définie en (2.18) est bien un produit scalaire et la norme induite est équivalente à la norme hilbertienne canonique définie sur $\mathcal{X}$. ◁

2.2.3 Définition du domaine de A

On détermine le domaine de A en cherchant à donner un sens à chacun des termes qui définissent cet opérateur. En outre, il faut s'assurer que $AU \in H$ pour tout $U \in D(A)$. Enfin, nous introduisons dans le domaine de A, outre les conditions aux limites incluses dans H, les conditions aux limites de "type Neumann" portant sur la vitesse acoustique ainsi que les conditions aux limites portant sur le bord libre de la plaque.

2.2.3.a Prise en compte faible des conditions aux limites sur le bord libre de la plaque

Sur ce dernier point, il convient d'être vigilant. Rappelons que les conditions de bord libre sur la plaque s'écrivent :

$$\begin{cases} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l, \\ (\underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{\tau}] = 0, \text{ sur } \gamma_l, \end{cases} \tag{2.25}$$

où on a posé :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) + \eta \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p). \tag{2.26}$$

Pour toute fonction u_p appartenant à l'espace :

$$\left\{u_p \in H^2(\omega) \; ; \; \mathrm{div}\, \underline{\mathrm{Div}}\, \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) \in L^2(\omega)\right\},$$

le moment $\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)$ n'est pas nécessairement dans l'espace $H(\underline{\mathrm{Div}}\,)$, défini par :

$$H(\underline{\mathrm{Div}}\,) = \left\{\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in (L^2(\omega))^4 \; ; \; \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in (L^2(\omega))^2\right\},$$

puisqu'on a seulement $\mathrm{div}\, \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in L^2(\omega)$. Par conséquent, on ne peut rien dire de sa trace normale $(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{n}$ et a fortiori encore moins de la trace intervenant dans le seconde condition de bord libre (2.25).

Ne pouvant pas traiter ces deux conditions aux limites dans un sens classique, on les écrit dans un sens faible. Rappelons tout d'abord la formule d'intégration par partie suivante valable pour toutes fonctions $\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in (H^2(\omega))^4$ et $u_p \in H^2(\omega)$ (voir section A.4.2.a) :

$$\int_\omega \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}\ u_p = \int_\omega \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p) + \int_{\delta\omega} \left[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{n}\right] \partial_n u_p + \int_{\delta\omega} \left[(\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}]\right] u_p. \tag{2.27}$$

On en déduit la :

Définition 2.3 *On dira qu'une fonction u_p de l'espace*

$$\mathcal{V}_p = \left\{ u_p \in H^2 \ ;\ u_p = \partial_n u_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\} \tag{2.28}$$

vérifie les conditions de bord libre (2.25) dans un sens faible si on a :

$$\int_\omega (\mathcal{K} u_p) u_p^* = \int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p^*), \quad \forall u_p^* \in \mathcal{V}_p. \tag{2.29}$$

2.2.3.b Le domaine $D(A)$

On peut maintenant définir le domaine de l'opérateur A :

$$\begin{aligned} D(A) = H \cap \Big\{ & U \in H^1(]0,l_c[) \times H^1(]0,l_c[) \times H^2(\omega) \times H^2(\omega) \times H^1(\Omega) \times H(\operatorname{div},\Omega)\ ;\ \text{tel que :} \\ & \bullet\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_c}{\partial x} + \beta \frac{\partial v_c}{\partial x}\right] \in L^2(]0,l_c[), \\ & \bullet\ \mathcal{K}(u_p + \eta v_p) \in L^2(\omega), \\ & \bullet\ \forall u_p^* \in \mathcal{V}_p, \int_\omega \mathcal{K}(u_p + \eta v_p) u_c^* = \int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p + \eta v_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p^*) \\ & \bullet\ \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{e}_z = v_p, \text{ sur } \omega, \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N} = 0, \text{ sur } \Sigma, \qquad \Big\}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

2.2.4 Démonstration des hypothèses de Hille-Yosida

Pour appliquer le théorème de Hille-Yosida, il n'y a plus qu'à démontrer le :

Lemme 2.2 *L'opérateur A est maximal monotone.*

▷ PREUVE :

I. A est monotone

Pour $U \in H$, on calcule :

$$\begin{aligned}(AU,U)_H = &\left[-(\frac{\partial v_c}{\partial x}, \frac{\partial u_c}{\partial x})_T \right] + \left[-\left(c_c^2 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 v_c}{\partial x^2} + R_c v_c, v_c \right)_{\rho_c} \right] \\ &+ \left[-(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p), \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p))_{\mathbf{C}} \right] + \left[\left(\frac{1}{\rho_p} \mathcal{K}(u_p + \eta v_p) + R_p v_p \right)_{\rho_p} \right] \\ &+ \left[\left(\frac{T \partial_x u_c(l_c,t) G}{\rho_p} + \frac{T\beta \partial_x v_c(l_c,t) G}{\rho_p} + \frac{[p]_{|\omega}}{\rho_p} \right)_{\rho_p} \right] + \left[\left(\frac{1}{\mu_a} \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a, p \right)_{\mu_a} \right] \\ &+ \left[\left(\frac{1}{\rho_a} \underline{\nabla} p, \underline{\mathbf{v}}_a \right)_{\rho_a} \right]\end{aligned} \tag{2.31}$$

Il y a sept termes dans cette équation, définis par les crochets. Pour montrer que l'essentiel de ces termes s'annulent entre eux, on en développe certains :

- **2ème terme** On calcule à l'aide d'une intégration par partie, compte tenu des conditions sur le bord vérifiées par $U \in D(A)$:

$$\begin{aligned}-\left(c_c^2 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + \beta c_c^2 \frac{\partial^2 v_c}{\partial x^2} + R_c v_c, v_c \right)_{\rho_c} &= T \int_0^{l_c} \frac{\partial u_c}{\partial x} \frac{\partial v_c}{\partial x} + \beta \int_0^{l_c} T \left| \partial_x v_c \right|^2 \\ &\quad + R_c \int_0^{l_c} \rho_p \left| v_c \right|^2 - T \partial_x u_c(l_c) v_c l_c - T\beta \partial_x v_c(l_c) v_c l_c. \end{aligned} \tag{2.32}$$

- **4ème terme** On calcule, à l'aide des conditions de la condition de bord libre incluse faiblement dans $D(A)$, en choisissant en particulier $u_p^* = v_p$ (voir (2.30)) :

$$\left(\frac{1}{\rho_p} \mathcal{K}(u_p + \eta v_p) + R_p v_p \right)_{\rho_p} = \int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) + \eta \int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) + R_p \int_\omega \rho_p \left| v_p \right|^2. \tag{2.33}$$

- **7ème terme** On calcule, à l'aide de la formule de Stockes :

$$(\frac{1}{\rho_a} p, \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a)_{\rho_a} = -\int_\Omega \underline{\nabla} p \cdot \underline{\mathbf{v}}_a - \langle \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N}, [p]_{|\Gamma} \rangle, \quad \forall \underline{\mathbf{v}}_a \in H(\operatorname{div}, \Omega),\ \forall p \in H^1(\Omega), \tag{2.34}$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le crochet de dualité dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et où Γ désigne la surface de la guitare, c'est à dire le bord de Ω. Rappelons que $[p]_{|\Gamma}$ est le saut de pression à travers la surface de la guitare :

$$[p]_{|\Gamma} = (p_e - p_i)_{|\Gamma},$$

où p_e est la pression à l'extérieur et p_i est la pression à l'intérieur (ce qui explique le $''-''$ dans l'intégration par partie précédente).

Compte tenu des conditions aux limites vérifiées par $\underline{\mathbf{v}}_a \in D(A)$ (voir (2.30)), on en déduit que :

$$(\frac{1}{\rho_a} p, \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a)_{\rho_a} = -\int_\Omega \underline{\nabla} p \cdot \underline{\mathbf{v}}_a - \int_\omega v_p [p]_{|\omega}. \tag{2.35}$$

Par conséquent, en tenant compte également de la condition aux limites couplant u_c et u_p au chevalet, ainsi que v_c et v_p (voir (2.30)), l'équation (2.31) conduit à :

$$\boxed{(AU, U)_H = \beta \|\partial_x v_c\|_T^2 + R_c \|v_c\|_{\rho_c}^2 + \eta \|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p)\|_{\mathbf{C}}^2 + R_p \|v_p\|_{\rho_p}^2} \tag{2.36}$$

On en déduit que :

$$(AU, U)_H \geq 0, \quad \forall U \in D(A). \tag{2.37}$$

II. $(A + I)$ **est surjectif de** $D(A)$ **dans** H**, pour tout** > 0

• On se donne

$$F = \left(f_{u_c}, f_{v_c}, f_{u_p}, f_{v_p}, f_p, \underline{\mathbf{f}}_{v_a}\right)^\top \in H,$$

et on cherche

$$U = \left(u_c, v_c, u_p, v_p, p, \underline{\mathbf{v}}_a\right)^\top \in D(A),$$

tel que :

$$AU + U = F, \tag{2.38}$$

c'est à dire tel que :

$$\begin{cases} -v_c + u_c = f_{u_c}, \\ -c_c^2 \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + \beta \dfrac{\partial^2 v_c}{\partial x^2} + R_c v_c + v_c = f_{v_c}, \\ -v_p + u_p = f_{u_p}, \\ \dfrac{1}{\rho_p} \mathcal{K} u_p + \dfrac{\eta}{\rho_p} \mathcal{K} v_p + R_p v_p + \dfrac{T \partial_x u_c(l_c, t) G}{\rho_p} + \dfrac{T \beta \partial_x v_c(l_c, t) G}{\rho_p} + \dfrac{[p]_{|\omega}}{\rho_p} + v_p = f_{v_p}, \\ \dfrac{1}{\mu_a} \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a + p = f_p, \\ \dfrac{1}{\rho_a} \underline{\nabla} p + \underline{\mathbf{v}}_a = \underline{\mathbf{f}}_{v_a}. \end{cases} \tag{2.39}$$

Pour trouver un tel U, il nous faut écrire une formulation variationnelle de ce problème, de

manière à pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram.

On introduit tout d'abord l'espace $\mathcal{V}_g$:

$$\mathcal{V}_g = \left\{ H^1(]0,l_c[) \times H^2(\omega) \times H^1(\Omega)\,;\, u_c(0)=0,\ u_c(l_c) = \int_\omega G u_p,\ u_p = \partial_n u_p = 0 \text{ sur } \gamma_0, \right\} \tag{2.40}$$

muni de la norme :

$$\|(u_c,u_p,p)\|^2_{\mathcal{V}_g} = \|\partial_x u_c\|^2_T + \|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)\|^2_{\mathbf{C}} + \|p\|^2_{\mu_a} + \|\underline{\nabla} p\|^2_{1/\rho_a}$$

On a le :

Lemme 2.3 *$\mathcal{V}_g$, muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{V}_g}$, est un espace de Hilbert.*

▷ PREUVE : Elle est similaire à celle du lemme (2.1) ◁

• N'éliminons pas trop vite les variables v_c, v_p et $\underline{\mathbf{v}}_a$, les calculs resteront plus lisibles. Soient $(u_c^*, u_p^*, p^*) \in \mathcal{V}_g$. On multiplie la deuxième équation de (2.39) par $\rho_c u_c^*$, la quatrième par $\rho_p u_p^*$ et la cinquième par $\mu_a p^*$. On obtient, après des intégrations par parties identiques à celles présentées dans la partie **I.** de cette preuve :

$$\begin{cases} T\displaystyle\int_0^{l_c} \partial_x u_c \partial_x u_c^* + \int_0^{l_c} T\beta \partial_x v_c \partial_x u_c^* + \int_0^{l_c} \rho_c(R_c+1) v_c u_c^* - T\partial_x u_c(l_c,t) u_c^* l_c \\ \qquad\qquad - T\beta \partial_x v_c(l_c,t) u_c^* l_c = \displaystyle\int_0^{l_c} \rho_c f_{v_c} u_c^*, \\ \displaystyle\int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p^*) + \eta \int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p^*) + \int_\omega \rho_p(R_p+1) v_p u_p^* \\ \qquad\qquad + \left[T\partial_x u_c(l_c,t) + T\beta \partial_x v_c(l_c,t)\right] \displaystyle\int_\omega G u_p^* + \int_\omega [p]_{|\omega} u_p^* = \int_\omega \rho_p f_{v_p} u_p^*, \\ -\displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} p^* \cdot \underline{\mathbf{v}}_a + \int_\Omega \mu_a p p^* - \langle \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N}, [p^*]_{|\Gamma} \rangle = \int_\Omega \mu_a f_p p^*, \end{cases} \tag{2.41}$$

On cherche à vérifier la condition d'interaction fluide-structure sur la surface de l'instrument Γ, on écrira donc, dans la dernière équation de ce système :

$$\langle \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N}, [p^*]_{|\Gamma} \rangle = \int_\omega [p^*]_{|\omega} v_p. \tag{2.42}$$

Compte tenu également de la condition de couplage au chevalet entre u_c^* et u_p^* incluse dans l'espace $\mathcal{V}_g$, on obtient la formulation variationnelle suivante, en effectuant la somme des

trois lignes du système (2.41) :

$$\forall (u_c, u_p, p) \in \mathcal{V}_g,$$

$$\begin{aligned} T\int_0^{l_c} \partial_x u_c \partial_x u_c^* + \int_0^{l_c} T\beta \partial_x v_c \partial_x u_c^* + \int_0^{l_c} \rho_c (R_c+1) v_c u_c^* + \int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p^*) \\ + \eta \int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p^*) + \int_\omega \rho_p (R_p+1) v_p u_p^* + \int_\omega [p]_{|\omega} u_p^* - \int_\Omega \underline{\nabla} p^* \cdot \underline{\mathbf{v}}_a \\ + \int_\Omega \mu_a p p^* - \int_\omega [p^*]_{|\omega} v_p = \int_0^{l_c} \rho_c f_{v_c} u_c^* + \int_\omega \rho_p f_{v_p} u_p^* + \int_\Omega \mu_a f_p p^*. \end{aligned} \tag{2.43}$$

On utilise maintenant les équations (1), (3) et (6) du système (2.39) pour éliminer v_c, v_p et $\underline{\mathbf{v}}_a$ de l'équation précédente. Comme F est dans H, on a en particulier $f_{u_c} \in H^1(]0, l_c[)$ et $f_{u_p} \in H^2(\omega)$. Par conséquent, on peut écrire :

$$\begin{cases} v_c = u_c - f_{u_c}, \\ \partial_x v_c = \partial_x u_c - \partial_x f_{u_c}, \\ v_p = u_p - f_{u_p}, \\ \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) = \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) - \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} f_{u_p}), \\ \underline{\mathbf{v}}_a = -\dfrac{1}{\rho_a}\underline{\nabla} p + \dfrac{1}{\rho_a}\underline{\mathbf{f}}_{v_a}. \end{cases} \tag{2.44}$$

• On aboutit à la formulation variationnelle suivante, en injectant ces dernières équations dans (2.43), :

$$\begin{cases} \text{On cherche } (u_c, u_p, p) \in \mathcal{V}_g, \text{ tels que :} \\ a\big[(u_c, u_p, p), (u_c^*, u_p^*, p^*)\big] = l\big[(u_c^*, u_p^*, p^*)\big], \forall (u_c^*, u_p^*, p^*) \in \mathcal{V}_g, \end{cases} \tag{2.45}$$

où $\mathcal{V}_g$ est l'espace de Hilbert défini en (2.40),

$$\begin{aligned} a\big[(u_c, u_p, p), (u_c^*, u_p^*, p^*)\big] = \; & T(1+\beta)\int_0^{l_c} \partial_x u_c \partial_x u_c^* + \int_0^{l_c} \rho_c (R_c+1) u_c u_c^* \\ & + (1+\eta)\int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p^*) + \int_\omega \rho_p (R_p+1) u_p u_p^* \\ & + \int_\Omega \frac{1}{\rho_a}\underline{\nabla} p \cdot \underline{\nabla} p^* + \int_\Omega \mu_a p p^* \\ & + \int_\omega [p]_{|\omega} u_p^* - \int_\omega [p^*]_{|\omega} u_p \end{aligned} \tag{2.46}$$

et :

$$\begin{aligned} l\big[(u_c^*, u_p^*, p^*)\big] = \; & \int_0^{l_c} \rho_c f_{v_c} u_c^* + \beta T \int_0^{l_c} \partial_x f_{u_c} u_c^* + \rho_c (R_c+1)\int_0^{l_c} f_{u_c} u_c^* \\ & + \int_\omega \rho_p f_{v_p} u_p^* + \eta \int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} f_{u_p}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p^*) + \int_\omega \rho_p (R_p+1) f_{u_p} u_p^* \\ & + \int_\Omega \mu_a f_p p^* - \int_\omega [p^*]_{|\omega} f_{u_p} - \int_\Omega \underline{\mathbf{f}}_{v_a} \cdot \underline{\nabla} p^* \end{aligned} \tag{2.47}$$

On a le :

Lemme 2.4 *Le problème (2.45) possède une unique solution.*

▷ PREUVE : La **continuité** de la forme bilinéaire a sur $\mathcal{V}_g$ ainsi que celle de la forme linéaire l sont immédiates. D'autre part, le couplage entre la plaque et l'air apparaissant comme la somme de deux termes antisymétriques dans l'expression de a, on calcule :

$$\begin{aligned} &\forall (u_c, u_p, p) \in \mathcal{V}_g, \\ &a\big[(u_c, u_p, p), (u_c, u_p, p)\big] \quad = (R_c+1)\|u_c\|^2_{\rho_c} + (1+\beta)\|\partial_x u_c\|^2_T + (R_p+1)\|u_p\|^2_{\rho_p} \\ &\qquad\qquad +(1+\eta)\|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)\|^2_{\mathbf{C}} + \|p\|^2_{\mu_a} + \|\underline{\nabla} p\|_{1/\rho_a} \\ &\qquad\qquad \geq C\|(u_c, u_p, p)\|^2_{\mathcal{V}_g}, \end{aligned} \tag{2.48}$$

où $C = \min(1+\beta, 1+\eta)$ est une constante strictement positive dépendant des constantes de Poincaré et de Korn (*cf.* la preuve du lemme (2.1)), et des constantes (positives) R_c et R_p. Donc, la forme bilinéaire a est **coercive** et le théorème de Lax-Milgram s'applique. ◁

• Sans surprise, on définit alors v_c, v_p et $\underline{\mathbf{v}}_a$à l'aide des équation (1), (3) et (6) de (2.39).

Il reste pour finir à montrer que la solution $U = \big(u_c, v_c, u_p, v_p, p, \underline{\mathbf{v}}_a\big)^\top$ ainsi construite est bien dans $D(A)$, c'est à dire que cette solution possède bien la régularité demandée et en outre qu'elle vérifie toutes les conditions aux limites. Il nous faut donc encore contrôler que :

1. $v_c \in H^1(]0, l_c[)$,
2. $v_p \in H^2(\omega)$,
3. $v_c(l_c) = \displaystyle\int_\omega G v_p$,
4. $T\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial u_c}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial v_c}{\partial x}\right] \in L^2(]0, l_c[)$,
5. $\mathcal{K}(u_p + \eta u_c) \in L^2(\omega)$,
6. $\displaystyle\int_\omega \mathcal{K}(u_p + \eta v_p) u_c^* = \left[\int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) + \eta \int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p)\right], \quad \forall u_p^* \in \mathcal{V}_p$,
7. $\underline{\mathbf{v}}_a \in H(\mathrm{div}, \Omega)$,
8. $\underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{e}_z = v_p$, sur ω, et $\underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N} = 0$, sur Σ
9. Enfin, il faut bien sûr s'assurer que U est bien une solution du problème que l'on s'est donné au départ, c'est à dire que le système (2.39) est bien vérifié.

Pour vérifier tout cela, il s'agit essentiellement d'interpréter la formulation variationnelle (2.45). Allons y pas à pas :

1, 2, 3 Compte tenu de la régularité des fonctions de $\mathcal{V}_g$ et de celles de H, ainsi que des conditions aux limites incluses dans la définition de ces espaces (voir (2.15) et (2.40)), on voit immédiatement que :

$$v_c \in H^1(]0,l_c[), \quad v_p \in H^2(\omega), \quad \text{et } v_c(l_c) = \int_\omega G v_p.$$

On peut alors parcourir en sens inverse le chemin effectué pour définir la forme bilinéaire a à partir de (2.39), en réexhibant v_c et v_p dans l'expression de a.

4 Choisissant tout d'abord des fonctions tests $U^* \in \mathcal{V}_g$ telles que $u_p^* = 0$ et $p = 0$ dans (2.45), ce qui implique en particulier que $u_c^*(l_c) = 0$, on montre en effectuant une intégration par partie que :

$$-T\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_c}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_c}{\partial x}\right] = \rho_c(R_c+1) - \rho_c f_{v_c}, \tag{2.49}$$

au sens des distributions. Par conséquent :

$$T\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_c}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_c}{\partial x}\right] \in L^2(]0,l_c[) \tag{2.50}$$

5 On choisit maintenant des fonctions tests telles que $p^* = 0$ et $u_p^* \in H_0^2(\omega)$. Il n'y a donc pas de terme de bord quand on effectue l'intégration par partie sur l'équation de plaque. Par contre, $u_c^*(l_c)$ n'est plus nécessairement nul, et c'est ce qui permet de retrouver le couplage entre la corde et la plaque lors de l'intégration par partie. On calcule :

$$\begin{aligned}-\int_0^{l_c} T\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_c}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_c}{\partial x}\right] u_c^* + \int_0^{l_c} \rho_c(R_c+1)v_c u_c^* + T\partial_x u_c(l_c,t)u_c^* l_c + T\beta\partial_x v_c(l_c,t)u_c^* l_c \\ + \int_\omega \mathcal{K}(u_p+\eta v_p)u_p^* + \int_\omega \rho_p(R_p+1)v_p u_p^* + \int_\omega [p]_{|\omega} u_p^* = \int_0^{l_c} \rho_c f_{v_c} u_c^* + \int_\omega \rho_p f_{v_p} u_p^*,\end{aligned} \tag{2.51}$$

en tenant compte de la condition couplant u_c^* à u_p^* dans la définition de $\mathcal{V}_g$ (voir (2.40)) ainsi que de (2.49), on en déduit :

$$\mathcal{K}u_p + \eta\mathcal{K}v_p + R_p\rho_p v_p + T\partial_x u_c(l_c,t)G + T\beta\partial_x v_c(l_c,t)G + [p]_{|\omega} + \rho_p v_p = \rho_p f_{v_p}, \tag{2.52}$$

au sens des distributions. Par conséquent (notons en particulier que comme $p \in H^1(\Omega)$, le théorème de trace sur $H^1(\omega)$ assure que $[p]_{|\omega} \in H^{\frac{1}{2}}(\omega) \subset L^2(\omega)$) :

$$\mathcal{K}(u_p + \eta v_p) \in L^2(\omega). \tag{2.53}$$

6 Il suffit maintenant de multiplier l'équation (2.52) par $u_c^* \in \mathcal{V}_p$, où $\mathcal{V}_p$ est l'espace défini en (2.28), puis d'intégrer sur ω et enfin soustraire le résultat à (2.51) pour vérifier qu'on a bien la condition faible sur le bord libre :

$$\int_\omega \mathcal{K}(u_p + \eta v_p) u_c^* = \left[\int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) + \eta \int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) \right], \quad \forall u_p^* \in \mathcal{V}_p. \tag{2.54}$$

7 Choisissant ensuite $U^* \in \mathcal{V}_g$ telle que $p^* = 0$ sur Γ, on obtient, après intégration par partie, et compte tenu des résultats ci dessus :

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a + p = \underline{\mathbf{f}}_{v_a}, \tag{2.55}$$

et donc $\underline{\mathbf{v}}_a \in H(\operatorname{div}, \Omega)$.

8 Il suffit pour finir de choisir U^* quelconque pour obtenir les conditions vérifiées par $\underline{\mathbf{v}}_a$. On obtient, après intégration par partie :

$$\langle \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N}, [p^*]_{|\Gamma} \rangle - \int_\omega [p^*]_{|\omega} u_p = 0, \quad \forall p^* \in H^1(\Omega), \tag{2.56}$$

et par conséquent :

$$\underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{e}_z = v_p, \text{ sur } \omega \text{ et } \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N} = 0 \text{ sur } \Sigma. \tag{2.57}$$

Remarque 2.2 *En fait, comme v_p est nulle sur γ_0, il est facile de construire un prolongement $\tilde{v}_p$ de v_p sur tout Γ, qui vérifie :*

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_p)_{|\omega} &= v_p, \\ (\tilde{v}_p)_{|\Sigma} &= 0. \end{aligned} \tag{2.58}$$

$\tilde{v}_p$ est dans $H^1(\Gamma)$ et par conséquent dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On peut donc réécrire (2.56) sous la forme suivante :

$$\langle \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N}, [p^*]_{|\Gamma} \rangle = \langle \tilde{v}_p, [p^*]_{|\Gamma} \rangle, \quad \forall p^* \in H^1(\Omega), \tag{2.59}$$

soit encore :

$$\underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N} = \tilde{v}_p \tag{2.60}$$

9 Les équation (1), (3) et (6) de (2.39) sont naturellement vérifiées puisqu'on a défini v_c, v_p et $\underline{\mathbf{v}}_a$ comme cela. D'autre part, les équations (2), (4) et (5) de(2.39) sont vérifiées, puisqu'il s'agit respectivement des équations (2.49), (2.52) et (2.55), obtenues ci dessus lors de l'interprétation de la formulation variationnelle de (2.45).

Ainsi, pour tout $F \in H$, on a réussi à déterminer $U \in D(A)$ tel que $AU + U = F$.

Et finalement A est maximal monotone. ◁

2.2.5 Existence et unicité du modèle de guitare

Nous somme maintenant en mesure d'énoncer un théorème d'existence et d'unicité pour le problème (1.43)

Théorème 2.2 *On suppose que :*

$$\begin{cases} U_0 \in D(A), \\ f_c \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(]0, l_c[)), \end{cases} \tag{2.61}$$

où U_0 est la condition initiale donnée en (2.13) et $D(A)$ est l'espace défini en (2.30).
Alors le problème (1.43) possède une unique solution forte $(u_c, u_p, p, \underline{\mathbf{v}}_a)$ telle que :

$$\begin{cases} u_c \in C^2(\mathbb{R}+, L^2(]0, l_c[)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_c), \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial u_c}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial v_c}{\partial x}\right] \in C^0(\mathbb{R}_+, L^2(]0, l_c[)), \\ u_p \in C^2(\mathbb{R}+, L^2(\omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_p(\omega)), \\ \mathcal{K}(u_p + \eta v_p) \in C^0(\mathbb{R}_+, L^2(\omega)), \\ p \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)), \\ \underline{\mathbf{v}}_a \in C^1(\mathbb{R}_+, (L^2(\Omega))^3) \cap C^0(\mathbb{R}_+, H(\mathrm{div}, \Omega)), \end{cases} \tag{2.62}$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_c &= \left\{ u_c \in H^1(]0, l_c[) \ ; \ u_c(0) = 0 \right\}, \\ \mathcal{V}_p &= \left\{ u_p \in H^2 \ ; u_p = \partial_n u_p = 0 \ \textit{sur} \ \gamma_0 \right\}, \end{aligned} \tag{2.63}$$

En outre, les conditions aux limites sont vérifiées dans le sens suivant :

$$\begin{cases} u_c(l_c) = \int_\omega u_p, \quad \textit{dans } C^1(\mathbb{R}+, \mathbb{R}), \\ \left\{ \forall u_p^* \in \mathcal{V}_p, \quad \displaystyle\int_\omega \mathcal{K}(u_p + \eta v_p) u_c^* = \left[\int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) \right. \right. \\ \qquad\qquad \left. \left. + \eta \displaystyle\int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) \right], \quad \textit{dans } C^0(\mathbb{R}+, \mathbb{R}), \right. \\ \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N} = \tilde{v}_p, \quad \textit{dans } C^0(\mathbb{R}_+, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)), \end{cases} \tag{2.64}$$

où $\tilde{v}_p$ est définie en (2.58)

▷ PREUVE :

Comme $f_c \in L^2(]0, l_c[)$, on en déduit que le second membre F défini en (2.13) est bien dans

H. Grâce au lemme (2.2), et au théorème de Hille-Yosida, on sait alors que le problème (2.6, 2.8, 2.10) possède une unique solution forte $U = \left(u_c, v_c, u_p, v_p, p, \underline{\mathbf{v}}_a\right)^\top$ dans l'espace

$$C^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C^0(\mathbb{R}_+, D(A)).$$

Il suffit alors d'interpréter cette dernière relation en utilisant le fait que :

$$v_c = \frac{\partial u_c}{\partial t} \quad \text{et} \quad v_p = \frac{\partial u_p}{\partial t}.$$

pour obtenir les régularités annoncées. ◁

2.3 Identité de l'énergie – Estimations a priori

On peut définir une énergie associée à chaque sous structure (corde, plaque, air) prise en compte dans notre modèle. Chacune de ces énergies est en fait la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle. L'énergie totale du système, définie comme la somme des trois énergies précédentes, vérifie alors une propriété fondamentale du point de vue de la physique, à savoir qu'elle est décroissante dès que la puissance extérieure qui lui est transmise est nulle (c'est à dire ici dés que le doigt du guitariste n'interagit plus avec la corde). La décroissance de cette énergie est liée aux termes de pertes internes au sein de la corde et de la plaque introduits dans le modèle.

Cette propriété est également fondamentale du point de vue mathématique. Tout d'abord, elle permet de montrer simplement l'unicité de la solution du problème (dont on sait déjà qu'il possède une unique solution, certes, mais c'est intimement lié). D'autre part, elle permet d'obtenir des estimations *a priori* sur la solution, c'est à dire des estimations de certaines normes de la solution sans connaître son expression.

Enfin, on cherchera à définir une propriété similaire lors des discrétisations en espace et en temps de ce problème, de manière à assurer la stabilité numérique du schéma d'approximation proposé pour le résoudre. Ce point est fondamental, puisque la stabilité d'un schéma numérique est une propriété essentielle pour assurer sa convergence.

Propriété 2.1 (Identité de l'énergie) *Soit $(u_c, u_p, p, \underline{\mathbf{v}}_a)$ l'unique solution forte du problème (1.43).*
On définit l'énergie de la corde par :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\int_0^{l_c} \rho_c \left|\frac{\partial u_c}{\partial t}\right|^2 + \frac{1}{2}\int_0^{l_c} T \left|\frac{\partial u_c}{\partial x}\right|^2, \tag{2.65}$$

celle de la plaque par :

$$E_p(t) = \frac{1}{2}\int_\omega \rho_p \left|\frac{\partial u_p}{\partial t}\right|^2 + \frac{1}{2}\int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p), \tag{2.66}$$

et celle de l'air par :

$$E_a(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mu_a |p|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_a |\underline{\mathbf{v}}_a|^2. \tag{2.67}$$

Alors l'énergie totale du système :

$$E(t) = E_c(t) + E_p(t) + E_a(t), \tag{2.68}$$

vérifie :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^{l_c} f_c \frac{\partial u_c}{\partial t} - \beta \|\partial_x \partial_t u_c\|_T^2 - R_c \|\partial_t u_c\|_{\rho_c}^2 - \eta \|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla}\partial_t u_p)\|_{\mathbf{C}}^2 - R_p \|\partial_t u_p\|_{\rho_p}^2 \tag{2.69}$$

▷ PREUVE :

Rappelons que le problème (1.43) s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} + AU = F, \tag{2.70}$$

où U, A et F sont définis en (2.12) et (2.13).

Il suffit de multiplier cette équation scalairement par U (en utilisant le produit scalaire de l'espace H défini en (2.18)). On obtient alors :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|_H^2 + (AU, U)_H = \int_0^{l_c} f_c \frac{\partial u_c}{\partial t}, \tag{2.71}$$

qui, compte tenu de (2.36), n'est autre que l'identité (2.69). ◁

Comme annoncé, on peut déduire de cette propriété les estimations a priori suivantes :

Théorème 2.3 *Pour tout instant $t \geq 0$, on a les estimations suivantes :*

$$
\begin{aligned}
&\|\frac{du_c}{dt}(t)\|_{\rho_c} \leq (2E^0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|f_c(s)\|_{\frac{1}{\rho_c}} ds,\\
&\|\partial_x u_c(t)\|_T \leq (2E^0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|f_c(s)\|_{\frac{1}{\rho_c}} ds,\\
&\|u_c(t)\|_{\rho_c} \leq \|u_c^0\|_{\rho_c} + t(2E^0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t (t-s)\|f_c(s)\|_{\frac{1}{\rho_c}} ds,\\
&\|\frac{du_p}{dt}(t)\|_{\rho_p} \leq (2E^0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|f_c(s)\|_{\frac{1}{\rho_c}} ds,\\
&\|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)(t)\|_{\mathbf{C}} \leq (2E^0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|f_c(s)\|_{\frac{1}{\rho_c}} ds,\\
&\|u_p(t)\|_{\rho_p} \leq \|u_p^0\|_{\rho_p} + t(2E^0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t (t-s)\|f_c(s)\|_{\frac{1}{\rho_c}} ds,\\
&\|p(t)\|_{\mu_a} \leq (2E^0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|f_c(s)\|_{\frac{1}{\rho_c}} ds,\\
&\|\underline{\mathbf{v}}_a(t)\|_{\rho_a} \leq (2E^0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|f_c(s)\|_{\frac{1}{\rho_c}} ds,
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

où E^0 désigne l'énergie initiale :

$$
E^0 = \frac{1}{2}\left(\|u_c^1\|_{\rho_c}^2 + \|\partial_x u_c^0\|_T^2 + \|u_p^1\|_{\rho_p}^2 + \|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p^0)(t)\|_{\mathbf{C}}^2 + \|p(t)\|_{\mu_a}^2 + \right) + \|\underline{\mathbf{v}}_a(t)\|_{\rho_a}^2. \tag{2.73}
$$

▷ PREUVE :

On déduit de l'identité d'énergie (2.69) que :

$$
\frac{dE(s)}{dt} \leq (f_c(s), \frac{\partial u_c}{\partial t}(s)), \quad \forall s \geq 0. \tag{2.74}
$$

Intégrant entre 0 et t cette dernière équation, on obtient :

$$
E(t) \leq E^0 + \int_0^t (f_c(s), \frac{\partial u_c}{\partial t}(s)) ds. \tag{2.75}
$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient, compte tenu de $\|\frac{du_c}{dt}(s)\|_{\rho_c}^2 \leq 2E(s)$:

$$
E(t) \leq E^0 + \sqrt{2} \int_0^t \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho_c}} E(s)^{\frac{1}{2}} ds. \tag{2.76}
$$

Pour conclure, on utilise le lemme de Gronwall, démontré par exemple dans [44] :

Lemme 2.5 (de Gronwall) *Soient $\alpha \in]0,1[$, $C > 0$, $\varphi(t)$ et $m(t)$ deux fonctions continues et positives définies sur $[0,t]$ et satisfaisant :*

$$\forall t \in [0,T], \varphi(t) \leq C \int_0^t m(s)\varphi(s)^\alpha ds. \tag{2.77}$$

Alors on a :

$$\forall t \in [0,T], \varphi(t) \leq \left(C^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t m(s) ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.78}$$

On en déduit :

$$E(t) \leq E_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|f_c(s)\|_{\frac{1}{\rho_c}} ds. \tag{2.79}$$

Il suffit alors de remarquer que les quantités :

$$\|\frac{du_c}{dt}(t)\|_{\rho_c},\ \|\partial_x u_c(t)\|_T,\ \|\frac{du_p}{dt}(t)\|_{\rho_p},\ \|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)(t)\|_{\mathbb{C}},\ \|p(t)\|_{\mu_a},\ \text{ et } \|\underline{\mathbf{v}}_a(t)\|_{\rho_a} \tag{2.80}$$

sont majorées par $(2E(t))^{\frac{1}{2}}$ et d'écrire :

$$u_c(t) = u_c^0 + \int_0^t \frac{du_c(s)}{dt} ds \quad \text{et} \quad u_p(t) = u_p^0 + \int_0^t \frac{du_p(s)}{dt} ds \tag{2.81}$$

pour obtenir le résultat. ◁

Chapitre 3

Présentation générale de la méthode de résolution numérique

La résolution numérique de ce modèle de guitare nous a conduit à effectuer un certain nombre de choix spécifiques tant pour l'approximation spatiale que pour l'approximation temporelle. L'objet de ce court chapitre est de présenter les difficultés principales, la démarche adoptée et la méthode numérique finalement mise en œuvre. Il s'agit donc ici d'aller à l'essentiel. L'analyse détaillée de la méthode fait l'objet des parties II et III.

3.1 Présentation des difficultés

Commençons par faire un bilan des difficultés que l'on rencontre lorsque l'on s'attache à la résolution de ce problème par une méthode numérique.

- Tout d'abord, on a affaire à des **équations qui ont chacune leur dynamique propre** : monodimensionnel pour la corde, bidimensionnel pour la plaque, tridimensionnel pour l'air environnant.
- En particulier, il s'agit d'un **problème de grande taille**, puisqu'il comporte une partie 3D, défini dans un **domaine infini** avec une **géométrie complexe**.
- Bien qu'il soit amorti, la figure (1.3) montre qu'un son peut durer jusqu'à 6 secondes. Il faut donc **résoudre le modèle sur des temps très longs**, ce qui va induire un très grand nombre de pas de temps. Il est donc incontournable de trouver une méthode vraiment efficace. A titre indicatif, le standard d'échantillonage d'un son au format *wav* est de 44100Hz. Ainsi, pour obtenir 6 secondes de son, il faut calculer environ 250000 pas de temps, ce qui commence à faire...
- La bande passante de la guitare se situant aux alentours de 5000Hz, **il faut assurer une bonne précision en fréquence** jusqu'à cette valeur. Usuellement, on estime qu'une précision acceptable nécessite un maillage contenant environ 10 points par longueur d'onde. Cette contrainte impose donc de mailler très finement le domaine de calcul.

- Une des plus grosses difficultés qu'on a rencontré concerne la **résolution de l'équation de plaque de Kirchhoff-Love**, qui est une équation dispersive au niveau continu. Ces difficultés sont dues à la présence d'un opérateur du quatrième ordre en espace, qui a des conséquences désagréables tant sur l'approximation spatiale que sur l'approximation temporelle.

- Une des gageures de l'élaboration d'un schéma numérique pour la résolution d'un problème d'évolution est d'**assurer la stabilité**, en générale obtenue sous une condition de type CFL reliant le pas de temps aux divers pas de discrétisation spatiale du problème.

3.2 Démarche pour établir un schéma de résolution

1. La résolution du problème globale repose avant tout sur une **réécriture du problème complet sous une forme variationnelle** (équation (3.1)). Cette démarche est adoptée pour deux raisons :

   - Il faut **approcher correctement la géométrie** particulière de l'instrument. Dans ce but, l'utilisation de la méthode des éléments finis est naturelle puisqu'elle repose sur la construction de maillages conformes des domaines de calcul et peur de ce fait approcher correctement la forme de la guitare. Une méthode de différences finies, cantonnées à des maillages régulier, ne pourrait se contenter que d'une approximation du contour à l'aide de marches d'escaliers, ce qui est évidemment indésirable. En outre, *la méthode des éléments finis permet de traiter beaucoup plus efficacement les conditions au bord*, tandis que le traitement de telles conditions aux limites soulève de grandes difficulté dans la méthode des différences finies.

     La première étape de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis est justement l'écriture d'une formulation variationnelle du problème.

   - **La stabilité du schéma numérique final est obtenue par une méthode énergétique**. Celle ci repose en fait sur la construction d'une formulation variationnelle du problème global qui possède au niveau continu une propriété d'identité de l'énergie. Le fait d'utiliser une approximation conforme de cette formulation variationnelle permet alors de chercher à obtenir une identité similaire au niveau discret.

2. On effectue alors une **approximation spatiale conforme par éléments finis** de cette formulation variationnelle. On obtient ainsi l'approximation semi-discrète en espace de notre problème, qui se traduit, au final, par un système matriciel différentiel en temps (équation 3.5).

   On s'est en particulier attaché à **mettre en œuvre la technique de condensation de masse** qui permet d'inverser aisément les matrices de masse qui apparaissent à ce stade la la discrétisation (voir annexe B). Ce choix permet d'obtenir un schéma en temps essentiellement explicite (voir l'étape 4 ci dessous).

3. Vient ensuite l'**approximation temporelle** (équation (3.11)). On se tourne usuellement vers une **méthode de différences finies en temps** pour la résolution du problème

semi-discrétisé en espace. C'est ce qu'on fera concernant la discrétisation temporelle de l'équation de corde celle de l'équation des ondes acoustiques. Par contre, ce choix conduit à un échec pour l'équation de plaque, pour des raisons de précision ou d'efficacité. On est donc amené à **résoudre exactement en temps l'équation de plaque semi-discrète**. On peut réinterpréter *a posteriori* cette méthode comme une méthode spectrale pour laquelle, ne connaissant pas les modes continus, on les calcule par une méthode d'éléments finis.

L'élaboration de cette discrétisation temporelle est guidée :

- d'une part par l'envie d'**obtenir un schéma essentiellement explicite**, c'est à dire faisant intervenir le moins possible d'inversion matricielle à chaque pas de temps. Ceci est rendu possible grâce à la condensation de masse.
- d'autre part, par la nécessité d'obtenir une **propriété de décroissance de l'énergie discrète** pour assurer la stabilité du schéma.

4. Pour finir, il reste à résoudre le schéma proposé, qui est un système linéaire de très grande taille (section 3.4).

   La présence de termes d'amortissement viscoélastique d'une part et la méthode des domaines fictifs utilisée pour résoudre le problème d'interaction fluide-structure d'autre part ne permettent pas d'obtenir un schéma entièrement explicite. Malgré tout, la résolution du schéma à chaque pas de temps est relativement peu coûteuse car **elle repose sur l'inversion de deux matrices symétriques définies positives de petite taille** : l'une "de la taille" de la contrainte q sur la corde (voir ci dessous section 3.3.1), l'autre "de la taille" du saut de pression à la surface de la guitare λ (voir ci dessous section 3.3.3) Ces deux matrices sont factorisées préliminairement par la méthode de Cholesky. **Le reste des équations est entièrement explicite.**

3.3 Choix effectués pour la résolution numérique

3.3.1 Résolution de l'équation de corde et couplage au chevalet

Reformulation On utilise une formulation mixte duale usuelle dans laquelle est introduite la contrainte, ce qui permet de traiter simplement le couplage au chevalet (section 1.1).

Les nouvelles inconnues sont :

- *la vitesse de la corde :* $v_c(x,t) = \partial_t u_c(x,t).$ $\quad \forall t, \quad v_c(.,t) \in \mathcal{U}$
- *la contrainte :* $q(x,t) = T\partial_x u_c(x,t).$ $\quad \forall t, \quad q(.,t) \in \mathcal{Q}.$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= L^2(]0,l_c[) \\ \mathcal{Q} &= H^1(]0,l_c[) \end{aligned}$$

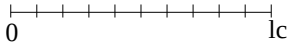


FIG. 3.1: *Maillage de* $]0, l_c[$

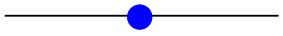


FIG. 3.2: *ddl pour* v_c

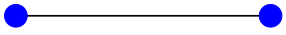


FIG. 3.3: *ddl pour* q

Approximation spatiale On introduit un maillage régulier de l'intervalle $]0, l_c[$ (figure (3.1)). Puis :

- Pour approcher v_c, on utilise des éléments finis de Lagrange P_0 discontinus de manière à approcher l'espace $L^2(]0, l_c[[)$. Les degrés de libertés sont les valeurs de v_c au milieu de chaque segment (figure (3.2));.
- Pour approcher q, on utilise des éléments finis de Lagrange P_1 continus de manière à approcher l'espace $H^1(]0, l_c[[)$. Les degrés de libertés sont les valeurs de q aux nœuds de chaque segment (figure (3.3)). La technique de condensation de masse permet en outre de réduire la matrice de masse associée à q à une simple diagonale.

Approximation temporelle On utilise des différences finies centrées d'ordre 2 en temps. *Dans le cas d'une corde non amortie et sans aucun couplage, le schéma obtenu conduit à un très classique schéma aux différences finies explicite centré.*

3.3.2 Résolution de l'équation de plaque

Reformulation : En pratique, l'équation de plaque est résolue par une *méthode modale*. Les modes de la table sont tout d'abord calculés par une méthode d'éléments finis. On utilise une formulation mixte en vitesse-moment (section 1.3).

Les nouvelles inconnues sont :

- *la vitesse de la plaque :* $v_p(x,y,t) = \partial_t u_p(x,y,t).$ $\quad \forall t, \quad v_p(.,t) \in \mathcal{V}$
- *le moment fléchissant :* $\underline{\underline{\mathcal{M}}}(x,y,t) = \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)(x,y,t).$ $\quad \forall t, \quad \underline{\underline{\mathcal{M}}}(.,t) \in \mathcal{X}$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \left\{ v_p \in H^1(\omega) \;;\; v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\} \\ \mathcal{X} &= \left\{ (H^1(\omega))^4 \;;\; (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}) \,.\, \underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l \right\}. \end{aligned}$$

Approximation spatiale : On introduit un maillage triangulaire conforme de ω (figure (3.4)). Puis on utilise des éléments finis d'ordre élevé de manière à obtenir une bonne précision sur une large gamme de fréquence. La technique de condensation de masse (voir [62]) permet en outre d'éliminer le moment $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ du système final d'équations discrètes.

- Pour approcher v_p, on utilise des éléments finis de Lagrange de type $P_2 \oplus bulle$ continus de manière à approcher l'espace $H^1(\omega)$. Les degrés de libertés sont les

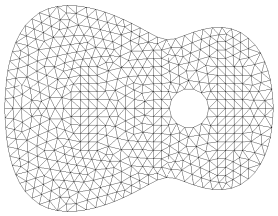


FIG. 3.4: *Maillage de ω*

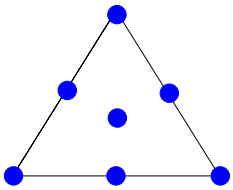


FIG. 3.5: *ddl pour v_p*

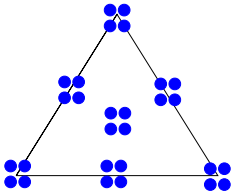


FIG. 3.6: *ddl pour $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$*

valeurs aux sommets, au milieu de chaque arête et au centre de chaque triangle (figure (3.5)). La matrice de masse associée à v_p est diagonale.

- Pour approcher $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$, on utilise des éléments finis de Lagrange de type $P_2 \oplus bulle$ continus de manière à approcher l'espace $(H^1(\omega))^4$. Les degrés de libertés sont les valeurs des quatre composantes du tenseur aux sommets, au milieu de chaque arête et au centre de chaque triangle (figure (3.6)). La matrice de masse associée à $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ est diagonale par bloc 4x4, ce qui permet de l'inverser aisément.

Approximation temporelle : Pour des raisons de précision ou d'efficacité, il s'avère que l'utilisation d'un classique schéma aux différences finies n'est pas adapté (qu'il soit explicite ou implicite).

On utilise donc une méthode de résolution exacte en temps continu qui repose sur un calcul analytique (section 4.3).

3.3.3 Résolution de l'équation des ondes acoustiques et du problème d'interaction fluide-structure

Reformulation : On utilise une méthode de domaines fictifs qui permet de préserver l'efficacité des différences finies pour la résolution d'un problème de cette taille tout en approchant précisément la géométrie du domaine (section 2.2). On introduit $\lambda = p_e - p_i$, le saut de pression à travers la surface de l'instrument. On écrit alors une formulation variationnelle de type mixte dans laquelle la guitare n'apparaît que via le multiplicateur de Lagrange λ, ce qui permet d'utiliser un maillage régulier cubique pour approcher le champ acoustique. Il suffit alors de mailler la surface de la guitare pour approcher λ. On prend ainsi en compte de manière très précise la géométrie de l'instrument.

Les inconnues de cette formulation variationnelle sont :

- *la pression acoustique :* $p(x,y,z,t)$, $\forall t, \quad p(.,t) \in \mathcal{P}$
- *la vitesse acoustique :* $\underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,t)$. $\forall t, \quad \underline{\mathbf{v}}_a(.,t) \in \mathcal{W}$
- *le saut de pression :* $\lambda = [p]_{|\Gamma} = (p_e)_{|\Gamma} - (p_i)_{|\Gamma}$, $\forall t, \quad \lambda(.,t) \in \mathcal{L}$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= L^2(\mathbb{R}^3), \\ \mathcal{W} &= H(\mathrm{div}, \mathbb{R}^3), \\ \mathcal{L} &= H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \end{aligned}$$

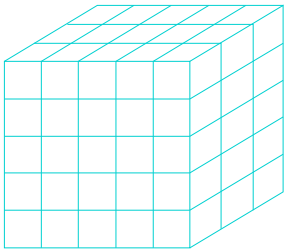


FIG. 3.7: *Maillage de* Ω

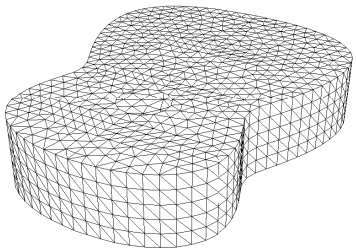


FIG. 3.8: *Maillage de la guitare*

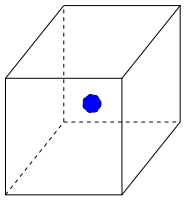


FIG. 3.9: *ddl pour* p

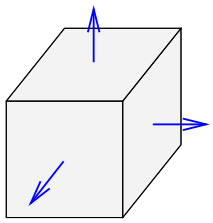


FIG. 3.10: *ddl pour* $\underline{\mathbf{v}}_a$

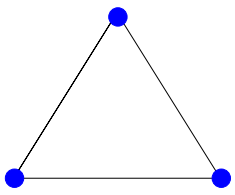


FIG. 3.11: *ddl pour* λ

Approximation spatiale : On commence par restreindre le problème à un domaine de taille finie, parallélépipédique, encore noté Ω, et on applique des conditions aux limites absorbantes d'ordre élevées sur la frontière artificielle du domaine de calcul (voir [17]). On introduit alors un maillage cubique régulier de Ω et un maillage surfacique triangulaire de Γ(figures (3.7) et (3.8)). Puis :

- Pour approcher p, on utilise des éléments finis de Lagrange de type P_0 discontinus

de manière à approcher l'espace $L^2(\Omega)$.. Les degrés de libertés sont les valeurs aux milieu de chaque cube (figure (3.9)).

- Pour approcher $\underline{\mathbf{v}}_a$, on utilise des éléments finis de Raviart Thomas d'ordre 1 de manière à approcher l'espace $H(\mathrm{div}, \Omega)$. Les degrés de libertés sont les valeurs de la composante normale de la vitesse sur chaque face des cubes du maillage. (figure (3.10)). La technique de condensation de masse permet en outre de réduire la matrice de masse associée à $\underline{\mathbf{v}}_a$ à une diagonale.
- Pour approcher λ, on utilise des éléments finis de Lagrange de type P_1 continus de manière à approcher l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Les degrés de liberté sont les valeurs de λ aux sommets de la triangulation (figure (3.11)).

Approximation temporelle On utilise des différences finies centrées d'ordre 2 en temps. *Sans aucun couplage, le schéma obtenu conduit à un très classique schéma aux différences finies explicite centré.*

3.3.4 Analyse de stabilité

On a ici un schéma de résolution atypique puisqu'il couple à la fois une méthode de résolution exacte en temps et une méthode de différences finies en temps. Pour obtenir la stabilité, la technique reste toutefois classique. Elle repose sur l'obtention d'une identité d'énergie discrète qui stipule qu'en l'absence d'excitation, l'énergie ne peut que décroître (voir la section 3.3.3).

Concrètement, la stabilité du schéma de résolution est obtenue sous deux conditions (voir le lemme 3.1). D'une part la condition de stabilité du schéma de résolution de l'équation de corde :

$$\frac{c_c \Delta t}{h_c} < 1,$$

et d'autre part la condition de stabilité du schéma de résolution de l'équation des ondes acoustiques :

$$\frac{c_a \Delta t}{h_a} < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

où Δt désigne le pas de temps, h_c, le pas d'espace sur la corde et h_a le pas d'espace dans l'air. Ces deux conditions ne sont autres que les très usuelles conditions de type CFL des schémas aux différences finies explicites couramment utilisés pour résoudre ces deux équations. On a donc écrit un schéma robuste pour lequel la condition de stabilité n'est pas pénalisé par les termes de couplages.

D'autre part, la consistance de la méthode des domaines fictifs mise en œuvre pour la résolution du problème d'interaction fluide-structure repose sur l'obtention d'une condition inf-sup discrète. On peut montrer que cette dernière est vérifiée sous une condition de compatibilité entre le maillage cubique du domaine acoustique et le maillage triangulaire de la surface de la guitare (section 2.3.2.d). On vérifie en pratique que la condition inf-sup discrète est satisfaite dès que :

$$h_\lambda \leq 1,1 h_a.$$

Deuxième partie

Résolution numérique de l'équation de plaque de Kirchhoff-Love

Chapitre 1

Une formulation mixte de l'équation de plaque orthotrope de Kirchhoff-Love

On s'intéresse dans ce chapitre à la semi-discrétisation spatiale de l'équation de plaque dynamique de Kirchhoff-Love pour un matériau orthotrope inhomogène occupant un domaine ω, ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$, encastrée sur une partie de son bord γ_0, et libre le long de l'autre partie de son bord γ_l.

Précisons notre démarche. Tout d'abord, la géométrie particulière de l'instrument et les conditions au bord du domaine suggèrent d'utiliser la méthode des éléments finis, bien adapté à ce type de situation. Celle-ci repose sur l'exploitation d'une formulation variationnelle du problème. Il se trouve que la formulation variationnelle naturelle de l'équation de plaque de Kirchhoff-Love conduit à chercher l'inconnue $u_p(t)$ dans $H^2(\omega)$ (section 1.1). Et une approximation conforme de cet espace nécessite l'utilisation d'éléments finis sophistiqués de classe C^1 pour assurer la continuité de la dérivée normale. Ces éléments sont complexes à définir, difficiles à implémenter numériquement, et on préfère en général éviter de les utiliser. C'est une difficulté essentielle et bien connue du modèle de flexion de Kirchhoff-Love. Il existe une abondante littérature proposant de nombreuses méthodes pour contourner ce problème. Après avoir fait un survol de quelques unes d'entre elles (section 1.2), nous présentons la formulation retenue pour cette étude (section 1.3). Celle ci fait intervenir le moment fléchissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)$, qui est un tenseur d'ordre 2.

Il se trouve que cette formulation mixte ne vérifie pas les hypothèses de la théorie des méthodes mixtes de Babuskă-Brezzi, car elle exige trop de régularité sur l'espace du moment fléchissant pour qu'on puisse obtenir la fameuse condition inf-sup qui assure l'existence d'une solution. On peut en fait obtenir un résultat d'existence à l'aide d'un argument de régularité, au moins dans un cas simple (voir la section 2.6). Cette situation inhabituelle nous conduit en fait à analyser deux choix possibles pour l'espace du moment fléchissant : $(H^1(\omega))^4$ et $H(\underline{\mathrm{Div}}\,, \omega)$. L'introduction de la condition de bord libre est traitée différemment suivant qu'on utilise l'un ou l'autre de ces deux espaces. On est ainsi amené à analyser deux formulations mixtes de l'équation de Kirchhoff-Love : les problèmes $\mathcal{P}^1$ et $\mathcal{P}^{\mathrm{div}}$ (section 1.3.3).

On commence par traiter le cas d'une plaque non amortie. L'introduction de l'amortissement dans la formulation variationnelle mixte proposée ici pour résoudre ce problème est présentée dans un deuxième temps, à la section 1.4.

Présentation du problème

L'inconnue $u_p(x,y,t)$ définie dans $\omega \times \mathbb{R}_+$ représente la flexion de la plaque, c'est à dire le déplacement vertical de la surface médiane. Son mouvement est régi, dans le cadre des hypothèses de Kirchhoff-Love (présentées à l'annexe A), par le problème aux limites suivant (*cf.* section 1.3) :

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho_p \dfrac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) = f_p & \text{dans } \omega \\ u_p = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \partial_n u_p = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ (\mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)\underline{n}).\underline{n} = 0, & \text{sur } \gamma_l, \\ [\underline{\operatorname{Div}}\,(\mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p))].\underline{n} + \partial_\tau[(\mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)\underline{n}).\underline{\tau}] = 0, & \text{sur } \gamma_l, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

auquel il convient d'ajouter des conditions initiales que nous supposerons nulles, pour simplifier. On pourra se référer à la page 26 pour la signification des paramètres ρ_p, $\mathbf{C}$ et des opérateurs div, $\underline{\operatorname{Div}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\nabla}$, ∂_n et ∂_τ intervenant dans ce problème.

Remarque 1.1 *On ne traite pas ici le troisième type de condition au bord idéale usuellement rencontrée dans la littérature, c'est à dire la condition de bord simplement supporté, car elle n'intervient pas dans le modèle de guitare que nous avons choisi. Cela alourdirait inutilement cette présentation. Néanmoins, l'introduction de cette condition aux limites serait aisée dans la méthode présentée ici, car cette condition est incluse dans les conditions de bord libre.*

1.1 Les inconvénients de la formulation variationnelle naturelle

1.1.1 Formulation dans $H^2(\omega)$

Afin d'obtenir une formulation variationnelle du problème (1.1), on multiplie la première équation par une fonction test u_p^* suffisamment régulière et on effectue une double intégration par partie, en utilisant la formule suivante, présentée en annexe (section A.4.2.a), valable pour tout tenseur $\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in (H^2(\omega))^4$ et toute fonction $u_p^* \in H^2(\omega)$:

$$\int_\omega \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}\, u_p^* = \int_\omega \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p^*) + \int_{\delta\omega} \left(\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}.\underline{n} + \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}]\right) u_p^* - \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{n} \frac{\partial u_p^*}{\partial n} \tag{1.2}$$

On obtient, compte tenu des conditions au bord, le problème variationnel suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_p : [0,T] \to V \text{ tel que :}\\ \dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_\omega \rho_p u_p u_p^* + \int_\omega \mathbf{C}\,\varepsilon(\underline{\nabla} u_p) : \varepsilon(\underline{\nabla} u_p^*) = \int_\omega f_p u_p^*, \forall u_p^* \in V,\end{array}\right. \tag{1.3}$$

où :

$$V = \left\{ u_p \in H^2(\omega)\ ;\ u_p = \partial_n u_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\}. \tag{1.4}$$

On vient en fait de refaire rapidement en sens inverse l'interprétation du principe des puissances virtuelles écrit dans le cas particulier d'une plaque sous les hypothèses de Kirchhoff-Love, présenté en annexe (*cf.* section A.4.2). C'est ce qui explique pourquoi les conditions portant sur le bord libre, à l'aspect relativement indigeste, disparaissent magiquement. On peut donc dire que cette formulation variationnelle est la formulation *naturelle* du problème de Kirchhoff-Love.

L'un des intérêts de cette formulation réside dans son apparente sobriété. Les conditions aux limites sont traitées de manière naturelle. En outre, elle rentre parfaitement dans le cadre d'une analyse standard de convergence de la méthode des éléments finis. En effet, il s'agit d'une équation de propagation de la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u_p,\ u_p^*) + a(u_p,\ u_p^*) = l(u_p^*), \quad \forall u_p^* \in V, \tag{1.5}$$

où $(.,\ .)$ désigne le produit scalaire dans L^2 et $a(.,\ .)$ est une forme bilinéaire coercive sur V. En particulier, ce problème est bien posé (ceci est une conséquence de l'inégalité de Korn (voir (2.24))) .

Rappelons également la propriété de conservation de l'énergie suivante, que l'on retrouve très facilement en choisissant $u_p^* = \dfrac{du_p}{dt}$ comme fonction test particulière dans (1.3) :

Propriété 1.1 *On définit l'énergie de la plaque par :*

$$E^p(t) = \frac{1}{2}\int_\omega \rho_p \left|\frac{du_p}{dt}\right|^2 + \frac{1}{2}\int_\omega \mathbf{C}\,\varepsilon(\underline{\nabla} u_p) : \varepsilon(\underline{\nabla} u_p). \tag{1.6}$$

Alors l'énergie E^p vérifie :

$$\frac{dE^p}{dt}(t) = \int_\omega f_p \frac{du_p}{dt} \tag{1.7}$$

L'approximation spatiale de cette formulation variationnelle dans le cadre de la méthode des éléments finis conforme repose sur la construction d'un sous espace $\mathcal{V}_h$ de $\mathcal{V}$ de dimension finie. Commençons tout d'abord par effectuer quelques rappels sur la construction des éléments finis.

1.1.2 Quelques rappels sur les éléments finis

Nous n'entrerons bien entendu pas dans les détails de cette méthode. Il s'agit juste ici de préciser de préciser un peu de vocabulaire qui sera utile dans la suite de cette partie.

On se donne une triangulation $\mathcal{T}_h$ du domaine ω, satisfaisant les critères usuels demandés à une triangulation. L'indice h représente ici le pas de cette triangulation, c'est à dire la longueur de la plus grande arête des triangles de $\mathcal{T}_h$, qui est destinée à tendre vers 0. Et on construit des fonctions tests dont la restriction à chaque triangle est polynomiale. Celle ci repose sur la construction d'une famille d'élément fini, dont voici une définition. On se restreint ici à la définition d'un élément fini triangulaire polynômial.

Définition 1.1 *On appelle élément fini triangulaire la donnée d'un triplet (K, P_K, Σ_K) où :*

- *K est un triangle non dégénéré,*
- *P_K est un espace de fonctions polynomiales de dimension N,*
- *Σ_K est une famille de formes linéaires $(\sigma_i)_{1\leq i\leq \sigma}$ définies sur l'espace P_K. On suppose que cette famille est P_K-unisolvante, c'est à dire que l'application linéaire :*

$$\Theta : \left\{ \begin{array}{ccc} P_K & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ p & \mapsto & (\sigma_i(p))_{1\leq i\leq \sigma} \end{array} \right.$$

est bijective.

Par conséquent, pour tout élément fini (K, P_K, Σ_K), il existe une unique base de P_K, notée $(p_i)_{1\leq i\leq \sigma}$, telle que

$$\sigma_j(p_i) = \delta_{ij}, \forall i, j \in \{1 \dots N\},$$

qui est la base canonique locale de cet élément fini. On peut écrire pour tout $p \in P_K$:

$$p = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(p) p_i.$$

Usuellement, la famille $\Sigma_K = (\sigma_i)_{1\leq i\leq \sigma}$ est appelée l'ensemble des degrés de liberté de l'élément fini (K, P_K, Σ_K).

Passage à l'élément de référence Dans certains cas, on peut rapporter la définition de tout élément fini (K, P_K, Σ_K) à un élément de référence $(\hat{K}, \hat{P}_K, \hat{\Sigma}_K)$ à l'aide d'une transformation affine (voir la figure (1.1)). Usuellement, $\hat{K}$ désigne le triangle de sommets $\hat{S}_1(0,0)$, $\hat{S}_2(1,0)$ et $\hat{S}_3$.

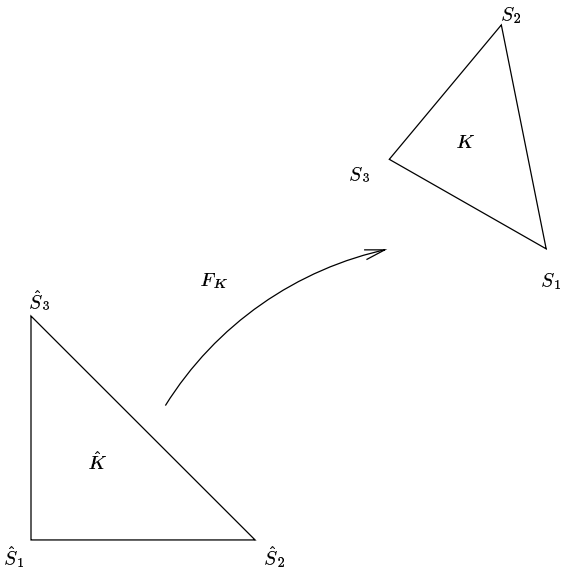


FIG. 1.1: *La transformation affine F_K transformant $\hat{K}$ en K*

Etant donné un triangle K non dégénéré, de sommets S_1, S_2 et S_3, il existe une unique transformation affine du plan, inversible :

$$F_K : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \hat{x} & \mapsto & B\hat{x} + S_1, \end{cases} \tag{1.8}$$

telle que :

$$F_K(\hat{S}_i) = S_i, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \tag{1.9}$$

On peut maintenant préciser la définition suivante :

Définition 1.2 *On dit que les deux éléments finis (K, P_K, Σ_K) et $(\hat{K}, \hat{P}_K, \hat{\Sigma}_K)$ sont affines équivalents si et seulement si :*

$$P_K = \left\{ p \ : \ K \to \mathbb{R} \, ; \ \exists \hat{p} \in \hat{P}_K, p = \hat{p} \circ F_K^{-1} \right\}$$
$$\Sigma_K = \{ \sigma_i \ : \ p \mapsto \hat{\sigma}_i(p \circ F_K); 1 \leq i \leq N \} .$$

La relation binaire : " (K, P_K, Σ_K) *est affine équivalent à* $(\hat{K}, \hat{P}_K, \hat{\Sigma}_K)$" est clairement une relation d'équivalence. L'intérêt pratique de pouvoir rapporter la définition d'un élément fini à un élément de référence est que cela simplifie grandement l'implémentation numérique de la méthode. En effet, on calcule une fois pour toute la base locale de l'élément de référence associée aux degrés de liberté $\hat{\Sigma}_K$, et il suffit alors de lui appliquer la transformation F_K^{-1} pour obtenir la base local de l'élément (K, P_K, Σ_K).

Un autre intérêt, d'envergure, est que cette transformation permet la construction d'un opérateur d'interpolation qui est à la base de l'analyse de convergence de la méthode.

1.1.3 Approximation conforme de $H^2(\omega)$

Etant donné une triangulation $\mathcal{T}_h$ et une famille d'éléments finis (K, P_K, Σ_K) définie pour tout triangle K de $\mathcal{T}_h$, on construit alors l'espace d'approximation suivant $\mathcal{V}_h$ suivant :

$$\mathcal{V}_h = \left\{ v : \omega \to \mathbb{R}; \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{|K} \in P_K \right\} \tag{1.10}$$

Pour que cette approximation soit conforme, c'est à dire pour qu'elle vérifie l'inclusion $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, il faut vérifier des hypothèses de continuité adéquates le long de chaque arête.

Dans le cas de l'approximation conforme de $H^2(\omega)$, cette propriété fondamentale repose sur le lemme suivant, dont la démonstration, très simple, est une conséquence de la formule de Stokes :

Lemme 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière régulière. On se donne une partition de Ω en deux ouverts :*

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2. \tag{1.11}$$

On note $\Gamma = \delta\Omega_1 \cap \delta\Omega_2$ la frontière commune à Ω_1 et Ω_2, et $\underline{n}$ la normale extérieure à Ω_1 le long de Γ. On considère une fonction définie sur Ω, $v : \Omega \to \mathbb{R}$, et on note $v_i = v_{|\Omega_i}$, pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $v \in H^2(\Omega)$ si et seulement si :

1. *$v_i \in H^2(\Omega_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$,*
2. *$(v_1)_{|\Gamma} = (v_2)_{|\Gamma}$,*
3. *$\partial_n v_1 - \partial_n v_2 = 0$ sur Γ, où ∂_n désigne la dérivée par rapport à la normale $\underline{n}$ le long du bord de K_i,* ie. *$\partial_n v_i = \underline{\nabla} v_i \,.\, \underline{n}$, pour $i \in \{1, 2\}$.*

Soit $v \in \mathcal{V}_h$. On considère deux triangles contigus K_1 et K_2 de la triangulation $\mathcal{T}_h$. On a bien évidemment $v_{|K_i} \in H^2(\overset{\circ}{K}_i)$, pour $i \in \{1, 2\}$. Les deux autres hypothèses imposent donc non seulement que le raccord entre deux éléments contigus soit continue le long de l'arête commune, mais également que le saut de dérivée normale soit nulle le long de cette arête. En pratique, cela revient à imposer un raccord C^1. On dit qu'une famille d'éléments finis ainsi définie est de classe C^1. Tout l'art de la définition d'un élément fini consiste alors à choisir judicieusement les degrés de liberté le long des arêtes pour assurer des raccords de la classe désirée.

De nombreux auteurs ont proposés des éléments de classe C^1. Le plus célèbre d'entre eux est certainement l'élément d'Argyris. Cet élément nécessite l'utilisation de polynômes de degré 5, défini de manière unique à l'aide des 21 degrés de liberté représentés schématiquement sur la figure (1.2). On peut alors démontrer que cet élément est bien de classe C^1 et qu'il permet donc la construction d'un espace d'approximation $\mathcal{V}_h$ conforme (voir exemple [15]).

Le défaut de l'approximation conforme de $H^2(\omega)$ réside dans l'implémentation de la méthode. Le dimension de l'espace local défini sur chaque triangle vaut 21 dans le cas de l'élément d'Argyris présenté ici, ce qui est plutôt grand et conduit à une structure compliquée

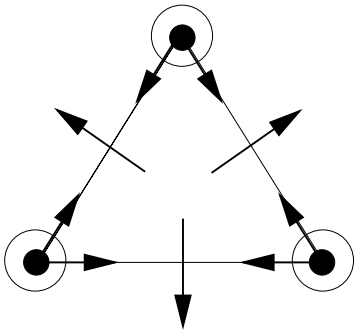


FIG. 1.2: *L'élément fini $H^2(\omega)$ conforme d'Argyris. Les degrés de libertés sont les valeurs aux sommets, représentés par un $\bullet$, les dérivées premières selon la direction indiquée par les flèches $\rightarrow$ et les 3 dérivées d'ordre 2 représentées par les cercles $\bigcirc$, soit en tout 21 ddl*

et lourde à manipuler. Un simple coup d'œil sur la figure (1.2) montre d'ailleurs immédiatement la complexité de cet élément.

En outre, et c'est surtout ce qui rend l'implémentation numérique fastidieuse, cette famille d'élément fini n'est pas affine équivalente (*cf.* la définition (1.2)). Ceci est dû à la présence de dérivées normales parmi les degrés de liberté. Celles ci ne sont pas préservées par transformation affine. On ne peut donc pas construire aisément la base locale de chaque élément à l'aide d'une transformation simple appliquée à la base calculée sur l'élément de référence. On est obligé de calculer triangle par triangle la base qui lui est associée.

1.2 Survol de quelques méthodes existantes

L'approximation conforme de l'espace $H^2(\omega)$ est donc suffisamment désagréable pour que l'on soit tenté d'aborder le problème sous un autre angle. Nous décrivons ici brièvement certaines des nombreuses méthodes qui ont été proposées pour éviter cette approche fastidieuse. Il va sans dire que cette section n'a pas la moindre prétention d'exhaustivité.

Ces approches ont toutes été proposées pour la résolution du problème statique. Dans certains cas, nous présentons leur adaptation au problème dynamique. Signalons également que nous avons trouvé très peu de choses concernant la résolution du problème dynamique de plaque de Kirchhoff-Love.

1.2.1 Approximation non conforme

Une première idée est d'effectuer une approximation non conforme basée sur la formulation variationnelle donnée en (1.3). Il s'agit ici d'approcher $\mathcal{V}$ à l'aide d'un espace d'éléments finis qui n'est plus de classe C^1, comme par exemple le rectangle d'Adini, voire carrément même pas de classe C^0, comme par exemple le triangle de Morlaix représenté sur la figure (1.3). La forme bilinéaire :

$$a(u_{p_h}, u^*_{p_h}) = \int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_{p_h}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u^*_{p_h}) \tag{1.12}$$

n'ayant plus de sens avec ce type d'approximation, elle est approchée à l'aide de la forme bilinéaire suivante :

$$a_h(u_{p_h}, u^*_{p_h}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_{p_h}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u^*_{p_h}) \tag{1.13}$$

L'intérêt de tels éléments est qu'ils nécessitent beaucoup moins de degrés de liberté, comme on peut le voir sur la figure (1.3). Bien entendu, une telle simplification est faite au prix d'une perte de précision importante. En outre, les degrés de liberté de tels éléments invoquant toujours les dérivées normales, cette famille d'éléments finis n'est pas affine équivalente.

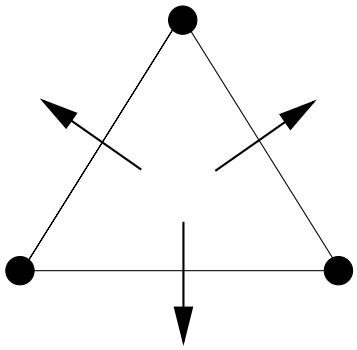


FIG. 1.3: *L'élément fini $H^2(\omega)$ non conforme de Morlaix. Les degrés de libertés sont les valeurs aux sommets, représentés par un $\bullet$, et les dérivées normales au milieu des arêtes indiquée par les flèches $\rightarrow$, soit, en tout, 6 ddl*

1.2.2 Méthodes de pénalisation

Cette méthode a été proposée par Hughes ([41]). Le principe est d'introduire la rotation de la normale :

$$\underline{\theta} = \underline{\nabla} u_p, \tag{1.14}$$

et d'écrire cette équation sous forme pénalisée, c'est à dire qu'on introduit un terme de la forme :

$$\frac{1}{\eta} \int_\omega \left(\underline{\nabla} u_p - \underline{\theta}\right) . \left(\underline{\nabla} u^*_p - \underline{\theta}^*\right), \quad , \forall u^*_p, \quad \forall \underline{\theta}^*, \tag{1.15}$$

où η est un petit paramètre.

En fait, cela revient à analyser le modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Le petit paramètre η n'est alors autre que l'épaisseur de la plaque. La formulation variationnelle du problème de flexion de Reissner-Mindlin est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_p : [0,T] \rightarrow V \text{ et } \underline{\theta} : [0,T] \rightarrow Q \text{ tels que :} \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_\omega \rho_p \delta u_p u^*_p + \dfrac{d^2}{dt^2} \int_\omega \delta^3 \underline{\theta} . \underline{\theta}^* + \int_\omega \delta^3 \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}^*) \\ \qquad + \displaystyle\int_\omega \delta \left(\underline{\nabla} u_p - \underline{\theta}\right) . \left(\underline{\nabla} u^*_p - \underline{\theta}^*\right) = \int_\omega f_p u^*_p, \quad \forall u^*_p \in V, \quad \forall \underline{\theta}^* \in Q \end{array} \right. \tag{1.16}$$

où :

$$\begin{aligned} V &= \left\{ u_p \in H^1(\omega);\ u_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\}, \\ Q &= \left\{ \underline{\theta} \in (H^1(\omega))^2;\ \underline{\theta} = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Cette équation est souvent préférée des numériciens parce qu'elle est posée naturellement dans $H^1(\omega)$, ce qui écarte d'emblée la délicate question de l'approximation conforme de $H^2(\omega)$. Outre le fait qu'elle introduit une inconnue vectorielle supplémentaire, qu'on ne peut pas, en général, éliminer au cours de la résolution, cette équation soulève des difficultés numériques importantes, couramment désignées sous le nom de *vérouillage numérique*. Une approximation numérique par éléments finis standards du problème (1.16) se comporte mal si on fait tendre l'épaisseur δ vers 0.

Pour comprendre le phénomène, supposons qu'on utilise des éléments finis de Lagrange d'ordre 1 (*ie.* des éléments finis P_1 continus). Si, à maillage fixé, on fait tendre l'épaisseur vers 0, on tend à vérifier exactement l'équation $\underline{\theta}_h = \underline{\nabla} u_{ph}$ (où l'indice h désigne l'approximation de la variable considérée). Mais comme $\underline{\nabla} u_{ph}$ est dans P_0 sur chaque triangle, la continuité imposée au champ $\underline{\theta}_h$ ainsi que les conditions aux limites conduisent à faire tendre $\underline{\theta}_h$ vers 0, et par conséquent u_{ph} tend lui aussi vers 0. Le fait de choisir une approximation d'ordre plus élevée atténue le phénomène, mais ne l'élimine malheureusement pas.

La littérature abonde sur ce sujet. Parmi les méthodes proposées, on peut citer par exemple *l'intégration sélective* (*cf.* Hughes [41]), qui conduit aux éléments de type QUAD. Un autre moyen consiste à utiliser des méthodes mixtes. Brezzi *et al.* ([31], [45]) ont construit une famille d'éléments finis mixtes, dénommée MITC, pour laquelle ils obtiennent une estimation d'erreur indépendante de l'épaisseur. Mais il en existe beaucoup d'autres ...

1.2.3 Une formulation mixte faisant intervenir l'effort tranchant

Cette méthode proposée par D. Chapelle ([11]) et également par Arnold et Brezzi ([27]) repose sur une formulation mixte dans laquelle intervient donc l'effort tranchant. Nous la présentons ici dans le cas d'une plaque encastrée, adaptée au problème temporel. Introduisant les inconnues $v_p = \partial_t u_p$, $\underline{\theta} = \underline{\nabla} u_p$ et $\underline{\sigma} = -\underline{\mathrm{Div}}\,(\mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p))$, on réécrit le problème (1.1) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v_p - \operatorname{div} \underline{\sigma} = f_p & \text{dans } \omega, \\ \partial_t \underline{\theta} - \underline{\nabla} v_p = 0, & \text{dans } \omega, \\ \underline{\sigma} + \underline{\mathrm{Div}}\,(\mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta})), & \text{dans } \omega, \\ v = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \underline{\theta} = 0, & \text{sur } \gamma_0. \end{cases} \tag{1.18}$$

On multiplie la première équation par une fonction test v_p^* suffisamment régulière, la seconde par $\underline{\sigma}^*$ et la troisième par $\underline{\theta}^*$. On obtient, après quelques intégrations par parties la

formulation variationnelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } v_p : [0,T] \to H_0^1(\omega),\ \underline{\theta} : [0,T] \to (H_0^1(\omega))^2, \text{et } \underline{\sigma} : [0,T] \to \in H^{-1}(\mathrm{div},\omega),\ \text{tels que :} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \langle \mathrm{div}\,\underline{\sigma}\,,\, v_p^*\rangle = \int_\omega f_p v_p^*, \quad \forall v_p^* \in H_0^1(\omega), \\ \dfrac{d}{dt}\langle \underline{\sigma}^*\,,\, \underline{\theta}\rangle + \langle \mathrm{div}\,\underline{\sigma}^*\,,\, v_p\rangle = 0, \quad \forall \underline{\sigma}^* \in H^{-1}(\mathrm{div},\omega), \\ \langle \underline{\sigma}\,,\, \underline{\theta}^*\rangle - \displaystyle\int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}^*) = 0, \quad \forall \underline{\theta}^* \in (H_0^1(\omega))^2, \end{array}\right. \tag{1.19}$$

où :

$$H^{-1}(\mathrm{div},\omega) = \left\{\underline{\sigma} \in (H^{-1}(\omega))^2\ ;\ \mathrm{div}\,\underline{\sigma} \in H^{-1}(\omega)\right\}, \tag{1.20}$$

es l'espace *naturel* de $\underline{\sigma}$ et $\langle .,. \rangle$ désigne le crochet de dualité dans $H^{-1}(\omega)$. Il s'agit d'une formulation mixte dans laquelle la variable primale est $(v_p, \underline{\theta})$ et $\underline{\sigma}$ est le multiplicateur de Lagrange.

L'intérêt de cette formulation est qu'on peut montrer que, pour ce choix d'espaces pour les inconnues $v_p, \underline{\theta}$ et $\underline{\sigma}$, il s'agit d'une formulation mixte bien posée, (tout au moins pour le problème statique, voir [11]). En outre, cette méthode s'adapte directement au modèle de Reissner-Mindlin et permet de résoudre le problème de vérouillage numérique présenté à la section précédente.

La raison pour laquelle nous ne l'avons pas retenu est essentiellement due au fait que l'on ne peut pas éliminer explicitement les inconnues $\underline{\theta}$ et $\underline{\sigma}$. En effet, si on introduit des espaces de dimension finie approchant les espaces $H_0^1(\omega)$, $(H^1(\omega))^2$ et $H^{-1}(\mathrm{div},\omega)$, on obtient le problème matriciel suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} M_h^p\,\dfrac{dv_{p_h}}{dt} + G_h^\top\,\underline{\sigma}_h = f_{ph}, \\ J_h\,\dfrac{d\underline{\theta}_h}{dt} - G_h\,v_{p_h} = 0, \\ J_h^\top\,\underline{\sigma}_h + K_h\,\underline{\theta} = 0, \end{array}\right. \tag{1.21}$$

où v_{p_h}, $\underline{\theta}_h$ et $\underline{\sigma}_h$ désignent les composantes des inconnues discrètes dans une base donnée des espaces d'approximation. M_h^p, J_h, G_h et K_h désignent les matrices représentant les opérateurs discrets approchants ceux, continus, du problème variationnel (1.19). $J_h^\top$ désigne la transposée de J_h.

La matrice J_h est rectangulaire, puisque $\underline{\theta}$ et $\underline{\sigma}$ n'appartiennent pas au même espace. Par conséquent, même si M_h^p était réduite à une matrice diagonale par la méthode de condensation de masse, on n'obtiendrait pas un schéma explicite. En fait, on obtient, tous calculs fait, l'équation suivante, en dérivant la première équation de (1.21) par rapport au temps :

$$M_h^p \frac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + G_h^\top (J_h\,K_h^{-1}\,J_h^\top)^{-1} G = \frac{df_{p_h}}{dt} \tag{1.22}$$

Il faut donc inverser la matrice pleine $(J_h\,K_h^{-1}\,J_h^\top)$, ce qui est bien évidemment beaucoup trop coûteux.

Remarque 1.2 *En outre, si on veut traiter le bord libre, l'espace dans lequel il faut choisir $\underline{\sigma}$ ne s'exprime explicitement comme ci dessus. Il faut se contenter d'une définition abstraite de l'espace naturel de $\underline{\sigma}$ pour lequel on obtient la condition inf-sup nécessaire à l'analyse des méthodes mixtes. Comme nous avons écarté cette méthode pour d'autres raisons, nous n'avons pas exploré plus avant le traitement de cette condition de bord libre.*

1.2.4 Une formulation mixte dans le cas homogène isotrope encastré

Rappelons que dans le cas d'une plaque isotrope homogène encastrée, le problème (1.1) devient (voir l'équation (A.66)) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma^2 \Delta^2 u = 0, & \text{dans } \omega, \\ u_p = \partial_n u_p = 0, & \text{sur } \gamma, \end{cases} \tag{1.23}$$

où

$$\sigma^2 = \frac{E\delta^2}{12\rho(1-\nu^2),}$$

E est le module de Young, ν est le module de Poisson, ρ est la densité de la plaque et δ son épaisseur.

Une méthode proposée par Glowinsky ([36]) et justifiée par Ciarlet et Raviart ([30]) consiste à introduire l'inconnue $\mu = \sigma^2 \Delta u_p$. Nous la présentons ici encore en l'adaptant au problème temporel. On réécrit donc l'équation (1.23) en introduisant également $v_p = \partial_t u_p$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v_p + \Delta \mu = f_p, & \text{dans } \omega, \\ \partial_t \mu - \sigma^2 \Delta v_p = 0, & \text{dans } \omega, \\ u_p = \partial_n u_p = 0, & \text{sur } \gamma, \end{cases} \tag{1.24}$$

La formulation variationnelle de ce problème est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } v_p : [0,T] \to H_0^1(\omega), \text{et } \mu : [0,T] \to \in H^1(\omega), \text{ tels que :} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\nabla}\mu \,.\, \underline{\nabla} v_p^* = \int_\omega f_p v_p^*, \quad \forall v_p^* \in H_0^1(\omega), \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \frac{1}{\sigma^2}\mu\mu^* + \int_\omega \underline{\nabla}\mu^* \,.\, \underline{\nabla} v_p = 0, \quad \forall \mu^* \in H^1(\omega), \end{cases} \tag{1.25}$$

Il s'avère que cette formulation mixte ne vérifie pas les hypothèses de la théories des méthodes mixtes (voir section 2.6). Néanmoins, on peut tout de même montrer que le problème (1.25) possède une solution à l'aide d'un résultat de régularité. La solution de (1.23) est dans $H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$ dés que $f_p \in L^2(\omega)$ et que ω est suffisamment régulier. Par conséquent, $\mu = \Delta u_p$ est bien dans $\in H^1(\omega)$, ce qui permet d'exhiber une solution de (1.25).

La formulation variationnelle que nous allons proposer pour la résolution de l'équation de plaque est une généralisation au cas d'une plaque orthotrope avec condition de bord libre de la formulation présentée ici.

1.3 Une nouvelle formulation mixte

S'inspirant de la formulation mixte proposée par Ciarlet-Raviart (*cf.* section 1.2.4) dans le cas d'une plaque homogène isotrope encastrée, nous avons choisi d'écrire une formulation variationnelle mixte dans laquelle interviennent la vitesse verticale de la plaque :

$$v_p = \frac{\partial u_p}{\partial t} \tag{1.26}$$

et le moment de flexion :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) \tag{1.27}$$

On réécrit alors le système (1.1) sous la forme équivalente suivante, d'ordre 1 en temps :

$$\mathcal{P} \; : \; \left\{ \begin{array}{ll} \rho_p \partial_t v_p + \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} = f_p, & \text{dans } \omega, \\ \mathbf{A}\, \partial_t \underline{\underline{\mathcal{M}}} - \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) = 0, & \text{dans } \omega, \\ v_p = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \partial_n v_p = 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{n} = 0, & \text{sur } \gamma_l, \\ (\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{\tau}] = 0, & \text{sur } \gamma_l, \end{array} \right. \tag{1.28}$$

où on a posé :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{C})^{-1}.$$

Remarque 1.3 *En soit, la réintroduction du moment fléchissant dans la formulation variationnelle n'est guère surprenante. On peut la rapprocher d'une formulation du système de l'élastodynamique en vitesse-contrainte. En fait, la loi de comportement et les conditions de bord libre s'écrivent naturellement à l'aide du moment.*

Remarque 1.4 *A ce stade, on peut se demander pourquoi introduire la vitesse v_p plutôt que de conserver le déplacement u_p. Il s'avère que si on écrit le problème à l'aide des variables $(u_p, \underline{\underline{\mathcal{M}}})$, alors on ne réussit pas à définir une énergie qui se conserve. Or cette propriété, que l'on cherchera à conserver au niveau discret, est essentielle pour garantir la stabilité des schémas numériques approchant ce problème. En revanche, on verra qu'on peut définir très naturellement une énergie équivalente à celle introduite en (1.6) pour laquelle on a toujours la propriété de conservation.*

Regardons tout d'abord la cas d'une plaque encastrée. Nous traiterons les conditions de bord libre dans la section suivante.

1.3.1 Cas d'une plaque encastrée

1.3.1.a Relaxation de la symétrie du moment fléchissant

$\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ est un tenseur symétrique. On s'apprête donc à le chercher dans un espace de tenseurs symétriques. Mais il se trouve que nous allons pouvoir relaxer naturellement cette contrainte. On note $\underline{\underline{\mathrm{Jac}}}$ l'opérateur jacobien appliqué à des champs de vecteurs, soit :

$$\underline{\underline{\mathrm{Jac}}}\,\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \partial_x \theta_x & \partial_y \theta_x \\ \partial_x \theta_y & \partial_y \theta_y \end{bmatrix}.$$

L'opérateur des déformations linéarisées, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, n'est rien d'autre que la partie symétrique du jacobien, *ie.* :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathrm{Jac}}}(\underline{\theta}) + {}^{t}\underline{\underline{\mathrm{Jac}}}(\underline{\theta})\right),$$

Comme $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est appliqué ici à un gradient, la formule de Schwartz sur les dérivées croisées permet de vérifier qu'on a :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla}(v_p)) = \underline{\underline{\mathrm{Jac}}}(\underline{\nabla}(v_p)), \text{ pour toute fonction } v_p \text{ suffisamment régulière,}$$

Les raisons pour lesquelles il s'avère intéressant de relaxer la symétrie du tenseur $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ apparaîtront en fait lors de l'approximation par éléments finis des espaces qui interviendront dans la formulation variationnelle que nous allons obtenir.

L'un des espaces fonctionnel dans lequel on cherchera le moment fléchissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ est $H(\underline{\mathrm{Div}}, \omega)$. On est donc amené à approcher l'espace des tenseurs symétriques à divergence dans L^2. Or l'approximation de cet espace par les éléments finis usuels de Raviart-Thomas vérouille numériquement : le seul tenseur de l'espace d'élément de Raviart-Thomas qui est symétrique est le tenseur nul !! Pour contourner ce problème, on peut proposer une méthode de relaxation de la symétrie du tenseur en l'écrivant de façon faible par l'intermédiaire d'un multiplicateur de Lagrange comme cela est couramment pratiqué pour le problème de l'élasticité linéaire (voir par exemple [2]).

Le fait de relaxer *naturellement* la symétrie évite donc d'avoir recourt à une telle méthode.

Remarque 1.5 *Notons que le tenseur de rigidité* $\mathbf{C}$ *et par conséquent le tenseur de souplesse* $\mathbf{A}$ *s'applique a priori uniquement à des tenseurs d'ordre 2 symétriques. Il nous faut donc définir un prolongement de* $\mathbf{C}$ *, noté* $\tilde{\mathbf{C}}$*, qui s'applique aux tenseurs quelconques d'ordre 2.*

Si on utilise maintenant la correspondance suivante entre les tenseurs d'ordre deux et les vecteurs à quatre composantes :

$$(M_{xx} \leftrightarrow M_1), \quad (M_{yy} \leftrightarrow M_2), \quad (M_{xy} \leftrightarrow M_3), \quad (M_{yx} \leftrightarrow M_4),$$

on peut alors poser :

$$\tilde{\mathbf{C}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} \dfrac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & -\dfrac{E_y\nu_{xy}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{E_x\nu_{yx}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \dfrac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy}, \\ M_{yx} \end{bmatrix}, \tag{1.29}$$

La matrice $\mathbf{C}$ *étant définie positive,* $\tilde{\mathbf{C}}$ *l'est encore. En outre, ce prolongement vérifie bien entendu :*

$$\tilde{\mathbf{C}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \mathbf{C}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}, \quad \textit{pour tout } \underline{\underline{\mathcal{M}}} \textit{ symétrique.} \tag{1.30}$$

Dans la suite, nous confondrons $\mathbf{C}$ *et son prolongement* $\tilde{\mathbf{C}}$ *pour ne pas alourdir inutilement les notations.*

1.3.1.b Quelques formules d'intégration par parties

On peut alors utiliser la formule d'intégration par partie suivante valable pour tout champ de tenseur $M \in H(\underline{\mathrm{Div}}\,,\omega)$ et tout champ de vecteur $\underline{\theta} \in (H^1(\omega))^2$:

$$\int_\omega (\underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{\theta} = -\int_\omega \underline{\underline{\mathcal{M}}} \,:\, \underline{\underline{\mathrm{Jac}}}\,\underline{\theta} + \int_\gamma ((\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\theta})_{|\gamma}, \tag{1.31}$$

Rappelons également la formule de Green :

$$\int_\omega \mathrm{div}\,\underline{\theta}\, v = -\int_\omega \underline{\theta}\,.\,\underline{\nabla} v + \int_\gamma ((\underline{\theta}.\underline{n})v)_{|\gamma}. \tag{1.32}$$

Enfin, si on suppose que le bord de ω est régulier (en particulier qu'il n'a pas de coins) et fermé, on a la formule d'intégration suivante, définie pour toutes fonctions f et g continuement dérivables (*cf.* équation (A.59)) :

$$\int_{\delta\omega} \partial_\tau f\, g = -\int_{\delta\omega} f\, \partial_\tau g. \tag{1.33}$$

1.3.1.c Formulation variationnelle pour une plaque encastrée

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème (1.28) pour une plaque encastrée, c'est à dire dans le cas où $\gamma_l = \emptyset$, on multiplie la première équation par une fonction test supposée suffisamment régulière $v_p^* \in \mathcal{V}$ et on effectue un intégration par parties à l'aide de la formule (1.32), puis on multiplie la seconde par une fonction test $\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \in \mathcal{X}$, supposée

également suffisamment régulière, et on effectue une intégration par partie à l'aide de la formule (1.31). On déterminera ultérieurement les espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$. On obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\underline{\nabla} v_p^* + \int_{\delta\omega} (\underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\,\underline{n}) v_p^* = \int_\omega f_p v_p^*, \quad \forall v_p^*, \\ &\frac{d}{dt}\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,:\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*.\underline{\nabla} v_p - \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\underline{n})\,.\,\underline{\nabla} v_p = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Montrons maintenant que si la plaque est encastrée, les deux termes de bord :

$$\int_{\delta\omega} (\underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\,\underline{n}) v_p^* \text{ et } \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\underline{n})\,.\,\underline{\nabla} v_p, \tag{1.35}$$

sont nuls pour tout $v_p^* \in \mathcal{V}$ et tout $\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*$.

Rappelons que la condition d'encastrement sur tout le bord s'écrit :

$$v_p = 0 \text{ et } \partial_n v_p = 0 \text{ sur } \delta\omega. \tag{1.36}$$

On inclut la première de ces deux conditions dans l'espace $\mathcal{V}$, c'est à dire qu'on suppose que :

$$v_p^* = 0 \text{ sur } \delta\omega, \forall v_p^* \in \mathcal{V}. \tag{1.37}$$

On en déduit alors :

$$\int_{\delta\omega} (\underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\,\underline{n}) v_p^* = 0, \forall v_p^* \in \mathcal{V}$$

Pour montrer la nullité de l'autre terme de bord, on écrit $\underline{\nabla} v_p$ dans la base de Frechet $(\underline{n}, \underline{\tau})$ défini sur le bord $\delta\omega$:

$$\underline{\nabla} v_p = \frac{\partial v_p}{\partial n}\underline{n} + \frac{\partial v_p}{\partial \tau}\underline{\tau}.$$

On calcule alors, à l'aide de (1.33) et des conditions vérifiées par v_p sur γ :

$$\begin{aligned} \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\underline{n})\,.\,\underline{\nabla} v_p &= \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\underline{n})\,.\,\underline{n}\frac{\partial v_p}{\partial n} + \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\underline{n})\,.\,\tau\frac{\partial v_p}{\partial \tau} \\ &= \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\underline{n})\,.\,\underline{n}\frac{\partial v_p}{\partial n} - \int_{\delta\omega} \partial_\tau(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\underline{n})\,.\,\tau v_p \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Finalement, on obtient le problème variationnel suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \text{Trouver } v_p : [0,T] \to \mathcal{V} \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X} \text{ tels que :} \\ \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\underline{\nabla} v_p^* = \int_\omega f_p v_p^*, \quad \forall v_p^* \in \mathcal{V}, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,:\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*.\underline{\nabla} v_p = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}. \end{cases}} \tag{1.39}$$

1.3.2 Un choix d'espaces pour le moment fléchissant

Il nous faut maintenant préciser dans quels espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$ il faut choisir v_p et $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ respectivement pour que cette formulation variationnelle ait un sens.

Puisqu'il faut que :

$$\underline{\nabla} v_p \in (L^2(\omega))^2 \text{ et } \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in (L^2(\omega))^2,$$

la régularité minimale qu'elle impose est, compte tenu de (1.37) :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= H_0^1(\omega) = \left\{ v \in H^1(\omega) \,;\; v_{|\delta\omega} = 0 \right\}, \\ \mathcal{X} &= H(\underline{\mathrm{Div}}\,, \omega) = \left\{ \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in (L^2(\omega))^4 ; \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in (L^2(\omega))^2 \right\}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

De même que la formulation mixte présentée à la section 1.2.4 cette formulation variationnelle mixte ne vérifie pas les hypothèses de la théorie des méthodes mixtes, même en choisissant pour les espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$ les hypothèse minimales de régularité requises pour qu'elle ait bien un sens (voir section 2.6)

En toute généralité, puisque la solution u_p du problème d'origine est dans $H^2(\omega)$, le moment fléchissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ est seulement dans $(L^2(\omega))^4$ On peut néanmoins s'en sortir à l'aide d'un argument de régularité (voir la section 2.6). Si on suppose que la solution u_p du problème d'origine est dans $H^3(\omega)$,, alors $\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in (H^1(\omega))^4$ et donc $\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in H(\underline{\mathrm{Div}}\,, \omega)$, et le problème (1.39) possède bien une solution.

Quitte à devoir s'en tenir à une hypothèse de régularité pour obtenir un résultat d'existence, on peut carrément choisir le moment fléchissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ dans un espace plus régulier encore, ce qui permettra de simplifier le traitement des conditions aux limites. On s'intéressera donc également au choix suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= H_0^1(\omega), \\ \mathcal{X} &= (H^1(\omega))^4. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Notation 1.1 *Dorénavant, pour bien distinguer ces deux choix, nous noterons :*

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^1 &= (H^1(\omega))^4, \\ \mathcal{X}^{\mathrm{div}} &= H(\underline{\mathrm{Div}}\,, \omega). \end{aligned}$$

Remarque 1.6 *Seule la première condition d'encastrement $v_p = 0$ sur γ apparaît dans l'espace $\mathcal{V}$, la seconde condition d'encastrement $\partial_n v_p = 0$ n'ayant plus de sens dans $H^1(\omega)$. Il s'agit donc d'une condition naturelle, incluse faiblement dans la formulation variationnelle. On peut vérifier que sous des hypothèses de régularité suffisantes, l'interprétation de cette formulation conduit bien aux conditions (1.36).*

1.3.3 Introduction de la condition de bord libre : les problèmes $\mathcal{P}^1$ et $\mathcal{P}^{\text{div}}$

On repart de l'équation (1.34). Puisqu'on ne suppose plus que la plaque est encastrée sur tout son bord, mais seulement sur γ_0, les deux termes de bord (1.35) ne sont plus nuls. Rappelons tout d'abord les conditions aux limites :

$$v_p = 0, \text{ et } \partial_n v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0, \tag{1.42}$$

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{n} = 0, \text{ et } (\underline{\text{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}] = 0, \text{ sur } \gamma_l, \tag{1.43}$$

Il nous faut alors distinguer deux cas, suivant l'espace dans lequel on choisit le moment fléchissant.

1.3.3.a Cas où le moment fléchissant est choisi dans $(H^1(\omega))^4$

De même que ci dessus, on suppose que la première condition d'encastrement (1.42) est incluse dans $\mathcal{V}$, soit :

$$v_p^* = 0 \text{ sur } \gamma_0, \forall v_p^* \in \mathcal{V}. \tag{1.44}$$

On calcule alors formellement, à l'aide de (1.43) :

$$\begin{aligned} \int_{\delta\omega} (\underline{\text{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} \cdot \underline{n}) v_p^* &= \int_{\gamma_l} (\underline{\text{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} \cdot \underline{n}) v_p^* \\ &= -\int_{\gamma_l} \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}] v_p^*, \end{aligned} \tag{1.45}$$

Il faut maintenant s'assurer que cette expression a bien un sens. Puisque v_p^* est dans $H^1(\omega)$ et $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ est dans $(H^1(\omega))^4$ on en déduit que :

$$(v_p^*)_{|\gamma_l} \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l) \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}}_{|\gamma_l} \in (H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l))^4, \tag{1.46}$$

et par conséquent :

$$\partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}] \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_l). \tag{1.47}$$

Il faut donc comprendre l'intégrale intervenant au second membre de (1.45) au sens du crochet de dualité dans $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_l) \times H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l)$.

D'autre part on a :

$$\int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\underline{n}) \cdot \underline{\nabla} v_p = \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\underline{n}) \cdot \underline{n} \frac{\partial v_p}{\partial n} + \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\underline{n}) \cdot \tau \frac{\partial v_p}{\partial \tau}. \tag{1.48}$$

On inclut maintenant la première condition portant sur le bord libre (1.43) dans l'espace $\mathcal{X}^1$, soit

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\,\underline{n}).\underline{n} = 0, \text{ sur } \gamma_l, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \in \mathcal{X}^1, \tag{1.49}$$

et en déduit, en tenant compte de la deuxième condition de (1.42) portant sur $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ que :

$$\int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) \cdot \underline{n} \frac{\partial v_p}{\partial n} = \gamma_0(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) \cdot \underline{n} \frac{\partial v_p}{\partial n} + \int_{\gamma_l} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) \cdot \underline{n} \frac{\partial v_p}{\partial n} = 0. \tag{1.50}$$

Enfin, on effectue une intégration par partie le long de $\delta\omega$ sur le deuxième terme de (1.48), à l'aide de la formule (1.33). Il reste :

$$\begin{aligned} \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) \cdot \underline{\nabla} v_p &= - \int_{\delta\omega} \partial_\tau (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) \cdot \tau v_p \\ &= - \int_{\gamma_l} \partial_\tau (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) \cdot \tau v_p, \end{aligned} \tag{1.51}$$

qui est l'expression duale de (1.45).

Finalement, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\mathcal{P}^1 \ : \ \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v_p : [0,T] \to \mathcal{V}_0 \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X}_l^1 \text{ tels que :} \\ \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} . \underline{\nabla} v_p^* - \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}) . \underline{\tau}], v_p^* \rangle = \int_\omega f_p v_p^*, \quad \forall v_p^* \in \mathcal{V}_0, \\ \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* . \underline{\nabla} v_p + \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) . \underline{\tau}], v_p \rangle = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}_l^1, \end{array} \right. \tag{1.52}$$

où :

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ v_p \in H^1(\omega) \ ; \ v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\} \tag{1.53}$$

$$\mathcal{X}_l^1 = \left\{ (H^1(\omega))^4 \ ; \ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}) \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l \right\}. \tag{1.54}$$

et $\langle ., . \rangle$ désigne le crochet de dualité défini sur $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_l) \times H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l)$.

On a alors la propriété de conservation d'énergie suivante :

Propriété 1.2 *On définit l'énergie de la plaque par :*

$$E^p(t) = \frac{1}{2} \int_\omega \rho_p v_p^2 + \frac{1}{2} \int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}. \tag{1.55}$$

Alors l'énergie E^p vérifie :

$$\frac{dE^p}{dt}(t) = \int_\omega f_p v_p. \tag{1.56}$$

▷ PREUVE : Il suffit de choisir :

$$v_p^* = v_p \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* = \underline{\underline{\mathcal{M}}}, \tag{1.57}$$

dans (1.52). La somme des deux équations obtenues donne la relation (1.56) ◁

1.3.3.b Cas où le moment fléchissant est choisi dans $H(\underline{\mathrm{Div}}\,,\omega)$

Dans ce cas, le crochet de dualité :

$$\langle \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}], v_p\rangle,$$

n'a plus de sens, puisque pour $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ dans $H(\underline{\mathrm{Div}}\,,\omega)$, on a seulement :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n} \in (H^{-\frac{1}{2}}(\delta\omega))^2. \tag{1.58}$$

Il nous faut alors régulariser cette expression pour réussir à lui donner un sens. On introduit pour cela deux variables supplémentaires :

$$\left\{\begin{array}{l} \phi = (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau} \in \mathcal{L}_\phi \\ \psi = \partial_\tau v_p \in \mathcal{L}_\psi. \end{array}\right. \tag{1.59}$$

On peut alors réinterpréter les deux crochets de dualité intervenant dans (1.52) à l'aide de ϕ et ψ. On reprend le calcul des termes de bord de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\delta\omega} (\underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\,\underline{n}) v_p^* &= -\int_{\gamma_l} \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}] v_p^*, \\ &= \int_{\gamma_l} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}\,\partial_\tau v_p^* \\ &= \int_{\gamma_l} \phi\,\partial_\tau v_p^* \end{aligned} \tag{1.60}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\,\underline{n})\,.\,\underline{\nabla} v_p &= -\int_{\gamma_l} \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\,\underline{n})\,.\,\tau] v_p, \\ &= \int_{\gamma_l} [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\,\underline{n}).\underline{\tau}]\,\partial_\tau v_p \\ &= \int_{\gamma_l} [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\,\underline{n}).\underline{\tau}]\,\psi \end{aligned} \tag{1.61}$$

Et on constate que pour que ces deux expressions aient bien un sens, il faut alors choisir :

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{L}_\psi = H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l). \tag{1.62}$$

Il faut alors comprendre les deux dernières intégrales au sens du crochet de dualité dans $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_l) \times H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l)$.

On obtient finalement, en écrivant faiblement les deux égalités (1.59) qui définissent ϕ et ψ, la formulation variationnelle suivante :

$$\mathcal{P}^{\text{div}} \; : \; \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v_p : [0,T] \to \mathcal{V}_0,\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X}_l^{\text{div}},\ \phi : [0,T] \to \mathcal{L}_\phi \text{ et } \psi :]0,T[\to \mathcal{L}_\psi \text{ tels que :} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\text{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\underline{\nabla} v_p^* + \langle \partial_\tau v_p^*, \phi \rangle = \int_\omega f_p v_p^*, \quad \forall v_p^* \in \mathcal{V}_0, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + \int_\omega \underline{\text{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*.\underline{\nabla} v_p - \langle (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}).\underline{\tau}, \psi \rangle = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}_l^{\text{div}}, \\ \displaystyle\int_{\gamma_l} \phi \phi^* = \langle (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}, \phi^* \rangle, \quad \forall \phi^* \in \mathcal{L}_\phi, \\ \displaystyle\int_{\gamma_l} \psi \psi^* = \langle \partial_\tau v_p \psi^* \rangle, \quad \forall \psi^* \in \mathcal{L}_\psi, \end{array} \right. \tag{1.63}$$

où :

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ v_p \in H^1(\omega)\ ;\ v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\} \tag{1.64}$$

$$\mathcal{X}_l^{\text{div}} = \left\{ H(\underline{\text{Div}}\,, \omega)\ ;\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n})\,.\,\underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l \right\}. \tag{1.65}$$

$$\mathcal{L}_\phi = H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l). \tag{1.66}$$

et $\langle ., . \rangle$ désigne le crochet de dualité défini sur $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_l) \times H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l)$.
Et dans ce cas, on a également la propriété de conservation d'énergie suivante :

Propriété 1.3 *On définit l'énergie de la plaque par :*

$$E^p(t) = \frac{1}{2}\int_\omega \rho_p v_p^2 + \frac{1}{2}\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}\,. \tag{1.67}$$

Alors l'énergie E^p vérifie :

$$\frac{dE^p}{dt}(t) = \int_\omega f_p v_p. \tag{1.68}$$

▷ PREUVE : Il suffit de choisir :

$$v_p^* = v_p\ ,\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* = \underline{\underline{\mathcal{M}}}\,,\ \phi^* = -\psi \text{ et } \psi^* = \phi \tag{1.69}$$

dans (1.63). La somme des quatre équations obtenues donne la relation (1.68). ◁

1.4 Formulation variationnelle du problème amorti

On présente rapidement dans cette section comment les formulations variationnelles mixtes de la section 1.3 sont modifiées dans le cas du problème de plaque amortie. Rappelons que ce problème est présenté dans la section 1.3. Il s'écrit, dans les variables v_p et $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ introduites plus haut (voir section 1.3) :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \rho_p \dfrac{\partial v_p}{\partial t} - \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} + R_p \rho_p v_p &=& f_p & \text{dans } \omega, \\ \dfrac{\partial \underline{\underline{\mathcal{M}}}}{\partial t} + \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) + \eta \dfrac{\partial}{\partial t} \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) &=& 0, & \text{dans } \omega, \\ u_p &=& 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \partial_n u_p &=& 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\ \underline{n}).\underline{n} &=& 0, & \text{sur } \gamma_l, \\ (\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{\tau}] &=& 0, & \text{sur } \gamma_l. \end{array}\right. \tag{1.70}$$

On procède exactement comme dans la section 1.3. Les calculs ne présentant aucune difficulté nouvelle, on se contente d'énoncer les deux formulations variationnelles obtenues, suivant l'espace dans lequel on choisit le moment fléchissant. On montre en outre un résultat de conservation d'énergie associé à ces deux formulations variationnelles.

1.4.1 Cas où le moment fléchissant est choisi dans $(H^1(\omega))^4$

La formulation variationnelle du problème (1.70) est dans ce cas :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } v_p : [0,T] \to \mathcal{V}_0 \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X}_l^1 \text{ tels que :} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}.\underline{\nabla} v_p^* - \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{\tau}], v_p^* \rangle + R_p \int_\omega \rho_p v_p v_p^* = \int_\omega f_p v_p^*, \quad \forall v_p^* \in \mathcal{V}_0, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + (1 + \eta \dfrac{d}{dt}) \left[\int_\omega \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*.\underline{\nabla} v_p + \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}).\underline{\tau}], v_p \rangle \right] = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}_l^1, \end{array}\right.} \tag{1.71}$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le crochet de dualité défini sur $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_l) \times H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l)$ et :

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ v_p \in H^1(\omega)\ ;\ v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\} \tag{1.72}$$

$$\mathcal{X}_l^1 = \left\{ (H^1(\omega))^4\ ;\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n})\, .\, \underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l \right\}. \tag{1.73}$$

On a alors la propriété de conservation d'énergie suivante :

Propriété 1.4 *On définit l'énergie de la plaque par :*

$$E^p(t) = \frac{1}{2}\int_\omega (1+\eta R_p)\rho_p v_p^2 + \frac{1}{2}\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}\,. \tag{1.74}$$

Alors l'énergie E^p vérifie :

$$\frac{dE^p}{dt}(t) = \int_\omega f_p v_p + \eta\int_\omega f_p \dot{v}_p - R_p\int_\omega |v_p|^2 - \eta\int_\omega \rho_p\,|\dot{v}_p|^2\,, \tag{1.75}$$

où on a noté $\dot{v}_p = \dfrac{dv_p}{dt}$.

▷ PREUVE : On choisit :

$$v_p^* = v_p \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* = \underline{\underline{\mathcal{M}}}\,, \tag{1.76}$$

dans (1.71). La somme des deux équations obtenues donne :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\omega \rho_p v_p^2 + \frac{1}{2}\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}\right) + R_p\int_\omega |v_p|^2 + \eta\left[\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\underline{\nabla}\dot{v}_p + \langle \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}], \dot{v}_p\rangle\right] = \int_\omega f_p v_p. \tag{1.77}$$

Il suffit de choisir $v_p^* = \dot{v}_p$ dans (1.71). On obtient en effet :

$$\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\underline{\nabla}\dot{v}_p + \langle \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}], \dot{v}_p\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\omega R_p\rho_p\,|v_p|^2 + \int_\omega \rho_p\,|\dot{v}_p|^2 - \int_\omega f_p\dot{v}_p. \tag{1.78}$$

Injectant cette équation dans (1.77), on trouve le résultat recherché. ◁

1.4.2 Cas où le moment fléchissant est choisi dans $H(\underline{\mathrm{Div}}\,,\omega)$

Dans ce cas, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } v_p : [0,T]\to\mathcal{V}_0,\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T]\to\mathcal{X}_l^{\mathrm{div}},\ \phi : [0,T]\to\mathcal{L}_\phi \text{ et } \psi :]0,T[\to\mathcal{L}_\psi \text{ tels que :}\\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\underline{\nabla}v_p^* + \langle\partial_\tau v_p^*, \phi\rangle + R_p\rho_p v_p = \int_\omega f_p v_p^*, \quad \forall v_p^*\in\mathcal{V}_0,\\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + (1+\eta\frac{d}{dt})\left[\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*.\underline{\nabla}v_p - \langle(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\,\underline{n}).\underline{\tau}, \psi\rangle\right] = 0, \quad \forall\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}_l^{\mathrm{div}},\\
\displaystyle\int_{\gamma_l} \phi\phi^* = \langle(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}, \phi^*\rangle, \quad \forall\phi^*\in\mathcal{L}_\phi,\\
\displaystyle\int_{\gamma_l} \psi\psi^* = \langle\partial_\tau v_p\psi^*\rangle, \quad \forall\psi^*\in\mathcal{L}_\psi,
\end{array}\right. \tag{1.79}$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le crochet de dualité défini sur $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_l) \times H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l)$, et :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \left\{ v_p \in H^1(\omega) \; ; \; v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\}, \\ \mathcal{X}_l^{\text{div}} &= \left\{ H(\underline{\text{Div}}\,, \omega) \; ; \; (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}) \,.\, \underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l \right\}, \\ \mathcal{L}_\phi &= H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l). \end{aligned} \tag{1.80}$$

On a alors la propriété de conservation d'énergie suivante :

Propriété 1.5 *On définit l'énergie de la plaque par :*

$$E^p(t) = \frac{1}{2} \int_\omega (1 + \eta R_p) \rho_p v_p^2 + \frac{1}{2} \int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}\,. \tag{1.81}$$

Alors l'énergie E^p vérifie :

$$\frac{dE^p}{dt}(t) = \int_\omega f_p v_p + \eta \int_\omega f_p \dot{v}_p - R_p \int_\omega |v_p|^2 - \eta \int_\omega \rho_p \, |\dot{v}_p|^2 \,, \tag{1.82}$$

où on a noté $\dot{v}_p = \dfrac{dv_p}{dt}$.

▷ PREUVE : Elle est similaire à la preuve précédente. On choisit :

$$v_p^* = v_p \;,\; \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* = \underline{\underline{\mathcal{M}}}\,,\; \phi^* = -\psi \text{ et } \psi^* = \phi \tag{1.83}$$

dans (1.79). La somme des quatre équations obtenues donne :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_\omega \rho_p v_p^2 + \frac{1}{2} \int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}} \right) + R_p \int_\omega |v_p|^2 + \\ &\qquad \eta \left[\int_\omega \underline{\text{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \,.\, \underline{\nabla} \dot{v}_p - \langle (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) \,.\, \underline{\tau}, \dot{\psi} \rangle \right] = \int_\omega f_p v_p. \end{aligned} \tag{1.84}$$

Il nous faut maintenant expliciter le terme $\int_\omega \underline{\text{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \,.\, \underline{\nabla} \dot{v}_p - \langle (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) \,.\, \underline{\tau}, \dot{\psi} \rangle$. On choisit tout d'abord $\phi^* = \dot{\psi}$ dans la troisième équation de (1.79), ce qui donne :

$$\langle (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) \,.\, \underline{\tau}, \dot{\psi} \rangle = \langle \phi, \dot{\psi} \rangle \tag{1.85}$$

il faut alors dériver la dernière équation de (1.79) et choisir $\psi^* = \phi$ pour obtenir :

$$\langle \phi, \dot{\psi} \rangle = \langle \partial_\tau \dot{v}_p, \phi \rangle \tag{1.86}$$

Enfin, on choisit $v_p = \dot{v}_p$ dans la première équation de (1.79). Au total, on calcule donc :

$$\begin{aligned} \int_\omega \underline{\text{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \,.\, \underline{\nabla} \dot{v}_p - \langle (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) \,.\, \underline{\tau}, \dot{\psi} \rangle = \int_\omega \underline{\text{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \,.\, \underline{\nabla} \dot{v}_p - \langle \partial_\tau \dot{v}_p, \phi \rangle = \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\omega R_p \rho_p \, |v_p|^2 + \int_\omega \rho_p \, |\dot{v}_p|^2 - \int_\omega f_p \dot{v}_p. \end{aligned} \tag{1.87}$$

Injectant cette équation dans (1.84), on trouve le résultat recherché. ◁

Remarque 1.7 *On constate que l'énergie associée à la méthode mixte* sans amortissement *coïncide avec l'énergie du problème d'origine, mais que ce n'est plus le cas dés que l'on introduit de l'amortissement visqueux. En effet, dans le problème d'origine, l'énergie associée au problème visqueux était :*

$$E^p(t) = \frac{1}{2}\int_\omega \rho_p \left|\frac{du_p}{dt}\right|^2 + \frac{1}{2}\int_\omega \mathbf{C}\,\varepsilon(\underline{\nabla} u_p) : \varepsilon(\underline{\nabla} u_p).$$

tandis que dans le cas de la méthode mixte, compte tenu de la définition de $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$*, on a :*

$$E^p(t) = \frac{1}{2}\int_\omega \rho_p \left|\frac{du_p}{dt}\right|^2 + \frac{1}{2}\int_\omega \mathbf{C}\,(1+\eta\partial_t)\varepsilon(\underline{\nabla} u_p) : \varepsilon(\underline{\nabla} u_p).$$

Les manipulations effectuées pour démontrer les deux précédentes propriétés ne seront plus possible dans le cas où la plaque est couplée à l'air ou à la corde. Nous pourrons heureusement obtenir une telle propriété dans le cas discret en éliminant le moment $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$*, ce qui permettra de définir une énergie discrète correspondant à l'énergie continue du problème d'origine.*

Chapitre 2

Discrétisation spatiale de l'équation de plaque orthotrope de Kirchhoff-Love

Il nous faut maintenant déterminer une approximation spatiale des deux formulations mixtes $\mathcal{P}^1$ et $\mathcal{P}^{\mathrm{div}}$ construites au chapitre précédent.

L'introduction du moment fléchissant, qui est un tenseur d'ordre 2 a pour conséquence d'augmenter considérablement la taille du problème semi-discrétisé en espace. Nous verrons au chapitre 4 que la méthode retenue pour la résolution en temps de ce schéma discret repose sur la diagonalisation de l'opérateur de plaque discret. Afin de ne pas trop pâtir de l'introduction de l'inconnue supplémentaire $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$, il est intéressant de réduire les matrices de masse qui apparaissent lors de la discrétisation spatiale du problème, à des matrices diagonales ou diagonales par bloc, aisément inversible, en utilisant la technique de condensation de masse. Il est alors possible d'éliminer à moindre coût le moment $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$. La problématique de la condensation de masse est rappelée dans l'annexe B.

Si la condensation de masse est aujourd'hui un problème bien connu dans le cas des espaces d'éléments finis de Lagrange (sections 2.3 et 2.4), il n'en est pas de même de l'approximation de $H(\underline{\mathrm{Div}}\,,\omega)$. Après avoir présenté les raisons pour lesquels on ne peut pas condenser la masse dans le cas des éléments de Raviart-Thomas pour l'approximation de l'espace $H(\mathrm{div},\omega)$, on construit une nouvelle famille d'éléments finis en enrichissant l'espace de Raviart-Thomas (section 2.5).

En outre, pour limiter le phénomène de dispersion numérique, analysé en détail dans le chapitre suivant, on étend cette étude aux éléments finis d'ordre 2.

On propose ainsi quatre schémas pour la semi-discrétisation spatiale de l'équation de plaque, suivant l'espace du moment fléchissant et l'ordre des éléments finis utilisés. Ces approximations spatiales sont notées : $P_1 - P_1^4$, $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$, $P_1 - \tilde{R}_1$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$.

D'autre part, il s'avère qu'une partie des conditions de bord libre apparaissent sous la forme d'une condition essentielle dans l'espace du moment fléchissant. En fait, celui-ci doit vérifier fortement : $\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}.\underline{n} = 0, \;\; \text{sur } \gamma_l$. La construction de l'espace d'approximation incluant cette condition aux limites est immédiate avec les éléments de Raviart-Thomas modifiés (voir section 2.5.4) . En revanche, pour les espaces d'approximation de Lagrange, cette condition est en fait non local, ce qui rend impossible un traitement simple. Pour contourner

ce problème, nous avons choisi d'effectuer une approximation *non conforme* de l'espace : $\left\{(H^1(\omega))^4 \ ; \ \underline{\underline{\mathcal{M}}}\underline{n}.\underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l\right\}$ (section 2.3.3).

Pour terminer ce chapitre, on présente une brève synthèse bibliographique sur les méthodes mixtes concernant la formulation choisie pour cette étude (section 2.6).

2.1 Discrétisation spatiale du problème $\mathcal{P}^1$

Afin d'établir une approximation conforme du problème $\mathcal{P}^1$, on introduit les espaces de dimensions finis :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &\subset \mathcal{V}_0 \\ \mathcal{X}_h^1 &\subset \mathcal{X}_l^1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Le problème semi-discrétisé en espace s'écrit alors :

$$\boxed{\mathcal{P}_h^1 \ : \ \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v_{p_h} : [0,T] \to \mathcal{V}_h \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h : [0,T] \to \mathcal{X}_h^1 \text{ tels que :} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_{p_h} v_{p_h}^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h.\underline{\nabla} v_{p_h}^* - \langle \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h\underline{n}).\underline{\tau}], v_{p_h}^*\rangle = \displaystyle\int_\omega f_p v_{p_h}^*, \quad \forall v_{p_h}^* \in \mathcal{V}_h, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h : \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^* + \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^*.\underline{\nabla} v_{p_h} + \langle \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^*\underline{n}).\underline{\tau}], v_{p_h}\rangle = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^*, \in \mathcal{X}_h^1, \end{array} \right.} \tag{2.2}$$

Soit n_p la dimension de $\mathcal{V}_h$ et n_1 la dimension de $\mathcal{X}_h^1$. On introduit une base de $\mathcal{V}_h$, notée $(\varphi_i)_{1\leq n_p}$ et une base de $\mathcal{X}_h^1$, notée $(\underline{\underline{\xi}}_p^1)_{1\leq p\leq n_1}$.

Notation 2.1 *Pour éviter d'introduire de nouvelles notations, nous confondrons v_{p_h} et le vecteur de coordonnées qui lui est associé dans la base (φ_i). De même, nous confondrons $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h$ et ses coordonnées dans la base $(\underline{\underline{\xi}}_p^1)$.*

On est alors amené à résoudre le système différentiel suivant :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt} - H_h^\top \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h = f_{p_h} \\ M_h^1 \dfrac{d\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h}{dt} + H_h v_p = 0, \end{array} \right.} \tag{2.3}$$

où $H_h^\top$ désigne la transposée de H_h et :

$$\left|\begin{array}{l}
(M_h^p)_{ij} = \displaystyle\int_\omega \rho_p \varphi_i \varphi_j, \quad 1 \le i,j \le n_p \\
(M_h^1)_{pq} = \displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\xi}}_p^1 : \underline{\underline{\xi}}_q^1, \quad 1 \le p,q \le n_1 \\
(H_h)_{pi} = \displaystyle\int_\omega \underline{\text{Div}}\, \underline{\underline{\xi}}_p^1 . \underline{\nabla}\varphi_i + \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\xi}}_p^1 \underline{n}).\underline{\tau}], \varphi_i \rangle, \quad 1 \le p \le n_1 \quad 1 \le i \le n_p, \\
(f_{p_h})_i = \displaystyle\int_\omega f_p \varphi_i, \quad 1 \le i \le n_p.
\end{array}\right. \tag{2.4}$$

Pour pouvoir éliminer le moment fléchissant de cette équation, de manière à réduire la taille de ce système, il faut inverser la matrice de masse du moment fléchissant M_h^1. On utilise dans ce but la technique de condensation de masse (voir annexe B), qui permet de la réduire à une matrice diagonale par blocs de petite taille (4x4).

Les espaces d'approximation $\mathcal{V}_h$ et $\mathcal{X}_h^1$ sont construits à l'aide d'éléments finis de Lagrange avec condensation de masse d'ordre 1 et 2 (section 2.3).

On obtient ainsi deux schémas notés $P_1 - P_1^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ respectivement du premier et du second ordre.

2.2 Discrétisation spatiale du problème $\mathcal{P}^{\text{div}}$

La démarche est la même que pour l'approximation spatiale du problème $\mathcal{P}^1$. On introduit les espaces de dimensions finis :

$$\begin{array}{c}
\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_0 \\
\mathcal{X}_h^{\text{div}} \subset \mathcal{X}_l^{\text{div}} \\
\mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}_\phi
\end{array} \tag{2.5}$$

Et le problème semi-discrétisé en espace s'écrit :

$$\mathcal{P}_h^{\text{div}} \; : \; \left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } v_{p_h} : [0,T] \to \mathcal{V}_h,\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X}_h^{\text{div}},\ \phi_h : [0,T] \to \mathcal{L}_h \text{ et } \psi_h :]0,T[\to \mathcal{L}_h \text{ tels que :} \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_{p_h} v_{p_h}^* - \int_\omega \underline{\text{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h . \underline{\nabla} v_{p_h}^* + \langle \partial_\tau v_{p_h}^*, \phi_h \rangle = \displaystyle\int_\omega f_p v_{p_h}^*, \quad \forall v_{p_h}^* \in \mathcal{V}_h, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h : \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^* + \int_\omega \underline{\text{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^* . \underline{\nabla} v_{p_h} - \langle (\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^* \underline{n}).\underline{\tau}, \psi_h \rangle = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^*, \in \mathcal{X}_h^{\text{div}}, \\
\displaystyle\int_{\gamma_l} \phi_h \phi_h^* = \langle (\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}).\underline{\tau}, \phi_h^* \rangle, \quad \forall \phi_h^* \in \mathcal{L}_h, \\
\displaystyle\int_{\gamma_l} \psi_h \psi_h^* = \langle \partial_\tau v_{p_h} \psi_h^* \rangle, \quad \forall \psi_h^* \in \mathcal{L}_h,
\end{array}\right. \tag{2.6}$$

Soit n_p la dimension de $\mathcal{V}_h$, n_{div} la dimension de $\mathcal{X}_h^{\text{div}}$ et n_ϕ la dimension de $\mathcal{L}_h$. On introduit une base de $\mathcal{V}_h$, notée $(\varphi_i)_{1 \le n_p}$, une base de $\mathcal{X}_h^{\text{div}}$, notée $(\underline{\underline{\xi}}_p^{\text{div}})_{1 \le p \le n_{\text{div}}}$ et une base de $\mathcal{L}_h$ notée $(\gamma_l)_{1 \le l \le nfi}$.

Notation 2.2 *Pour éviter d'introduire de nouvelles notations, nous confondrons v_{p_h} et le vecteur de coordonnées qui lui est associé dans la base (φ_i). De même, nous confondrons $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h$ et ses coordonnées dans la base $(\underline{\underline{\xi}}_p^{\mathrm{div}})$, ainsi que ϕ_h et ψ_h avec leurs coordonnées dans la base (γ_l).*

On est alors amené à résoudre le système différentiel suivant :

$$\boxed{\begin{cases} M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt}(t) - H_h^\top \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h + B_h^\top \phi_h = f_{p_h} \\ M_h^{\mathrm{div}} \dfrac{d\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h}{dt}(t) + H_h v_p - C_h^\top \psi_h = 0, \\ M_h^\phi \phi_h = C_h \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h, \\ M_h^\psi \psi_h = B_h v_{p_h}, \end{cases}} \tag{2.7}$$

avec :

$$\left|\begin{array}{l} (M_h^p)_{ij} = \displaystyle\int_\omega \rho_p \varphi_i \varphi_j, \quad 1 \le i,j \le n_p, \\ (M_h^{\mathrm{div}})_{pq} = \displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\xi}}_p^{\mathrm{div}} : \underline{\underline{\xi}}_q^{\mathrm{div}}, \quad 1 \le p,q \le n_{\mathrm{div}}, \\ (M_h^\phi)_{lm} = (M_h^\psi)_{lm} = \displaystyle\int_{\gamma_l} \gamma_l \gamma_m, \quad \forall 1 \le l,m \le n_\phi, \\ (H_h)_{pi} = \displaystyle\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\xi}}_p^{\mathrm{div}} . \underline{\nabla} \varphi_i, \quad 1 \le p \le n_{\mathrm{div}},\ 1 \le i \le n_p, \\ (B_h)_{lp} = \langle (\underline{\underline{\xi}}_p^{\mathrm{div}} \underline{n}) . \underline{\tau}, \gamma_l \rangle \quad \forall 1 \le l \le n_\phi,\ 1 \le p \le n_{\mathrm{div}}, \\ (C_h)_{li} = \langle \partial_\tau \varphi_i, \gamma_l \rangle \quad \forall 1 \le l \le n_\phi,\ 1 \le i \le n_p, \\ (f_{p_h})_i = \displaystyle\int_\omega f_p \varphi_i, \quad 1 \le i \le n_p. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Et il nous faut cette fois ci obtenir la condensation de masse pour les écarter le soucis de l'inversion des matrice M_h^p, M_h^{div}, M_h^ϕ et M_h^ψ.

L'approximation de $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l)$ nécessite des éléments de classe C^0. On utilise donc une approximation par éléments finis de Lagrange d'ordre 1 ou 2 monodimensionnels (puisque défini sur le contour γ_l). Dans ce cas, la condensation de masse est obtenue sans aucune difficulté (section 2.4).

En revanche, l'approximation de $H(\underline{\mathrm{Div}}, \omega)$ à l'aide des classiques éléments finis d'arête de Raviart-Thomas pour $H(\mathrm{div}, \omega)$ ne permet pas la condensation de masse, comme on le verra plus loin dans la section 2.5. On construit donc un nouvel élément fini $H(\mathrm{div}, \omega)$ conforme, selon une procédure adaptée de celle proposée par A. Elmkies et P. Joly pour l'approximation de $H(\mathrm{rot}, \omega)$ ([23]), qui permet de réduire la matrice de masse du moment fléchissant à une matrice diagonale par blocs de petite taille (6x6 ou 4x4). Il est présentée en détail pour l'ordre 1 et 2 (section 2.5).

On obtient ainsi deux schémas notés $P_1 - \tilde{R}_1$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ respectivement du premier et du second ordre.

2.3 Approximation des espaces $H^1(\omega)$ et $(H^1(\omega))^4$

Présentons maintenant les éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2 que nous utiliserons pour l'approximation de $H^1(\omega)$. Pour cela, on se donne tout d'abord un maillage triangulaire $\mathcal{T}_h$ du domaine ω (nous supposerons pour simplifier que ω est polygonal, ce qui permet d'éviter d'avoir à distinguer ω de son approximation $\omega_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h}$ par la triangulation $\mathcal{T}_h$). On présente tout d'abord ces éléments finis sans traiter les conditions aux limites essentielles intervenant dans la définition des espaces $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{X}_l^1$. Celles ci seront traitées à la section 2.3.3.

Commençons par préciser quelques notations sur le triangle.

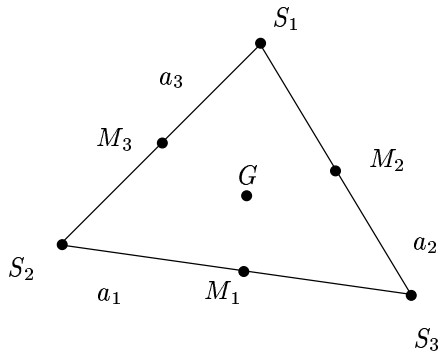


FIG. 2.1: *Notations sur le triangles — 1*

Notation 2.3 *Pour un triangle K, on notera S_1, S_2 et S_3 ses trois sommets, a_i l'arête opposée au sommet i, M_i le milieu de l'arête a_i et G son centre de gravité* (cf. *figure (2.1)). On notera en outre* $\mathrm{aire}(K)$ *son aire.*

Pour chaque point $\underline{x} = (x, y)$ de K, ses coordonnées barycentriques

$$\lambda_i(\underline{x}), \quad 1 \leq i \leq 3, \tag{2.9}$$

sont définies comme étant l'unique[1] *solution du problème linéaire :*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\underline{x}) S_{i,x} = x, \\ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\underline{x}) S_{i,y} = y, \\ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\underline{x}) = 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Notons que les coordonnées barycentriques (λ_i) sont des polynôme de degré 1.

1. Il y a bien sûr unicité si et seulement si le triangle n'est pas dégénéré.

2.3.1 Eléments finis de Lagrange d'ordre 1

2.3.1.a Approximation de $H^1(\omega)$

On approche $H^1(\omega)$ à l'aide de l'espace d'éléments finis P_1 continu :

$$\boxed{\mathcal{V}_h^1 = \left\{ v_h \in C^0(\omega) \; ; \; \forall K \in \mathcal{T}_h, \; (v_h)_{|K} \in P_1(K) \right\}} \tag{2.11}$$

Les degrés de liberté de cet espace d'éléments finis sont les valeurs de la fonction aux sommets du des triangles des maillages. Ils sont décrits schématiquement sur la figure (2.2). On note Σ_K la famille de degrés de liberté définie sur chaque triangle K de $\mathcal{T}_h$. On peut alors écrire symboliquement :

$$\Sigma_K = \{p(S_i); 1 \leq i \leq 3, p \in P_1(K)\}, \tag{2.12}$$

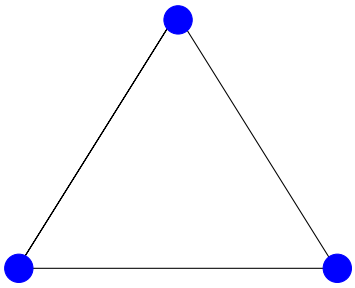


FIG. 2.2: *L'élément fini P1 de Lagrange*

L'ensemble des nœuds de cet élément fini, qui est ici tout simplement l'ensemble des sommets est noté :

$$N_K^1 = \{S_1, S_2, S_3\} \tag{2.13}$$

On vérifie alors que la base locale définie sur chaque triangle est donnée par les coordonnées barycentriques λ_i définie dans la note (2.3). En effet, celles ci sont bien dans P_1 et on a :

$$\lambda_i(S_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3. \tag{2.14}$$

2.3.1.b Condensation de masse

Le problème de la condensation de masse est bien connu dans ce cas (voir [62]). Il suffit d'utiliser la formule des trapèzes pour calculer les coefficients de la matrice de masse M_h^p définie en (2.4), à savoir :

$$\boxed{\oint_K f(x)dx = \frac{\text{aire}(K)}{3} \left(f(S_1) + f(S_2) + f(S_3) \right),} \tag{2.15}$$

exacte pour P_1. On vérifie alors immédiatement grâce aux relations de dualité (2.14) que :

$$\oint_K \lambda_i \lambda_j = \frac{\text{aire}(K)}{3} \delta_{ij} \tag{2.16}$$

On note φ_i la fonction de base de $\mathcal{V}_h$ associée au sommet S_i de la triangulation $\mathcal{T}_h$. La restriction de φ_i à un triangle K de $\mathcal{T}_h$ contenant S_i est l'une des trois fonctions de base locale, notée $\lambda_{i(K)}$, où $i(K) \in \{1 \dots 3\}$ On calcule alors :

$$\begin{aligned}
(M_h^p)_{ij} = \int_\omega \rho_p \varphi_i \varphi_j &\approx \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \rho_p (\varphi_i)_{|K} (\varphi_j)_{|K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \rho_p \lambda_{i(|K)} \lambda_{i(|K)} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \rho_p \frac{\text{aire}(K)}{3} \delta_{i(K)j(K)} \\
&= \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ S_i \in K}} \rho_p \frac{\text{aire}(K)}{3} \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Ainsi, **la matrice de masse M_h^p obtenue par ce calcul approché est diagonale.**

2.3.1.c Approximation de $(H^1(\omega))^4$

Pour approcher l'espace $(H^1(\omega))^4$, on utilise bien entendu l'approximation suivante, obtenue par produit tensoriel :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathcal{X}}}_h^{1,1} = (\mathcal{V}_h^1)^4} \tag{2.18}$$

Et la base canonique de l'espace $\mathcal{X}_h^1$ est alors donnée par :

$$\underline{\underline{\xi}}_{i,\alpha}^1 = (\delta_{\alpha\beta}\ \varphi_i)_{1 \le \beta \le 4}, \quad \forall i, \quad \forall 1 \le \alpha \le 4, \tag{2.19}$$

soit :

$$\begin{cases}
\underline{\underline{\xi}}_{i,1}^1 = (\varphi_i, 0, 0, 0) \\
\underline{\underline{\xi}}_{i,2}^1 = (0, \varphi_i, 0, 0) \\
\text{etc} \dots
\end{cases} \tag{2.20}$$

2.3.1.d Quasi condensation de masse

Celle ci repose sur la propriété suivante :

Propriété 2.1 *Si $\underline{\underline{\xi}}_i^1$ est une fonction de base associée au nœud S_i, alors on a, par construction :*

$$\underline{\underline{\xi}}_i^1(S_j) = 0, \quad \forall j \ \neq \ i. \tag{2.21}$$

On en déduit que pour deux fonctions de base associées à deux nœuds différents $S_i \neq S_j$, on a :

$$(M_h^1)_{(i,\alpha)(j,\beta)} \approx \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \mathbf{A}\, \underline{\underline{\xi}}^1_{i,\alpha} \underline{\underline{\xi}}^1_{j,\beta} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad \forall 1 \leq \alpha\beta \leq 4. \tag{2.22}$$

Par conséquent, si on ordonne judicieusement la base $(\underline{\underline{\xi}}^1_{i,\alpha})$ de manière à ce que les quatre degrés de liberté associés à un même nœud se suivent, soit, si on choisit la base :

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{\underline{\xi}}^1_{1,1}, \underline{\underline{\xi}}^1_{1,2}, \underline{\underline{\xi}}^1_{1,3}, \underline{\underline{\xi}}^1_{1,4}, \underline{\underline{\xi}}^1_{2,1}, \underline{\underline{\xi}}^1_{2,2}, \cdots, \underline{\underline{\xi}}^1_{n_p,1}, \underline{\underline{\xi}}^1_{n_p,2}, \underline{\underline{\xi}}^1_{n_p,3}, \underline{\underline{\xi}}^1_{n_p,4} \right\}, \tag{2.23}$$

alors **la matrice de masse M_h^1 obtenue par ce calcul approché est diagonale par bloc 4x4.** Elle n'est a priori pas diagonale, car le tenseur $\mathbf{A}$ n'est lui même pas diagonal (voir la remarque (1.5)).

2.3.2 Eléments finis de Lagrange d'ordre 2

2.3.2.a Le problème des éléments finis de Lagrange usuels

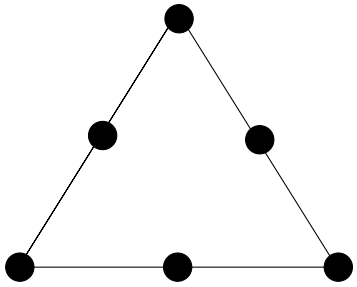


FIG. 2.3: *L'élément fini standard d'ordre 2 de Lagrange*

Il se trouve que la technique de condensation de masse échoue si l'on utilise les éléments finis de Lagrange d'ordre 2 usuels pour approcher $H^1(\omega)$, dont les degrés de liberté sont représentés sur la figure (2.3). En fait, la formule de quadrature naturellement candidate définie à l'aide de ces degrés de liberté est :

$$\oint_K f(x)dx = \frac{\text{aire}(K)}{3} \left(f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) \right), \tag{2.24}$$

exacte pour P_2. Les poids étant nuls aux sommets du triangle, on obtient alors une matrice de masse certes diagonale mais non inversible, puisque les éléments diagonaux associés à un sommet sont nuls. Ce choix conduit donc à un problème mal posé.

2.3.2.b Un nouvel élément pour obtenir la condensation de masse

Pour contourner ce problème, on utilise le nouvel espace d'éléments finis introduit par Nathalie Tordjmann [62]. On considère l'espace de fonctions polynomiales :

$$\boxed{\tilde{P}_2(K) = P_2(K) \oplus [b],} \tag{2.25}$$

où b désigne la fonction bulle, nulle sur les trois arêtes de K, définie par :

$$b = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \tag{2.26}$$

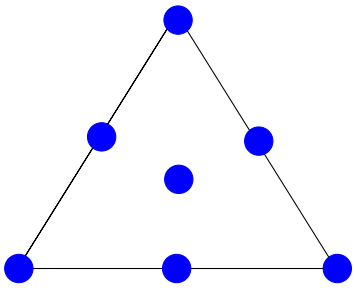


FIG. 2.4: *Nouvel élément fini de Lagrange d'ordre 2*

On définit alors les degrés de liberté, représentés schématiquement sur la figure (2.4) :

$$\Sigma_K = \left\{ p(S_i), p(M_i), p(G) \ ; \ 1 \leq i \leq 3, p \in \tilde{P}_2(K) \right\}, \tag{2.27}$$

et on vérifie sans peine que Σ_K est $\tilde{P}_2(K)$ unisolvant, de sorte que le triplet $(K, \tilde{P}_2(K), \Sigma_K)$ définit bien un élément fini. En outre, la fonction bulle étant nulle sur les 3 arêtes de K, on vérifie sans difficulté que cet élément est bien H^1 conforme.

L'ensemble des nœuds de cet élément fini, est défini par :

$$N_K^2 = \{S_1, S_2, S_3, M_1, M_2, M_3, G\} \tag{2.28}$$

On note $\mu_K^{S_i}$ la fonction de la base locale de cet élément associée au nœud S_i, $\mu_K^{M_i}$ la fonction de base associée au nœud M_i, et μ_K^G la fonction de base associée au nœud G. On calcule :

$$\left| \begin{array}{l} \mu_K^{S_1} = (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)\lambda_1 + 3b, \\ \mu_K^{S_2} = (-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\lambda_1 + 3b, \\ \mu_K^{S_3} = (-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1 + 3b, \\ \mu_K^{M_1} = 4\lambda_2\lambda_3 - 12b, \\ \mu_K^{M_1} = 4\lambda_1\lambda_3 - 12b, \\ \mu_K^{M_1} = 4\lambda_1\lambda_2 - 12b, \\ \mu_K^G = 27b. \end{array} \right. \tag{2.29}$$

On définit alors les espaces d'approximation :

$$\boxed{\mathcal{V}_h^2 = \left\{ v_h \in C^0(\omega) \ ; \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ (v_h)_{|K} \in \tilde{P}_2(K) \right\}} \tag{2.30}$$

et :

$$\boxed{\mathcal{X}_h^{1,2} = (\mathcal{V}_h^2)^4} \tag{2.31}$$

La formule de quadrature utilisée pour obtenir la condensation de masse, définie à l'aide des degrés de liberté de $\tilde{P}_2(K)$ est maintenant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \oint_K f(x)dx = \text{aire}(K)\left(\omega_s \sum_{i=1}^{3} f(S_i) + \omega_a \sum_{i=1}^{3} f(M_i) + \omega_g f(G)\right) \\ \omega_s = \dfrac{1}{20}, \quad \omega_a = \dfrac{2}{15}, \quad \omega_g = \dfrac{9}{20}. \end{array}} \tag{2.32}$$

Elle intègre exactement P_3.

On vérifie alors exactement de la même manière que pour l'ordre 1 que **la matrice de masse M_h^p obtenue à l'aide de cette formule de quadrature est bien diagonale, tandis que la matrice M_h^1 est diagonale par bloc 4x4.**

2.3.3 Prise en compte des conditions aux limites essentielles

Regardons maintenant comment nous pouvons introduire les conditions aux limites essentielles intervenant dans la définition des espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}^1$ donnée en (1.53) et (1.54).

2.3.3.a Condition essentielle de bord encastré

Rappelons que cette condition s'écrit :

$$v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0, \text{ pour } v_p \in \mathcal{V}_0, \tag{2.33}$$

La prise en compte de la condition (2.33) est extrêmement classique. Pour qu'une fonction v_{p_h} de $\mathcal{V}_h$ s'annule sur γ_0, il suffit de s'assurer qu'elle s'annule en tout nœud qui se trouve sur la frontière γ_0. En effet, par construction même des éléments de Lagrange, la restriction de $v_{p_h} \in \mathcal{V}_h$ à une arête est entièrement déterminée par ses valeurs aux nœuds de l'arête.

On note $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des nœuds de l'espace d'approximation considéré, soit, suivant qu'on utilise une approximation d'ordre 1 ou 2 :

$$\mathcal{N}_h^\alpha = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} N_K^\alpha, \quad \alpha = 1 \text{ ou } 2. \tag{2.34}$$

On approchera alors l'espace $\mathcal{V}_0$ défini en (1.53) par :

$$\mathcal{V}_{h,0}^\alpha = \{v_{p_h} \in \mathcal{V}_h^\alpha \ ; \ v_{p_h}(N_b) = 0, \quad \forall N_b \in \mathcal{N}_h^\alpha \cap \gamma_0\} \tag{2.35}$$

Si on note φ^N la fonction de base de $\mathcal{V}_h^\alpha$ associée au nœud N, une base de $\mathcal{V}_{h,0}^\alpha$ est alors donnée par :

$$\left\{\varphi^N \ ; \ N \notin \gamma_0\right\} \tag{2.36}$$

2.3.3.b Condition essentielle de bord libre

En revanche, l'approximation de la condition sur le bord libre est plus délicate. Rappelons que cette condition s'écrit :

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n})\cdot\underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l, \text{ pour } \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}^1. \tag{2.37}$$

En effet, on ne peut pas aussi simplement *rayer* certains degrés de liberté du bord. Le problème essentiel est qu'on a défini un élément "de sommet", alors que cette condition porte sur une arête. Regardons tout d'abord le problème à l'ordre 1.

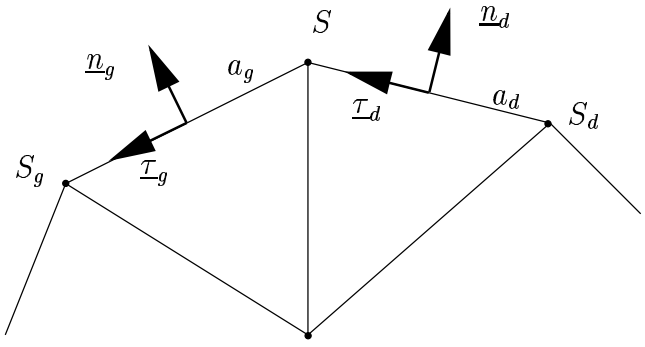


FIG. 2.5: *Notations pour un sommet du bord*

On considère un sommet du bord, noté S. On note a_g et a_d les deux arêtes du bord libre situées de part et d'autre de S, $\underline{n}_g$ et $\underline{n}_d$ leurs normales extérieures respectives et $\underline{\tau}_g$ et $\underline{\tau}_d$ leurs tangentes respectives (voir la figure (2.5)). Si on écrivait la condition (2.37) le long de chaque arête a_g et a_d, on aurait alors les deux contraintes :

$$((\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}_g)\cdot\underline{n}_g)_{|a_g} = 0 \text{ et } ((\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}_d)\cdot\underline{n}_d)_{|a_d} = 0. \tag{2.38}$$

Tout d'abord, sauf cas très particulier, ces deux contraintes ne sont vérifiées par aucun des éléments de la base canonique tensorielle proposée en (2.19). Il n'est donc pas immédiat d'exhiber une base de l'espace d'approximation à partir de cette base canonique.

D'autre part, lorsque $\underline{n}_g$ et $\underline{n}_d$ ne sont pas colinéaires, on obtient deux contraintes linéaires indépendantes portant sur le tenseur $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$, alors qu'on s'attendrait a priori à une seule contrainte linéaire. Si on construit une base qui vérifie ces deux contraintes, on obtiendra de ce fait un espace plus petit que l'espace recherché.

Pour contourner ce problème, une première méthode consiste à relaxer la condition de bord libre (2.37). Elle est alors réintroduite faiblement à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange qui s'interprête comme la dérivée normale de v_p le long du bord γ_l.

Nous avons choisi de définir une autre approximation de cette condition aux limites qui s'inspire de la méthode employée pour traiter le bord encastré présentée ci dessus. Cette méthode conduit également à une approximation non conforme de l'espace $\mathcal{X}_0^1$.

Les degrés de liberté de $\mathcal{X}_h^1$ proposés en (2.19) ont été choisi de manière canonique, soit, en un sommet S :

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}}(S)\underline{e}_x)\cdot\underline{e}_x,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}(S)\underline{e}_x)\cdot\underline{e}_y,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}(S)\underline{e}_y)\cdot\underline{e}_x,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}(S)\underline{e}_y)\cdot\underline{e}_y, \tag{2.39}$$

on voit bien qu'il semblerait plus adapté de choisir des degrés de liberté pour lesquels la condition aux limites (2.37) s'exprime naturellement. Seulement la normale en un sommet n'est, en générale, pas définie, puisque justement il y a un angle.

On définit alors la normale et la tangente moyennes, en un sommet S du bord par :

$$\underline{n}_S = \frac{\underline{n}_g + \underline{n}_d}{2} \text{ et } \underline{\tau}_S = \frac{\underline{\tau}_g + \underline{\tau}_d}{2} \tag{2.40}$$

et on choisit maintenant, tout au moins pour les sommets du bord, les degrés de liberté suivant :

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}}(S)\underline{n}_S)\cdot\underline{n}_S,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}(S)\underline{n}_S)\cdot\underline{\tau}_S,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}(S)\underline{\tau}_S)\cdot\underline{n}_S,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}(S)\underline{\tau}_S)\cdot\underline{\tau}_S. \tag{2.41}$$

On note :

$$\underline{\underline{\xi}}^1_{nn},\ \underline{\underline{\xi}}^1_{nt},\ \underline{\underline{\xi}}^1_{tn},\ \underline{\underline{\xi}}^1_{tt}, \tag{2.42}$$

les fonctions de base associées à ces ddl, dans le même ordre.

On peut maintenant décider de *rayer* la fonction de base $\underline{\underline{\xi}}^{1,1}_{nn}$, pour approcher la condition aux limites (2.37). On choisira donc d'approcher l'espace $\mathcal{X}^1$ à l'ordre 1 à l'aide de l'espace $\mathcal{X}^{1,1}_{h,0}$ défini par :

$$\mathcal{X}^{1,1}_{h,0} = \text{Vect}\left\{\underline{\underline{\xi}}^1_{i,\alpha}\ ;\ S_i \notin \gamma_0\right\} \cup \left\{\underline{\underline{\xi}}^1_{nt},\ \underline{\underline{\xi}}^1_{tn},\ \underline{\underline{\xi}}^1_{tt}\ ;\ S \in \gamma_0\right\} \tag{2.43}$$

On n'obtient pas de cette façon une approximation conforme de l'espace $\mathcal{X}^1$ défini en (1.54). Tout d'abord il est clair que les deux conditions (2.38) ne sont pas vérifiées, puisqu'on a choisit d'écrire une seule condition à l'aide de la normale moyenne.

D'autre part, la condition approchée $(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}_S)\cdot\underline{n}_S$ est certes vérifiée au sommet, mais elle ne l'est pas tout le long de l'arête. En effet, si on note S_g l'autre sommet de l'arête a_g, comme $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{|a_g}$ est dans $P_1(a_g)$, il suffirait que $(\underline{\underline{\mathcal{M}}}(S_g)\underline{n}_S)\cdot\underline{n}_S$ soit nul pour que $((\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}_S)\cdot\underline{n}_S)_{|a_g} = 0$. Mais le degré de liberté choisit en S_g est $(\underline{\underline{\mathcal{M}}}(S_g)\underline{n}_{S_g})\cdot\underline{n}_{S_g}$, et $\underline{n}_{S_g}$ n'a aucune raison d'être égal à $\underline{n}_S$. On ne doit donc pas s'attendre à ce que $((\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}_S)\cdot\underline{n}_S)_{|a_g} = 0$.

Dans le cas de l'approximation d'ordre 2, il y a, outre les éléments associés à un sommet, ceux associés au centre du triangle, qui sont de toute façon nuls sur le bord et vérifient donc la condition (2.37) et aussi ceux associés au milieu d'une arête. Pour une arête du bord notée a, de sommets S_g et S_d et de milieu M, il n'y a bien sûr aucune ambiguïté pour définir la normale extérieure $\underline{n}_a$ et la tangente $\underline{\tau}_a$. On choisit alors, comme ci dessus, les degrés de liberté suivant, plutôt que la base canonique tensorielle :

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}}(M)\underline{n}_a))\cdot\underline{n}_a,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}(M)\underline{n}_a)\cdot\underline{\tau}_a,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}(M)\underline{\tau}_a)\cdot\underline{n}_a,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}(M)\underline{\tau}_a)\cdot\underline{\tau}_a, \tag{2.44}$$

et on rayera la fonction de base associée au degré de liberté $(\underline{\underline{\mathcal{M}}}(M)\underline{n}_a)\cdot\underline{n}_a$. De même que pour le cas d'un sommet, la condition $(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}_a)\cdot\underline{n}_a$ ne sera vrai qu'au point M et pas tout le long de l'arête.

2.4 Approximation de l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l)$

La triangulation $\mathcal{T}_h$ définit de fait un maillage du contour γ_l que l'on note $\mathcal{G}_h$. Ses arêtes sont notées A. On définit alors les espaces d'approximation de Lagrange d'ordre k :

$$\boxed{\mathcal{L}_h^k = \left\{\phi_h \in C^0(\gamma_l)\ ;\ (\phi_h)_{|A} \in P_k(A),\ \forall A \in \mathcal{G}_h\right\}} \tag{2.45}$$

FIG. 2.6: *Eléments fini de Lagrange d'ordre 1 et 2 sur un segment*

Les degrés de liberté des éléments fini de Lagrange d'ordre 1 et 2 sont représentés schématiquement sur la figure (2.6). Soit pour l'ordre 1 :

$$\Sigma_K^1 = \{p(S_1), p(S_2); p \in P_1(A)\}\,, \tag{2.46}$$

et pour l'ordre 2 :

$$\Sigma_K^1 = \{p(S_1), p(S_2), p(M); p \in P_2(A)\}\,, \tag{2.47}$$

où on a noté S_1 et S_2 les sommets de l'arête A, et M son milieu. Pour obtenir la condensation de masse dans $\mathcal{L}_h^1$, nous utiliserons donc la formule des trapèzes à savoir :

$$\boxed{\oint_A f = \frac{l(A)}{2}\left(f(S_1) + f(S2)\right),} \tag{2.48}$$

où $l(A)$ désigne la longueur de l'arête A.

Enfin, pour obtenir la condensation de masse dans $\mathcal{L}_h^2$, nous utiliserons la formule de Simpson, soit :

$$\boxed{\oint_A f = l(A)\left(\frac{1}{6}(f(S_1) + f(S2)) + \frac{2}{3}f(M)\right).} \tag{2.49}$$

Pour plus de précisions sur la condensation de masse dans les espaces d'approximation de Lagrange en une dimension d'espace, on pourra consulter [62] et l'annexe C.

2.5 Approximation de l'espace $H(Div, \omega)$

Rappelons que $\underline{\mathrm{Div}}$ est la divergence appliquée à des tenseurs d'ordre 2. $\underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ est un vecteur de dimension 2 dont les composantes sont données par la divergence de chacun des vecteurs lignes du tenseur $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$. Par conséquent, l'espace $H(\underline{\mathrm{Div}}, \omega)$ est isomorphe à l'espace $(H(\mathrm{div}, \omega))^2$. Il nous suffit donc d'approcher l'espace $H(\mathrm{div}, \omega)$, et nous obtiendrons une approximation de $H(\underline{\mathrm{Div}}, \omega)$ par produit tensoriel.

L'approximation conforme de $H(\mathrm{div}, \omega)$ par des éléments finis conformes repose sur le lemme très classique suivant :

Lemme 2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière régulière. On se donne une partition de Ω en deux ouverts :*

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}. \tag{2.50}$$

On note $\Gamma = \delta\Omega_1 \cap \delta\Omega_2$ la frontière commune à Ω_1 et Ω_2, et $\underline{n}$ la normale extérieure à Ω_1 le long de Γ. On considère $\underline{w} : \Omega \to \mathbb{R}$ un champ de vecteur défini sur Ω. On note $\underline{w}_i = \underline{w}_{|\Omega_i}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $\underline{w} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ si et seulement si :

1. *$\underline{w}_i \in H(\mathrm{div}, \Omega_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$,*
2. *$\underline{w}_1 \,.\, \underline{n} = \underline{w}_2 \,.\, \underline{n}$ sur Γ.*

Ainsi, pour réaliser une approximation conforme de $H(\mathrm{div}, \omega)$, il faut s'assurer de la continuité des composantes normales le long de chaque arête de la triangulation $\mathcal{T}_h$.

Considérant un espace d'approximation de $H(\mathrm{div}, \omega)$, que nous noterons $\mathcal{R}_h^1$, de base $(\underline{w}_i)$, notre problématique est de réussir à réduire la matrice de masse suivante :

$$(\mathbb{M}_h)_{ij} = \int_\omega \underline{w}_i \cdot \underline{w}_j, \tag{2.51}$$

à une diagonale. Introduisons tout d'abord quelques notations supplémentaires concernant le triangle :

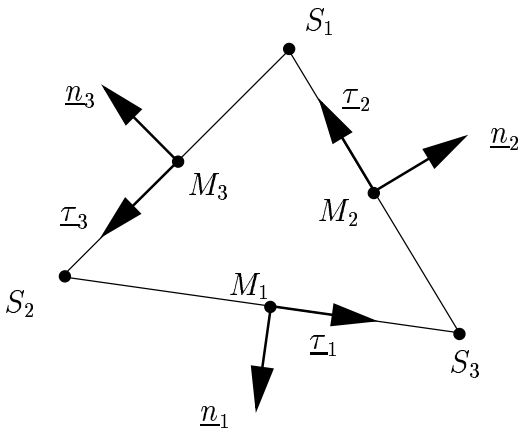


FIG. 2.7: *Notations sur le triangle — 2*

Notation 2.4 *On considère un triangle K de sommets S_1, S_2, S_3, d'arêtes a_1, a_2, a_3, dont les milieux sont notés M_1, M_2, M_3. On note en outre $\underline{n}_i$ la normale intérieure à K le long de l'arête a_i, et $\underline{\tau}_i$ sa tangente, telle que $(\underline{\tau}_i, \underline{n}_i)$ soit orthonormé direct, de sorte que $\underline{\tau}_i$ oriente le triangle dans le sens direct (voir la figure (2.7)).*

On peut exprimer $\underline{n_i}$ et $\underline{\tau_i}$ à l'aide des coordonnées barycentriques λ_i. En effet, puisque $(\lambda_i)_{|a_i} = 0$, on en déduit que $(\underline{\nabla}\lambda_i)_{|a_i}$ est colinéaire à $\underline{n_i}$. En se méfiant bien de l'orientation, on en déduite :

$$\underline{\nabla}\lambda_i = -\|\underline{\nabla}\lambda_i\|\underline{n_i}, \tag{2.52}$$

On note

$$\underline{\mathrm{rot}}\lambda_i = \underline{e_z} \wedge \underline{\nabla}\lambda_i,$$

la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ du gradient. On a finalement :

$$\underline{n_i} = -\frac{1}{\|\underline{\nabla}\lambda_i\|}\underline{\nabla}\lambda_i, \text{ et } \underline{\tau_i} = -\frac{1}{\|\underline{\nabla}\lambda_i\|}\underline{\mathrm{rot}}\lambda_i. \tag{2.53}$$

Enfin, sachant que $\underline{\nabla}\lambda_i$ est une constante, on calcule aisément :

$$\|\underline{\nabla}\lambda_i\| = h_i, \tag{2.54}$$

où h_i est la hauteur issue de S_i. Mais il est bien connu que

$$2\,\mathrm{aire}(K) = h_i\; l(a_i),$$

où $l(a_i)$ désigne la longueur de l'arête a_i. On peut de ce fait calculer $\underline{n_i}$ et de $\underline{\tau_i}$ très simplement à l'aide des seules coordonnées des 3 sommets de K.

2.5.1 Echec de la condensation de masse avec les éléments de Raviart-Thomas

L'approximation la plus usuelle de l'espace $H(\mathrm{div}, \omega)$ est certainement fournie par les éléments introduits par Raviart et Thomas ([53, 61]), définis ici sur le maillage triangulaire $\mathcal{T}_h$. Cet espace est défini par :

$$\boxed{\mathcal{R}_h^1 = \left\{\underline{w} \in H(\mathrm{div}, \omega)\ ;\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \underline{w}_{|K} \in R_1(K)\right\}} \tag{2.55}$$

où $R_1(K)$ désigne l'espace de polynômes définis sur le triangle K par :

$$R_1(K) = \left\{\underline{p} = \begin{pmatrix}\alpha_x^K \\ \alpha_y^K\end{pmatrix} + \beta^K \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix},\ \alpha_x, \alpha_y, \beta \in \mathbb{R}\right\} = (P_0(K))^2 \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \tag{2.56}$$

On vérifie que la composante normale de tout champ $\underline{p}$ appartenant à $R_1(K)$ est constante le long de chaque arête de K, ce qui permet de contrôler la continuité de cette composante qui assurera que l'espace $\mathcal{R}_h^1$ est bien un sous espace de $H(\mathrm{div}, \omega)$. Les degrés de liberté de cet espace d'éléments finis sont donc les valeurs de la composante normale du champ $\underline{p}$ le long de chaque arête de la triangulation. Ils sont représentés symboliquement sur la figure (2.8). Ainsi, on peut écrire :

$$\Sigma_K = \left\{\underline{p}(M_i)\,.\,\underline{n_i},\ 1 \leq i \leq 3\right\} \tag{2.57}$$

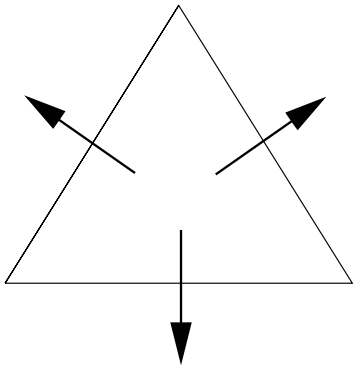


FIG. 2.8: *Eléments fini de Raviart Thomas triangulaire d'ordre 1*

Le triplet $(K, R_1(K), \Sigma_K)$ est donc un élément fini $H(\mathrm{div}, \omega)$ conforme, dont la base canonique locale est donnée par (voir par exemple [51] :

$$\boxed{\underline{q}_i(x,y) = \frac{l(a_i)}{2\,\mathrm{aire}(K)}\underline{S_i M},} \tag{2.58}$$

où M désigne le point de K de coordonnées (x, y).

Remarque 2.1 *Notons que le long de des arêtes auxquelles appartient le sommet S_i, la fonction de base $\underline{q}_i$ est purement tangentielle, mais elle n'est pas nulle, soit :*

$$\underline{q}_i(M_j) \cdot \underline{\tau}_i \neq 0, j \neq i. \tag{2.59}$$

On ne contrôle pas la composante tangentielle des champs de $\mathcal{R}_h^1$, et c'est égal, puisque justement celle ci a le droit d'être discontinue. Mais on verra que c'est ce qui met en échec la condensation de masse.

Remarque 2.2 *Il semble plus naturel de choisir comme degrés de liberté les quantités :*

$$\Sigma_K = \left\{ \int_{a_i} \underline{p} \cdot \underline{n}_i, 1 \leq i \leq 3, p \in R_1(K) \right\}. \tag{2.60}$$

En effet, la trace d'un élément de $H(\mathrm{div}, K)$ étant dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\delta K)$, ses valeurs ponctuelles n'ont en toute généralité pas de sens. Ce choix de degrés de liberté ne conduit donc pas à une définition naturelle de l'opérateur d'interpolation. En l'occurence, comme la composante normale est constante le long de chaque arête, la base duale associée à ces ddl est proportionnelle à celle donnée en (2.58)

Ce choix est dû a la problématique de la condensation de masse, qui nécessite de choisir les degrés de liberté aux points de quadrature de la formule d'intégration approchée.

Les degrés de liberté de cet élément fini étant situés au milieu des arêtes du triangle K, la formule de quadrature naturellement candidate pour la condensation de masse, P_2 exacte, est alors :

$$\oint_K f(x)dx = \frac{\mathrm{aire}(K)}{3}\left(f(M_1) + f(M_2) + f(M_3)\right). \tag{2.61}$$

Malheureusement, ce choix ne conduit pas à une matrice de masse approchée diagonale. On calcule en effet :

$$\oint_K \underline{q}_i \cdot \underline{q}_j = \frac{\text{aire}(K)}{3} \sum_{l=1}^{3} (\underline{q}_i(M_l) \cdot \underline{n}_l)(\underline{q}_i(M_l) \cdot \underline{n}_l) + \frac{\text{aire}(K)}{3} \sum_{l=1}^{3} (\underline{q}_i(M_l) \cdot \underline{\tau}_l)(\underline{q}_i(M_l) \cdot \underline{\tau}_l). \tag{2.62}$$

Le problème est qu'on ne contrôle pas les composantes tangentielles des fonctions de base $\underline{q}_i$, ainsi qu'il est précisé dans la remarque (2.1). Par conséquent, si le premier terme de (2.62) est bien proportionnel à δ_{ij}, le second terme, lui, n'a aucune raison de l'être. On peut donc décomposer la matrice $\mathbb{M}_h$ sous la forme :

$$\mathbb{M}_h = \mathbb{M}_h^n + \mathbb{M}_h^\tau, \tag{2.63}$$

dans laquelle $\mathbb{M}_h^n$ est bien diagonale, mais $\mathbb{M}_h^\tau$ ne l'est malheureusement pas.

La condensation de masse pour les éléments de Raviart-Thomas de plus bas degré est donc un échec.

2.5.2 Un nouvel espace d'approximation $H(\text{div}, \omega)$ conforme du premier ordre

2.5.2.a Construction d'un nouvel élément fini du premier ordre

Pour contourner ce problème, on va construire un nouvel élément fini dans lequel on contrôle non seulement les composantes normales, mais également les composantes tangentielles des fonctions de base le long de chaque arête de la triangulation. Il s'agit donc d'enrichir l'espace $R_1(K)$. Comme nous cherchons à approcher $H(\text{div}, \omega)$, on autorisera à la composante tangentielle à être discontinu le long de chaque arête, si bien que notre nouvel espace d'élément fini possédera 3 degrés de liberté par arête, un pour la composante normale, continue, et deux pour les composantes tangentielles, discontinues.

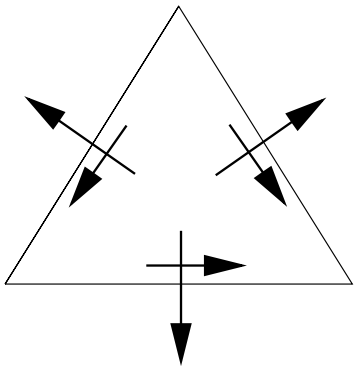


FIG. 2.9: *Nouvel élément fini $H(\text{div}, \omega)$ conforme d'ordre 1*

On choisit donc les degrés de liberté suivants, représentés schématiquement sur la figure (2.9) :

$$\tilde{\Sigma}_K = \left\{ \underline{p}(M_i) \cdot \underline{n}_i,\ \underline{p}(M_i) \cdot \underline{\tau}_i,\ 1 \leq i \leq 3 \right\}. \tag{2.64}$$

Il nous faut maintenant construire les 6 fonctions de base associées à ces 6 degrés de liberté. On veut donc :

1. que l'espace $\tilde{R}_1(K)$ engendré par cette base soit $\tilde{\Sigma}_K$-unisolvant.
2. que l'élément fini obtenu soit $H(\mathrm{div}, \omega)$ conforme.

Notons :

$\left|\begin{array}{ll} \underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, & \text{les 3 fonctions de base associées à un ddl } \textit{composante normale}, \\ \underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3, & \text{les 3 fonctions de base associées à un ddl } \textit{composante tangentielle}. \end{array}\right.$

Pour assurer la condition $1-$ ci dessus, on écrit donc :

$$\left[\begin{array}{ll} \underline{r}_i(M_j) \,.\, \underline{n}_j = \delta_{ij}, & \underline{r}_i(M_j) \,.\, \underline{\tau}_j = 0, \\ \underline{s}_i(M_j) \,.\, \underline{n}_j = 0, & \underline{s}_i(M_j) \,.\, \underline{\tau}_j = \delta_{ij}, \end{array}\right. \tag{2.65}$$

tandis que la condition $2-$ impose pour chaque fonction de base $\underline{p}$ que la composante normale le long de chaque arête $(\underline{p} \,.\, \underline{n}_i)_{|a_i}$ ne dépende que de sa valeur en son milieu M_i, pour assurer justement la continuité de la composante normale. Cela implique :

$$\left[\begin{array}{l} (\underline{r}_i \,.\, \underline{n}_j)_{|a_j} = \delta_{ij} \\ (\underline{s}_i \,.\, \underline{n}_j)_{|a_j} = 0. \end{array}\right. \tag{2.66}$$

Notation 2.5 *Dans tout ce qui suit, l'indice i sera choisi modulo 3 dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, de sorte que les sommets du triangle K seront notés S_i, S_{i+1}, S_{i+2}, en partant du sommet S_i. De même pour toutes notations introduites dans les notes (2.3) et (2.4)*

Commençons par déterminer les trois fonctions $(\underline{s}_i)$. D'après la condition (2.66), on sait que ces champs doivent être purement tangentiels le long de chaque arête. En outre, pour assurer la nullité de $\underline{s}_i$ aux points M_{i+1} et M_{i+2} imposée par (2.65), on choisit carrément $\underline{s}_i$ nulle le long des arêtes a_{i+1} et a_{i+2}. On en déduit que $\underline{s}_i$ est nécessairement de la forme :

$$\underline{s}_i = \alpha_i \lambda_{i+1} \lambda_{i+2} \underline{\tau}_i, \tag{2.67}$$

où α_i est un coefficient de normalisation qu'il nous reste à déterminer de manière à ce que la troisième condition d'unisolvance $\underline{s}_i(M_i) \,.\, \underline{\tau}_i = 1$ soit vérifiée. Comme on a :

$$\lambda_{i+1}(M_i) = \lambda_{i+2}(M_i) = \frac{1}{2}, \tag{2.68}$$

on en déduit, compte tenu de (2.53) :

$$\boxed{\underline{s}_i = -\frac{4}{\|\underline{\nabla}\lambda_i\|} \, \lambda_{i+1} \lambda_{i+2} \underline{\mathrm{rot}} \lambda_i,} \tag{2.69}$$

Pour déterminer les trois fonctions $(\underline{r}_i)$, rappelons que les trois fonctions de base de $R_1(K)$, données en (2.58), vérifient :

$$(\underline{q}_i \cdot \underline{n}_j)_{|a_j} = \delta_{ij}. \tag{2.70}$$

La seule de toutes les relations (2.65, 2.66) qui n'est pas vérifiée par les $(\underline{q}_i)$ est donc :

$$\underline{r}_i(M_j) \cdot \underline{\tau}_j = 0. \tag{2.71}$$

Pour l'obtenir , on dualise la famille :

$$\{\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{q}_3, \underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3\} \tag{2.72}$$

selon un procédé de type orthonormalisation de Schmidt. On pose donc :

$$\underline{r}_i = \underline{q}_i + \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \underline{s}_j, \tag{2.73}$$

et on détermine α_{ij} de manière à ce que (2.71) soit vérifiée, ce qui conduit à :

$$\boxed{\underline{r}_i = \underline{q}_i - \sum_{j=1}^{3} (\underline{q}_i(M_j) \cdot \underline{\tau}_j) \underline{s}_j,} \tag{2.74}$$

On pose alors :

$$\boxed{\tilde{R}_1(K) = \text{Vect}\{\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, \underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3\}} \tag{2.75}$$

Remarque 2.3 *Notons que l'on a, vue la définition des fonctions de base $(\underline{r}_i)$ (2.74) :*

$$\tilde{R}_1(K) = R_1(K) \ \oplus \ \textit{Vect}\{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3\}. \tag{2.76}$$

On a donc bien enrichi l'élément fini de Raviart-Thomas $R_1(K)$.

Puisqu'il a été construit pour cela, on peut maintenant sans surprise énoncer le :

Théorème 2.1
1. *$\tilde{R}_1(K)$ est $\tilde{\Sigma}_K$ unisolvant, où $\tilde{\Sigma}_K$ est la famille de degrés de liberté définie en (2.64).*
2. *$\tilde{R}_1(K)$ est $H(\text{div}, \omega)$ conforme.*

Montrons tout d'abord le résultat très général d'algèbre linéaire suivant :

Lemme 2.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque. Soient $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ une famille de N éléments de E, $N \in \mathbb{N}$ et $(\sigma_i)_{1\leq i\leq N}$ une famille de N formes linéaires sur E. On suppose que :*

$$\langle \sigma_i \, , \, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall 1 \leq i, \, j \leq N. \tag{2.77}$$

Alors la famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ est (σ_i)-unisolvante.
(φ_i) et (σ_i) sont donc duales l'une de l'autre.

▷ PREUVE DU LEMME (2.2) : On note $V = \text{Vect}\{\varphi_i \; ; \; 1 \leq i \leq N\}$. Posons alors :

$$\Phi \; : \; \left[\begin{array}{l} V \to \mathbb{R}^N \\ \\ \varphi \mapsto (\sigma_i \, , \, \varphi\rangle)_{1\leq i\leq N} \end{array} \right. \tag{2.78}$$

Φ est clairement linéaire. En outre, notant

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i,$$

on vérifie grâce à (2.77) que :

$$\Phi(\varphi) = 0 \Rightarrow \sigma_i(\varphi) = \alpha_i = 0, \quad \forall i.$$

Donc Φ est injective, et le théorème du rang permet de conclure qu'elle est bijective, soit l'unisolvance recherchée. ◁

▷ PREUVE DU THÉORÈME (2.1) : Le point 1. est une conséquence immédiate du lemme précédent, en prenant par exemple $E = C^0(K)$.

Le point 2. quand à lui est une conséquence des relations (2.66) vérifiées par les fonctions $(\underline{r}_i, \underline{s}_i)$ et du lemme (2.1), puisqu'on contrôle la dérivée normale de tout champ de $\tilde{R}_1(K)$ le long des arêtes de K grâce aux ddl Σ_K. ◁

2.5.2.b Nouvel espace d'approximation de $H(\text{div}, \omega)$ d'ordre 1

On définit alors le sous espace de $H(\text{div}, \omega)$ suivant :

$$\boxed{\tilde{\mathcal{R}}_h^1 = \left\{ \underline{w} \in H(\text{div}, \omega) \; ; \; \forall K \in \mathcal{T}_h, \underline{w}_{|K} \in \tilde{R}_1(K) \right\}} \tag{2.79}$$

On construit une base de cet espace à partir de la base locale définie sur tout triangle selon le procédé classique des éléments finis. Pour toute arête intérieure a de $\mathcal{T}_h$, on se donne une normale à cette arête $\underline{n}$, qui permet de définir de manière univoque le triangle gauche K_g et le triangle droit K_d auxquelles elle appartient, ainsi qu'une tangente $\underline{\tau}$, comme présenté sur la figure (2.10).

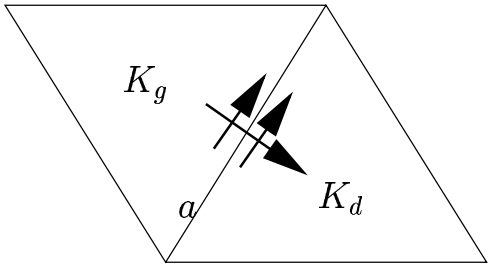


FIG. 2.10: *Les deux triangles associés à une arête intérieure*

$\tilde{\mathcal{R}}_h^1$ admet donc deux types de fonctions de base associées aux arêtes intérieures a du maillage $\mathcal{T}_h$: celles de type "normal", notées $\underline{r}_a$, et celles de type "tangentiel", notées $\underline{s}_a^g$ et $\underline{s}_a^d$. Elles sont définies comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\text{supp } \underline{r}_a = K_g \cup K_d,\\ (\underline{r}_a)_{|K_g} = \underline{r}_i(K_g), \text{ si } a \text{ est l'arête } i \text{ de } K_g\\ (\underline{r}_a)_{|K_d} = -\underline{r}_i(K_d), \text{ si } a \text{ est l'arête } i \text{ de } K_d\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\text{supp } \underline{s}_a^g = K_g,\\ (\underline{s}_a^g) = \underline{s}_i(K_g), \text{ si } a \text{ est l'arête } i \text{ de } K_g\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\text{supp } \underline{r}_a^d = K_d,\\ (\underline{s}_a^d)_{|K_d} = -\underline{s}_i(K_d), \text{ si } a \text{ est l'arête } i \text{ de } K_d\end{array}\right.\end{array}} \tag{2.80}$$

Notons que par construction des fonctions de base locales $\underline{r}_i(K_g)$ et $\underline{r}_i(K_g)$, on a bien continuité de la composante normale de $\underline{r}_a$ le long de a. En outre, comme $(\underline{r}_a \,.\, \underline{n}_{\tilde{a}}$ est nulle le long de toute autre arête de K_a ou K_a^d, on a bien, $\underline{r}_a \in \tilde{\mathcal{R}}_h^1$. C'est ici qu'intervient le fait que nous avons construit un élément $H(\mathrm{div}, \omega)$ conforme.

De même, on vérifie bien que $\underline{s}_a^g, \underline{s}_a^d \in \tilde{\mathcal{R}}_h^1$

On définit de manière analogue les deux fonctions de base $\underline{r}_{a_b}$ et $\underline{s}_{a_b}$ associées à une arête du bord, qui n'appartient du coup qu'à un seul triangle K_{a_b}. On choisit judicieusement de prendre la normale qui est extérieure à ω. Alors :

$$\boxed{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\text{supp } \underline{r}_{a_b} = K_{a_b}\\ \underline{r}_{a_b} = \underline{r}_i(K_{a_b}), \text{ si } a_b \text{ est l'arête } i \text{ de } K_{a_b}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\text{supp } \underline{s}_{a_b} = K_{a_b},\\ \underline{s}_{a_b} = \underline{s}_i(K_{a_b}), \text{ si } a_b \text{ est l'arête } i \text{ de } K_{a_b}\end{array}\right.\end{array}} \tag{2.81}$$

Remarque 2.4 *A chaque arête intérieure a de $\mathcal{T}_h$, de milieu M_a, nous avons donc trois degrés de liberté définis pour tout $\underline{w}$ de l'espace $\tilde{\mathcal{R}}_h^1$:*

- *la composante normale de $\underline{w}$ en M_a, à savoir $\underline{w}(M_a) \,.\, \underline{n}$,*

- *les deux composante tangentielles de* $\underline{w}$ *en* M_a*, à savoir* $\underline{w}_{|K_g}(M_a)\,.\,\underline{\tau}$ *et* $\underline{w}_{|K_d}(M_a)\,.\,\underline{\tau}$.

Pour une arête du bord, il n'y en a plus que deux, puisqu'il n'y a plus qu'une seule composante tangentielle. Une représentation schématique de l'espace $\tilde{\mathcal{R}}_h^1$ *est proposée sur la figure (2.11).*

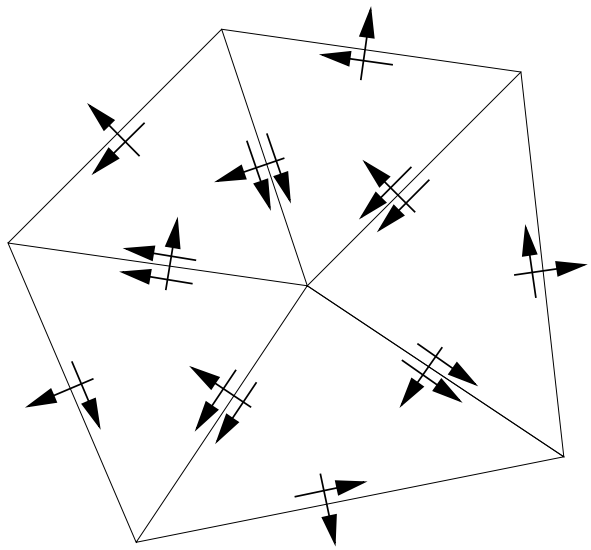


FIG. 2.11: *Représentation schématique de l'espace* $\tilde{\mathcal{R}}_h^1$

Remarque 2.5 *Par construction, si* $\underline{w}$ *est l'une des fonctions de base associée à l'arête* a*, alors on vérifie que, grâce aux relations de dualité (2.65) que :*

$$\underline{w}(M_{a'}) = 0, \text{ pour toute arête } a' \neq a. \tag{2.82}$$

On introduit :

- $\mathcal{A}_i$, l'ensemble des arêtes intérieures de $\mathcal{T}_h$, de cardinal N_i,
- $\mathcal{A}_b$, l'ensemble des arêtes du bord de $\mathcal{T}_h$, de cardinal N_b.

On a alors :

$$\underline{w} = \sum_{a_i \in \mathcal{A}_i} \left[(\underline{w}(M_{a_i})\,.\,\underline{n})\underline{r}_{a_i} + (\underline{w}_{|K_g}(M_{a_i})\,.\,\underline{\tau})\underline{s}^g_{a_i} + (\underline{w}_{|K_d}(M_{a_i})\,.\,\underline{\tau})\underline{s}^d_{a_i} \right] + \sum_{a_b \in \mathcal{A}_b} \left[(\underline{w}(M_{a_b})\,.\,\underline{n})\underline{r}_{a_b} + (\underline{w}(M_{a_b})\,.\,\underline{\tau})\underline{s}_{a_b} \right]. \tag{2.83}$$

On en déduit, à l'aide du lemme (2.2), le théorème suivant :

Théorème 2.2 *La famille :*

$$\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{R}}_h^1} = \left\{ \underline{r}_{a_i}, \underline{s}_{a_i}^g, \underline{s}_{a_i}^d, \underline{r}_{a_b}, \underline{s}_{a_b} \ ; \ a_i \in \mathcal{A}_i, a_b \in \mathcal{A}_b \right\} \tag{2.84}$$

est une base $\tilde{\mathcal{R}}_h^1$. La dimension de l'espace $\tilde{\mathcal{R}}_h^1$ est donc :

$$\dim \tilde{\mathcal{R}}_h^1 = 3N_i + 2N_b. \tag{2.85}$$

Remarque 2.6 *L'un des inconvénients de cet espace est que sa dimension est nettement supérieure à celle de l'espace dont il est issu, $\mathcal{R}_h^1$. On a en effet :*

$$\dim \mathcal{R}_h^1 = N_i + N_b. \tag{2.86}$$

2.5.2.c Condensation de masse

Rappelons que la formule de quadrature naturellement candidate pour obtenir la condensation de masse est :

$$\boxed{\oint_K f(x)dx = \frac{\text{aire}(K)}{3} \left(f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) \right).} \tag{2.87}$$

On introduit la forme bilinéaire symétrique φ_h définie sur $\tilde{\mathcal{R}}_h^1$ par :

$$\varphi_h(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \underline{v} \,.\, \underline{w}. \tag{2.88}$$

Alors, si $\underline{w}_i$ et $\underline{w}_j$ désignent deux fonctions de la base de $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{R}}_h^1}$, on calcule :

$$(\mathbb{M}_h)_{ij} \approx \varphi_h(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{\text{aire}(K)}{3} \sum_{l=1}^{3} (\underline{w}_i(M_l) \,.\, \underline{n}_l)(\underline{w}_i(M_l) \,.\, \underline{n}_l) + \right.$$
$$\left. \frac{\text{aire}(K)}{3} \sum_{l=1}^{3} (\underline{w}_i(M_l) \,.\, \underline{\tau}_l)(\underline{w}_i(M_l) \,.\, \underline{\tau}_l) \right]. \tag{2.89}$$

On vérifie donc, puisqu'on contrôle cette fois ci et les composantes normales et les composantes tangentielles des fonctions de bases, que la base de $\tilde{\mathcal{R}}_h^1$ introduite ci dessus est φ_h orthogonale.

Ainsi, la matrice de masse $\mathbb{M}_h$ définie en (2.51) est donc bien approchée par une matrice diagonale.

2.5.2.d Construction d'une approximation d'ordre 1 de $H(\underline{\mathrm{Div}}\,,\omega)$ et quasi condensation de masse

Pour approcher l'espace $H(\underline{\mathrm{Div}}\,,\omega)$, on utilise donc l'approximation suivante, obtenue par produit tensoriel :

$$\mathcal{X}_h^{\mathrm{div},1} = \left(\tilde{\mathcal{R}}_h^1\right)^2 \tag{2.90}$$

Notation 2.6 *Pour un champ de vecteur $\underline{w}$, on note, (l'indice u indiquant* up *et l'indice l indiquant* low *) :*

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{w}}^u \text{ le tenseur } \begin{pmatrix} w_x & w_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\underline{\underline{w}}^l \text{ le tenseur } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w_x & w_y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.91}$$

Théorème 2.3 *La base canonique de $\mathcal{X}_h^{\mathrm{div}}$ est donnée par :*

$$\{\underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}\} = \left\{\underline{\underline{r}}^u_{a_i}, \underline{\underline{s}}^{g,u}_{a_i}, \underline{\underline{s}}^{d,u}_{a_i}, \underline{\underline{r}}^l_{a_i}, \underline{\underline{s}}^{g,l}_{a_i}, \underline{\underline{s}}^{d,l}_{a_i} \;;\; a_i \in \mathcal{A}_i\right\} \cup \left\{\underline{\underline{r}}^u_{a_b}, \underline{\underline{s}}^u_{a_b}, \underline{\underline{r}}^l_{a_b}, \underline{\underline{s}}^l_{a_b} \;;\; a_i \in \mathcal{A}_i, a_b \in \mathcal{A}_b\right\} \tag{2.92}$$

Ainsi, il y a 6 degrés de liberté par arête intérieure et 4 degrés de liberté par arête du bord. La dimension de cet espace est par conséquent :

$$\dim \mathcal{X}_h^{\mathrm{div}} = 6N_i + 4N_b,$$

Par construction même, si $\underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}_a$ est l'une des fonctions de base de $\mathcal{X}_h^{\mathrm{div}}$ associée à l'arête a, alors on vérifie aisément, grâce à la remarque (2.5) que :

$$\underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}_a(M_{a'}) = 0, \text{ pour toute arête } a' \neq a. \tag{2.93}$$

On en déduit que si $\underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}_i$ et $\underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}_j$ désignent deux fonctions de base associées à deux arêtes distinctes a_i et a_j, alors :

$$\begin{aligned} (M_h^{\mathrm{div}})_{ij} = \int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}_i : \underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}_j &\approx \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \oint_K \mathbf{A}\, \underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}_i : \underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}_j \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{\mathrm{aire}(K)}{3} \sum_{l=1}^{3} \mathbf{A}\, \underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}_i(M_l) : \underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}_j(M_l) = 0. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Par conséquent, si on ordonne judicieusement la base $\{\underline{\underline{\xi}}^{\text{div}}\}$ de manière à ce que les degrés de liberté associés à une même arête se suivent, ainsi qu'il est proposé ci dessus, alors **la matrice de masse M_h^{div} obtenue par ce calcul approché est diagonale par bloc 6x6 ou 4x4**, suivant que l'arête associé au bloc est une arête intérieure ou une arête du bord. Elle n'est a priori pas diagonale, car le tenseur **A** n'est lui même pas diagonal (voir la remarque (1.5)).

2.5.3 Un nouvel espace d'approximation $H(\text{div}, \omega)$ conforme du second ordre

On suit à présent la même démarche qu'à la section précédente pour construire un élément fini du second ordre.

2.5.3.a Echec de la condensation de masse avec les éléments de Raviart-Thomas d'ordre 2

L'espace d'éléments finis triangulaires $H(\text{div}, \omega)$ conforme de Raviart-Thomas du second ordre est défini par :

$$\boxed{\mathcal{R}_h^2 = \left\{ \underline{w} \in H(\text{div}, \omega) \; ; \; \forall K \in \mathcal{T}_h, \underline{w}_{|K} \in R_2(K) \right\}} \tag{2.95}$$

où $R_2(K)$ désigne l'espace de polynômes définis sur le triangle K par :

$$R_2(K) = (P_1(K))^2 \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \end{pmatrix} \tag{2.96}$$

On vérifie que la composante normale de tout champ $\underline{p}$ appartenant à $R_2(K)$ est dans $P_1(a)$ le long de chaque arête a de K, ce qui permet de contrôler la continuité de cette composante qui assurera que l'espace $\mathcal{R}_h^2$ est bien un sous espace de $H(\text{div}, \omega)$. Puisque $(\underline{p} \,.\, \underline{n})_{|a} \in P_1(a)$, il suffit de connaître sa valeur en deux points de chaque arête.

Pour obtenir la condensation de masse, il est nécessaire que les degrés de liberté soient associés aux nœuds de quadrature de la formule d'intégration qu'on utilisera pour approcher la matrice de masse. Précisons encore quelques notations pour ce nouveau triangle.

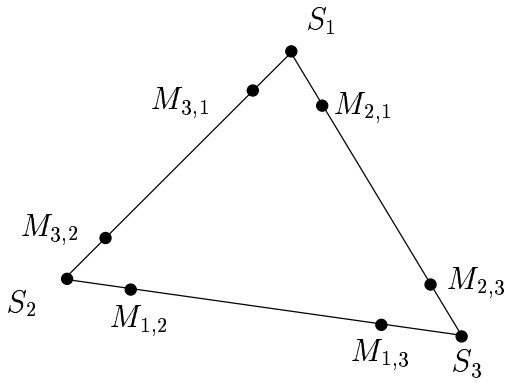


FIG. 2.12: *Notations sur le triangle — 3*

Notation 2.7 *Soit K un triangle de sommets S_1, S_2, S_3 et d'arête a_1, a_2, a_3, de barycentre G. On fixe un paramètre $\alpha \in]0,1[\backslash\{\frac{1}{2}\}$ et on définit sur chaque arête a_i les deux points* (cf. *figure (2.12)) :*

$$\begin{aligned} &M_{i,i+1}, \text{ barycentre de } \{(S_{i+1}, 1-\alpha), (S_{i+2}, \alpha)\} \\ &M_{i,i+2}, \text{ barycentre de } \{(S_{i+1}, \alpha), (S_{i+2}, 1-\alpha)\} \end{aligned} \tag{2.97}$$

α est un paramètre que l'on déterminera ultérieurement de manière à obtenir une formule de quadrature dont les nœuds sont situés en $(M_{i,j}, G)_{1\leq i\leq 3; j\in\{i+1,i+2\}}$, qui soit exacte pour les polynômes de degré le plus élevé possible.

Nous choisissons alors les degrés de liberté suivant, représentés schématiquement sur la figure (2.13) :

$$\Sigma_K = \left\{ \underline{p}(M_{i,j}) \cdot \underline{n}_i,\ \underline{p}(G) \cdot \underline{e}_x,\ \underline{p}(G) \cdot \underline{e}_y\ ;\ 1 \leq i \leq 3 \right\} \tag{2.98}$$

et on note la base canonique associée :

$$(\underline{q}_{i,j}, \underline{q}_{G_1}, \underline{q}_{G_2})_{1\leq i\leq 3; j\in\{i+1,i+2\}}$$

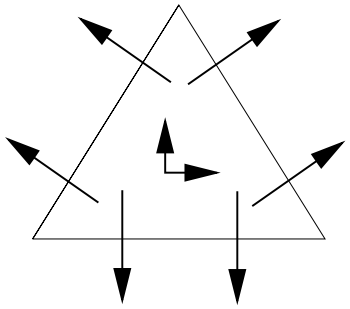


FIG. 2.13: *Degrés de liberté de l'élément de Raviart-Thomas d'ordre 2*

Remarque 2.7 *Les degrés de liberté de cet espace d'éléments finis sont usuellement donnés par :*

$$\Sigma_K = \left\{ \int_{a_i} \underline{p} \cdot \underline{n}_i ds,\ \int_{a_i} \underline{p} \cdot \underline{n}_i s ds,\ \int_K \underline{p} \cdot \underline{e}_x dx,\ \int_K \underline{p} \cdot \underline{e}_y dx\ ;\ 1 \leq i \leq 3, \right\}, \tag{2.99}$$

mais, de la même manière qu'à l'ordre 1, ceux ci ne sont adaptés pas à la condensation de masse.

La formule de quadrature associée aux nœuds $(M_{i,j}, G)$, exacte pour les polynômes de degré le plus élevé possible est déterminée dans [23]. Elle est donnée par :

$$\boxed{\begin{aligned} &\oint_K f = \text{aire}(K)\Big[\omega_a\Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ j\in\{i+1,i+2\}}} f(M_{i,j})\Big) + \omega_g f(G)\Big] \\ &\omega_a = \frac{11}{120}, \quad \omega_g = \frac{9}{20} \text{ et } \alpha = \frac{11-\sqrt{33}}{22}. \end{aligned}} \tag{2.100}$$

Cette formule de quadrature intègre exactement les polynômes de degré inférieure à 3.

On rencontre bien entendu le même problème qu'à l'ordre 1 pour la condensation de masse. Celle ci échoue car on ne contrôle que les dérivées normales aux points de quadrature, ce qui est insuffisant pour assurer que la base $((\underline{q}_{i,j}, \underline{q}_{G_1}, \underline{q}_{G_2})_{1\leq i\leq 3; j\in\{i+1,i+2\}}$ soit orthogonale pour le produit scalaire L^2 approché à l'aide de cette formule d'intégration numérique.

2.5.3.b Construction d'un nouvel élément fini du second ordre

On construit donc un nouvel élément fini $(K, \tilde{R}_2(K), \tilde{\Sigma}_K)$, $H(\mathrm{div}, \omega)$ conforme, en enrichissant l'espace $R_2(K)$. Nous choisissons donc les degrés de liberté suivant, représentés schématiquement sur la figure (2.14) :

$$\tilde{\Sigma}_K = \left\{ \underline{p}(M_{i,j}) \cdot \underline{n}_i,\ \underline{p}(M_{i,j}) \cdot \underline{\tau}_i,\ \underline{p}(G) \cdot \underline{e}_x,\ \underline{p}(G) \cdot \underline{e}_y\ ;\ 1 \leq i \leq 3 \right\} \tag{2.101}$$

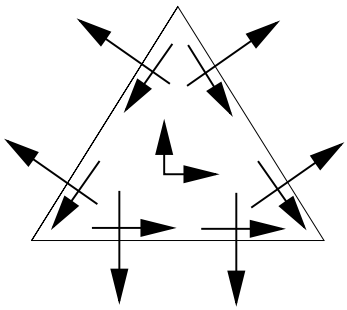


FIG. 2.14: *Degrés de liberté du nouvel élément fini d'ordre 2*

Notons :

$(\underline{r}_{i,j})_{1\leq i\leq 3; j\in\{i+1,i+2\}}$	les 6 fonctions de base associées à un ddl *composante normale*,
$(\underline{s}_{i,j})_{1\leq i\leq 3; j\in\{i+1,i+2\}}$	les 6 fonctions de base associées à un ddl *composante tangentielle*,
$(\underline{r}_{G_p})_{p\in\{1,2\}}$	les 2 fonctions de base associées au centre du triangle.

Ceux ci doivent vérifier, d'une part, pour que l'espace engendré soit $\tilde{\Sigma}_K$-unisolvant :

$$\left[\begin{array}{lll} \underline{r}_{i,j}(M_{k,l}) \cdot \underline{n}_k = \delta_{ik}\delta_{jl}, & \underline{r}_{i,j}(M_{k,l}) \cdot \underline{\tau}_j = 0, & \underline{r}_{i,j}(G) = 0, \\ \underline{s}_{i,j}(M_{k,l}) \cdot \underline{n}_k = 0, & \underline{s}_{i,j}(M_{k,l}) \cdot \underline{\tau}_j = \delta_{ik}\delta_{jl}, & \underline{s}_{i,j}(G) = 0, \\ \underline{r}_{G_p}(M_{k,l}) = 0, & \underline{r}_{G_p}(G) \cdot \underline{e}_q = \delta pq, & \end{array}\right. \tag{2.102}$$

et d'autre part, pour obtenir un élément $H(\mathrm{div}, \omega)$ conforme :

$$\left[\begin{array}{l} (\underline{r}_{i,j} \cdot \underline{n}_k)_{|a_k} \in P_1(a_k), \\ (\underline{s}_{i,j} \cdot \underline{n}_k)_{|a_k} = 0, \\ (\underline{r}_{G_p} \cdot \underline{n}_k)_{|a_k} = 0. \end{array}\right. \tag{2.103}$$

Sans entrer dans les détails, suivant la même démarche que pour l'ordre 1, on en déduit que les ddl de type $\underline{s}$ sont donnés par :

$$\boxed{\underline{s}_{i,j} = -\frac{4}{\|\underline{\nabla}\lambda_i\|}\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}\phi_{i,j}\,\underline{\tau}_i,} \tag{2.104}$$

où $\phi_{i,j}$ est le polynôme de degré 1 définit par :

$$\phi_{i,j}(M_{i,j}) = 1, \quad \phi_{i,j}(M_{i,\bar{j}}) = 0, \quad \phi_{i,j}(G) = 0, \tag{2.105}$$

où $M_{i,\bar{j}}$ désigne l'autre point de l'arête a_i (on a donc $\{j,\bar{j}\} = \{i+1, i+2\}$).

Puis on construit les ddl de type $\underline{r}$ en "orthogonalisant" la base de $R_2(K)$, soit :

$$\boxed{\left|\begin{array}{l} \underline{r}_{i,j} = \underline{q}_{i,j} - \sum\limits_{k,l}(\underline{q}_{i,j}(M_{k,l})\cdot\underline{\tau}_k)\underline{s}_{k,l}, \quad \forall 1 \le i \le 3, \quad j \in \{i+1, i+2\} \\ \underline{r}_{G_p} = \underline{q}_{G_p} - \sum\limits_{k,l}(\underline{q}_{G_p}(M_{k,l})\cdot\underline{\tau}_k)\underline{s}_{k,l}, \quad \forall p \in \{1,2\}. \end{array}\right.} \tag{2.106}$$

2.5.3.c Nouvel espace d'approximation de $H(\mathrm{div},\omega)$ d'ordre 2

On pose alors :

$$\boxed{\tilde{R}_2(K) = \mathrm{Vect}\left\{\underline{r}_{i,j},\ \underline{s}_{i,j},\ \underline{r}_{G_p}\ ;\ 1 \le i \le 3, j \in \{i+1, i+2\}, p \in \{1,2\}\right\}} \tag{2.107}$$

et on a le :

Théorème 2.4 1. *$\tilde{R}_2(K)$ est $\tilde{\Sigma}_K$ unisolvant, où $\tilde{\Sigma}_K$ est la famille de degrés de liberté définie en (2.101).*

2. *$\tilde{R}_2(K)$ est $H(\mathrm{div},\omega)$ conforme.*

On construit enfin le sous espace de $H(\mathrm{div},\omega)$ suivant :

$$\boxed{\tilde{\mathcal{R}}_h^2 = \left\{\underline{w} \in H(\mathrm{div},\omega)\ ;\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \underline{w}_{|K} \in \tilde{R}_2(K)\right\},} \tag{2.108}$$

pour lequel on définit trois types de fonctions de base :

- les fonctions de base associées à la composante normale en un nœud $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{i,j}$ d'une arête de la triangulation $\mathcal{T}_h$. Elles ont pour support les deux triangles auxquelle appartient l'arête lorsqu'il s'agit d'une arête intérieure, et le seul triangle auquel appartient l'arête lorsqu'il s'agit d'une arête du bord.
- les fonctions de base associées à la composante tangentielle en un nœud $M_{i,j}$ d'une arête de la triangulation $\mathcal{T}_h$. Il y en a deux par arête intérieure et une seule par arête du bord, et leur support est limité à un seul triangle.

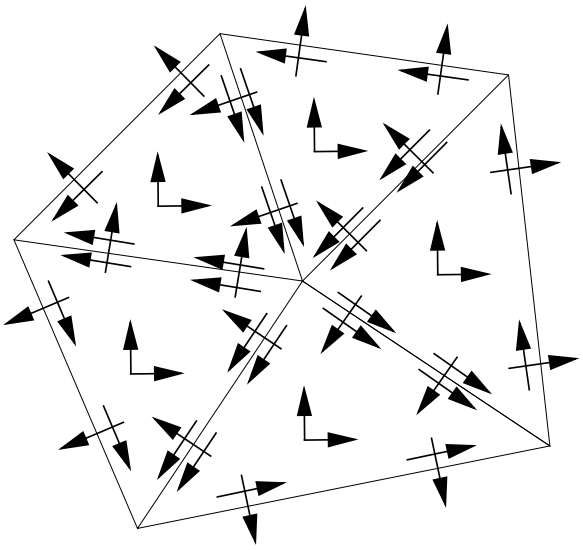


FIG. 2.15: *Représentation schématique de l'espace* $\mathcal{R}_h^2$

- les fonctions de base associées au centre du triangle. Leur support est limité à un seul triangle.

Et on note $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{R}}_h^2}$ la base canonique ainsi sommairement définie, schématiquement représentée sur la figure (2.15) On montre encore que cette base est bien orthogonale pour l'approximation du produit scalaire obtenue à l'aide de la formule d'intégration numérique (2.100), puisque l'on contrôle cette fois ci à la fois les composantes normales et tangentielles des éléments d'arête de la base $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{R}}_h^2}$. Ainsi, la matrice de masse $\mathbb{M}_h$ définie en (2.51) est donc bien approchée par une matrice diagonale.

2.5.3.d Construction d'une approximation d'ordre 2 de $H(\underline{\mathrm{Div}}, \omega)$ et quasi condensation de masse

Enfin, pour la construction d'une approximation de $H(\underline{\mathrm{Div}}, \omega)$ du second ordre, on pose :

$$\mathcal{X}_h^{\mathrm{div},2} = \left(\tilde{\mathcal{R}}_h^2\right)^2. \tag{2.109}$$

Puis procédant toujours comme pour l'ordre 1, on montre que l'on obtient une matrice de masse diagonale par bloc. Si le nœud associé au bloc est associé à une arête intérieure, ce bloc sera 6x6; si ce nœud est associé à une arête du bord ou au centre du triangle, ce bloc sera 4x4.

2.5.4 Prise en compte des conditions aux limites essentielles

On s'intéresse pour finir à la manière de prendre en compte la condition aux limites essentielle intervenant dans la définition de l'espace $\mathcal{X}^{\mathrm{div}}$, donnée par :

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}) \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l, \text{ pour } \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}^{\mathrm{div}}. \tag{2.110}$$

On montre ici comment prendre en compte cette condition aux limites dans notre espace d'approximation à l'ordre 1. La construction pour l'ordre 2 est similaire et ne pose pas de difficulté particulière.

Par construction, les composantes normales et tangentielles d'un tenseur $\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}_h^{\mathrm{div}}$ le long d'une arête de la triangulation sont définies uniquement par leur valeur au milieu de l'arête. La condition aux limites (2.110) est alors introduite dans notre espace d'approximation aussi naturellement qu'elle l'est pour l'approximation de $H_0^1(\omega)$ par des éléments finis de Lagrange : il suffit de "rayer" les degrés de liberté pour lesquels cette condition n'est pas vérifiée sur le bord. Pour cela, il nous faut tout d'abord réarranger les ddl associés à une arête du bord.

On considère une arête du bord notée a_l, $\underline{n} = (n_1, n_2)$ sa normale, et $\underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ sa tangente et M son milieu. Les fonctions de base associées au point M ont toutes comme support le triangle K auquel appartient l'arête, puisque celle ci n'appartient qu'à ce seul triangle. La base canonique de $\mathcal{X}_h^{\mathrm{div}}$ proposée en (2.92) est en fait mal adaptée pour la prise en compte de la condition (2.110), puisqu'elle associée aux degrés de liberté suivant :

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,(M)\underline{n}) \cdot \underline{e}_x,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,(M)\underline{\tau}) \cdot \underline{e}_x,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,(M)\underline{n}) \cdot \underline{e}_y,\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,(M)\underline{\tau}) \cdot \underline{e}_y, \tag{2.111}$$

Il vaut mieux choisir :

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,(M)\underline{n}) \cdot \underline{n},\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,(M)\underline{n}) \cdot \underline{\tau},\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,(M)\underline{\tau}) \cdot \underline{n},\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,(M)\underline{\tau}) \cdot \underline{\tau}. \tag{2.112}$$

On vérifie aisément que les fonctions de bases associées à ces nouveaux ddl sont données respectivement par :

$$\underline{\underline{r}}_{a_l}^{nn} = \begin{pmatrix} n_1 \underline{r}^\top \\ n_2 \underline{r}^\top \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{r}}_{a_l}^{nt} = \begin{pmatrix} \tau_1 \underline{r}^\top \\ \tau_2 \underline{r}^\top \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{s}}_{a_l}^{nn} = \begin{pmatrix} n_1 \underline{s}^\top \\ n_2 \underline{s}^\top \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{s}}_{a_l}^{tt} = \begin{pmatrix} \tau_1 \underline{s}^\top \\ \tau_2 \underline{s}^\top \end{pmatrix} \tag{2.113}$$

où $\underline{w}^\top$ désigne le vecteur ligne (w_x, w_y).

Par construction, comme la composante normale le long de a est définie uniquement par sa valeur au point M, on en déduit que :

$$((\underline{\underline{r}}_{a_l}^{nn}\underline{n}) \cdot \underline{n})_{|a} = 1, \quad ((\underline{\underline{r}}_{a_l}^{nt}\underline{n}) \cdot \underline{n})_{|a} = 0, \quad ((\underline{\underline{s}}_{a_l}^{tn}\underline{n}) \cdot \underline{n})_{|a} = 0, \quad ((\underline{\underline{s}}_{a_l}^{tt}\underline{n}) \cdot \underline{n})_{|a} = 0. \tag{2.114}$$

Il suffit donc de rayer toutes les fonctions de base du type $\underline{\underline{r}}_{a_l}^{nn}$. On note :

- A_{b_l} les arêtes du bord libre,
- A_{b_0} les arêtes du bord encastré,

Une base de notre espace d'approximation est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \{\underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{div}}\} = &\left\{ \underline{\underline{r}}_{a_i}^{u}, \underline{\underline{s}}_{a_i}^{g,u}, \underline{\underline{s}}_{a_i}^{d,u}, \underline{\underline{r}}_{a_i}^{l}, \underline{\underline{s}}_{a_i}^{g,l}, \underline{\underline{s}}_{a_i}^{d,l} \ ;\ a_i \in \mathcal{A}_i \right\} \\ &\cup \left\{ \underline{\underline{r}}_{a_z}^{u}, \underline{\underline{s}}_{a_z}^{u}, \underline{\underline{r}}_{a_z}^{l}, \underline{\underline{s}}_{a_z}^{l} \ ;\ a_z \in \mathcal{A}_{b_z} \right\} \\ &\cup \left\{ (\underline{\underline{r}}_{a_l}^{nt}, (\underline{\underline{s}}_{a_l}^{tn}, (\underline{\underline{s}}_{a_l}^{tt} \ ;\ a_l \in \mathcal{A}_{b_l}, \right\} \end{aligned} \tag{2.115}$$

et on obtient ainsi une approximation conforme de l'espace :

$$\mathcal{X}^{\text{div}} = \left\{ H(\underline{\text{Div}}\,, \omega)\ ;\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}) \,.\, \underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l \right\}.$$

2.5.5 Construction par passage à l'élément de référence

2.5.5.a La transformation $H(\text{div}, \omega)$ conforme

De la même manière que l'on peut définir tout élément fini de Lagrange par passage à l'élément de référence à l'aide de la relation d'affine-équivalence définie en (1.2), il existe un isomorphisme qui permet de ramener la définition d'un élément fini $H(\text{div}, \omega)$ conforme à un élément de référence $(\hat{K}, \hat{P}_K, \hat{\Sigma}_K)$.

Rappelons que, $\hat{K}$ désignant le triangle de référence usuel, et K un triangle non dégénéré, de sommets S_1, S_2 et S_3, il existe une unique transformation affine du plan, inversible :

$$F_K : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \hat{x} & \mapsto & B\hat{x} + S_1, \end{array} \right. \tag{2.116}$$

telle que :

$$F_K(\hat{S}_i) = S_i, \forall i \in \{1, 2, 3\} \tag{2.117}$$

On note $\mathcal{F}(K, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des champs de vecteurs définis sur un triangle K. On définit alors la transformation suivante :

Définition 2.1 *Soit $\mathcal{G}$ la transformation définie sur $\mathcal{F}(K, \mathbb{R}^2)$ par :*

$$\mathcal{G} : \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\hat{K}, \mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathcal{F}(K, \mathbb{R}^2) \\ \\ \underline{\hat{p}} & \mapsto & \mathcal{G}\underline{\hat{p}} = p : \left[\begin{array}{ccc} K & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \\ \underline{x} & \mapsto & p(x, y) = B_K\, \underline{\hat{p}}(F_K^{-1}(\underline{x})), \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{2.118}$$

où B_K est la matrice jacobienne de la transformation affine F_K définie ci dessus en (1.8).

Utilisant la convention d'écriture : $\underline{x} = F_K(\underline{\hat{x}})$, on a plus succinctement :

$$\mathcal{G}\underline{\hat{p}}(\underline{x}) = p(\underline{x}) = B_K \underline{\hat{p}}(\underline{\hat{x}}). \tag{2.119}$$

Cette transformation est usuellement appelée *transformation $H(\text{div}, \omega)$ conforme*, car elle conserve cette remarquable propriété, ainsi que le précise la proposition suivante, démontrée par exemple dans [61] :

Théorème 2.5 *Si $(\hat{K}, \hat{P}_K, \hat{\Sigma}_K)$ désigne un élément fini $H(\mathrm{div}, \omega)$ conforme défini sur le triangle de référence, alors le triplet (K, P_K, Σ_K) défini par :*

$$\begin{aligned} K &= F_K(\hat{K}), \\ P_K &= \mathcal{G}(\hat{P}_K), \\ \Sigma_K &= \hat{\Sigma}_K \circ F_K^{-1}, \end{aligned} \tag{2.120}$$

est un élément fini $H(\mathrm{div}, \omega)$ conforme.

L'intérêt de cette transformation du point de vue de l'implémentation numérique est qu'elle permet de calculer aisément la base locale de tout élément fini à partir de la base locale de l'élément fini de référence.

2.5.5.b Passage à l'élément de référence et condensation de masse

Le théorème précédent nous assure qu'un élément fini obtenu par cette transformation est bien un élément $H(\mathrm{div}, \omega)$ conforme. Mais il ne faut pas oublier que notre but était d'obtenir la condensation de masse, et que celle ci repose sur un choix approprié des degrés de liberté choisis. Il faut donc s'assurer que cette transformation bien utile pour la mise en œuvre effective de la méthode, ne chamboulle pas toute notre construction. C'est l'objet des deux petits lemmes suivants.

Commençons par modifier légèrement les notations utilisées jusqu'alors (un champ $\underline{\hat{p}}$ perd son chapeau lorsqu'on lui applique $\mathcal{G}$; pour les distinguer les éléments de $\tilde{R}_1(K)$ on leur ajoute donc à ces derniers un $\tilde{.}$) :

- $\{\underline{\hat{q}}_i\}$ la base de $R_1(\hat{K})$
- $\{\underline{\tilde{q}}_i\}$ la base de $R_1(K)$, définies par (2.58)
- $\{\underline{q}_i\} = \mathcal{G}\{\underline{\hat{q}}_i\}$
- $\{\underline{\hat{r}}_i, \underline{\hat{s}}_i\}$ la base de $\tilde{R}_1(\hat{K})$
- $\{\underline{\tilde{r}}_i, \underline{\tilde{s}}_i\}$ la base de $\tilde{R}_1(K)$, définies par (2.75)
- $\{\underline{r}_i, \underline{s}_i\} = \mathcal{G}\{\underline{\hat{r}}_i, \underline{\hat{s}}_i\}$.

Lemme 2.3 *L'application $\mathcal{G}$ transporte $\tilde{R}_1(\hat{K})$ sur $\tilde{R}_1(K)$,* ie. *:*

$$\mathcal{G}\tilde{R}_1(\hat{K}) = \tilde{R}_1(K), \tag{2.121}$$

▷ PREUVE : Rappelons que, d'après la remarque (2.3) :

$$\tilde{R}_1(K) = \text{Vect}\{\tilde{q}_i, \underline{\tilde{s}}_i \ ; \ 1 \leq i \leq 3\}$$

On sait que :

$$\underline{\hat{q}}_i = l(\hat{a}_i)\underline{\hat{S}_i \hat{M}}$$
$$\underline{\hat{s}}_i = 4\hat{\lambda}_{i+1}\hat{\lambda}_{i+2}\underline{\hat{\tau}}$$

Or, on calcule aisément :

$$B_K \, \underline{\hat{S}_i \hat{M}} = \underline{S_i M}$$
$$B_K \, \underline{\hat{\tau}} = \frac{l(a_i)}{l(\hat{a}_i)}\underline{\tau},$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\underline{\hat{q}}_i(\underline{x}) = \underline{q}_i(\underline{x}) = 2 \, \text{aire}(K)\frac{l(\hat{a}_i)}{l(a_i)}\underline{\tilde{q}}_i(\underline{x}), \\ \mathcal{G}\underline{\hat{s}}i(\underline{x}) = \underline{s}_i(\underline{x}) = \frac{l(a_i)}{l(\hat{a}_i)}\underline{\tilde{s}}_i(\underline{x}), \end{aligned} \tag{2.122}$$

et par conséquent le résultat, puisque la famille $\{q_i, \underline{s}_i \ ; \ 1 \leq i \leq 3\}$ s'avère être proportionnelle à la famille $\{\tilde{q}_i, \underline{\tilde{s}}_i \ ; \ 1 \leq i \leq 3\}$ ◁

Dans la preuve précédente, on a démontré qu'il y a une relation de proportionnalité entre les fonctions de base associées à un ddl tangentiel obtenues par la transformation $\mathcal{G}$ et celles construites localement à la section 2.5.2, soit entre $(\mathcal{G}\underline{\hat{s}}_i)$ et $(\underline{\tilde{s}}_i)$. Ceci est tout simplement lié au fait que la transformation $\mathcal{G}$ conserve les relations de parallélisme, et donc transforme les champs tangents au bord sur $\hat{K}$ en champs tangents au bord sur K.

Mais $\mathcal{G}$ ne conserve par l'orthogonalité. Par conséquent les champs normaux au bord sur $\hat{K}$ ne sont pas nécessairement transformés en champs normaux au bord sur K. En toute généralité, on n'a aucune relation de proportionnalité entre $(\mathcal{G}\underline{\hat{r}}_i)$ et $(\underline{\tilde{r}}_i)$ (notons que dans la démonstration précédente on a justement choisi la base $(\underline{\hat{q}}_i, \underline{\hat{s}}_i)$ et non la base $(\underline{\hat{r}}_i, \underline{\hat{s}}_i)$ de $\tilde{R}_1(\hat{K})$).

Ainsi, la base de $\tilde{R}_1(K)$obtenue de $\tilde{R}_1(\hat{K})$ par la transformation $\mathcal{G}$ n'est pas orthogonale pour le produit scalaire approché utilisé pour obtenir la condensation de masse. Mais on a heureusement la propriété suivante, qui nous assure que la matrice de masse est diagonale par bloc 2x2 :

Lemme 2.4 *Si $\underline{\hat{w}}$ est l'une des fonctions de base de $\tilde{R}_1(\hat{K})$ associée à l'arête $\hat{a}$, alors $\underline{w} = \mathcal{G}\underline{\hat{w}}$, associée à l'arête a vérifie :*

$$\underline{w}(M_{a'}) = 0, \ \textit{pour toute arête } a' \neq a. \tag{2.123}$$

▷ PREUVE : C'est une simple conséquence de la remarque (2.5). En effet, le résultat est vrai sur $\hat{K}$, soit :

$$\underline{\hat{w}}(\hat{M}_{\hat{a}'}) = 0, \text{ pour toute arête } \hat{a}' \neq \hat{a}, \tag{2.124}$$

et il se transporte sur K par la transformation $\mathcal{G}$. ◁

De la même manière, on vérifie cette construction par passage à l'élément de référence ne perturbe pas le résultat de quasi condensation de masse présenté pour l'approximation de $H(\underline{\mathrm{Div}}\,, \omega)$.

Il va de soi que ces résultats s'étendent naturellement à l'ordre 2.

2.5.5.c Passage à l'élément de référence et conditions aux limites

Il reste enfin à vérifier que le passage à l'élément de référence ne perturbe pas non plus la construction de la base permettant de prendre en compte les conditions aux limites essentielles sur le bord libre présentée à la section 2.5.4. En fait, c'est quasiment immédiat. Rappelons que les fonctions de base choisies sur une arête du bord bord a_l sont données par :

$$\underline{\underline{r}}^{nn}_{a_l} = \begin{pmatrix} n_1\underline{r}^\top \\ \\ n_2\underline{r}^\top \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{r}}^{nt}_{a_l} = \begin{pmatrix} \tau_1\underline{r}^\top \\ \\ \tau_2\underline{r}^\top \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{s}}^{nn}_{a_l} = \begin{pmatrix} n_1\underline{s}^\top \\ \\ n_2\underline{s}^\top \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{s}}^{tt}_{a_l} = \begin{pmatrix} \tau_1\underline{s}^\top \\ \\ \tau_2\underline{s}^\top \end{pmatrix} \tag{2.125}$$

où $\underline{w}^\top$ désigne le vecteur ligne (w_x, w_y).

Une conséquence du lemme (2.3) est en particulier que pour tout champ $\underline{w} \in \mathcal{G}\tilde{R}_1(\hat{K})$ défini sur K, sa composante normale le long de chaque arête a de K ne dépend que de sa valeur au milieu de l'arête. On en déduit sans surprise que :

$$((\underline{\underline{r}}^{nn}_{a_l}\underline{n})\cdot\underline{n})_{|a} \neq 0, \quad ((\underline{\underline{r}}^{nt}_{a_l}\underline{n})\cdot\underline{n})_{|a} = 0, \quad ((\underline{\underline{s}}^{tn}_{a_l}\underline{n})\cdot\underline{n})_{|a} = 0, \quad ((\underline{\underline{s}}^{tt}_{a_l}\underline{n})\cdot\underline{n})_{|a} = 0. \tag{2.126}$$

Il suffit donc de rayer toutes les fonctions de base du type $\underline{\underline{r}}^{nn}_{a_l}$.

2.6 A propos d'estimations d'erreurs concernant le problème semi-discret

On présente dans cette section quelques résultats essentiels de la théorie des méthodes mixtes, qui seront utiles à plusieurs reprises dans la suite de ce travail, ainsi que les estimations d'erreur obtenus par Ciarlet et Raviart pour l'approximation de la formulation présentée mixte à la section 1.2.4

2.6.1 Le problème elliptique stationnaire

L'analyse de convergence pour un problème de propagation tel que l'équation de plaque dynamique de Kirchhoff-Loverepose sur l'obtention d'estimations d'erreurs associée au problème stationnaire sous jacent (voir [63, 21]).

On considère donc ici le problème elliptique suivant, correspondant au modèle de Kirchhoff-Love stationnaire pour une plaque occupant le domaine ω, encastrée sur son bord γ :

$$\boxed{\begin{cases} \text{Trouver } u_p \in H_0^2(\omega), \text{ tel que :} \\ \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) = f_p, \quad \text{dans } \omega, \\ u_p = \partial_n u_p = 0, \quad \text{sur } \gamma. \end{cases}} \tag{2.127}$$

où $f_p \in L^2(\omega)$.

Le théorème de Lax-Milgram permet de montrer, grâce à l'inégalité de Korn en dimension 2 (*cf.* (2.24)), que le problème (2.127) possède une unique solution u_p. On a l'estimation a priori suivante :

$$\exists c > 0, \text{ telle que } \|u_p\|_{H^2(\omega)} \leq c \|f_p\|_{L^2(\omega)}. \tag{2.128}$$

En outre, lorsque cette plaque est homogène isotrope et que la frontière $\gamma = \gamma_0$ est suffisamment régulière, on a le résultat de *régularité* suivant (voir [49]) :

Lemme 2.5 (Régularité de l'équation de plaque homogène isotrope encastrée) *On suppose que $f \in H^m(\omega)$, pour $m \in \mathbb{N}$, que γ est suffisamment régulière et $\gamma_0 = \gamma$. Alors :*

$$u_p \in H_0^2(\omega) \cap H^{m+4}(\omega). \tag{2.129}$$

2.6.2 Le problème mixte stationnaire

La formulation mixte présentée à la section 1.3 s'écrit à présent, dans le cas du problème stationnaire (2.127) :

$$\boxed{\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{\underline{\mathcal{M}}}, u_p) \in \mathcal{X} \times \mathcal{V}, \text{ tels que :} \\ a(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*) + b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, u_p) = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}, \\ b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, u_p^*) = -(f_p, u_p^*), \quad \forall u_p^* \in \mathcal{V}, \end{cases}} \tag{2.130}$$

où:

$$\mathcal{V} = H_0^1(\omega) \tag{2.131}$$

et, suivant le cas :

$$\mathcal{X} = (H^1(\omega))^4 \text{ ou } \mathcal{X} = H(\underline{\operatorname{Div}}, \omega). \tag{2.132}$$

Les formes bilinéaires continues a et b sont définies par :

$$\begin{aligned} a(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*) &= \int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \in \mathcal{X}, \\ b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, u_p) &= \int_\omega \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} . \underline{\nabla} v_p \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}, \ \forall v_p \in H^1(\omega), \end{aligned} \tag{2.133}$$

et où on a posé $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}$.

L'approximation conforme de ce problème mixte s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h, u_{p_h}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{V}, \text{ tels que :} \\ a(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h) + b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h, u_{p_h}) = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h, \in \mathcal{X}_h, \\ b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h, u^*_{p_h}) = -(f_p, u^*_{p_h}), \quad \forall u^*_{p_h} \in \mathcal{V}_h, \end{array}\right. \tag{2.134}$$

où $\mathcal{X}_h \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ sont les espaces de dimensions finis introduits aux sections 2.1 et 2.2.

Commençons tout d'abord par effectuer quelques rappels sur la théorie générale des méthodes mixtes développée par I. Babuska et F. Brezzi ([6]).

2.6.3 Rappels sur la théorie des méthodes mixtes

On introduit les opérateurs linéaires continus $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, $B : \mathcal{X} \to \mathcal{V}'$ et sa transposée $B^\top : \mathcal{V} \to \mathcal{X}'$ définis par :

$$\begin{array}{l} \langle A\underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \rangle_{\mathcal{X}' \times \mathcal{X}} = a(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*), \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \in \mathcal{X}, \\ \langle B\underline{\underline{\mathcal{M}}}, v_p \rangle_{\mathcal{X}' \times \mathcal{V}} = b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, v_p), \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}, \ \forall v_p \in \mathcal{V}, \\ \langle \underline{\underline{\mathcal{M}}}, B^\top v_p \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{V}'} = b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, v_p), \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}, \ \forall v_p \in \mathcal{V}, \end{array} \tag{2.135}$$

La théorie des mixtes repose en grande partie sur le théorème suivant, qui permet de généraliser à la dimension infinie un résultat bien connu en dimension finie (voir [6]) :

Théorème 2.6 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *L'image de B, $\operatorname{Im} B$, est fermée dans $\mathcal{V}'$,*
- *L'image de $B^\top$, $\operatorname{Im} B^\top$, est fermée dans $\mathcal{X}'$,*
- $(\ker B)^\perp = \{\underline{\underline{\mathcal{M}}}' \in \mathcal{X}' \ ; \ pd\underline{\underline{\mathcal{M}}}', \underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\mathcal{X}' \times \mathcal{X}} = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \ker B\} = \operatorname{Im} B^\top$,
- $(\ker B^\top)^\perp = \{u'_p \in \mathcal{V}' \ ; \ pdu'_p, u_{p_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}} = 0, \quad \forall u_p \in \ker B\} = \operatorname{Im} B$,
- *Il existe $k > 0$ tel que :*

$$\inf_{u_p \in \mathcal{V}/\ker B^\top} \sup_{\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}} \frac{b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, u_p)}{\|u_p\|_{\mathcal{V}} \|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|_{\mathcal{X}}} \geq k, \tag{2.136}$$

- *Il existe $k > 0$ tel que :*

$$\inf_{\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}/\ker B} \sup_{u_p \in \mathcal{V}} \frac{b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, u_p)}{\|u_p\|_{\mathcal{V}} \|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|_{\mathcal{X}}} \geq k. \tag{2.137}$$

Remarque 2.8 *Il est facile de voir que le multiplicateur de Lagrange du problème (2.130),* u_p*, n'est donnée qu'à un élément du noyau de* $\ker B^\top$ *prêt. Il s'avère que* u_p *est justement l'inconnue de notre problème d'origine, qui possède une unique solution. Il est naturel de vouloir qu'elle soit encore unique dans le cas du problème (2.130), ce qui revient à supposer que* $\ker B^\top = \{0\}$*, ou, de façon équivalente, d'après le théorème (2.6), que* B *est* surjective.

Dans tout ce qui suit, on considérera que c'est le cas, au niveau continu comme au niveau discret, pour alléger cette présentation. La condition inf-sup s'écrit alors :

$$\text{Il existe } k > 0 \text{ tel que : } \inf_{u_p \in \mathcal{V}} \sup_{\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}} \frac{b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, u_p)}{\|u_p\|_{\mathcal{V}} \|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|_{\mathcal{X}}} \geq k, \tag{2.138}$$

On a alors résultat suivant, qui permet usuellement d'obtenir l'existence et l'unicité des problèmes (2.130) et (2.134) (voir [6] :

Théorème 2.7 *On suppose que :*

1. *B est surjective,*
2. *la forme bilinéaire a est coercive sur le noyau de B, c'est à dire :*

$$\exists \nu > 0, \text{ tel que } \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}, a(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}) \geq \nu \|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|_{\mathcal{X}}, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \ker B. \tag{2.139}$$

Alors pour tout $f \in \mathcal{V}'$, le problème (2.130) possède une unique solution $(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, u_p) \in \mathcal{X} \times \mathcal{V}$.

Enfin, le théorème suivant permet d'obtenir des estimations d'erreurs pour le problème approché (2.134) :

Théorème 2.8 *On suppose que les hypothèse du théorème (2.7) sont vérifiées. On suppose également que les conditions suivantes sont vérifiées :*

- ***La condition inf-sup discrète uniforme :***

$$\text{Il existe } k_0 > 0 \quad \inf_{u_{p_h} \in \mathcal{V}_h} \sup_{\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h \in \mathcal{X}_h} \frac{b(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h, u_{p_h})}{\|u_{p_h}\|_{\mathcal{V}_h} \|\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h\|_{\mathcal{X}_h}} \geq k_0, \tag{2.140}$$

- ***la condition de coercivité discrète uniforme :***

$$\exists \nu_0 > 0, \text{ tel que } \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h \in \mathcal{X}_h, a(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h) \geq \nu \|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|_{\mathcal{X}}, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h \in \ker B_h. \tag{2.141}$$

Alors il existe une constante $C = C(\|a\|, \|b\|, k_0, \nu_0)$ telle que :

$$\|\underline{\underline{\mathcal{M}}} - \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h\|_{\mathcal{X}} + \|u_p - u_{p_h}\|_{\mathcal{V}} \leq C \left(\inf_{\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h \in \mathcal{X}_h} \|\underline{\underline{\mathcal{M}}} - \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h\|_{\mathcal{X}} + \inf_{u^*_{p_h} \in \mathcal{V}_h} \|u_p - u^*_{p_h}\|_{\mathcal{V}} \right). \tag{2.142}$$

2.6.4 Défaut de coercivité de la formulation mixte de l'équation de plaque

Il s'avère que la formulation mixte (2.130) ne vérifie par les hypothèses du théorème (2.7). Plus précisément on a le :

Proposition 2.1 *Soient a et b les formes bilinéaires définies en (2.133). Alors :*

- *L'opérateur B associé à b est surjectif,*
- *La forme bilinéaire a* ***n'est pas coercive*** *sur le noyau de B.*

▷ PREUVE DE LA PROPOSITION (2.1) :

• Il est facile de voir que dans ce cas l'opérateur B est défini par :

$$B : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & H^{-1}(\omega) \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} & \mapsto & \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}. \end{cases} \tag{2.143}$$

- On choisit des tenseurs particuliers de la forme suivante :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}, = \varphi \underline{\underline{I}}, \tag{2.144}$$

où $\varphi \in H^1(\omega)$. Dans ce cas, on a :

$$\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} = \underline{\nabla} \varphi, \tag{2.145}$$

D'autre part, on vérifie immédiatement que :

$$\|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|^2_{(L^2(\omega))^4} = 2\|\varphi\|_{L^2(\omega)} \tag{2.146}$$

$$\|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|^2_{H(\underline{\operatorname{Div}},\omega)} = 2\|\varphi\|_{L^2(\omega)} + \|\underline{\nabla}\varphi\|^2_{(L^2(\omega))^2}, \tag{2.147}$$

$$\|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|^2_{(H^1(\omega))^4} = 2\|\varphi\|_{L^2(\omega)} + 2\|\underline{\nabla}\varphi\|^2_{(L^2(\omega))^2}, \tag{2.148}$$

Dans les deux cas, on a :

$$\|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|^2_{\mathcal{X}} \geq \|\varphi\|^2_{H^1(\omega)}. \tag{2.149}$$

• Précisons tout d'abord que puisque le tenseur $\mathbf{A}$ est uniformément défini positif, on a :

$$\exists \alpha > 0, a(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}) \geq \alpha \|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|_{(L^2(\omega)^4)} \tag{2.150}$$

• Pour montrer le défaut de coercivité de a sur le noyau de B, exhibons un contre-exemple. On se place, pour fixer les idées, dans le carré unité, c'est à dire qu'**on choisit**[2]

$$\omega =]0,1[\times]0,1[.$$

2. Plus généralement, il suffit de supposer que que $0 \in \gamma$, ce qu'on peut toujours faire, quitte à translater l'ouvert ω.

On introduit alors la fonction φ définie par :

$$\varphi(\underline{x}) = \log(|\underline{x}|), \text{ pour } \underline{x} \in \omega, \tag{2.151}$$

Il est bien connu que :

$$\Delta\varphi = 0, \tag{2.152}$$

et on montre sans difficulté que $\varphi \in L^2(\omega)$ mais que $\varphi \notin H^1(\omega)$:

$$\begin{aligned} &\int_\omega |\varphi|^2 \leq \int_{B(0,\sqrt{2})} |\varphi|^2 = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi \log(r) r dr < \infty \\ &\int_\omega |\underline{\nabla}\varphi|^2 \geq \frac{1}{4} |\underline{\nabla}\varphi|^2 \int_{B(0,1)} = \frac{1}{4} \int_0^1 2\pi \frac{1}{r^2} r dr = \infty. \end{aligned} \tag{2.153}$$

On choisit alors une suite $(\underline{x}_n)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \omega$ qui converge vers 0, et on pose :

$$\varphi_n(\underline{x}) = \varphi(\underline{x} - \underline{x}_n). \tag{2.154}$$

et :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_n = \begin{pmatrix} \varphi_n & 0 \\ 0 & \varphi_n \end{pmatrix}, \tag{2.155}$$

On vérifie cette fois ci que

$$\varphi_n \in H^1(\omega), \forall n,$$

puisqu'on a retiré la singularité qui est en 0. D'autre part, comme φ_n est obtenue par une translation de φ, on a

$$\|\varphi_n\|_{L^2(\omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\omega)}$$

et

$$\Delta\varphi_n = 0.$$

Par conséquent,

$$\|\underline{\underline{\mathcal{M}}}_n\|_{L^2(\omega)} = \|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|_{L^2(\omega)}$$

et

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_n \in \ker B, \forall n.$$

Enfin, une simple application du théorème de Beppo-Levy donne :

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{H^1(\omega)} = \infty.$$

et donc, grâce à (2.149) que :

$$\lim_{n\to\infty} \|\underline{\underline{\mathcal{M}}}_n\|_{\mathcal{X}} = \infty.$$

On en déduit, compte tenu de (2.150), que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_n, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_n)}{\|\underline{\underline{\mathcal{M}}}_n\|_{\mathcal{X}}} = 0, \tag{2.156}$$

ce qui contredit la coercivité de a sur $\ker B$.

- Pour montrer la surjectivité de B, on montre la condition inf-sup, ce qui est le plus simple ici. Soit $u_p \in H_0^1(\omega)$, alors, compte tenu de (2.147) et (2.148) on calcule, en choisissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}} = u_p \underline{\underline{I}}$:

$$\frac{\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \cdot \underline{\nabla} u_p}{\|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|_{\mathcal{X}}} \geq \frac{1}{2} \|\underline{\nabla} u_p\|_{H^1(\omega)}, \tag{2.157}$$

et par conséquent :

$$\sup_{\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in \mathcal{X}} \frac{\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \cdot \underline{\nabla} u_p}{\|\underline{\underline{\mathcal{M}}}\|_{\mathcal{X}}} \geq \frac{1}{2} \|\underline{\nabla} u_p\|_{H^1(\omega)}, \tag{2.158}$$

qui n'est autre que la condition inf-sup. ◁

Remarque 2.9 *Une adaptation minime de cette preuve permet de montrer que la formulation proposée par Ciarlet et Raviart pour l'équation biharmonique présentée à la section 1.2.4 présente la même "pathologie", à savoir qu'elle vérifie bien la condition inf-sup mais pas la condition de coercivité.*

2.6.5 Estimations d'erreurs dans un cas simple

On peut néanmoins obtenir des estimations d'erreur pour l'approximation conforme du problème (2.130) en s'appuyant sur un résultat de régularité. En effet, Si on suppose que la solution u_p du problème d'origine (2.127) est dans $H^3(\omega)$, et si l'on suppose en outre que $\mathbf{C}$ est suffisamment régulière, alors le moment fléchissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)$ est dans $(H^1(\omega))^4$ et donc également dans $H(\underline{\mathrm{Div}}, \omega)$, et on obtient ainsi directement une solution du problème (2.130). On a ainsi le :

Lemme 2.6 *Si la solution u_p du problème (2.127) est dans $H^3(\omega)$, alors le problème (2.130) possède une et une seule solution.*

▷ PREUVE : Comme on vient de le dire, grâce à l'hypothèse régularité de u_p permet d'obtenir un résultat d'existence.

D'autre part, on vérifie aisément que cette solution est unique en choisissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* = \underline{\underline{\mathcal{M}}}$ et $u_p^* = u_p$ dans (2.130), lorsque le second membre f_p est nul, puisqu'on obtient alors :

$$\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}} = 0, \tag{2.159}$$

et donc $\underline{\underline{\mathcal{M}}} = 0$. On en déduit alors que $u_p \in \ker B^\top$, et donc $u_p = 0$ puisque le noyau de $B^\top$ est réduit à 0 (conséquence de la la proposition (2.1) et du théorème (2.6)). ◁

Les estimations d'erreur que l'on présente ci dessous sont présentées succinctement par Brezzi et Fortin dans [6, section II.2.5].

Il s'agit en fait d'une généralisation des estimations usuelles obtenues pour les méthodes mixtes. Elles ont été introduites par Ciarlet et Raviart pour la résolution du problème biharmonique (auquel correspond le problème de Kirchhoff-Love pour une plaque homogène isotrope) :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_p \in H_0^2(\omega), \text{ tel que :} \\ \Delta^2 u_p = f_p, \quad \text{dans } \omega, \\ u_p = \partial_n u_p = 0, \quad \text{sur } \gamma. \end{array}\right. \tag{2.160}$$

à l'aide de la formulation mixte suivante (voir 1.2.4) :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\omega \mu\mu^* + \int_\omega \underline{\nabla}\mu^* \cdot \underline{\nabla} v_p = 0, \quad \forall \mu^* \in H^1(\omega), \\ \displaystyle\int_\omega \underline{\nabla}\mu \cdot \underline{\nabla} v_p^* = -\int_\omega f_p v_p^*, \quad \forall v_p^* \in H_0^1(\omega), \end{array}\right. \tag{2.161}$$

Dans ce cas, on vérifie que $\mu = \Delta u_p$.

Ciarlet et Raviart obtiennent des estimations d'erreur dans le cas où l'espace $H^1(\omega)$ est approché par des éléments finis de Lagrange d'ordre supérieur ou égal à 2.

Pour "récupérer le défaut de coercivité" signalé ci dessus, ils utilisent une **estimation inverse** , valable dans le cas où le maillage est **uniformément régulier** (voir [15, Théorème 3.2.6]) :

Lemme 2.7 *Si le maillage $\mathcal{T}_h$ est uniformément régulier, c'est à dire si il existe $\tau > 0$* indépendant de h *tel que :*

$$\min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \leq \tau \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K, \tag{2.162}$$

alors on a l'inégalité inverse :

$$\exists A, \forall v_h \in \mathcal{L}_k, \|v_h\|_{H^1(w)} \geq \frac{A}{h} \|v_h\|_{L^2(\omega)}, \tag{2.163}$$

où $\mathcal{L}_k$ est l'espace d'éléments finis de Lagrange d'ordre k.

L'apparition d'un terme en $1/h$ fait chuter d'un ordre de grandeur les estimations d'erreur, ce qui explique qu'elle n'est valable que pour $k \geq 2$. On a alors le résultat suivant (voir [14] :

Théorème 2.9 *L'approximation conforme du problème (2.161) par éléments finis de Lagrange de degré $k \geq 2$ conduit à un problème bien posé. L'unique solution (μ_h, v_{p_h}) de ce problème vérifie l'estimation d'erreur :*

$$\|v_p - v_{p_h}\|_{H^1(\omega)} + \|\mu - \mu_h\|_{L^2(\omega)} \leq ch^{k-1}. \tag{2.164}$$

Brezzi et Raviart [7] ont généralisé cette méthode à l'approximation des problèmes elliptiques du 4ème ordre par une méthode mixte de ce type , valable également dans le cas où $k \geq 2$.

Chapitre 3

Analyse de dispersion numérique des problèmes semi-discret

On effectue dans ce chapitre une analyse de dispersion numérique des quatre schémas semi-discretisés en espace présentés au chapitre précédent ($P_1 - P_1^4$, $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$, $P_1 - \tilde{R}_1$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$).

Ce type d'étude s'effectue sur maillage régulier infini, ce qui permet d'exploiter le formalisme de Fourier. Elles sont donc limités aux équations dans tout l'espace en milieu homogène. Dans ce cas, les schémas obtenus par éléments finis peuvent être réinterprétés sous la forme de schémas aux différences finies.

Le propos de cette étude est l'analyse de solutions particulières de type onde planes progressives harmoniques. Cette approche se justifie par le fait que toute solution peut s'écrire comme une superposition d'ondes planes, grâce à la transformée de Fourier. La dispersion numérique est une mesure de l'erreur commise par un schéma d'approximation sur la vitesse de phase de solutions de type onde plane du problème continu.

On fait une présentation générale de cette méthode, dans le cas d'élément finis quelconques (section 3.2). La relation de dispersion numérique discrète s'avère être un problème aux valeurs propres d'une matrice hermitienne à coefficients C^∞. La technique de condensation de masse permet de calculer explicitement cette matrice. Un algorithme de calcul du développement limité des valeurs propres de cette matrice au voisinage de 0 est proposé, ce qui permet de donner l'ordre théorique des schémas obtenus (section 3.2.3). On complète cette analyse en traçant et en commentant des courbes qui montrent comment varie cette dispersion numérique en fonction de la finesse du maillage et de l'angle de propagation (section 3.3).

L'intérêt de ce type d'étude est qu'elle donne un indicateur intéressant de la précision d'un schéma qui permet d'une part de comparer divers schémas entre eux mais également de déterminer les paramètres numériques pertinents (en l'occurence, la finesse du maillage par rapport au contenu fréquentiel du signal escompté). Ajoutons également que ces résultats conduisent à des estimations d'erreurs dans le cas particulier d'un milieu infini homogène (présenté dans le cas de l'équation des ondes monodimensionnelle dans [62]).

3.1 Relation de dispersion du problème continu

On considère donc le problème de Kirchhoff-Love orthotrope homogène sur $\mathbb{R}^2$, soit :

$$\rho_p \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

Notation 3.1 *Pour des raisons pratiques, nous écrirons le tenseur de rigidité sous la forme suivante :*

$$\mathbf{C} = c_{11} \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11} \tilde{\mathbf{C}}, \tag{3.2}$$

où les paramètres c_{22}, c_{12} et c_{33} sont donc adimensionnés.

On cherche des solutions de type onde plane harmonique progressive de l'équation (3.1), c'est à dire des solutions de la forme :

$$u(\underline{x}, t) = e^{i(\omega t - \underline{k}\cdot\underline{x})} = e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)} \tag{3.3}$$

où $\underline{k} = (k_1, k_2)$ est le vecteur d'onde et ω est la pulsation. Dans ce qui suit, on repérera les composantes de $\underline{k}$ en coordonnées polaires, soit, en notant ϕ son angle de propagation et $|k|$ sa norme (*cf.* figure (3.1)) :

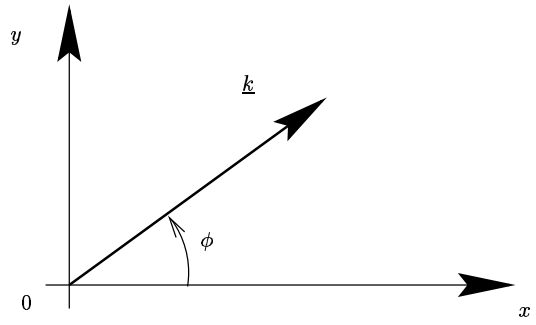


FIG. 3.1: *Le vecteur d'onde $\underline{k}$*

$$\underline{k} = (|k|\cos(\phi), |k|\sin(\phi)) \tag{3.4}$$

On vérifie aisément qu'une onde plane doit vérifier la relation de dispersion suivante pour être solution de (3.1) :

$$\omega^2 = |k|^4 \, \frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p} \left(\cos^4(\phi) + c_{22}\sin^4(\phi) + 2(c_{12} + c_{33})\cos^2(\phi)\sin^2(\phi)\right) \tag{3.5}$$

La vitesse de phase d'une onde plane solution de l'équation de plaque de Kirchhoff-Love orthotrope est donc :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{|k|} = |k|\,\delta\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_p}}\sqrt{\left(\cos^4(\phi) + c_{22}\sin^4(\phi) + 2(c_{12}+c_{33})\cos^2(\phi)\sin^2(\phi)\right)}} \tag{3.6}$$

Remarque 3.1 *En particulier, si la plaque est isotrope, alors les coefficients de* $\mathbf{C}$ *vérifient :*

$$c_{22} = c_{12} + c_{33} = 1,$$

et dans ce cas, la relation de dispersion devient :

$$\omega^2 = \frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p}\,|k|^4\,, \tag{3.7}$$

et la vitesse de phase d'une telle onde est alors :

$$\boxed{v_\varphi = |k|\,\delta\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_p}}} \tag{3.8}$$

3.2 Dispersion numérique du problème semi-discret

Rappelons que la formulation variationnelle mixte étudiée ici est, compte tenu du fait que les conditions au bord sont reléguées à l'infini :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } v_p : [0,T] \to \mathcal{V} \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X} \text{ tels que :} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}.\underline{\nabla} v_p^* = 0 \quad \forall v_p^* \in \mathcal{V}, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*.\underline{\nabla} v_p = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}. \end{array}\right. \tag{3.9}$$

où:

$$\mathcal{V} = H^1(\mathbb{R}^2)$$

et, suivant le cas :

$$\mathcal{X} = (H^1(\mathbb{R}^2))^4 \text{ ou } \mathcal{X} = H(\underline{\mathrm{Div}}\,, \mathbb{R}^2),$$

3.2.1 Ecriture sur un maillage régulier de $\mathbb{R}^2$

On se donne un maillage régulier en triangles rectangles de $\mathbb{R}^2$, de pas h, représenté sur la figure (3.2). On introduit alors les espaces d'approximation :

$$\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V} \text{ et } \mathcal{X}_h \subset \mathcal{X}. \tag{3.10}$$

On choisit l'un des quatre approximations spatiales suivante :

- $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^1$ et $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{1,1}$, c'est à dire l'approximation $P_1 - P_1^4$,

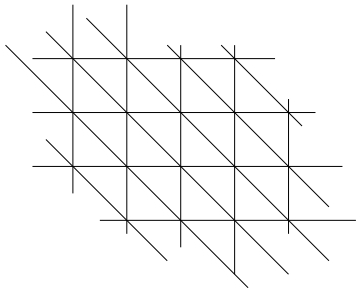


FIG. 3.2: *Maillage régulier de* $\mathbb{R}^2$

- $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^2$ et $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{1,2}$, c'est à dire l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$,
- $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^1$ et $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{\mathrm{div},1}$, c'est à dire l'approximation $P_1 - \tilde{R}_1$,
- $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^2$ et $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{\mathrm{div},2}$, c'est à dire l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$,

ou les espaces $\mathcal{V}_h^k$, $\mathcal{X}_h^{1,k}$ et $\mathcal{X}_h^{1,k}$ ont été définis dans les sections 2.1 et 2.2.

La régularité du maillage confère une structure particulière à ces espaces d'approximation. Pour décrire tous les degrés de liberté des espaces $\mathcal{V}_h$ et $\mathcal{X}$, on définit tout d'abord la cellule unité associée à chaque sommet $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ de ce maillage. A chaque cellule unité sont associés un seul sommet (le sommet (i,j)), trois arêtes et deux triangles. comme présenté sur la figure (3.3). On peut alors considérer que ce maillage est un réseau périodique infini composé de cellules unité de ce type.

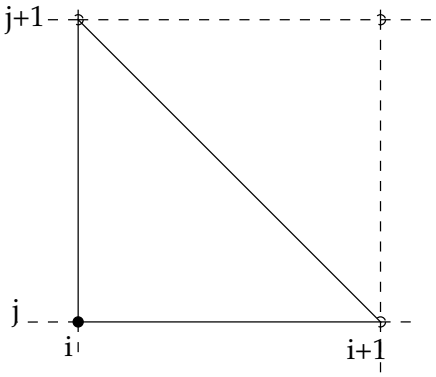


FIG. 3.3: *La cellule unité du maillage périodique de* $\mathbb{R}^2$

A partir de cette cellule unité, on décrit les cellules élémentaires qui représentent l'ensemble des ddl associées à une cellule unité pour un espace d'approximation donné. Ainsi, l'ensemble des ddl de l'espace est obtenu également par translation de la cellule élémentaire. Décrivons donc maintenant les cellules élémentaires des espaces introduits ci-dessus. Eh oui, il y a donc une distinction subtile entre cellule unité et cellule élémentaire dans ce discours, mais on l'oubliera rapidement.

- La cellule élémentaire pour $\mathcal{V}_h^1$ possède un seul ddl (figure (3.4)).

- La cellule élémentaire pour $\mathcal{V}_h^2$ possède 6 ddl (figure (3.5)).
- La cellule élémentaire pour $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{1,1}$ possède 4 ddl (figure (3.6)).
- La cellule élémentaire pour $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{1,1}$ possède 24 ddl (figure (3.7)).
- La cellule élémentaire pour $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{\mathrm{div},1}$ possède 18 ddl (figure (3.8)).
- La cellule élémentaire pour $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{\mathrm{div},1}$ possède donc 44 ddl (figure (3.9)).

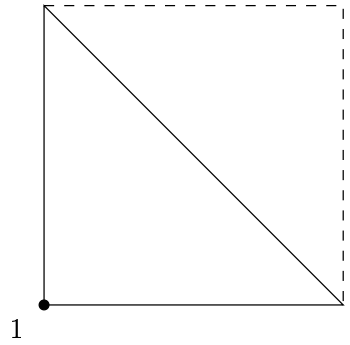


FIG. 3.4: *Cellule élémentaire pour* $\mathcal{V}_h^1$

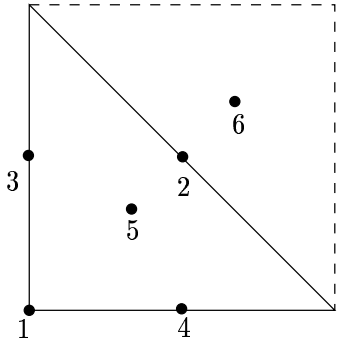


FIG. 3.5: *Cellule élémentaire pour* $\mathcal{V}_h^2$

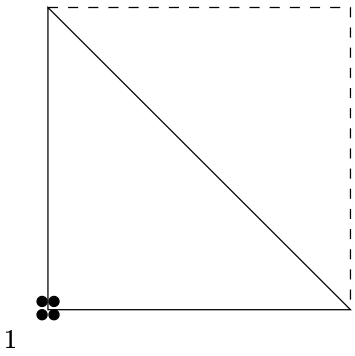


FIG. 3.6: *Cellule élémentaire pour* $\mathcal{X}_h^{1,1}$

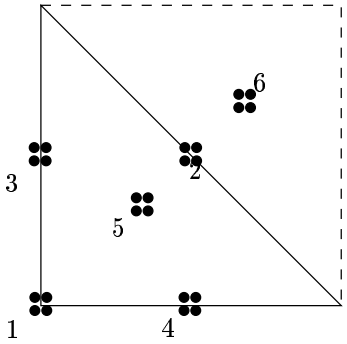


FIG. 3.7: *Cellule élémentaire pour* $\mathcal{X}_h^{1,2}$

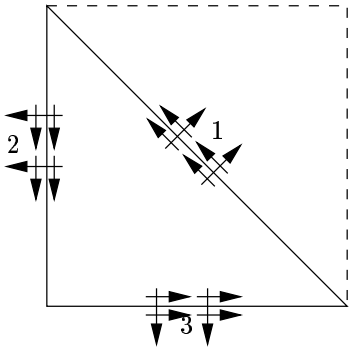


FIG. 3.8: *Cellule élémentaire pour* $\mathcal{X}_h^{\mathrm{div},1}$

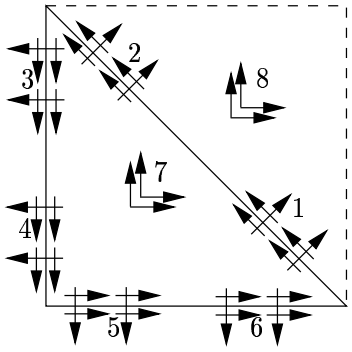


FIG. 3.9: *Cellule élémentaire pour* $\mathcal{X}_h^{\mathrm{div},2}$

Sur ces figures, pour décrire les ddl d'une approximation de $\mathcal{X}_h$, on a seulement numéroté les blocs associés à un même nœud. Au sein de chacun de ces blocs, on utilise une numérotation locale à chaque bloc qu'il n'est pas vraiment nécessaire de préciser ici.

On note n_v le nombre de ddl d'une cellule élémentaire de l'espace $\mathcal{V}_h$ et n_M le nombre de ddl d'une cellule élémentaire de l'espace $\mathcal{X}_h$.

A chaque cellule unité de sommet $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, on associe les vecteurs :

$$[V_h]_{i,j} \in \mathbb{C}^{n_v} \quad \text{et } [\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h]_{i,j} \in \mathbb{C}^{n_M} \tag{3.11}$$

Les inconnues de notre problème sont maintenant les vecteurs blocs :

$$\boxed{V_h = ([V_h]_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}} \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h = ([\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h]_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}} \tag{3.12}$$

Le problème semi-discret en espace peut alors se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{M}_h^v \dfrac{dV_h}{dt} - \tilde{H}_h^\top \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h = 0 \\ \tilde{M}_h^M \dfrac{d\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h}{dt} + \tilde{H}_h V_h = 0, \end{cases}} \tag{3.13}$$

où :

- $\tilde{M}_h^v$ est une matrice composée de blocs de taille n_v x n_v,
- $\tilde{M}_h^M$ est une matrice composée de blocs de taille n_M x n_M,
- $\tilde{H}_h$ est une matrice composée de blocs de taille n_M x n_v,
- $\tilde{H}_h^\top$ est la matrice transposée de $\tilde{H}_h$.

Compte tenu de l'invariance de ce problème par translation, puisque le maillage est régulier infini, les matrices $\tilde{M}_h^v$, $\tilde{M}_h^M$ et $\tilde{H}_h$ commutent avec les translations. Pour $p, q \in \mathbb{Z}$, la translation τ_{pq} est définie par :

$$[\tau_{pq} V_h]_{ij} = [V]_{i+p,j+q} \quad \forall i,j \in \mathbb{Z} \tag{3.14}$$

on a donc :

$$\tau_{pq} \circ \tilde{H}_h = \tilde{H}_h \circ \tau_{pq}, \quad \forall p,q \in \mathbb{Z}, \tag{3.15}$$

et de même pour $\tilde{M}_h^v$ et $\tilde{M}_h^M$.

Cette propriété nous indique qu'en fait, **les produits matriciels intervenant dans l'équation (3.13) sont des produits de convolutions** [1].On peut donc écrire :

$$\boxed{\left(\tilde{H}_h V_h\right)_{ij} = \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} \left[\tilde{H}_h\right]_{i-p,j-q} [V_h]_{i+p,j+q} = \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} \left[\tilde{H}_h\right]_{p,q} [V_h]_{i+p,j+q},} \tag{3.16}$$

ainsi qu'une équation similaire pour $\tilde{M}_h^v$ et $\tilde{M}_h^M$.

1. Rappelons en effet qu'une caractéristique des produits de convolutions est d'être des opérateurs linéaires qui commutent avec les translations

3.2.1.a Description des matrices du problème

Décrivons un peu plus précisément les matrices du problème (3.13).

- L'une des caractéristiques de la méthode des éléments finis est de définir des fonctions de base dont les supports sont le plus petit possible de manière à ce que les matrices obtenues soient le plus creuses possibles. On vérifie dans notre cas que puisque seules des cellules voisines sont connectées :

$$\left[\tilde{H}_h\right]_{p,q} = 0, \quad \text{si} \quad |p| > 1 \text{ ou } |q| > 1. \tag{3.17}$$

  On vérifie en outre que $\tilde{H}_h$ ne dépend pas de h. On a donc en fait :

$$\left[\tilde{H}_h\right]_{p,q} = \left[\tilde{H}\right]_{q,r}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}. \tag{3.18}$$

- Grâce à la technique de condensation de masse, les matrices $\tilde{M}_h^v$ et $\tilde{M}_h^M$ sont respectivement diagonale et diagonale par bloc. Par conséquent :

$$\left[\tilde{M}_h^v\right]_{p,q} = 0 \text{ et } \left[\tilde{M}_h^M\right]_{p,q} = 0 \text{ si } (p,q) \neq (0,0). \tag{3.19}$$

  En outre, on vérifie que ces deux matrices sont proportionnelles à h^2 ; on notera donc :

$$\left[\tilde{M}_h^v\right]_{00} = h^2[\tilde{M}^v] \text{ et } \left[\tilde{M}_h^M\right]_{00} = h^2[\tilde{M}^M] \tag{3.20}$$

  Pour finir, présentons ces matrices de masse pour les divers espaces présentées.

  ⋆ Si $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^1$, alors :

$$\boxed{[\tilde{M}^v] = \delta\rho_p[1],} \tag{3.21}$$

  ⋆ Si $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^2$, alors :

$$\boxed{[\tilde{M}^v] = \delta\rho_p \,\mathrm{diag}(6\omega_s, 2\omega_a, 2\omega_a, 2\omega_a, \omega_g, \omega_g),} \tag{3.22}$$

  où $\omega_s, \omega_a, \omega_g$ sont les poids de la formule de quadrature utilisée pour obtenir la condensation de masse donnée en (2.32) :

$$\omega_s = \frac{1}{20}, \quad \omega_a = \frac{2}{15}, \quad \frac{9}{20}.$$

  ⋆ Si $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{1,1}$, alors :

$$\boxed{[\tilde{M}^M] = \frac{1}{\delta^3 c_{11}}[\tilde{\mathbf{A}}\,],} \tag{3.23}$$

  où $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$ est la matrice de souplesse adimensionnée, inverse de la matrice de rigidité adimensionnée donnée en (3.2).

⋆ Si $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{1,2}$, alors :

$$\boxed{[\tilde{M}^M] = \frac{1}{\delta^3 c_{11}} \operatorname{diag}(6\omega_s[\tilde{\mathbf{A}}\,], 2\omega_a[\tilde{\mathbf{A}}\,], 2\omega_a[\tilde{\mathbf{A}}\,], 2\omega_a[\tilde{\mathbf{A}}\,], \omega_g[\tilde{\mathbf{A}}\,], \omega_g[\tilde{\mathbf{A}}\,])} \tag{3.24}$$

Enfin, pour présenter les matrices de masse $\tilde{M}^M$ dans le cas où l'approximation choisie est du type $\mathcal{X}_h^{\mathrm{div},k}$, il nous faut tout d'abord préciser quelques notations. On note θ l'angle entre l'horizontale et une arête du maillage. On a donc (voir la figure 3.3) :

$$\begin{aligned}
\theta &= 0, \quad && \text{pour une arête horizontale,} \\
\theta &= \frac{3\pi}{4}, \quad && \text{pour une arêt oblique,} \\
\theta &= \frac{3\pi}{2}, \quad && \text{pour une arêt verticale.}
\end{aligned}$$

Un bloc de la matrice $\tilde{M}^M$ associé à une arête d'angle θ est une matrice 6x6 que l'on note : M_θ. Un bloc associé au centre d'un des triangles est la matrice de souplesse $\tilde{\mathbf{A}}$.

Alors :

⋆ Si $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{\mathrm{div},1}$, alors :

$$\boxed{[\tilde{M}^M] = \frac{1}{\delta^3 c_{11}} \operatorname{diag}(\frac{2}{3}[M_{\frac{3\pi}{4}}], \frac{2}{3}[M_{\frac{3\pi}{2}}], \frac{2}{3}[M_0])} \tag{3.25}$$

⋆ Si $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_h^{\mathrm{div},2}$, alors :

$$\boxed{\begin{aligned}[\tilde{M}^M] = \frac{1}{\delta^3 c_{11}} \operatorname{diag}(&2\omega_a[M_{\frac{3\pi}{4}}], 2\omega_a[M_{\frac{3\pi}{4}}], \quad \omega_a[M_{\frac{3\pi}{2}}], \\ &\omega_a[M_{\frac{3\pi}{2}}], 2\omega_a[M_0], 2\omega_a[M_0], \omega_g[\tilde{\mathbf{A}}\,], \omega_g[\tilde{\mathbf{A}}\,])\end{aligned}} \tag{3.26}$$

où ω_a et ω_g sont les poids de la formule de quadrature utilisée pour obtenir la condensation de masse donnée en (2.100) :

$$\omega_a = \frac{11}{120}, \quad \omega_g = \frac{9}{20}$$

3.2.1.b Un exemple

Présentons maintenant un exemple qui sera peut être plus clair que de grands discours, dans le cas de l'approximation $P_1 - P_1^4$. La structure régulière du maillage conduit à un schéma aux différences finies.

On note $V_{i,j}$ la valeur de V_h au sommet (i,j) du maillage et $(\mathcal{M}_{i,j}^\alpha)_{1\leq\alpha\leq 4}$ les 4 composantes

du tenseur $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h$ au sommet (i,j) du maillage. La première équation de (3.13) s'écrit :

$$\begin{aligned}\rho_p h \quad \frac{dV_{i,j}}{dt} - \Big[& & & (-\mathcal{M}^1_{i-1,j} & +2\mathcal{M}^1_{i,j} & -\mathcal{M}^1_{i+1,j}) & & \\ & +\frac{1}{2}(-\mathcal{M}^2_{i,j-1} & +\mathcal{M}^2_{i+1,j-1} & -\mathcal{M}^2_{i-1,j} & +2\mathcal{M}^2_{i,j} & -\mathcal{M}^2_{i+1,j} & +\mathcal{M}^2_{i-1,j+1} & -\mathcal{M}^2_{i,j+1}) \\ & +\frac{1}{2}(-\mathcal{M}^3_{i,j-1} & +\mathcal{M}^3_{i+1,j-1} & -\mathcal{M}^3_{i-1,j} & +2\mathcal{M}^3_{i,j} & -\mathcal{M}^3_{i+1,j} & +\mathcal{M}^3_{i-1,j+1} & -\mathcal{M}^3_{i,j+1}) \\ & +(-\mathcal{M}^4_{i,j-1} & & & +2\mathcal{M}^4_{i,j} & & & -\mathcal{M}^4_{i,j+1})\Big],\end{aligned} \tag{3.27}$$

et la seconde s'écrit :

$$\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\delta^3 c_{11}} \begin{bmatrix} \mathcal{M}^1_{i,j} \\ \mathcal{M}^2_{i,j} \\ \mathcal{M}^3_{i,j} \\ \mathcal{M}^4_{i,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & -V_{i-1,j} & +2V_{i,j} & -V_{i+1,j} & & \\ -\frac{1}{2}V_{i,j-1}+ & \frac{1}{2}V_{i+1,j-1} & -\frac{1}{2}V_{i-1,j} & +V_{i,j} & -\frac{1}{2}V_{i+1,j} & +\frac{1}{2}V_{i-1,j+1} & -\frac{1}{2}V_{i,j+1} \\ -\frac{1}{2}V_{i,j-1}+ & \frac{1}{2}V_{i+1,j-1} & -\frac{1}{2}V_{i-1,j} & +V_{i,j} & -\frac{1}{2}V_{i+1,j} & +\frac{1}{2}V_{i-1,j+1} & -\frac{1}{2}V_{i,j+1} \\ -V_{i,j-1} & & & +2V_{i,j} & & & -V_{i,j+1} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} [\tilde{H}]_{i,j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, [\tilde{H}]_{i+1,j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, [\tilde{H}]_{i-1,j} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, [\tilde{H}]_{i,j} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ [\tilde{H}]_{i+1,j} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, [\tilde{H}]_{i-1,j+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, [\tilde{H}]_{i,j+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

Il n'est pas envisageable de présenter l'ensemble des ces calculs. La taille des matrices dans le cas des 3 autres approximations est beaucoup trop grande pour que cela présente le moindre intérêt de les coucher sur une feuille. L'ensemble de ces calculs a été effectué à l'aide de Maple, un logiciel de calcul formel, sans lequel, il faut l'avouer, ils seraient difficilement envisageables. Les matrices sont en fait simplement calculées par passage à l'élément de référence, appliqué à un maillage minimal.

3.2.2 Relation de dispersion numérique

On recherche à présent des solutions de (3.13) de type ondes planes harmoniques progressive harmonique discrètes du problème (3.13). On fixe le nombre d'ondes $\underline{k}$ et on cherche la

pulsation ω_h pour une solution de (3.13) de la forme :

$$[V_h]_{p,q} = V_0 \exp(i\omega t - ik_1 ph - ik_2 qh), \quad p,q \in \mathbb{Z}, \tag{3.30}$$

$$[\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h]_{p,q} = \underline{\underline{\mathcal{M}}}_0 \exp(i\omega t - ik_1 ph - ik_2 qh), \quad p,q \in \mathbb{Z}, \tag{3.31}$$

Injectant (3.30, 3.31) dans (3.13), on obtient :

$$\begin{cases} -i\omega h^2 \delta \rho_p \tilde{M}^v V_0 - \hat{H}_h^\top(\underline{k}) \underline{\underline{\mathcal{M}}}_0 = 0 \\ -i\omega h^2 \dfrac{1}{\delta^3 c_{11}} \tilde{M}^M \underline{\underline{\mathcal{M}}}_0 - \hat{H}_h(\underline{k}) V_0 = 0, \end{cases} \tag{3.32}$$

où :

$$\boxed{\hat{H}_h(\underline{k}) = \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} \left[\tilde{H}\right]_{p,q} e^{-ipk_1 h - iqk_2 h}} \tag{3.33}$$

est la transformée de Fourier discrète de la matrice $\tilde{H}$. Eliminant l'inconnue $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_0$, on obtient la relation de dispersion matricielle suivante :

$$\boxed{\frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p} \frac{1}{h^4} \hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k}) V_0 = \omega_h^2 V_0.} \tag{3.34}$$

où on a posé :

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k}) = \hat{H}_h^*(\underline{k}) \, (\tilde{M}^M)^{-1} \, \hat{H}_h(\underline{k}), \\ &\hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k}) = (\tilde{M}^v)^{-1} \, \hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k}). \end{aligned}} \tag{3.35}$$

$\hat{H}_h^*(\underline{k})$ désigne la matrice adjointe de $\hat{H}_h(\underline{k})$.

Remarque 3.2 *Notons que $\hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k})$ est une matrice hermitienne pour le produit scalaire de $\mathbb{C}^{n_v}$ défini par :*

$$(U,V)_{\tilde{M}^v} = (\tilde{M}^v \, U, V) = V^* \, \tilde{M}^v \, U, \quad , \forall U, V \in \mathbb{C}^{n_v}, \tag{3.36}$$

La relation de dispersion (3.34) nous indique donc que ω_h^2 est une valeur propre de la matrice

$$\frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p} \frac{1}{h^4} \hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k}),$$

qui est de taille 1 à l'ordre 1 et de taille 6 à l'ordre 2. A l'ordre 2, on a donc a priori le choix entre 6 valeurs propres. Il nous faut un moyen de déterminer à laquelle s'intéresser.

Lorsque h tend vers 0, tous les nœuds d'une cellule élémentaire tendent à se confondre en un seul. Pour qu'une une solution de la forme (3.30) représente une approximation de

la solution continue donnée (3.3), il faut donc que le vecteur V_0 propre associé à la valeur propre ω^2 tende vers le vecteur unité $(1,1,1,1,1,1)$.

On appellera **onde plane numérique physique (ou mode physique)** la solution numérique associée au vecteur propre qui converge vers le vecteur unité quand h tend vers 0. **Les autres modes sont appelés modes parasites**, qui oscillent de plus en plus lorsque h tend vers 0 (puisque le vecteur propre associé converge vers un vecteur orthogonal au vecteur unité). En toute rigueur, ces modes parasites doivent être d'amplitude négligeable. Ils convergent vers 0 lorsque h tend vers 0 sans entacher la précision du schéma (c'est à dire qu'ils convergent au moins en $O(h^k)$ ou k est l'ordre du schéma).

Nous ne nous intéresserons ici qu'au seul mode physique. [2]

Notons $\lambda_h(\underline{k})$ la valeur propre de $\hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k})$ associée au mode physique. Remarquons qu'en fait $\hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k})$ dépend uniquement de $|k|\,h$ et de ϕ, comme on peut le voir sur la définition de $\hat{H}_h(\underline{k})$ donnée en (3.33). On introduit alors l'inverse du nombre de points par longueur d'onde :

$$\boxed{K = \frac{|k|\,h}{2\pi},} \tag{3.37}$$

si bien qu'on peut écrire, compte tenu de la dépendance en $\underline{k}$ de la matrice $\hat{H}_h(\underline{k})$ et par conséquent de la matrice $\hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k})$ (équations (3.33) et (3.35)) :

$$\hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k}) = \hat{\mathbb{N}}(K,\phi) \quad \text{et} \quad \lambda_h(\underline{k}) = \lambda(K,\phi),$$

Alors, la relation de dispersion matriciel (3.34) conduit à :

$$\omega_h^2 = \frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p\,h^4}\lambda(K,\phi). \tag{3.38}$$

La vitesse de phase de l'onde numérique est donc :

$$v_h = \frac{\omega_h}{|k|} = \frac{\delta}{|k|\,h^2}\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_p}} \tag{3.39}$$

La dispersion numérique est alors définie par l'erreur commise par le schéma semi-discret sur la vitesse de phase, soit :

$$\boxed{q_h(K,\phi) = \frac{v_\varphi}{v_h} = \frac{\omega_h}{\omega} = \frac{1}{(2\pi\pi)^2}\frac{\sqrt{\lambda(K,\phi)}}{C(\phi)},} \tag{3.40}$$

où on a posé :

$$C(\phi) = \sqrt{\left(\cos^4(\phi) + c_{22}\sin^4(\phi) + 2(c_{12}+c_{33})\cos^2(\phi)\sin^2(\phi)\right)} \tag{3.41}$$

Pour obtenir une idée de l'ordre de convergence du schéma étudié, il faut effectuer un développement limité de $q_h(K,\phi)$ lorsque K tend vers 0.

2. Tout en ayant vérifié que les modes parasites sont effectivement parasites, c'est à dire qu'il convergent vers 0. La présentation des résultats de dispersion étant suffisamment copieuse pour le seul mode physique, nous n'avons pas jugé nécessaire de montrer les modes parasites...

Dans le cas d'une approximation à l'ordre 1, $\hat{\mathbb{K}}(K,\phi)$ est un simple scalaire, qui se confond avec $\lambda(K,\phi)$. On est alors capable de calculer le développement limité de q_h.

Par contre, dans le cas d'une approximation à l'ordre 2, $\hat{\mathbb{K}}(K,\phi)$ est une matrice carrée de taille 6. Par conséquent, $\lambda(K,\phi)$ est la racine d'un polynôme de degré 6, et on ne peut espérer en extirper son expression aisément. On obtient alors le développement limité de $\lambda(K,\phi)$ par identification. Précisons cette méthode dans un cadre plus général.

3.2.3 Un algorithme de calcul du développement limité de la valeur propre d'une matrice hermitienne

Soit $M(x) \in \mathcal{M}_n(C^\infty(I,\mathbb{C}))$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Le produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$ sera noté (U,V) pour $U,V \in \mathbb{C}^n$.

Hypothèse 3.1 *On suppose que :*

- *$M(x)$ est hermitienne pour tout $x \in I$. Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale pour tout x.*
- *$M(0)$ possède n valeurs propres distinctes (ce qui implique que $M(x)$ possède n valeurs propres distinctes dans un voisinage de $x = 0$).*[3]

Soit $\lambda(x)$ une valeur propre de $M(x)$ et $W(x)$ un vecteur propre normé associé. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\lambda(0) = 0$, quitte à changer $M(x)$ en $M(x) - \lambda(0)M(0)$. $\lambda(x)$ et $W(x)$ vérifient :

$$\left[\begin{array}{l} M(x)\,W(x) = \lambda(x)\,W(x) \\ (W(x),W(x)) = 1. \end{array}\right. \tag{3.42}$$

On effectue un développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, de M, λ et W au voisinage de 0 :

$$\left\{\begin{array}{l} M(x) = \sum_{k=0}^{p} M_k x^k + O(x^{p+1}), \\ \lambda(x) = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^k + O(x^{p+1}), \\ W(x) = \sum_{k=0}^{p} W_k x^k + O(x^{p+1}), \end{array}\right. \tag{3.43}$$

Par hypothèse, les matrices hermitiennes $(M_k)_{0\le k\le p}$ sont connues et on cherche les valeurs de $(\lambda_k)_{0\le k\le p}$ et $(W_k)_{0\le k\le p}$.

Par identification, les équations (3.42) conduisent à :

$$\forall k \in \{0\dots p\}, \sum_{l=0}^{k} M_l W_{k-l} = \sum_{l=0}^{k} \lambda_l W_{k-l} \tag{3.44}$$

et :

$$\begin{cases} \|W_0\|^2 = 1 \\ \forall k \in \{1 \dots p\} \sum_{l=0}^{k} (W_l, W_{k-l}) = 0. \end{cases} \tag{3.45}$$

Pour $k = 0$, comme $M_0 = M(0)$, on obtient :

$$\lambda_0 = 0 \text{ et } M_0 W_0 = 0, \tag{3.46}$$

W_0 est donc un vecteur du noyau de M_0 de norme 1.

Avant de déterminer les valeurs de λ_k et W_k pour $k \geq 1$, rappelons quelques résultats d'algèbre linéaire et profitons en pour préciser des notations.

Notation 3.2 *Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, hermitienne, on a :*

$$\operatorname{Im} M = (\ker M)^{\perp} \tag{3.47}$$

Soit $v \in \operatorname{Im} M = (\ker M)^{\perp}$, alors l'équation :

$$Mu = v \tag{3.48}$$

possède une unique solution dans $(\ker M)^{\perp}$ que l'on notera $\tilde{M}_0^{-1} v$.

En pratique, pour calculer $\tilde{M}_0^{-1} v$, on résout le système linéaire $Mu = v$ qui fournit en toute généralité une solution à un élément de $\ker M$ près, et on projette sur $(\ker M)^{\perp}$.

Enfin, pour tout $w \in \mathbb{C}^n$ on notera :

$$w = w_0 + w^{\perp}$$

l'unique décomposition de w sur la somme $\ker M \oplus (\ker M)^{\perp}$

La décomposition de W_k pour tout $k \in \{1 \dots p\}$ sur la somme $\ker M \oplus (\ker M)^{\perp}$ est notée :

$$W_k = \alpha_k W_0 + W_k^{\perp} \tag{3.49}$$

On raisonne maintenant par récurrence. Supposons que l'on connaît $(\lambda_l, \alpha_l, W_l^{\perp})$ pour tout $l < k$, pour $k \geq 1$ donné. Alors, on réécrit l'équation (3.44) sous la forme :

$$\sum_{l=1} k - 1 (M_l - \lambda_l I) W_{k-l} + M_0 W_k + (M_l - \lambda_k I) W_0 = 0. \tag{3.50}$$

comme $M_0 W_k \in \operatorname{Im} M = (\ker M_0)^{\perp}$, on obtient, en multipliant scalairement par W_0 :

$$\lambda_k = (W_0 \, , \, \sum_{l=1}^{k-1} (M_l - \lambda_l I) W_{k-l} + M_k W_0). \tag{3.51}$$

Cette équation assure que :

$$\sum_{l=1}^{k}(\lambda_l I - M_l)W_{k-l} \in (\ker)^{\perp}, \tag{3.52}$$

et on déduit alors de (3.50) que :

$$W_k^{\perp} = \tilde{M}_0^{-1}\left(\sum_{l=1}^{k}(\lambda_l I - M_l)W_{k-l} \in (\ker)^{\perp}\right), \tag{3.53}$$

Enfin, l'équation (3.45) s'écrit sous la forme :

$$\sum_{l=1}^{k}(W_l\ ,\ W_{k-l}) + 2(W_0\ ,\ W_k) = 0, \tag{3.54}$$

soit encore :

$$\alpha_k = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}(W_l\ ,\ W_{k-l}). \tag{3.55}$$

On connaît donc $(\lambda_k, \alpha_k, W_k^{\perp})$.

Finalement, on détermine le développement limité de $\lambda(x)$ et $W(x)$ au voisinage de 0 en exécutant l'algorithme suivant :

1. On détermine les matrice M_k du développement limité de $M(x)$ au voisinage de 0,
2. On détermine un élément du noyau de $M(0)$, qu'on normalise,
3. Pour chaque $k \leq 1$, on détermine successivement λ_k, W_k en fonctions des matrices $(M_l)_{1\leq l\leq k}$ et de $(\lambda_l, W_l)_{1\leq l<k})$ déterminées au pas précédent, à l'aide des équations (3.51), (3.53) et (3.55).

3.2.4 Développement limité de la dispersion numérique

On calcule donc les développements limités suivants, soit directement pour les schémas d'ordre 1, soit à l'aide de l'algorithme ci dessus pour les schémas d'ordre 2. Il est bien entendu plus abordable d'effectuer ce calcul pour une matrice de rigidité $\tilde{\mathbf{C}}$ fixée. On peut alors calculer les développements limités de la dispersion numérique jusqu'à l'ordre 2 inclus. On les présente ici dans le cas où $\tilde{\mathbf{C}}$ est tout simplement l'identité.

- Dispersion numérique du schéma $P_1 - P_1^4$, cas isotrope:

$$\left[\begin{array}{l} q_{h,1}^1(K,\phi) = 1 + (2\pi K)^2 a_1^1(\phi) + o(K^2) \\ \text{où : } a_1^1(\phi) = -\cos(\phi)\sin^5(\phi) + \frac{1}{6}\sin^4(\phi) + \cos(\phi)\sin^3(\phi) - \frac{1}{6}\sin^2(\phi) - \frac{1}{6}. \end{array}\right. \tag{3.56}$$

- Dispersion numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$, cas isotrope :

$$\left[\begin{array}{l} q_{h,2}^1(K,\phi) = 1 + (2\pi K)^2 a_{h,2}^1(\phi) + O(K^4) \\ \text{où : } a_{h,2}^1(\phi) = \dfrac{1}{100}\,\sin(\phi)\cos^5(\phi) - \dfrac{11}{400}\,\cos^4(\phi) - \dfrac{1}{100}\,\cos^3(\phi)\sin(\phi) \\ \qquad\qquad + \dfrac{11}{400}\,\cos^2(\phi) - \dfrac{1}{40}\,\cos(\phi)\sin(\phi) + \dfrac{3}{400}. \end{array}\right. \tag{3.57}$$

- Dispersion numérique du schéma $P_1 - \tilde{R}_1$, cas isotrope :

$$\left[\begin{array}{l} q_{h,1}^1(K,\phi) = a_{h,1}^{\text{div}}(\phi) + O(K^2) \\ \text{où : } a_1^{\text{div}}(\phi) = 3 + 12\,\cos^2(\phi) - 6\,\cos(\phi)\sin(\phi) - 12\,\cos^4(\phi) \end{array}\right. \tag{3.58}$$

- Dispersion numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$, cas isotrope :

$$\left[\begin{array}{l} q_{h,2}^{\text{div}}(K,\phi) = 1 + (2\pi K)^2 a_{h,2}^{\text{div}}(\phi) + O(K^4) \\ \text{où : } a_{h,2}^{\text{div}}(\phi) = \dfrac{156461}{118560}\,\sin(\phi)\cos^5(\phi) - \dfrac{257}{320}\,\cos^4(\phi) - \dfrac{156461}{118560}\,\cos^3(\phi)\sin(\phi) \\ \qquad\qquad + \dfrac{257}{320}\,\cos^2(\phi) - \dfrac{7199}{59280}\,\cos(\phi)\sin(\phi) + \dfrac{1239}{39520} \end{array}\right. \tag{3.59}$$

On peut alors faire les remarques suivantes :

- Le schéma $P_1 - \tilde{R}_1$ est **inconsistant**, puisque les solutions ondes planes discrètes ne convergent pas vers les solutions du problème continu (on s'est donc contenté de présenter le développement limité $q_{h,1}^{\text{div}}$ à l'ordre 1). Ce résultat est un peu décevant, puisque l'espace $H(\underline{\text{Div}}\,,\omega)$ est un espace plus naturel pour le moment fléchissant. Dans toute la suite, nous ne nous intéressons donc plus à ce schéma.
- Les schémas $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ approchent la vitesse de phase en $O(K^4)$. On n'observe donc pas de phénomène de super-convergence de ces schémas comme cela est le cas pour l'équation des ondes approchée par des éléments de type $\tilde{P}_2$, pour lequel on obtient une erreur en $O(K^4)$ (voir [62]).

Les calculs deviennent trop indigestes pour les schémas d'ordre 2 lorsqu'il faut effectuer le calcul dans le cas général orthotrope, c'est à dire lorsque c_{12}, c_{22} et c_{33} deviennent des paramètres formels (il suffit de jeter un coup d'œil sur les fractions qui apparaissent dans le coefficient $a_{h,2}^{\text{div}}$ ci dessus pour réaliser ce que cela signifie. En fait un calcul formel de ce type exige une mémoire qui devient vite beaucoup trop exigeante, même encore aujourd'hui ... il ne faut pas oublier qu'un développement limité à l'ordre 2 de la dispersion numérique demande en fait d'effectuer un développement limité à l'ordre 6 de la valeur propre physique de $\hat{\mathbb{N}}(K,\phi)$) On ne peut alors exhiber qu'un résultat de consistance (ce qui est déjà intéressant, au moins pour le schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$, puisque la non consistance de son petit frère aurait pu nous permettre de douter).

En revanche, pour le schéma d'ordre 1 $P_1 - P_1^4$, le calcul du développement limité est sans soucis.

- Dispersion numérique du schéma $P_1 - P_1^4$, cas orthotrope général :

$$\left[\begin{array}{l} q_{h,1}^1(K,\phi) = 1 + (2\pi K)^2 \frac{a_1^1(\phi)}{C(\phi)} + o(K^2) \\ \text{où : } a_1^1(\phi) = -\frac{1}{6} + (\frac{2c_{33}}{3} + \frac{c_{12}}{6} - 1/2)\sin^4(\phi) + (\frac{1}{6} - \frac{c_{22}}{6})\sin^6(\phi) \\ \qquad\qquad + (-\frac{c_{12}}{6} - \frac{2c_{33}}{3} + \frac{1}{2})\sin^2(\phi) + c_{33}\sin^3(\phi)\cos(\phi) \\ \qquad\qquad - c_{33}\sin^5(\phi)\cos(\phi) \\ \text{et : } C(\phi) = \sqrt{\left(\cos^4(\phi) + c_{22}\sin^4(\phi) + 2(c_{12}+c_{33})\cos^2(\phi)\sin^2(\phi)\right)} \end{array}\right. \tag{3.60}$$

- Dispersion numérique du schéma $P_1 - P_1^4$, cas orthotrope général :

$$q_{h,2}^1(K,\phi) = 1 + O(K^4). \tag{3.61}$$

- Dispersion numérique du schéma $P_1 - P_1^4$, cas orthotrope général :

$$q_{h,2}^{\text{div}}(K,\phi) = 1 + O(K^4). \tag{3.62}$$

3.3 Courbes de dispersion

On peut également visualiser l'erreur commise sur la vitesse de phase q_h en traçant deux types de courbes.

- Soit on fixe un angle de propagation ϕ et on trace la courbe : $K \to q_h(K,\phi)$, qui permet d'observer avec quelle précision le schéma approche la vitesse de phase en fonction de la finesse du maillage. Plus cette courbe est proche de 1 pour K grand (*ie.* pour un faible nombre de points par longueur d'onde), plus le schéma est précis.

- Soit on fixe un nombre de points par longueur d'onde et on trace la courbe polaire $\phi \to q_h(K,\phi)$, qui permet d'observer l'anisotropie numérique du schéma à finesse donnée. Plus cette courbe sera proche du cercle unité, plus le schéma sera numériquement isotrope.

Ces courbes sont calculées numériquement. Pour les tracer, on est obligé de donner des valeurs particulières aux coefficients du tenseur de rigidité adimensionné $\tilde{\mathbf{C}}$. On choisit, pour

fixer les idées, trois valeurs différentes de $\tilde{\mathbf{C}}$:

isotrope

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

orthotrope-1

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/20 & 0 & 0 \\ 1/20 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

orthotrope-2

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/40 & 0 & 0 \\ 1/40 & 1/20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

Les cas orthotrope-1 et orthotrope-2 correspondent à des valeurs typiques d'orthotropie que l'on peut trouver pour les essences de bois. Dans les pages qui suivent, on présente donc une série de courbes, correspondant à la dispersion numérique et à l'anisotropie numérique des trois schémas $P_1 - P_1^4$, $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ pour ces trois matrices de rigidité. Afin de pouvoir comparer les deux schémas d'ordre 2, les échelles choisies pour ces courbes sont identiques. Par contre, On a défini une échelle particulière pour le schéma $P_1 - P_1^4$.

On peut faires les commentaires suivants :

- La dispersion numérique du schéma d'ordre 1 $P_1 - P_1^4$ est bien plus mauvaise que celle des schémas d'ordre 2. Il est donc intéressant de monter en ordre.
- On observe une très importante anisotropie numérique pour le schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$. En particulier, la courbe d'anisotropie n'est jamais collée au cercle unité, quelle que soit la matrice de rigidité, encore même pour 10 points par longueur d'onde !! (c'est la raison pour laquelle on a représenté en sus les courbes pour $K = 0.05$, c'est à dire pour 20 points par longueur d'onde —- on constate d'ailleurs que même dans ce cas, la courbe n'est pas complètement circulaire ...) Le fait d'avoir un résultat de consistance dans le cas général est certes rassurant, mais visiblement insuffisant. Ce résultat est plutôt déroutant, et nous inciterait plutôt à écarter ce schéma (ce qui est bien dommage, osons le dire, puisque l'espace $H(\underline{\mathrm{Div}}\,, \omega)$ semblait plus naturel pour le moment fléchissant).

- En outre, on constate que l'anisotropie du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ est d'autant plus importante que l'on choisit une matrice de rigidité $\tilde{\mathbf{C}}$ fortement orthotrope.
- Le schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ est légèrement anisotrope, mais cette anisotropie est plutôt peu sensible aux variations d'orthotropie de $\tilde{\mathbf{C}}$.

Remarque 3.3 *On observe sur tous les schémas une anisotropie numérique, dont la direction est donnée par la première diagonale. En fait, cette anisotropie est liée au maillage particulier de $\mathbb{R}^2$ que l'on a choisit, dans lequel cette même diagonale est une direction privilégiée. Il se trouve que les schémas proposés ici sont sensible à l'''isotropie" du maillage.*

Pour illustrer ce point, regardons la molécule du schéma aux différences finies obtenu avec le schéma $P_1 - P_1^4$ dans le cas où $\tilde{\mathbf{C}} = I$ (rappelons qu'alors l'opérateur de plaque est tout simplement le bilaplacien).

Lorsqu'on élimine le moment fléchissant $(\mathcal{M}_{i,j}^{\alpha})_{1\leq\alpha\leq 4}$ du schéma aux différences finies obtenu avec cette approximation, donné par le système (3.27, 3.28), on obtient le schéma suivant :

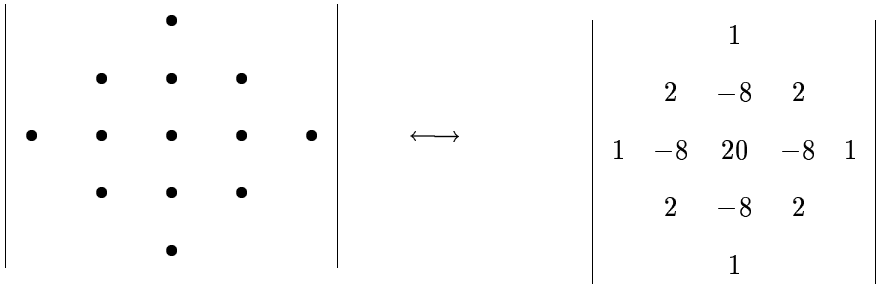
$$\left[\begin{array}{l} \rho_p \dfrac{dV_{i,j}}{dt} + \dfrac{\delta^2 c_{11}}{h^4}\Big(\quad \dfrac{3}{2}\,V_{i,j-2} - V_{i+1,j-2} + \dfrac{1}{2}\,V_{i+2,j-2} + V_{i-1,j-1} - 7\,V_{i,j-1} + 3\,V_{i+1,j-1} \\ \qquad\qquad -V_{i+2,j-1} + \dfrac{3}{2}\,V_{i-2,j} - 7\,V_{i-1,j} + 17\,V_{i,j} - 7\,V_{i+1,j} + \dfrac{3}{2}\,V_{i+2,j} - V_{i-2,j+1} \\ \qquad\qquad +3\,V_{i-1,j+1} - 7\,V_{i,j+1} + V_{i+1,j+1} + \dfrac{1}{2}\,V_{i-2,j+2} - V_{i-1,j+2} + \dfrac{3}{2}\,V_{i,j+2}\Big) \end{array}\right. \tag{3.66}$$

On peut représenter un tel schéma sous la forme d'une "molécule", ce qui montre visuellement avec quels points et quels poids on calcule le bilaplacien par ce schéma. On observe nettement la forme du maillage sur cette molécule.

$$\left|\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right| \quad \longleftrightarrow \quad \left|\begin{array}{ccccc} 1/2 & -1 & 3/2 & & \\ -1 & 3 & -7 & 1 & \\ 3/2 & -7 & 17 & -7 & 3/2 \\ & 1 & -7 & 3 & -1 \\ & & 3/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right|$$

A titre de comparaison, le schéma usuel aux différences finies d'ordre 2, obtenu par itération du laplacien discret à 5 points, s'écrit :

$$\left[\begin{array}{l} \rho_p \dfrac{dV_{i,j}}{dt} + \dfrac{\delta^2 c_{11}}{h^4}\Big(\quad V_{i,j-2} + 2\,V_{i-1,j-1} - 8\,V_{i,j-1} + 2\,V_{i+1,j-1} + V_{i-2,j} \\ \qquad\qquad -8\,V_{i-1,j} + 20\,V_{i,j} - 8\,V_{i+1,j} + V_{i+2,j} + 2\,V_{i-1,j+1} \\ \qquad\qquad -8\,V_{i,j+1} + 2\,V_{i+1,j+1} + V_{i,j+2}\Big) \end{array}\right. \tag{3.67}$$



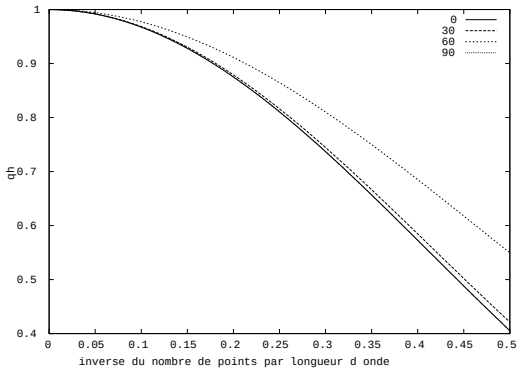


FIG. 3.10: *Dispersion numérique du schéma $P_1 - P_1^4$ — cas isotrope ϕ varie dans $[0, 30, 60, 90]$ en degré.*

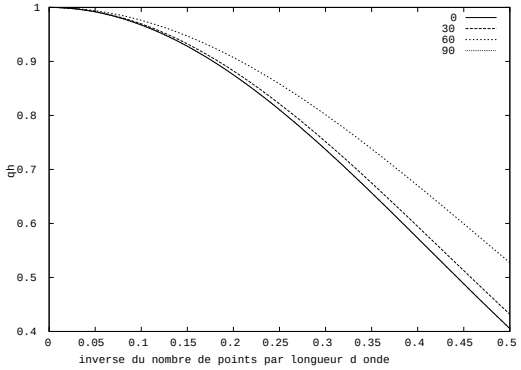


FIG. 3.11: *Dispersion numérique du schéma $P_1 - P_1^4$ — cas orthotrope-1 ϕ varie dans $[0, 30, 60, 90]$ en degré.*

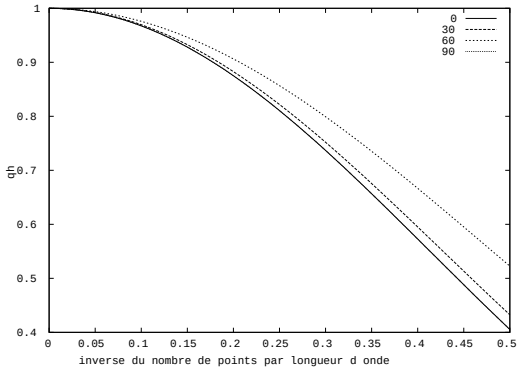


FIG. 3.12: *Dispersion numérique du schéma $P_1 - P_1^4$ — cas orthotrope-2 ϕ varie dans $[0, 30, 60, 90]$ en degré.*

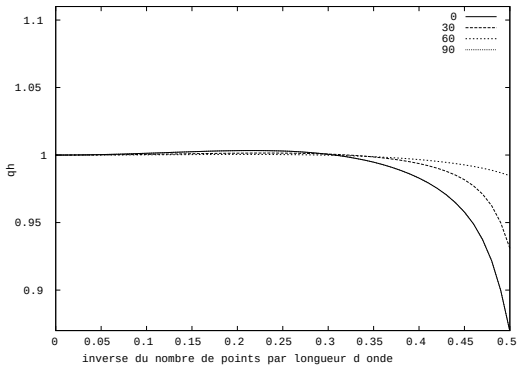


FIG. 3.13: *Dispersion numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ — cas isotrope ϕ varie dans $[0, 30, 60, 90]$ en degré.*

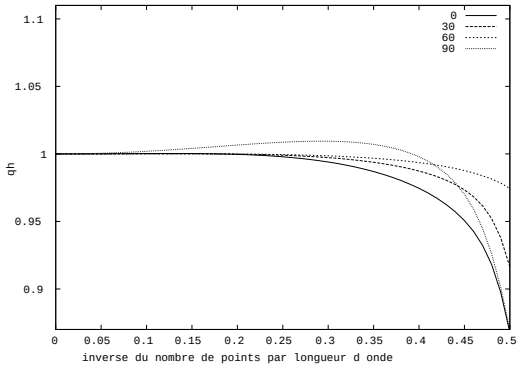


FIG. 3.14: *Dispersion numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ — cas orthotrope-1 ϕ varie dans $[0, 30, 60, 90]$ en degré.*

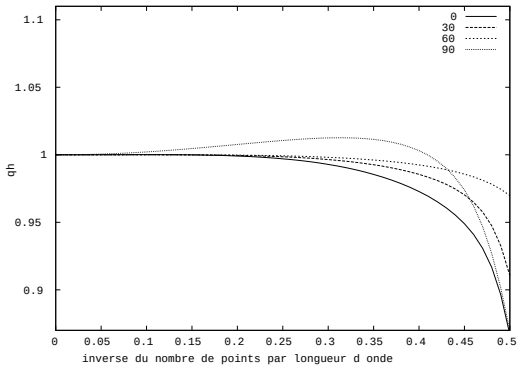


FIG. 3.15: *Dispersion numérique du schéma $P_1 - P_1^4$ — cas orthotrope-2 ϕ varie dans $[0, 30, 60, 90]$ en degré.*

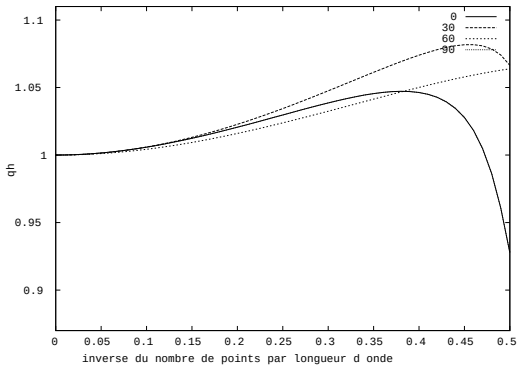


FIG. 3.16: *Dispersion numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ — cas isotrope ϕ varie dans $[0, 30, 60, 90]$ en degré.*

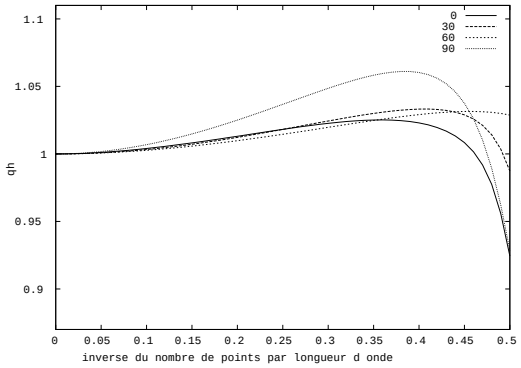


FIG. 3.17: *Dispersion numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ — cas orthotrope-1 ϕ varie dans $[0, 30, 60, 90]$ en degré.*

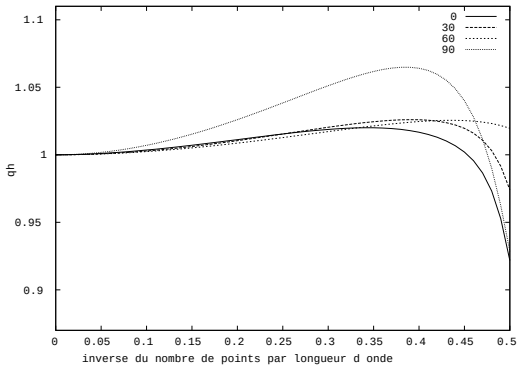


FIG. 3.18: *Dispersion numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ — cas orthotrope-2 ϕ varie dans $[0, 30, 60, 90]$ en degré.*

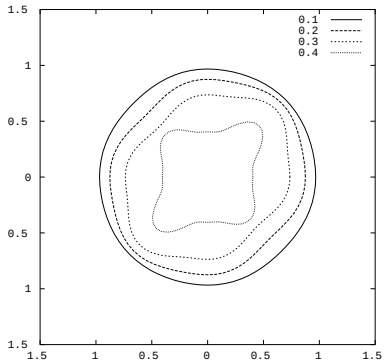


FIG. 3.19: *Anisotropie numérique du schéma $P_1 - P_1^4$ — cas isotrope*
K varie dans $[0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$ en degré.

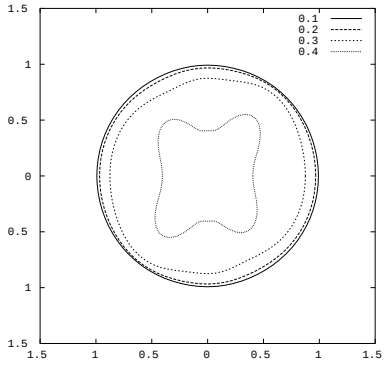


FIG. 3.20: *Anisotropie numérique du schéma $P_1 - P_1^4$ — cas orthotrope-1*
K varie dans $[0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$ en degré.

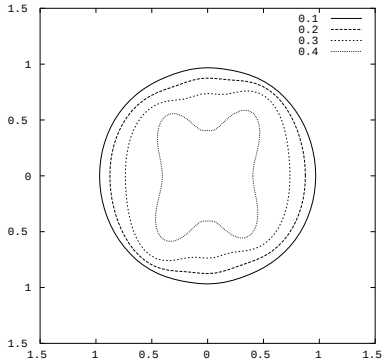


FIG. 3.21: *Anisotropie numérique du schéma $P_1 - P_1^4$ — cas orthotrope-2*
K varie dans $[0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$ en degré.

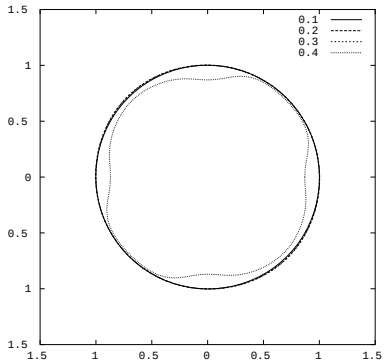


FIG. 3.22: *Anisotropie numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ — cas isotrope K varie dans $[0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$ en degré.*

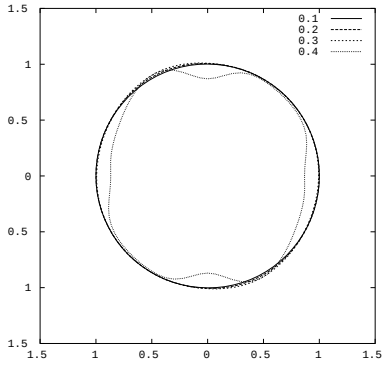


FIG. 3.23: *Anisotropie numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ — cas orthotrope-1 K varie dans $[0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$ en degré.*

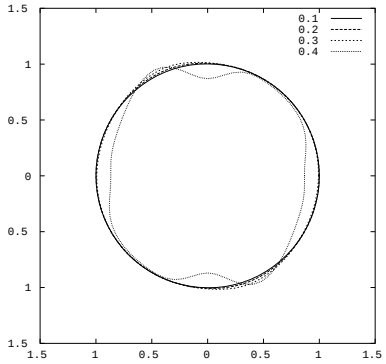


FIG. 3.24: *Anisotropie numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ — cas orthotrope-2 K varie dans $[0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$ en degré.*

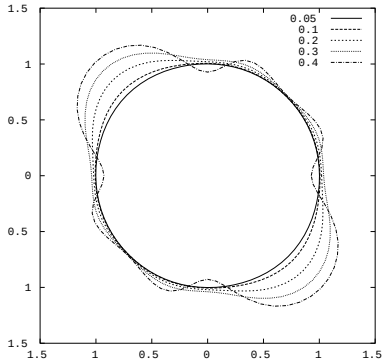


FIG. 3.25: *Anisotropie numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ — cas isotrope*
K varie dans $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.

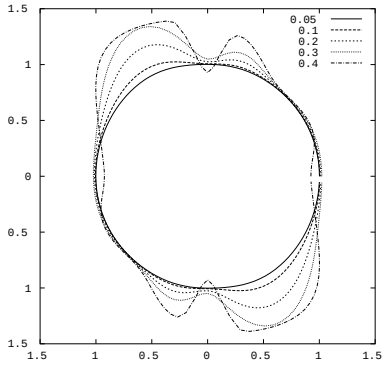


FIG. 3.26: *Anisotropie numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ — cas orthotrope-1*
K varie dans $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.

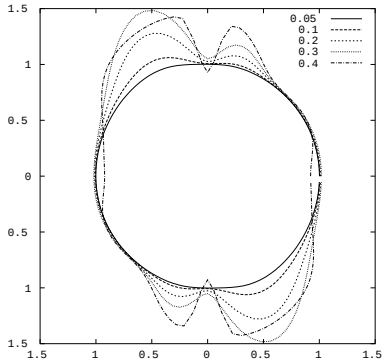


FIG. 3.27: *Anisotropie numérique du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ — cas orthotrope-2*
K varie dans $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.

Chapitre 4

Discrétisation temporelle de l'équation de plaque

On aborde dans ce chapitre l'épineuse question de la discrétisation temporelle du problème semi-discrétisé en espace élaboré au chapitre 2. On utilise usuellement une méthode de différences finies en temps. Mais on verra que ce choix impose de prendre un pas de temps très petit que ce soit dû à la précision dans le cas d'un schéma implicite ou à la stabilité dans le cas d'un schéma explicite. D'une part, cela conduit à des temps de calcul cruellement longs et d'autre part cela compromet définitivement la résolution du problème de couplage avec l'air.

On résout donc *exactement* en temps le problème semi-discrétisé en espace par une méthode analytique. Ce choix présente l'avantage essentiel de pouvoir utiliser n'importe quel pas de temps d'échantillonage pour le calcul effectif de la solution sans aucune perte de précision sur le schéma semi-discret en espace. Cette technique est coûteuse car elle nécessite de diagonaliser la matrice de raideur approchant l'opérateur de plaque, mais ce surcoût est compensé par la possibilité d'appliquer une méthode de type spectrale, qui permet de ne calculer que les premières composantes modales de la solution et qu'on appellera *méthode pseudo spectrale*. En outre, elle permet de proposer un schéma efficace de résolution du modèle de guitare, inabordable dans le cas d'une résolution par différences finies.

On commence par présenter en détail les trois choix de résolution du problème semi-discret proposés : schéma explicite ou implicite (section 4.2) et méthode pseudo-spectrale (section 4.3). Puis nous effectuons une comparaison détaillée des avantages et inconvénients de chacune d'entre elles en la resituant en outre dans le cadre général de résolution de notre modèle de guitare (section 4.4).

4.1 Forme général du problème semi-discret

Commençons par réécrire les deux schémas semi-discrétisés en espace $\mathcal{P}_h^1$ et $\mathcal{P}_h^{\text{div}}$ sous une même forme générale d'équation de propagation. On supposera dans tout ce qui suit que la plaque est initialement au repos.

4.1.1 Cas où le moment fléchissant est choisi dans $(H^1(\omega))^4$:

Rappelons que le schéma semi discret en espace s'écrit alors, sous sa forme matricielle (*cf.* section 2.1) :

$$\mathcal{P}_h^1 \ : \ \left\{ \begin{array}{l} M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt} - H_h^\top \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h = f_h \\ M_h^1 \dfrac{d\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h}{dt} + H_h v_p = 0, \\ v_{p_h}(0) = 0, \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h(0) = 0. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Grâce à la technique de condensation de masse mise en œuvre au chapitre 2, la matrice M_h^1 est diagonale par bloc 4x4. Il est donc possible d'éliminer à moindre coût le moment fléchissant de ce système. On dérive la première équation par rapport au temps, puis on reporte la seconde dans le résultat obtenu. On obtient le problème du second ordre en temps suivant, équivalent à $\mathcal{P}_h^1$ puisqu'on a supposé les conditions initiales nulles :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h^p \dfrac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + K_h^1 v_{p_h} = f_h' \\ v_{p_h}(0) = 0 \text{ et } \partial_t v_{p_h}(0) = 0. \end{array} \right. \tag{4.2}$$

où on a posé $f_h' = \dfrac{df_h}{dt}$ et :

$$K_h^1 = H_h^\top (M_h^1)^{-1} H_h \tag{4.3}$$

4.1.2 Cas où le moment fléchissant est choisi dans $H(\underline{\mathrm{Div}}, \omega)$:

Rappelons que le schéma semi-discret en espace s'écrit cette fois ci (*cf.* section 2.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt} - H_h^\top \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h + B_h^\top \phi_h = f_h \\ M_h^{\mathrm{div}} \dfrac{d\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h}{dt} + H_h v_p - C_h^\top \psi_h = 0, \\ M_h^\phi \phi_h = C_h \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h, \\ M_h^\psi \psi_h = B_h v_{p_h}, \\ v_{p_h}(0) = 0, \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h(0) = 0. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

De même que ci dessus, grâce à la technique de condensation de masse, la matrice M_h^{div} est diagonale par bloc 6x6 ou 4x4, et les matrices M_h^ϕ et M_h^ψ sont diagonales. On peut ici encore se ramener à un schéma d'ordre 2 en temps portant sur v_{p_h}, équivalent à $\mathcal{P}_h^{\mathrm{div}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h^p \dfrac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + K_h^{\mathrm{div}} v_{p_h} = f_h' \\ v_{p_h}(0) = 0 \text{ et } \partial_t v_{p_h}(0) = 0. \end{array} \right. \tag{4.5}$$

où on a posé $f_h' = \dfrac{df_h}{dt}$ et :

$$\begin{aligned} K_h^{\text{div}} &= (H_h^\top - B_h^\top (M_h^\psi)^{-1} C_h)(M_h^{\text{div}})^{-1}(H_h - C_h^\top (M_h^\phi)^{-1} B_h) \\ &= \tilde{H}^\top (M_h^{\text{div}})^{-1} \tilde{H} \quad \text{avec} \quad \tilde{H} = H_h - C_h^\top (M_h^\phi)^{-1} B_h \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ainsi, dans un cas comme dans l'autre, il nous faut résoudre un problème de la forme générale suivante :

$$\boxed{\begin{cases} M_h^p \dfrac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + K_h v_{p_h} = f_h, \\ v_{p_h}(0) = 0 \text{ et } \partial_t v_{p_h}(0) = 0. \end{cases}} \tag{4.7}$$

où M_h^p **est une matrice diagonale définie positive et** K_h **est une matrice symétrique définie positive.**

4.2 Résolution par différences finies en temps

Il nous faut donc proposer une discrétisation temporelle du schéma semi-discret d'équation de propagation (4.7).

Pour la résolution de cette équation, on utilise usuellement une méthode de différences finies en temps. On note Δt le pas de discrétisation temporelle, de sorte qu'on approchera la solution aux instants $n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$.

4.2.1 Présentation des schémas non amortis

On étudiera dans ce chapitre deux sortes de schémas aux différences finies en temps :

- Un schéma explicite d'ordre 2 centré :

$$S_E \ : \ \begin{cases} M_h^p \dfrac{v_{p_h}^{n+1} - 2v_{p_h}^n + v_{p_h}^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h v_{p_h}^n = f_h^n, \end{cases} \tag{4.8}$$

- Un schéma implicite, également d'ordre 2, centré :

$$S_I \ : \ \begin{cases} M_h^p \dfrac{v_{p_h}^{n+1} - 2v_{p_h}^n + v_{p_h}^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h \dfrac{2v_{p_h}^{n+1} + 4v_{p_h}^n + 4v_{p_h}^{n-1}}{4} = f_h^n, \end{cases} \tag{4.9}$$

Notation 4.1 *Dans tout ce qui suit, pour toute matrice symétrique définie positive M, on note, $(.,.)_M$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ défini par :*

$$(U, V)_M = (U, MV), \quad \forall U, V \in \mathbb{R}^n \tag{4.10}$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On note $\|.\|_M$ la norme associée.

Remarque 4.1 *On vérifie aisément que le schéma S_E appliqué à la discrétisation du problème $\mathcal{P}_h^1$ est équivalent au schéma explicite d'ordre 1 en temps donné par :*

$$\begin{cases} M_h^p \dfrac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^n}{\Delta t} - H_h^\top \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^{n+\frac{1}{2}} = f_h^{n+\frac{1}{2}}, \\ M_h^1 \dfrac{\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - H_h v_{p_h}^n = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

De même, le schéma S_I appliqué à la discrétisation du problème $\mathcal{P}_h^1$ est équivalent au schéma implicite d'ordre 1 en temps donné par :

$$\begin{cases} M_h^p \dfrac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^n}{\Delta t} - H_h^\top \dfrac{\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^{n+1} + \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^n}{2} = f_h^{n+\frac{1}{2}}, \\ M_h^1 \dfrac{\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^{n+1} - \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^n}{\Delta t} - H_h \dfrac{v_{p_h}^{n+1} + v_{p_h}^n}{2} = 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

4.2.2 Résultats généraux sur la stabilité des schémas aux différences finies

4.2.2.a Conservation de l'énergie discrète

Pour chacun de ces deux schémas, on peut montrer un résultat de conservation de l'énergie discrète, équivalent discret de la propriété (1.6) :

Propriété 4.1 (Conservation de l'énergie discrète du schéma explicite S_E) *On définit l'énergie discrète du schéma explicite (4.8) par :*

$$E_E^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \| \frac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^n}{\Delta t} \|_{M_h^p}^2 + \frac{1}{2} \left(v_{p_h}^{n+1}, v_{p_h}^n \right)_{K_h}. \tag{4.13}$$

Alors l'énergie E_E vérifie la propriété de conservation suivante :

$$\frac{E_E^{n+\frac{1}{2}} - E_E^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left(f_h^n, \frac{vph^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \tag{4.14}$$

Propriété 4.2 (Conservation de l'énergie discrète du schéma explicite S_I) *On définit l'énergie discrète du schéma (4.9) par :*

$$E_I^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|\frac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^n}{\Delta t}\|_{M_h^p}^2 + \frac{1}{2}\|\frac{v_{p_h}^{n+1} + v_{p_h}^n}{2}\|_{K_h}^2 \tag{4.15}$$

Alors l'énergie E_I vérifie la propriété de conservation suivante :

$$\frac{E_I^{n+\frac{1}{2}} - E_I^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left(f_h^n, \frac{vph^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t}\right) \tag{4.16}$$

▷ PREUVE : Ces résultats sont extrêmement classiques. Il suffit de multiplier les équations S_E et S_I par :

$$\frac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t}$$

pour obtenir le résultat. ◁

Remarque 4.2 *On vérifie aisément que la norme associé au produit scalaire $(,)_{M_h^p}$ est équivalente à la norme L^2 induite par l'espace $\mathcal{V}_0$ sur son sous espace $\mathcal{V}_{h,0}$, indépendamment du paramètre de discrétisation. C'est à dire qu'il existe deux constantes strictement positives α et β, indépendantes du pas du maillage h, telles que :*

$$\alpha \int_\omega v_{p_h}^2 \leq \|v_{p_h}\|_{M_h^p}^2 \leq \beta \int_\omega v_{p_h}^2, \quad \forall v_{p_h} \in \mathcal{V}_{h,0}, \tag{4.17}$$

Cette remarque est fondamentale pour assurer la stabilité des schémas (4.8) et (4.9) en norme L^2.

4.2.2.b Stabilité des schémas S_E et S_I

Ce résultat de conservation de l'énergie discrète permet d'analyser simplement la stabilité des schéma S_E et S_I.

On observe que l'énergie E^I associée au schéma S_I est en fait une forme quadratique positive portant sur les quantités :

$$\frac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^n}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{v_{p_h}^{n+1} + v_{p_h}^n}{2}$$

Les propriétés de conservation de cette énergie assurent alors que ces quantités restent bornées au cours du temps. On en déduit le :

Lemme 4.1 *Le schéma implicite S_I est inconditionnellement stable.*

En revanche, le schéma explicite est soumis à une condition de stabilité. On remarque cette fois ci que l'énergie associée aux schémas S_E n'est plus une norme, à cause du terme (non nécessairement positif) :

$$\left(v_{p_h}^{n+1}, v_{p_h}^{n}\right)_{K_h}.$$

En fait, si Δt est suffisamment petit, les inconnues $v_{p_h}^{n+1}$ et $v_{p_h}^{n}$ tendent à se confondre, et on peut contrôler cette quantité, ce qui assure la stabilité du schéma. On a le résultat très classique suivant (voir par exemple [3]) :

Lemme 4.2 (Condition de stabilité du schéma S_E) *Le schéma S_E est stable sous la condition :*

$$\frac{\Delta t^2 \|(M_h^p)^{-1} K_h\|_{M_h^p}}{4} \leq 1, \tag{4.18}$$

4.2.2.c Calcul de la condition stabilité en maillage régulier

Pour quantifier la condition de stabilité donnée dans le lemme (4.2), on effectue une analyse par une méthode de Fourier dans le cas d'un milieu homogène infini, reposant sur le même type d'argument que ceux développés pour l'analyse de dispersion numérique des schémas semi-discrets (chapitre 3).

Nous avons vu que, dans ce cas, la structure périodique du problème permet de réécrire le problème semi-discret sous la forme suivante, qu'il s'agisse de $\mathcal{P}_h^1$ ou $\mathcal{P}_h^{\text{div}}$ (voir section 3.2.1 pour la construction en question et les notations) :

$$\begin{cases} \tilde{M}_h^v \dfrac{dV_h}{dt} - \tilde{H}_h^\top \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h = 0, \\ \tilde{M}_h^M \dfrac{d\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h}{dt} + \tilde{H}_h V_h = 0, \end{cases} \tag{4.19}$$

où les inconnues V_h et $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h$ sont des vecteurs blocs, et $\tilde{M}_h^v$, $\tilde{M}_h^M$ et $\tilde{H}_h$ sont des matrices blocs.

De même que ci dessus, on peut réécrire ce schéma sous la forme suivante :

$$\tilde{M}_h^v \frac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + \tilde{K}_h v_{p_h} = f_h, \tag{4.20}$$

avec

$$\tilde{K}_h = \tilde{H}_h^\top (\tilde{M}_h^M)^{-1} \tilde{H}_h.$$

On peut alors choisir de discrétiser ce schéma en temps à l'aide du schéma schémas explicite :

$$S_E \ : \ \left\{ M_h^p \frac{v_{p_h}^{n+1} - 2v_{p_h}^n + v_{p_h}^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h v_{p_h}^n = f_h^n, \right. \tag{4.21}$$

L'analyse de stabilité du schéma S_E nous conduit donc à calculer, d'après le lemme (4.2) :

$$\|\tilde{K}_h\|_{\tilde{M}_h^v}.$$

Tirant parti de la structure particulière induite par le maillage régulier, il est plus simple de calculer cette norme à l'aide de la transformée de Fourier discrète. Injectons dans le schéma (4.21) un mode de Fourier de la forme :

$$[V_h]_{p,q}^n = V_h^n \exp(-ik_1 ph - ik_2 qh), \quad p,q \in \mathbb{Z}. \tag{4.22}$$

On obtient alors :

$$\tilde{M}^v \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p}\frac{1}{h^4}\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})V_h^n = 0, \tag{4.23}$$

où $\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})$ est la matrice définie en (3.35). c_{11}, δ et ρ_p sont les paramètres physiques de la plaque, et h est la pas du maillage.

On en déduit, d'après le lemme 4.2 que le schéma explicite est stable si :

$$\frac{1}{4}\frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p}\frac{\Delta t^4}{h^4}\|(\tilde{M}^v)^{-1}\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})\|_{\tilde{M}^v} \leq 1, \quad \forall \underline{k} \in \mathbb{R}^2, \tag{4.24}$$

et finalement **la condition de stabilité du schéma explicite est donnée par** :

$$\boxed{\delta\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_p}}\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{2}{\sqrt{\sup\limits_{\underline{k}\in\mathbb{R}^2}\|(\tilde{M}^v)^{-1}\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})\|_{\tilde{M}^v}}}} \tag{4.25}$$

Remarque 4.3 *Ce résultat est tout simplement le reflet de la conservation de la norme L^2 par la transformée de Fourier discrète.*

Puisque la matrice $\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})$ est hermitienne positive pour le produit scalaire $(,)_{\tilde{M}^v}$, on vérifie que :

$$\|\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})\|_{\tilde{M}_h^v} = \max_{\lambda_h^i(\underline{k})\in Sp(\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k}))} \left|\lambda_h^i(\underline{k})\right| = \rho(\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})), \quad \forall \underline{k} \in \mathbb{R}^2, \tag{4.26}$$

où $\lambda_h^i(\underline{k})$ sont les valeurs propres de $\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})$, et $\rho(\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k}))$ est son rayon spectrale

Il nous faut alors distinguer les schémas d'ordre 1 et d'ordre 2 pour le calcul de cette condition :

- Dans le cas du schéma $P_1 - P_1^4$, $\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})$ est tout simplement une matrice de taille 1. Calculer sa norme ne pose donc aucune difficulté, mais il nous faut tout de même déterminer le sup par une méthode numérique dans le cas général.

- Dans le cas des schémas d'ordre 2, $\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})$ est une matrice de taille 6. Il n'est pas possible de calculer algébriquement ses valeurs propres. Il faut donc se contenter d'un calcul numérique pour obtenir la condition de stabilité. Celui ci a été mis en œuvre à l'aide du logiciel Maple, sans subtilité particulière, la taille du problème n'étant pas limitante. En fait, on vérifie aisément que $\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})$ ne dépend que des quantités suivantes :

$$A = \cos(|k|\ h\ \cos(\phi)),\ B = \sin((|k|\ h\ \cos(\phi)), \tag{4.27}$$

$$C = \cos(|k|\ h\ \sin(\phi)),\ D = \sin(|k|\ h\ \sin(\phi)), \tag{4.28}$$

où on a écrit $\underline{k}$ sous la forme : $\underline{k} = (|k|\cos(\phi), |k|\sin(\phi))$. Ainsi, on effectue le changement de variable :

$$\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k}) = \hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})_h(A, B, C, D) \tag{4.29}$$

et, compte tenu des expressions de A, B, C, D, il suffit donc d'écrire :

$$\sup_{\underline{k}\in\mathbb{R}^2} \|(\tilde{M}^v)^{-1}\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})\|_{\tilde{M}^v} = \sup_{\theta,\theta'\in[0,2\pi]} \|(\tilde{M}^v)^{-1}\hat{\mathbb{K}}_h(\cos(\theta),\sin(\theta),\cos(\theta'),\sin(\theta'))\|_{\tilde{M}^v} \tag{4.30}$$

On se donne alors un maillage suffisamment fin du carré $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, et on estime le sup ci dessus en prenant la valeur maximale calculée sur ce maillage (en pratique, on se contente d'un maillage de 10 points sur 10 points, ce qui est suffisant, compte tenu de la régularité de la fonction étudiée)

4.2.2.d Conditions de stabilités des schémas $P_1 - P_1^4$, $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$

On écrit la condition de stabilité sous la forme :

$$\boxed{\delta\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_p}}\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{2}{c_s}} \tag{4.31}$$

On présente dans le tableau 4.1 les valeurs de c_s calculées pour les trois approximations spatiales consistantes de notre problème, pour les diverses valeurs du module d'orthotropie $\tilde{\mathbf{C}}$ données en 3.3.

	Isotrope	Orthotrope-1	Orthotrope-2
$P_1 - P_1^4$	8	5, 06	4, 57
$\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$	79, 89	51, 69	47, 12
$\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$	96, 69	64, 05	59, 67

(4.32)

TAB. 4.1: *Condition de stabilité pour les schémas explicites*

On constate que le fait de monter en ordre augmente d'un facteur 10 la valeur de c_s, ce qui revient, si l'on se place sur un maillage équivalent, à diviser par 2.5 le nombre de pas de temps nécessaire pour une même expérience. Outre le fait que la condition de la forme $\Delta t = O(h^2)$ est contraignante, ce facteur n'arrange donc pas les choses.

Pour de si faibles pas de temps, autant faire "du continu".

4.2.3 Analyse de la dispersion numérique des schémas totalement discrétisés

4.2.3.a Dispersion numérique du schéma explicite

On effectue ici une analyse de l'erreur commise sur la vitesse de phase d'une solution onde plane harmonique discrète du schéma explicite dans le cas d'un maillage infini régulier. On fixe le nombre d'ondes $\underline{k}$ et on cherche la pulsation ω_h pour une solution de (4.21) de la forme :

$$[V_h]^n_{p,q} = V_0 \exp(i\omega_h n\Delta t - ik_1 ph - ik_2 qh), \quad p,q \in \mathbb{Z}. \tag{4.33}$$

Injectant (4.33) dans (4.21), on obtient la relation dispersion numérique suivante (les calculs ne présentent aucune difficultés, voir la section 3.2.2) :

$$-\frac{4}{\Delta t^2}\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\omega_h\right) V_0 + \frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p}\frac{1}{h^4}\hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k})V_0 = 0, \tag{4.34}$$

où $\hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k})$ est la matrice définie en (3.35).

Par conséquent, $\dfrac{4}{\Delta t^2}\sin^2\left(\dfrac{\Delta t}{2}\omega_h\right)$ est valeur propre de la matrice

$$\frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p}\frac{1}{h^4}\hat{\mathbb{N}}_h(\underline{k}).$$

Comme dans le cas semi-discret, nous ne considérons que le mode physique. On note $\lambda_h(\underline{k})$ la valeur propre de $\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})$ associé au mode physique. Rappelons qu'en fait :

$$\lambda_h(\underline{k}) = \lambda(K,\phi), \tag{4.35}$$

où $K = \dfrac{|k|\,h}{2\pi}$ est l'inverse du nombre de points du maillage par longueur d'onde.

On introduit en outre le paramètre adimensionné α, défini par :

$$\boxed{\alpha = \delta\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_p}}\frac{\Delta t}{h^2},} \tag{4.36}$$

Alors la relation de dispersion du schéma (4.21) est donnée par :

$$\boxed{q_h^E(K,\phi,\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\pi K)^2}\arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\lambda(K,\phi)}\right).} \tag{4.37}$$

4.2.3.b Dispersion numérique du schéma explicite

On effectue un calcul similaire pour le schéma implicite. Rappelons que celui ci est donné par :

$$S_I \; : \; \left\{ M_h^p \frac{v_{p_h}^{n+1} - 2v_{p_h}^n + v_{p_h}^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h \frac{2v_{p_h}^{n+1} + 4v_{p_h}^n + 4v_{p_h}^{n-1}}{4} = f_h^n, \right. \tag{4.38}$$

Injectant dans ce schéma une solution de type onde plane donnée par (4.33), on obtient la relation de dispersion matricielle suivante :

$$-\frac{4}{\Delta t^2}\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\omega_h\right)\left(I + \delta^2 \frac{c_{11}}{\rho_p}\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})\right)V_0 + \frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p}\frac{1}{h^4}\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})V_0 = 0 \tag{4.39}$$

où $\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})$ est la matrice définie en (3.35). On réécrit cette équation sous la forme suivante, en introduisant le paramètre α défini en (4.36) :

$$-4\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\omega_h\right)V_0 + \alpha^2\left[1 - \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\omega_h\right)\right]\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})V_0, \tag{4.40}$$

ce qui s'écrit finalement :

$$\alpha^2\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})V_0 = 4\tan^2\left(\frac{\Delta t}{2}\omega_h\right)V_0 \tag{4.41}$$

Ainsi, $4\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\omega_h\right)$ est valeur propre de la matrice $\frac{c_{11}\delta^2}{\rho_p}\frac{1}{h^4}\hat{\mathbb{K}}_h(\underline{k})$. Comme dans le cas semi-discret, nous ne considérons que le mode physique. La relation de dispersion du schéma implicite (4.38) est donc :

$$\boxed{q_h^I(K,\phi,\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\pi K)^2}\arctan\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\lambda(K,\phi)}\right)} \tag{4.42}$$

4.2.3.c Développement limité de la dispersion numérique

De la même façon que pour les schémas semi-discrets en espace, on peut déterminer le développement limité de la dispersion numérique des schémas S_E et S_I. Il va de soi que si les schémas semi-discrets en espace sont consistants, il en est de même pour les schémas S_I et S_E. Nous ne nous intéressons donc ici qu'au cas où la matrice de rigidité $\tilde{\mathbf{C}}$ définie en (3.2) est l'identité. On a vu à la section 3.2.4 que les développement limités des schémas semi-discrets en espace $P_1 - P_1^4$, $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ sont de la forme :

$$q_h(K,\phi) = 1 + K^2 a(\phi) + o(K^2), \tag{4.43}$$

où les coefficients $a(\phi)$ sont donnés en (3.56, 3.57, 3.59).

On calcule alors aisément :

$$\boxed{\begin{aligned} q_h^E(K,\phi,\alpha) &= 1 + \frac{a(\phi)}{2}K^2 + O(K^4) \\ q_h^I(K,\phi,\alpha) &= 1 + \frac{a(\phi)}{2}K^2 + O(K^4) \end{aligned}} \tag{4.44}$$

La discrétisation temporelle a donc pour effet d'améliorer la dispersion numérique, au moins asymptotiquement.

Remarque 4.4 *Le fait que les schémas soient d'ordre 2 en espace confirme a posteriori qu'il n'est pas nécessaire de chercher à définir une discrétisation en temps d'ordre plus élevé. En effet, que ce soit pour des considérations de stabilité ou de précision, nous sommes amenés à choisir Δt de l'ordre de h^2. Ainsi, un schéma d'ordre 2 en temps est en $O(h^4)$, et il serait absurde d'augmenter encore cet écart.*

4.2.3.d Courbes de dispersion

La dispersion numérique des schémas S_E et S_I dépend donc de trois paramètres, α, K et ϕ. On trace le même genre de courbes que pour la dispersion du schéma semi-discret, en fixant en outre une valeur de α (admissible dans le cas du schéma explicite).

Notons la condition de stabilité du schéma S_E donnée en (4.25) sous la forme (les valeurs de α_0 est données dans le tableau 4.1) :

$$\alpha \leq \alpha_0, \tag{4.45}$$

Dans les courbes qui suivent, on se contente de regarder la dispersion pour le cas isotrope. Ce sera largement suffisant pour notre analyse.

- On fixe tout d'abord ϕ à 0^o ou 135^o, puis on trace les courbes de dispersion en fonction de K, pour diverses valeurs de α. On choisira $\alpha = C\alpha_0$, en prenant $C \in \{1, 0.1\}$ pour l'explicite et $C \in \{1, 10, 25, 50, 100\}$ pour l'implicite. Il faut prendre garde au fait les courbes de dispersion présentées ici n'ont pas la même signification que celles présentées dans la section 3.3, malgré une apparence similaire.

- On fixe ensuite une valeur du nombre de points par longueur $K = 0.1$ et on trace des courbes d'anisotropie du schéma S_I pour les diverses valeurs de α.

- On trace également les courbes d'anisotropie en prenant $K \in \{0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5\}$, en fixant $\alpha = \alpha_0$ pour S_E et $\alpha = 10\alpha_0$ ou $\alpha = 25\alpha_0$ pour S_I.

- Enfin, pour comparer la précision des divers choix de discrétisation temporelle, on trace sur une même courbe la dispersion des schémas semi-discrets, S_E (avec $\alpha = \alpha_0$) et S_I (avec $\alpha = 25\alpha_0$) en fonction de K, pour $\phi = 0$.

On peut faire les commentaires suivants :

- La dispersion du schéma d'ordre 1 en espace $P_1 - P_1^4$ est désespérément trop faible. Il est inenvisageable de choisir cette approximation. D'ailleurs, comment se fait-il qu'on en parle encore ?
- La dispersion numérique des schémas aux différences finies en temps est quasiment la même que celle du schéma semi-discrétisé en espace, quand on choisit $\alpha = \alpha_0$. Le tracé des courbes ne fait que confirmer ce que nous prédisait l'expression des développements limités.
- Sans surprise, plus α est grand, plus le schéma implicite est dispersif. Néanmoins, le fait de monter en ordre autorise une plus large gamme de valeurs de α sans trop nuire à la précision du schéma. Nous verrons plus loin, à la section 4.4, une estimation plus quantitative de cette remarque.
- Si elle n'améliore pas la dispersion numérique, il semble que la discrétisation implicite en temps améliore sensiblement l'anisotropie, quel que soit le schéma d'approximation en espace, dans la mesure ou la l'erreur ne dépend plus de l'angle de propagation. Mais si ce schéma est d'autant moins anisotrope que α est grand, la dispersion, elle, est très importante (les cercles sont très éloignés du cercle unité).

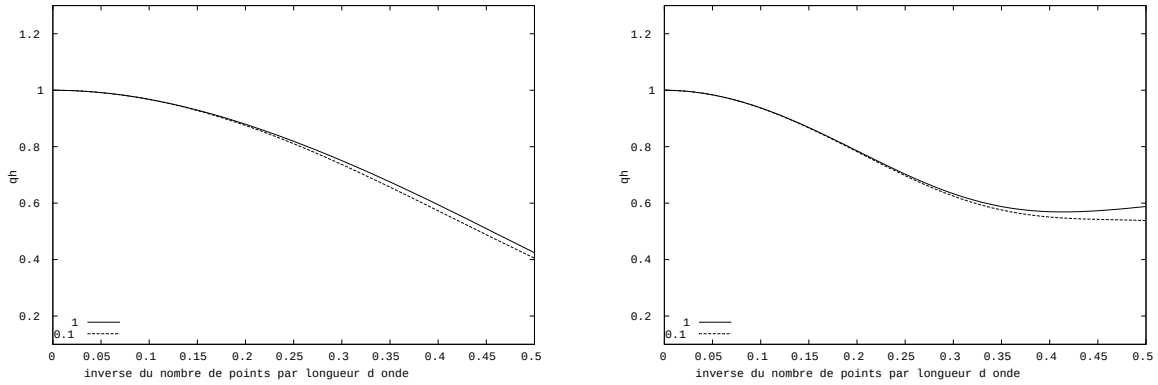


FIG. 4.1: *Dispersion numérique pour l'approximation $P_1 - P_1^4$ — cas isotrope schéma explicite, — ϕ est fixé à 0^o à gauche et à 135^o à droite, $\alpha = C\alpha_0$, et C varie dans $\{1, 0.1\}$*

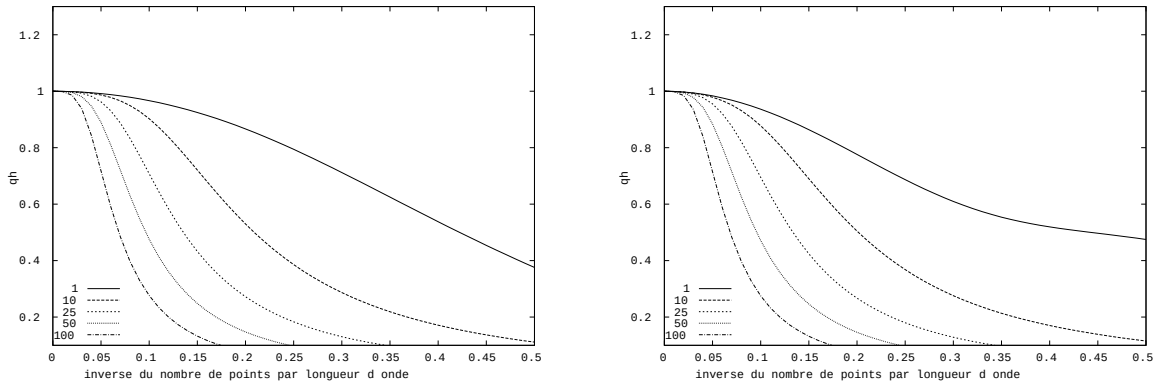


FIG. 4.2: *Dispersion numérique pour l'approximation $P_1 - P_1^4$ — cas isotrope schéma implicite, — ϕ est fixé à 0^o à gauche et à 135^o à droite, $\alpha = C\alpha_0$, et C varie dans $\{1, 10, 25, 50, 100\}$*

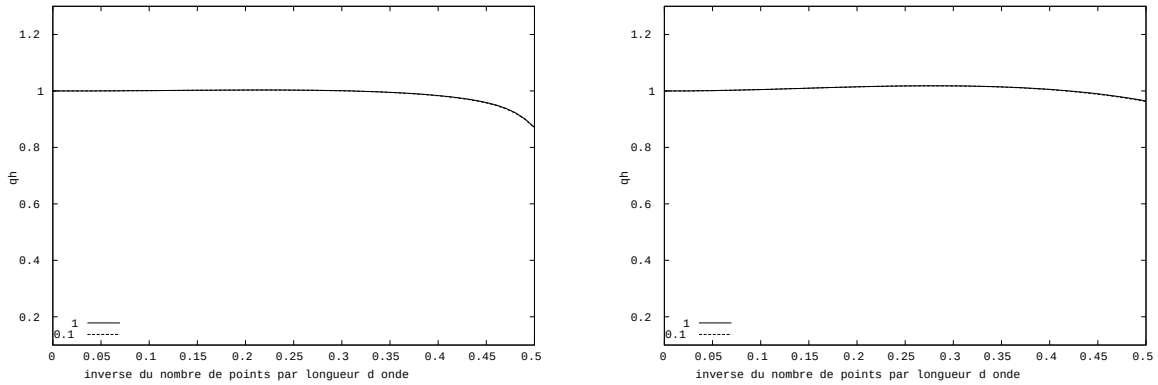


FIG. 4.3: *Dispersion numérique pour l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ — cas isotrope schéma explicite, — ϕ est fixé à 0^o à gauche et à 135^o à droite, $\alpha = C\alpha_0$, et C varie dans $\{1, 0.1\}$*

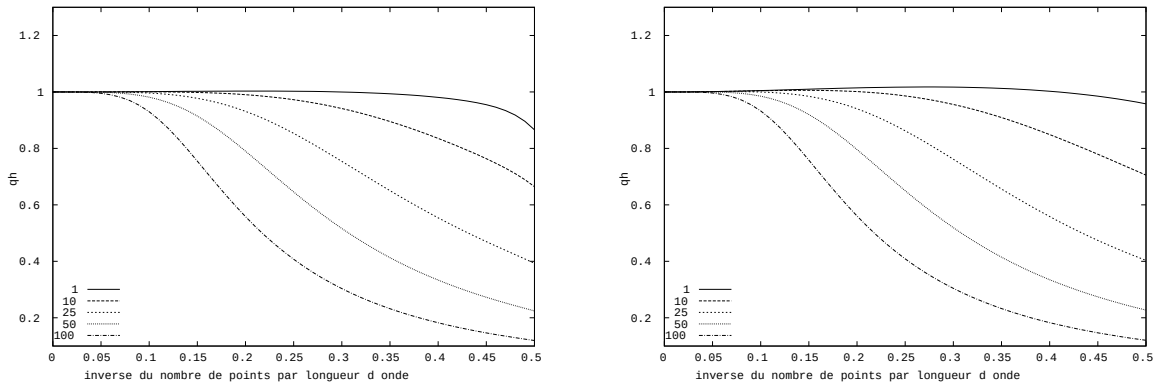


FIG. 4.4: *Dispersion numérique pour l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ — cas isotrope schéma implicite, — ϕ est fixé à 0^o à gauche et à 135^o à droite, $\alpha = C\alpha_0$, et C varie dans $\{1, 10, 25, 50, 100\}$*

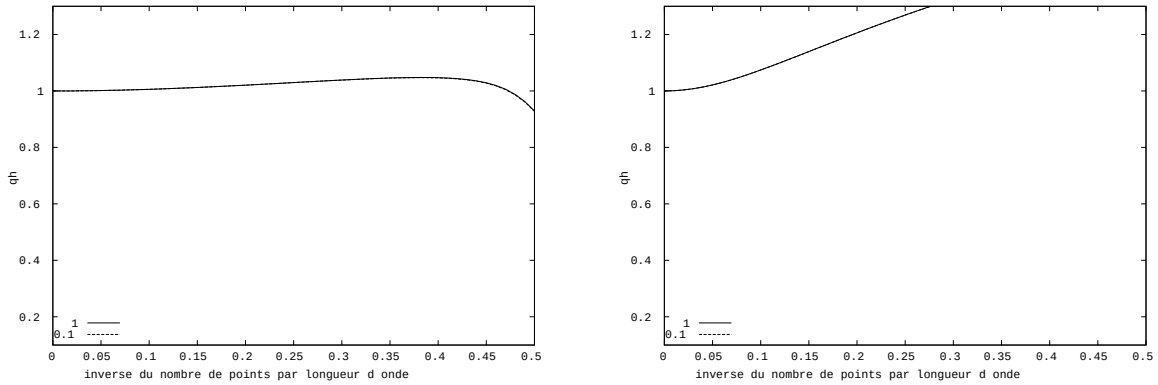


FIG. 4.5: *Dispersion numérique pour l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ — cas isotrope schéma explicite, — ϕ est fixé à 0^o à gauche et à 135^o à droite, $\alpha = C\alpha_0$, et C varie dans $\{1, 0.1\}$*

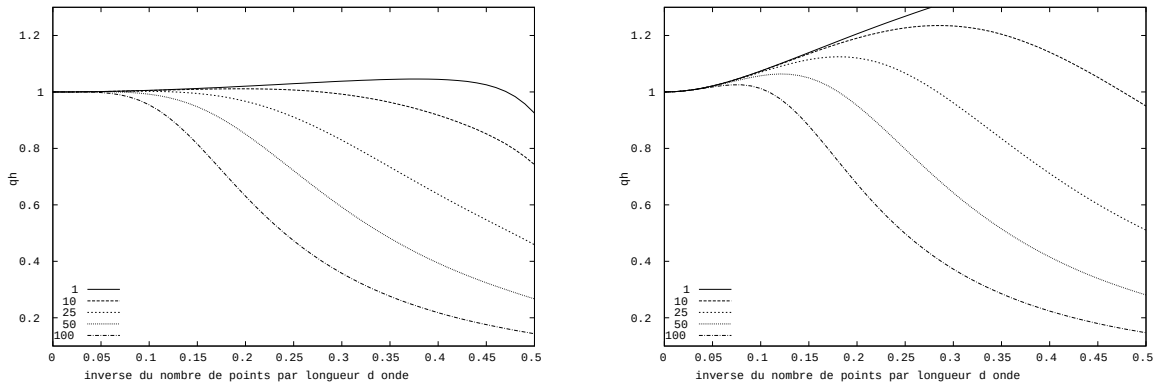


FIG. 4.6: *Dispersion numérique pour l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ — cas isotrope schéma implicite, — ϕ est fixé à 0^o à gauche et à 135^o à droite, $\alpha = C\alpha_0$, et C varie dans $\{1, 10, 25, 50, 100\}$*

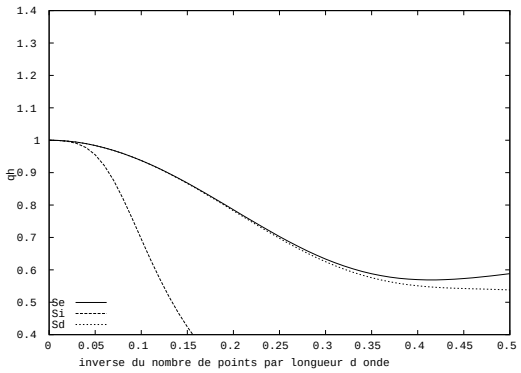


FIG. 4.7: *Comparaison de la dispersion numérique entre le schéma semi-discret $P_1 - P_1^4$, le schéma explicite ($\alpha = \alpha_0$) et le schéma implicite ($\alpha = 25\alpha_0$). ϕ est fixé à 135^o.*

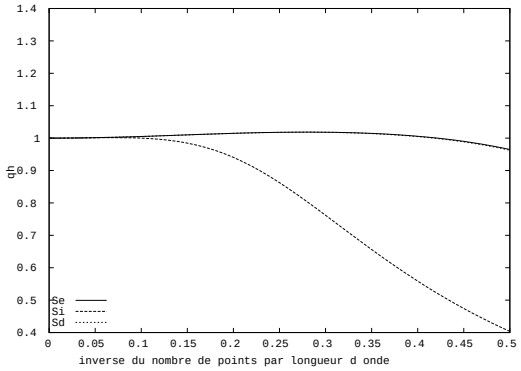


FIG. 4.8: *Comparaison de la dispersion numérique entre le schéma semi-discret $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$, le schéma explicite ($\alpha = \alpha_0$) et le schéma implicite ($\alpha = 25\alpha_0$). ϕ est fixé à 135^o.*

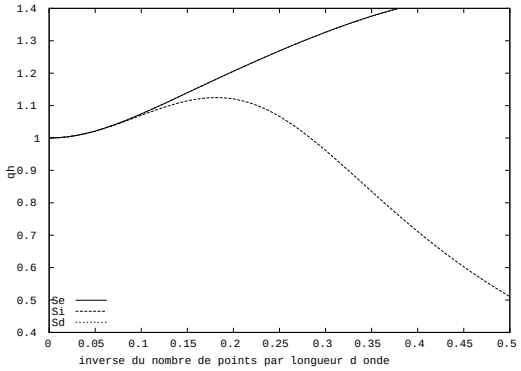


FIG. 4.9: *Comparaison de la dispersion numérique entre le schéma semi-discret $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$, le schéma explicite ($\alpha = \alpha_0$) et le schéma implicite ($\alpha = 25\alpha_0$). ϕ est fixé à 135^o.*

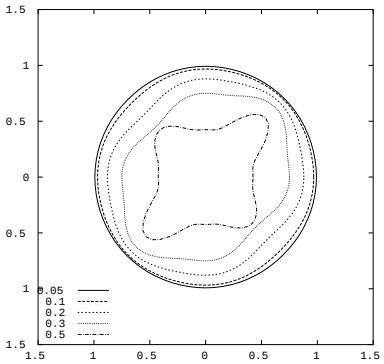


FIG. 4.10: *Anisotropie numérique pour l'approximation $P_1 - P_1^4$ — cas isotrope schéma explicite, $\alpha = \alpha_0$. K varie dans $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.*

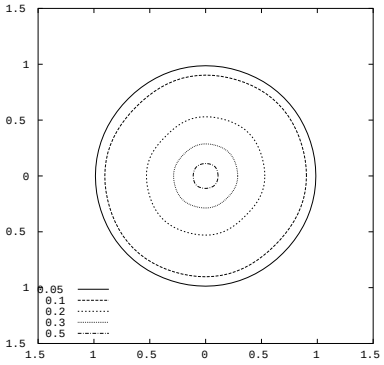


FIG. 4.11: *Anisotropie numérique pour l'approximation $P_1 - P_1^4$ — cas isotrope schéma implicite, $\alpha = 10\alpha_0$. K varie dans $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.*

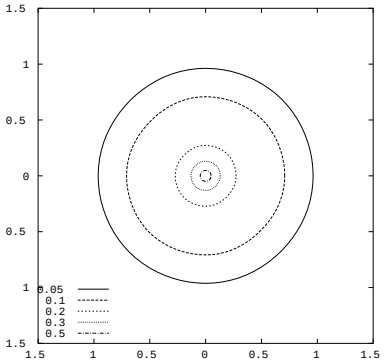


FIG. 4.12: *Anisotropie numérique pour l'approximation $P_1 - P_1^4$ — cas isotrope schéma implicite, $\alpha = 25\alpha_0$. K varie dans $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.*

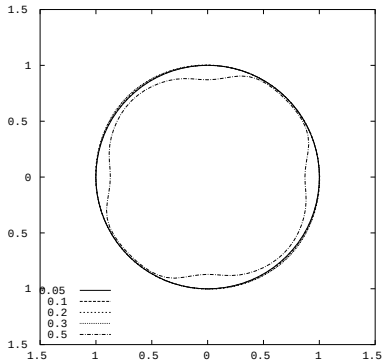


FIG. 4.13: *Anisotropie numérique pour l'approximation* $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ *— cas isotrope schéma explicite,* $\alpha = \alpha_0$. K *varie dans* $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.

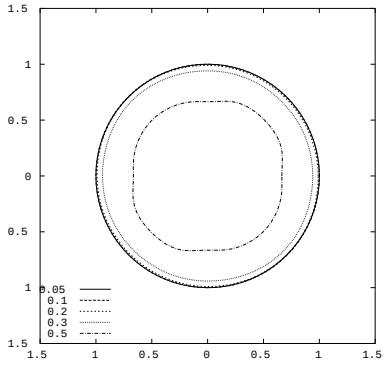


FIG. 4.14: *Anisotropie numérique pour l'approximation* $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ *— cas isotrope schéma implicite,* $\alpha = 10\alpha_0$. K *varie dans* $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.

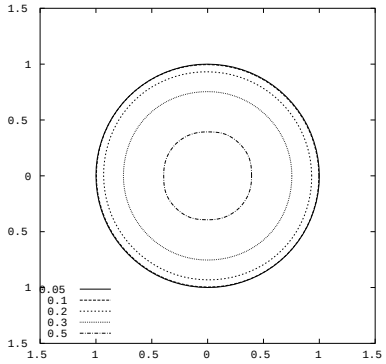


FIG. 4.15: *Anisotropie numérique pour l'approximation* $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ *— cas isotrope schéma implicite,* $\alpha = 25\alpha_0$. K *varie dans* $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.

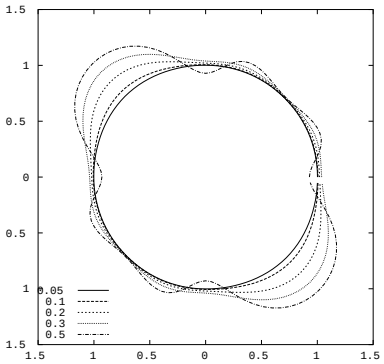


FIG. 4.16: *Anisotropie numérique pour l'approximation* $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ *— cas isotrope schéma explicite,* $\alpha = \alpha_0$. K *varie dans* $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.

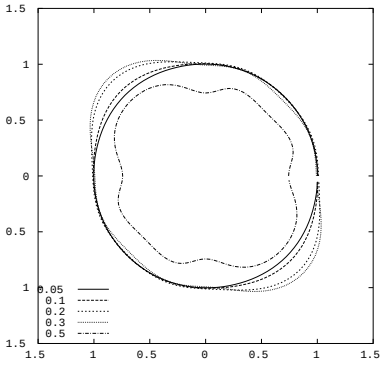


FIG. 4.17: *Anisotropie numérique pour l'approximation* $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ *— cas isotrope schéma implicite,* $\alpha = 10\alpha_0$. K *varie dans* $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.

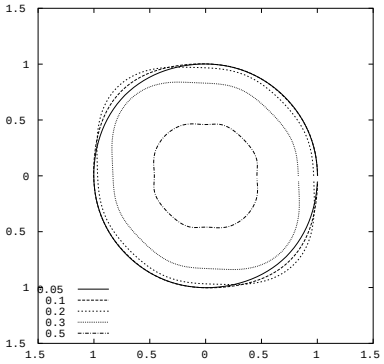


FIG. 4.18: *Anisotropie numérique pour l'approximation* $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ *— cas isotrope schéma implicite,* $\alpha = 25\alpha_0$. K *varie dans* $[0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$.

4.2.4 Introduction de l'amortissement

On présente dans cette section comment les schémas explicites et implicites présentés précédemment sont modifiés par l'introduction de l'amortissement.

4.2.4.a Forme générale du problème semi-discret amorti

Commençons par réécrire les schémas semi-discrétisés en espace sous la forme de systèmes d'ordre 2 en temps en éliminant le moment fléchissant, comme nous l'avons fait à la section 4.1 dans le cas non amorti.

Dans les deux cas, on peut se ramener à une équation équivalente d'ordre 2 en temps donnée par :

$$\boxed{\begin{cases} M_h^p \dfrac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + \left(I + \eta \dfrac{d}{dt}\right) K_h v_{p_h} + R_p M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt} = f_h' \\ v_{p_h}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t v_{p_h}(0) = 0. \end{cases}} \tag{4.46}$$

où I est l'identité et :

- K_h est la matrice K_h^1 définie en (4.3), dans le cas où le moment fléchissant est choisi dans $(H^1(\omega))^4$,
- K_h est matrice K_h^{div} définie en (4.6), dans le cas où le moment fléchissant est choisi dans $(H^1(\omega))^4$,

4.2.4.b Schémas aux différences finies du problème amorti

On effectue cette fois encore une discrétisation en temps de pas Δt, centrée d'ordre 2. Le schéma explicite est alors modifié de la façon suivante :

$$\boxed{\tilde{S}_E \ : \ \left\{ M_h^p \frac{v_{p_h}^{n+1} - 2v_{p_h}^n + v_{p_h}^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h v_{p_h}^n + \left(R_p M_h^p + \eta K_h\right) \frac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h. \right.} \tag{4.47}$$

Tandis que le schéma implicite devient :

$$\boxed{\tilde{S}_I \ : \ \left\{ M_h^p \frac{v_{p_h}^{n+1} - 2v_{p_h}^n + v_{p_h}^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h \frac{v_{p_h}^{n+1} + 2v_{p_h}^n + v_{p_h}^{n-1}}{4} + \left(R_p M_h^p + \eta K_h\right) \frac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h. \right.} \tag{4.48}$$

On montre ici encore sans difficulté les propriété des conservation de l'énergie discrète suivantes, en multipliant chacune de ces deux équation par : $\dfrac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t}$

Propriété 4.3 (Conservation de l'énergie discrète du schéma $\tilde{S}_E$) *On définit l'énergie discrète du schéma explicite (4.8) par :*

$$\tilde{E}_E^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|\frac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^n}{\Delta t}\|_{M_h^p}^2 + \frac{1}{2}\left(v_{p_h}^{n+1}, v_{p_h}^n\right)_{K_h}. \tag{4.49}$$

Alors l'énergie $\tilde{E}_E$ vérifie la propriété de conservation suivante :

$$\frac{\tilde{E}_E^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{E}_E^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left(f_h^n, \frac{vph^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t}\right) - \eta\|\frac{vph^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t}\|_{K_h}^2 - R_p\|\frac{vph^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t}\|_{M_h^p}^2 \tag{4.50}$$

Propriété 4.4 (Conservation de l'énergie discrète du schéma $\tilde{S}_I$) *On définit l'énergie discrète du schéma explicite (4.8) par :*

$$\tilde{E}_I^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|\frac{v_{p_h}^{n+1} - v_{p_h}^n}{\Delta t}\|_{M_h^p}^2 + \frac{1}{2}\left(v_{p_h}^{n+1}, v_{p_h}^n\right)_{K_h}. \tag{4.51}$$

Alors l'énergie $\tilde{E}_I$ vérifie la propriété de conservation suivante :

$$\frac{\tilde{E}_I^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{E}_I^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left(f_h^n, \frac{vph^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t}\right) - \eta\|\frac{vph^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t}\|_{K_h}^2 - R_p\|\frac{vph^{n+1} - v_{p_h}^{n-1}}{2\Delta t}\|_{M_h^p}^2 \tag{4.52}$$

Enfin, on peut encore montrer, à l'aide de la conservation de l'énergie discrète les deux résultats de stabilité suivants :

Lemme 4.3 *Le schéma implicite $\tilde{S}_I$ est inconditionnellement stable.*

Lemme 4.4 (Condition de stabilité du schéma $\tilde{S}_E$) *Le schéma $\tilde{S}_E$ est stable sous la même condition que le schéma S_E, soit si :*

$$\frac{\Delta t^2 \|(M_h^p)^{-1} K_h\|_{M_h^p}}{4} \leq 1, \tag{4.53}$$

Finalement :

- Le schéma $\tilde{S}_I$ne présente pas de coût supplémentaire par rapport au rapport au problème non amorti. Il est inconditionnellement stable et il nécessite également l'inversion d'une matrice à chaque pas de temps, qui est une perturbation de la matrice qu'il

faut inverser pour la résolution du schéma S_I.

- Grâce à la condensation de masse, l'introduction de du terme d'amortissement fluide, ne perturbe pas le caractère explicite du schéma S_E. Il faut à présent inverser la matrice

$$M_h^p \left(I + \frac{R_p \Delta t}{2} \right),$$

qui est diagonale ou diagonale par bloc.

En revanche, l'introduction de l'amortissement de type viscoélastique exige l'inversion de la matrice

$$M_h^p + \frac{\eta \Delta t}{2} K_h.$$

Le schéma $\tilde{S}_E$ est donc *implicite* dès que η est non nul. En fait, il n'est pas possible d'écrire un schéma explicite centré pour le problème amorti (4.46). Cet aspect est un inconvénient majeur du schéma $\tilde{S}_E$, puisqu'il est soumis à une condition de stabilité tout en exigeant l'inversion d'une matrice.

Néanmoins, compte tenu du fait que le paramètre viscoélastique η est très faible, on peut considérer le schéma $\tilde{S}_E$ comme une perturbation du schéma S_E, ce qui permet de résoudre l'équation (4.47) par une méthode de point fixe qui converge rapidement. L'intérêt est que cette méthode alors est parfaitement adaptée à ce problème.

4.2.4.c Résolution du schéma explicite modifié par une méthode de point fixe

Réécrivons le schéma $\tilde{S}_E$ en exprimant $v_{p_h}^{n+1}$ en fonction de $v_{p_h}^{n-1}, v_{p_h}^n$ et f_h^n :

$$\left(\left(1 + \frac{R_p \Delta t}{2} \right) I + \frac{\eta \Delta t}{2} (M_h^p)^{-1} K_h \right) v_{p_h}^{n+1} = 2 v_{p_h}^n - v_{p_h}^{n-1} - M_h^p K_h v_{p_h}^n + \left(\frac{R_p \Delta t}{2} I + (M_h^p)^{-1} K_h v_{p_h}^{n-1} \right) v_{p_h}^{n-1} + \Delta t^2 (M_h^p)^{-1} f_h^n, \quad (4.54)$$

que l'on peut reformuler comme un problème de point fixe :

$$v_{p_h}^{n+1} = \mathcal{R} v_{p_h}^{n+1} + c(v_{p_h}^{n-1}, v_{p_h}^n, f_h^n) = \Phi(v_{p_h}^{n+1}), \quad (4.55)$$

où :

$$\mathcal{R} = - \frac{\eta \Delta t}{2(1 + \frac{R_p \Delta t}{2})} (M_h^p)^{-1} K_h. \quad (4.56)$$

et $c(v_{p_h}^{n-1}, v_{p_h}^n, f_h^n)$ est connu.

On définit alors la méthode itérative suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \bar{v}_0 = c(v_{p_h}^{n-1}, v_{p_h}^n, f_h^n), \\ \bar{v}_{k+1} = \Phi(\bar{v}_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{cases}} \quad (4.57)$$

et on a le :

Théorème 4.1 *Si la condition de stabilité (4.53) est vérifiée et si :*

$$0 \leq \eta < \frac{\Delta t(1+\frac{R_p}{2})}{2}, \tag{4.58}$$

alors la méthode itérative (4.57) est convergente, ie. *:*

$$\lim_{k\to\infty} \bar{v}_k = v_{p_h}^{n+1} \tag{4.59}$$

▷ PREUVE :

Il suffit d'appliquer le théorème du point fixe ce qui revient à déterminer pour quelles valeurs de η l'application :

$$\Phi \; : \; \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{V}_h & \longrightarrow & \mathcal{V}_h \\ u & \mapsto & \mathcal{R}u + c, \end{array} \right. \tag{4.60}$$

est contractante. Or Φ étant linéaire, on vérifie immédiatement qu'il suffit que :

$$\|\mathcal{R}\| < 1, \tag{4.61}$$

pour au moins une norme matricielle pour qu'elle soit contractante. Comme $\mathcal{R}$ est symétrique pour le produit scalaire $(.,.)_{M_h^p}$, sa norme euclidienne est donnée par son rayon spectral.

Soit λ un valeur propre de $(M_h^p)^{-1}K_h$. On suppose que la condition de stabilité (4.53) est vérifiée, *ie.* :

$$\frac{\lambda \Delta t^2}{4} \leq 1. \tag{4.62}$$

Les valeurs propres de $\mathcal{R}$, notées μ, vérifient alors :

$$|\mu| = \frac{\eta \Delta t}{2(1+\frac{R_p \Delta t}{2})}\lambda = \frac{2\eta}{\Delta t(1+\frac{R_p}{2})}\frac{\lambda \Delta t^2}{4} \tag{4.63}$$

Compte tenu de (4.62), on en déduit qu'une condition suffisante pour que Φ soit contractante est que :

$$\frac{\eta}{2\Delta t(1+\frac{R_p}{2})} < 1, \tag{4.64}$$

soit le résultat recherché.

◁

Remarque 4.5 *Notons que le terme d'amortissement fluide* stabilise *cette méthode puisqu'il augmente l'intervalle de valeurs autorisées pour η.*

Cet algorithme est efficace dans la mesure où on vérifie en pratique qu'il converge en 4 à 5 itérations à la précision de la machine (à moins de prendre η trop proche de la condition (4.58)). Mais si cette stratégie s'avère applicable dans le cas de l'équation des ondes pour laquelle on a une condition de stabilité du type :

$$\frac{dt}{h} \leq \text{Cte}, \tag{4.65}$$

elle est malheureusement moins souple dans le cas de l'équation de plaque, car alors la condition de convergence de la méthode (4.58) n'autorise qu'une gamme très restreintes de valeurs pour η, car la condition de stabilité (4.53) est elle-même très contraignante.

4.3 Une autre approche : la résolution exacte en temps

Présentons maintenant une autre stratégie de résolution du problème semi-discret en espace. Le principal inconvénient de la méthode des différences finies en temps, comme on l'a maintenant remarqué à plusieurs reprises, est qu'elle conduit à un choix de pas de temps en $O(h^2)$, que ce soit pour des considérations de stabilité ou de précision.

Pour contourner ce problème, on propose ici de résoudre *exactement en temps* le problème semi-discret en espace. Il s'agit donc de résoudre le système différentiel matriciel suivant (voir section 4.2.4.a): :

$$\boxed{\begin{cases} M_h^p \dfrac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + \left(I + \eta \dfrac{d}{dt}\right) K_h v_{p_h} + R_p M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt} = f_h \\ v_{p_h}(0) = 0 \text{ et } \partial_t v_{p_h}(0) = 0. \end{cases}} \tag{4.66}$$

où, rappelons le, M_h^p et K_h sont des matrices symétriques définies positives.

On présente en détail la résolution analytique de ce problème qui est standard. La diagonalisation de l'opérateur de plaque discret permet de se ramener à la résolution d'un problème scalaire. Le calcul du noyau de Green permet de déterminer aisément la solution à l'aide d'un produit de convolution (section 4.3.2.a). L'échantillonage de la solution conduit à supposer le second membre constant par morceaux, ce qui permet d'expliciter ce produit de convolution comme un simple produit matriciel (section 4.3.3.b). On termine cette section par un résultat de stabilité et la présentation de la méthode spectrale qui permet d'approcher la solution à l'aide d'un petit nombre de modes.

4.3.1 Diagonalisation du problème semi-discret

On commence par réarranger (4.66) sous la forme d'un système différentiel linéaire à coefficients constants d'ordre deux en temps :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + \left(R_p I + \eta (M_h^p)^{-1} K_h\right) \dfrac{dv_{p_h}}{dt} + (M_h^p)^{-1} K_h v_{p_h} = (M_h^p)^{-1} f_h, \\ v_{p_h}(0) = 0 \text{ et } \partial_t v_{p_h}(0) = 0. \end{cases} \tag{4.67}$$

La résolution de ce système passe par la diagonalisation de la matrice $(M_h^p)^{-1}K_h$. Mais celle ci est sans mystère, puisque elle est symétrique définie positive pour le produit scalaire $(.,.)_{M_h^p}$. Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale pour ce produit scalaire.
On note :

$$(\lambda_i^2)_{1\leq i\leq n_p}, \tag{4.68}$$

les valeurs propres (strictement positives) de $(M_h^p)^{-1}K_h$, qu'on supposera rangées dans l'ordre croissant. On peut alors écrire :

$$P^{-1}((M_h^p)^{-1}K_h)P = D_K, \tag{4.69}$$

où :

$$D_K = \underset{1\leq i\leq n_p}{\text{diag}}\ (\lambda_i^2), \tag{4.70}$$

et P est la matrice de changement de la base canonique des éléments finis vers une base propre de K_h. Cette dernière est orthonormale pour le produit scalaire $(,.,)_{M_h^p}$, donc :

$$P^\top M_h^p P = I, \text{ soit encore : } P^{-1} = P^\top M_h^p, \tag{4.71}$$

ce qui permet de réécrire (4.69) :

$$P^\top K_h P = D_K, \tag{4.72}$$

Notation 4.2 *Jusqu'ici, nous avions confondu abusivement le vecteur $v_{p_h} \in \mathcal{V}_h$ et ses composantes dans la base canonique des éléments finis de $\mathcal{V}_h$*(cf. *note (2.1)). Puisqu'il nous faut maintenant distinguer deux bases, on note :*

- *v_{EF} les composantes de v_{p_h} dans la base canonique des éléments finis,*
- *v_K les composantes de v_{p_h} dans la base propre de K_h déterminée ci dessus.*

On sait alors que les vecteurs v_K et v_{EF} se déduisent l'un de l'autre par la relation :

$$v_K = P^{-1}v_{EF}. \tag{4.73}$$

On note en outre f_{EF} les composantes du vecteur f_h dans la base canonique éléments finis et f_K le vecteur défini par :

$$f_K = P^{-1}(M_h^p)^{-1}f_{EF} = P^\top f_{EF}. \tag{4.74}$$

Attirons l'attention sur le fait que f_K ne sont pas *les composantes de f_h dans la base propre de K_h mais celles du vecteur représenté par $(M_h^p)^{-1}f_{EF}$ dans la base éléments finis ...*

Le système différentiel (4.67) est diagonal dans la base propre de K_h. En effet, multipliant l'équation (4.67) par P^{-1}, on obtient compte tenu des relations (4.69, 4.72, 4.73, 4.74) :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d^2 v_K}{dt^2} + A_K \dfrac{dv_K}{dt} + D_K v_K = f_K, \quad \forall t \geq 0, \\ v_K(0) = 0 \text{ et } \dfrac{dv_K}{dt}(0) = 0. \end{cases}} \tag{4.75}$$

où on a introduit la matrice diagonale d'amortissement A_K, définie par :

$$A_K = (R_p I + \eta D_K) = \underset{1 \leq i \leq n_p}{\text{diag}} \ (R_p + \eta \lambda_i^2). \tag{4.76}$$

4.3.2 Résolution du problème diagonal

On présente dans cette section la résolution du problème un peu plus général suivant :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $t_0 \in \mathbb{R}$.
On cherche $U \in C^2([t_0, \infty[, \mathbb{R}^n)$ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \ddot{U} + A\dot{U} + DU = F, \forall t \geq t_0 \\ U(t_0) = U_0 \text{ et } \dot{U}(t_0) = U_1, \end{cases} \tag{4.77}$$

où $F \in C^0([t_0, \infty[, \mathbb{R}^n)$ et $U_0, U_1 \in \mathbb{R}^n$ et A et D sont deux matrices diagonales.
On note :

$$A = \underset{1 \leq i \leq n}{\text{diag}} \ (2\alpha_i) \text{ et } D = \underset{1 \leq i \leq n}{\text{diag}} \ (\lambda_i^2), \tag{4.78}$$

4.3.2.a Résolution du problème scalaire

Il nous faut alors résoudre ce problème composante par composante, c'est à dire résoudre les n équations différentielles scalaires :

$$\frac{dU_i}{dt} + 2\alpha \frac{dU_i}{dt} + \lambda_i^2 U_i = F_i, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{4.79}$$

ce qui est on ne peut plus aisé, puisqu'il s'agit du simple problème d'oscillateur amorti.

Un moyen élégant d'obtenir la solution analytique de cette équation différentielle ordinaire non homogène repose sur le calcul de son noyau de Green, ce qui permet la solution comme un simple produit de convolution. On rappelle tout d'abord le résultat abstrait suivant :

Théorème 4.2 *Soit α et $\lambda > 0$ deux réels, et f un application continue sur $[t_0, \infty[$*
La solution du problème de Cauchy scalaire d'ordre 2 en temps :

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + 2\alpha\dot{u}(t) + \lambda^2 u(t) = f(t), \quad \forall t > 0, \\ u(t_0) = u_0 \text{ et } \dot{u}(t_0) = u_1 \end{cases} \tag{4.80}$$

est donnée par :

$$u(t) = s_{\alpha,\lambda}[u_0, u_1](t - t_0) + r_{\alpha,\lambda,t_0}[f](t), \tag{4.81}$$

avec :

$$\begin{aligned} s_{\alpha,\lambda}[u_0, u_1](t) &= A(u_0, u_1)\exp(r^+ t) + B(u_0, u_1)\exp(r^- t) \\ r_{\alpha,\lambda,t_0}[f](t) &= \int_{t_0}^{t} G_{\alpha,\lambda}(t - (s - t_0))f(s)ds = \int_0^{t-t_0} G_{\alpha,\lambda}(t - s)f(s + t_0)ds, \end{aligned} \tag{4.82}$$

où :

- *r^+ et r^- sont les deux racines du polynôme caractéristique :*[1]

$$r^2 + \alpha r + \lambda^2 = 0, \tag{4.83}$$

- *$A(u_0, u_1)$ et $B(u_0, u_1)$ sont solutions du système :*

$$\begin{cases} A + B = u_0 \\ Ar^+ + Br^- = u_1 \end{cases} \tag{4.84}$$

- *$G_{\alpha,\lambda}$ est la solution du problème de Cauchy, appelée encore solution élémentaire :*

$$\begin{cases} \ddot{G}_{\alpha,\lambda}(t) + \alpha\dot{G}_{\alpha,\lambda}(t) + \lambda^2 G_{\alpha,\lambda}(t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ G_{\alpha,\lambda}(0) = 0 \text{ et } \dot{G}_{\alpha,\lambda}(0) = 1, \end{cases} \tag{4.85}$$

▷ PREUVE : D'après le principe de superposition, on sait que la solution est de la forme :

$$u(t) = u_H(u_0, u_1)(t) + u_f(t), \tag{4.86}$$

où u_H est la solution du problème homogène :

$$\begin{cases} \ddot{u}_H(t) + \alpha\dot{u}_H(t) + \lambda^2 u_H(t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ u_H(0) = u_0 \text{ et } \dot{u}_H(0) = u_1, \end{cases} \tag{4.87}$$

tandis que u_f est la solution particulière de (4.80) à conditions initiales nulles :

$$\begin{cases} \ddot{u}_f(t) + \alpha\dot{u}_f(t) + \lambda^2 u_f(t) = f(t), \quad \forall t > 0, \\ u_f(0) = 0 \text{ et } \dot{u}_f(0) = 0. \end{cases} \tag{4.88}$$

Il est bien connu que :

$$u_H(u_0,u_1)(t) = A(u_0,u_1)\exp(r^+t) + B(u_0,u_1)\exp(r^-t), \tag{4.89}$$

où r^+, r^-, $A(u_0,u_1)$ et $B(u_0,u_1)$ sont données par les équations (4.83) et (4.84).

Pour calculer u_f, on multiplie l'équation (4.88) par $G_{\alpha,\lambda}(t-(s-t_0))$ pour t fixé, puis on intègre sur $[t_0,t]$:

$$\int_{t_0}^{t} (\ddot{u}_f(s) + \alpha\dot{u}_f(s) + \lambda^2 u_f(s)) G_{\alpha,\lambda}(t-(s-t_0))ds = \int_{t_0}^{t} G_{\alpha,\lambda}(t-(s-t_0))f(s)ds. \tag{4.90}$$

Or une double intégration par partie effectuée sur le premier membre conduit à :

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} \left[\ddot{G}_{\alpha,\lambda}(t-(s-t_0)) + \alpha\dot{G}_{\alpha,\lambda}(t-(s-t_0)) + \lambda^2 G_{\alpha,\lambda}(t-(s-t_0))\right] u_f(s)ds \\ + \left[(\dot{u}_f(s)+\alpha u_f(s))G_{\alpha,\lambda}(t-(s-t_0))\right]_{s=t_0}^{t} + \left[u_f(s)\dot{G}_{\alpha,\lambda}(t-(s-t_0))\right]_{s=t_0}^{t} \\ = \int_{t_0}^{t} G_{\alpha,\lambda}(t-(s-t_0))f(s)ds.\end{aligned} \tag{4.91}$$

et donc, compte tenu de l'équation (4.85) et des conditions initiales vérifiées par u_f et $G_{\alpha,\lambda}$, il reste :

$$u_f(t) = \int_{t_0}^{t} G_{\alpha,\lambda}(t-(s-t_0))f(s)ds, \tag{4.92}$$

d'où le résultat, en posant :

$$\begin{aligned} s_{\alpha,\lambda}[u_0,u_1](t) &= u_H(u_0,u_1)(t), \\ r_{\alpha,\lambda,t_0}[f](t) &= u_f(t). \end{aligned} \tag{4.93}$$

◁

4.3.2.b Expression des opérateurs $s_{\alpha,\lambda}$ et r_{α,λ,t_0}

A ce stade, les opérateurs de résolution du problème scalaire $s_{\alpha,\lambda}$ et r_{α,λ,t_0} sont encore quelque peu abstrait. Nous donnons ici leur expression détaillée. Les calculs mènent aux résultats suivants :

- si $|\alpha| < \lambda$, on pose :

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}, \tag{4.94}$$

alors :

$$\boxed{\begin{cases} s_{\alpha,\lambda}[u_0,u_1](t) = \exp(-\alpha t)\left[u_0\cos(\tilde{\lambda}t) + \dfrac{1}{\tilde{\lambda}}(u_1+\alpha u_0)\sin(\tilde{\lambda}t)\right] \\ G_{\alpha,\lambda} = \dfrac{1}{\tilde{\lambda}}\exp(-\alpha t)\sin(\tilde{\lambda}t) \end{cases}} \tag{4.95}$$

- si $|\alpha| > \lambda$, on pose :

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}, \tag{4.96}$$

alors :

$$\boxed{\begin{cases} s_{\alpha,\lambda}[u_0,u_1](t) = \exp(-\alpha t)\left[u_0\cosh(\tilde{\lambda}t) + \dfrac{1}{\tilde{\lambda}}(u_1+\alpha u_0)\sinh(\tilde{\lambda}t)\right] \\ G_{\alpha,\lambda} = \dfrac{1}{\tilde{\lambda}}\exp(-\alpha t)\sinh(\tilde{\lambda}t) \end{cases}} \tag{4.97}$$

Remarque 4.6 *En particulier, lorsque le système n'est pas amorti, (* ie. $\alpha = 0$*), ces solutions deviennent :*

$$\begin{cases} s_{0,\lambda}[u_0,u_1](t) = \left[u_0\cos(\lambda t) + \dfrac{1}{\lambda}(u_1)\sin(\lambda t)\right] \\ G_{0,\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}\sin(\lambda t) \end{cases} \tag{4.98}$$

4.3.2.c Résolution du système différentiel matriciel

Il n'y a plus qu'à construire les opérateurs de résolution du problème matriciel à partir des opérateurs de résolution du problème scalaire que nous venons de définir.

Pour $t \geq t_0$ donné, on introduit les deux opérateurs linéaires $\mathcal{S}_t$ et $\mathcal{R}_{t,t_0}$ définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_t \ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \\ (\mathcal{S}_t[U_0,U_1])_i = s_{\alpha_i,\lambda_i}[(U_0)_i,(U_1)_i](t), \quad \forall 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{t,t_0} \ : \mathbb{R}^n \longrightarrow C^2([t_0,\infty[,\mathbb{R}^n) \\ \\ (\mathcal{R}_{t,t_0}[F])_i = r_{\alpha_i,\lambda_i,t_0}[F_i](t) \quad \forall 1 \leq i \leq n, \end{cases} \tag{4.99}$$

où $s_{\alpha,\lambda}$ et r_{α,λ,t_0} sont définies en (4.82).

Remarque 4.7 *Compte tenu des expressions de $s_{\alpha,\lambda}$ données dans la section précédente, on peut en fait écrire $\mathcal{S}_t$ comme la somme de deux produits matriciels.*

$$\mathcal{S}_t[U_0,U_1] = \mathcal{S}_t^0 U_0 + \mathcal{S}_t^1 U_1, \tag{4.100}$$

où les deux matrices $\mathcal{S}_t^0$ et $\mathcal{S}_t^1$ sont diagonales.

On peut alors énoncer le :

Corollaire 4.1 *La solution du problème (4.77) s'écrit :*

$$U(t) = \mathcal{S}_{(t-t_0)}(U_0, U_1) + \mathcal{R}_{t,t_0}(F), \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.101}$$

4.3.3 Mise en œuvre

4.3.3.a Calcul discret en temps

Ce calcul est en fait mis en œuvre informatiquement. Il nous faut donc tout de même *échantillonner en temps* le problème (4.75).

On fixe un pas de temps Δt. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$t^n = n\Delta t_t ext \quad et \quad t^{n+\frac{1}{2}} = (n+1/2)\Delta t.$$

L'équation (4.75) est alors résolu sur des intervalles de longueur Δt, centrés sur t^n. Ainsi, v_K est calculé aux instants $t^{n+\frac{1}{2}}$.

Pour éviter d'avoir à calculer le produit de convolution intervenant dans l'opérateur $\mathcal{R}$, **on approche $f_K(t)$ sur $]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[$ par sa valeur à l'instant t^n.** En outre, nous couplerons ultérieurement cette équation à l'équation de corde ainsi qu'à l'équation des ondes acoustiques qui seront, elles, résolues par différences finies en temps. Il est donc naturel de supposer que f_K est constante par morceaux en temps dans ce cadre.

Il nous faut alors résoudre à chaque pas de temps le problème de Cauchy suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{v}_K + A_K \dot{v}_K + D_K v_K = {f_K}^n, \quad \forall t \in]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[\\ v_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_K^{n-\frac{1}{2}} \\ \dot{v}_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}} \end{cases}} \tag{4.102}$$

D'après le corollaire (4.1), la solution de ce problème est donnée par :

$$\boxed{\begin{cases} {v_K}^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) + \mathcal{R}_{n,\Delta t}({f_K}^n) \\ \dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}} = \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) + \dot{\mathcal{R}}_{n,\Delta t}(f_K^n), \end{cases}} \tag{4.103}$$

où on a noté $\mathcal{R}_{n,\Delta t} = \mathcal{R}_{t^{n-\frac{1}{2}},t^{n+\frac{1}{2}}}$ et

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}(U_0, U_1) &= \left(\frac{d\mathcal{S}_t^0}{dt}\right)_{t=\Delta t} U_0 + \left(\frac{d\mathcal{S}_t^1}{dt}\right)_{t=\Delta t} U_1 \\ \dot{\mathcal{R}}_{n,\Delta t}(F) &= \left(\frac{d\mathcal{R}_{t,t^{n-\frac{1}{2}}}}{dt}\right)_{t=t^{n+\frac{1}{2}}} (F). \end{aligned} \tag{4.104}$$

Remarque 4.8 *Il ne s'agit donc pas tout à fait d'une méthode de résolution* exacte *en temps puisque nous approchons le second membre par des constantes par morceaux. Le choix du pas de temps Δt ne peut donc pas être arbitrairement grand, puisqu'il nous faut approcher suffisamment correctement le second membre de cette manière.*

Néanmoins, dés que celui ci est nul, cette approximation n'en est plus une et on peut alors choisir un pas de temps aussi grand qu'on veut sans commettre la moindre erreur (!). Le choix du pas de temps devra tout de même être suffisamment petit de manière à échantillonner précisément la solution.

4.3.3.b Expression de la résolvante $\mathcal{R}_{n,\Delta t}$

Dans le cas particulier où le second membre est une simple constante, on peut expliciter $\mathcal{R}_{n,\Delta t}$. Notons $\tilde{G}_{\alpha,\lambda}$ la primitive de la solution élémentaire du problème scalaire (4.80), définie par (4.85), qui s'annule en 0, *ie.* :

$$\tilde{G}_{\alpha,\beta} = \int_0^t G_{\alpha,\beta}(s)ds. \tag{4.105}$$

On vérifie alors la :

Propriété 4.5 *L'opérateur $\mathcal{R}_{n,\Delta t}$ est tout simplement un produit matriciel usuel :*

$$\mathcal{R}_{n,\Delta t}(f_K^n) = \mathcal{R}_{\Delta t} f_K^n, \tag{4.106}$$

où $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est la matrice diagonale définie par :

$$\mathcal{R}_{\Delta t} = \underset{1\leq i\leq n_p}{\text{diag}}\ (\tilde{G}_{\alpha_i,\lambda_i}(\Delta t). \tag{4.107}$$

Le théorème suivant assure en outre que cette matrice est définie positive, propriété qui nous sera bien utile lors de la résolution du problème couplé à l'air et à la corde.

Théorème 4.3 *On suppose toujours que $\lambda > 0$, et bien sûr $\Delta t > 0$.*
Si α est positif, alors :

$$\tilde{G}_{\alpha,\lambda}(\Delta t) \geq 0, \tag{4.108}$$

En outre, si $\alpha > 0$, ou bien si $\alpha = 0$ et $\Delta t < \dfrac{2\pi}{\lambda}$, alors

$$\tilde{G}_{\alpha,\lambda}(\Delta t) > 0. \tag{4.109}$$

On en déduit que la résolvante $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est définie positive.

▷ PREUVE : D'après le théorème (4.2), on vérifie, en choisissant en particulier $u_0 = u_1 = 0$

et $f \equiv 1$ dans l'équation (4.81), que $\tilde{G}_{\alpha,\lambda}(\Delta t)$ est la solution du problème :

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + 2\alpha\dot{u} + \lambda^2 u = 1, \quad \forall t > 0, \\ u(0) = 0 \text{ et } \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \tag{4.110}$$

Pour $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, on multiplie cette équation par $\dot{u}$ et on intègre sur $[0, t]$:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|\dot{u}(s)\right|^2\right) ds + 2\alpha \int_0^t \left|\dot{u}(s)\right|^2 ds + \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|u(s)\right|^2\right) ds = \int_0^t \dot{u}(s) ds. \tag{4.111}$$

Compte tenu des conditions initiales, on obtient donc :

$$u(t) = \frac{1}{2}\left|\dot{u}(t)\right|^2 + 2\alpha \int_0^t \left|\dot{u}(s)\right|^2 ds + \frac{1}{2}\left|u(t)\right|^2, \tag{4.112}$$

dont on déduit (4.108).

Si $\alpha > 0$, alors, si on avait $u(t_0) = 0$ pour $t_0 > 0$, cela impliquerait que les trois termes positifs de l'équation précédente seraient nuls. En particulier, on aurait :

$$\int_0^{t_0} \left|\dot{u}(s)\right|^2 ds = 0,$$

ce qui implique $\dot{u}(s) = 0 \forall s \in [0, t_0]$ et donc, compte tenu des conditions initiales, $u(s) = 0 \forall s \in [0, t_0]$, qui n'est pas solution de (4.110). Donc c'est absurde, donc $u(t) > 0 \forall t > 0$.

Dans le cas où $\alpha = 0$, on calcule, d'après (4.98) :

$$\tilde{G}_{0,\lambda}(t) = \frac{1 - \cos(\lambda t)}{\lambda^2}. \tag{4.113}$$

Donc, $\tilde{G}_{0,\lambda}$ s'annule pour $t = \dfrac{2k\pi}{\lambda}$, $\quad \forall k \in \mathbb{N}$, et par conséquent, si on choisit $\Delta t < \frac{2\pi}{\lambda}$, on aura encore $\tilde{G}_{0,\lambda}(\Delta t) > 0$. ◁

Pour terminer, donnons l'expression de $\tilde{G}_{\alpha,\lambda}$. Il suffit en fait de calculer

$$\int_0^t \Gamma_{\alpha,\lambda}(s) ds,$$

à partir de l'expression de $G_{\alpha,\lambda}$ donnée à la section 4.3.2.b :

- si $|\alpha| < \lambda$, alors :

$$\tilde{G}_{\alpha,\lambda} = \frac{1}{2\tilde{\lambda}\lambda^2}\left[\tilde{\lambda}(1 - \cos(\tilde{\lambda}t)\exp(-\alpha t)) - \alpha\sin(\tilde{\lambda}t)\right] \tag{4.114}$$

- si $|\alpha| > \lambda$, alors :

$$\tilde{G}_{\alpha,\lambda} = \frac{-1}{2\tilde{\lambda}\lambda^2}\left[\tilde{\lambda}(\cosh(\tilde{\lambda}t)\exp(-\alpha t) - 1) + \alpha\sinh(\tilde{\lambda}t)\right] \tag{4.115}$$

4.3.3.c Ecriture dans la base éléments finis

On peut également écrire ce schéma dans la base éléments finis d'origine de notre problème. Celui ci s'écrit tout simplement :

$$\begin{cases} M_h^p \ddot{v}_{EF} + \left(I + \eta \dfrac{d}{dt}\right) K_h v_{EF} + R_p M_h^p \dot{v}_{EF} = f_{EF}^n, \quad \forall t \in]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[\\ v_{EF}(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_{EF}^{n-\frac{1}{2}} \\ \dot{v}_{EF}(t^{n-\frac{1}{2}}) = \dot{v}_{EF}^{n-\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{4.116}$$

et sa solution est maintenant donnée par :

$$\begin{cases} v_{EF}^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{S}_{\Delta t}^{ef}(v_{EF}^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_{EF}^{n-\frac{1}{2}}) + \mathcal{R}_{\Delta t}^{ef}(f_{EF}^n) \\ \dot{v}_{EF}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{\mathcal{S}}^{ef}{}_{\Delta t}(v_{EF}^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_{EF}^{n-\frac{1}{2}}) + \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t}^{ef}(f_{EF}^n), \end{cases} \tag{4.117}$$

où les opérateurs $\mathcal{S}_{\Delta t}^{ef}$ et $\mathcal{R}_{\Delta t}^{ef}$ sont définis par les relations de changement de base :

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_{\Delta t}^{ef}(U_0^{ef}, U_1^{ef}) = P\mathcal{S}_{\Delta t}^0 P^{-1} U_0^{ef} + P\mathcal{S}_{\Delta t}^1 P^{-1} U_1^{ef} = \mathcal{S}_{\Delta t}^{ef,0} U_0^{ef} + \mathcal{S}_{\Delta t}^{ef,1} U_1^{ef}, \\ &\mathcal{R}_{\Delta t}^{ef} F^{ef} = P\mathcal{R}_{\Delta t} P^{-1} F^{ef} \end{aligned} \tag{4.118}$$

où P est la matrice de changement de base introduite à la section 4.3.2, les matrices diagonales $\mathcal{S}_{\Delta t}^0, \mathcal{S}_{\Delta t}^1$ sont définies dans la remarque (4.7) et la matrice diagonale $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est définie à en (4.107)

Il va de soit que les deux schémas (4.102) et (4.116) sont strictement équivalents puisqu'ils représentent la même technique de résolution dans deux bases différentes. Néanmoins, ils présentent une différence non négligeable, c'est que les matrices $\mathcal{S}_{\Delta t}^0, \mathcal{S}_{\Delta t}^1$ et $\mathcal{R}_{\Delta t}$ sont *diagonales*, tandis que leurs consœurs $\mathcal{S}_{\Delta t}^{ef,0}, \mathcal{S}_{\Delta t}^{ef,1}$ et $\mathcal{R}_{\Delta t}^{ef}$ sont *pleines*. Il est donc évident qu'il vaut mieux résoudre le problème dans la base propre de K_h.

La représentation de l'inconnue discrète v_{p_h} dans la base propre de K_h, donnée par v_K, nous donne une information sur les évolution temporelle des composantes modales du déplacement de la table d'harmonie. Mais si on veut observer les déformations de la table au cours du temps, il vaut mieux choisir de représenter v_{p_h} dans la base éléments finis puisqu'on sait alors interpoler la solution sur le maillage du domaine.

En pratique, on résout donc le problème dans la base propre, et on reconstruit au besoin la solution dans la base éléments finis par la relation de changement de base $v_{EF} = Pv_K$

4.3.3.d Conservation de l'énergie discrète

Le schéma discret (4.102) possède (sans surprise) une propriété de conservation de l'énergie discrète qui assure que l'inconnue discrète $(v_K^{n+\frac{1}{2}})_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée au cours du temps :

Propriété 4.6 *On définit l'énergie discrète du schéma (4.102) par :*

$$E_p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\|v_K\|_{D_K}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.119}$$

Alors l'énergie E_p vérifie la propriété de conservation suivante :

$$\frac{E_p^{n+\frac{1}{2}} - E_p^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = f_K^n \frac{v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t}\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} (A_K \dot{v}_K, \dot{v}_K). \tag{4.120}$$

La matrice A_K est définie positive, donc la quantité $\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} (A_K \dot{v}_K, \dot{v}_K)$ est positive. On en déduit que l'énergie $(E_p^{n+\frac{1}{2}})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante dés que le l'effort exercé sur la plaque est nul.

Puisque cette énergie est positive, on vérifie il s'agit en fait d'une norme portant sur l'inconnue discrète $v_K^{n+\frac{1}{2}}$. Ainsi ce résultat assure que le schéma (4.102) est inconditionnellement stable.

▷ PREUVE : Il suffit de multiplier scalairement (4.102) par $\dot{v}_K$ puis d'intégrer en temps sur $[t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}]$, sans oublier que le second membre est une constante. Il reste à diviser l'équation obtenue par Δt pour obtenir la relation (4.120). ◁

Remarque 4.9 *On vérifie à l'aide des relations de changement de base données en 4.3.1 que dans la base éléments finis, l'énergie ci dessus est bien :*

$$E_p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|\dot{v}_{EF}\|_{M_h^p}^2 + \frac{1}{2}\|v_{EF}\|_{K_h}^2. \tag{4.121}$$

Bien entendu, puisque tout est équivalent, la relation de conservation de l'énergie présentée ci dessus s'obtient d'une manière similaire à partir du schéma écrit dans la base éléments finis (4.116).

4.3.4 Approche type méthode spectrale

On peut encore simplifier la résolution du problème (4.102) en l'abordant d'une manière analogue aux méthodes spectrales. C'est pourquoi nous qualifierons parfois cette méthode de résolution *pseudo spectrale*.

On note $(\chi_i)_{1\leq i\leq n_p}$ les n_p vecteurs propres de la matrice $(M_h^p)^{-1}K_h$, c'est à dire les n_p colonnes de la matrice de passage P introduite en (4.69). χ_i est donc associé à la valeur propre λ_i^2. Par définition, on a :

$$v_K = \sum_{i=0}^{n_p} v_K^i \chi_i. \tag{4.122}$$

Puisqu'on a rangé les valeurs propres dans l'ordre croissant, plus i est grand, plus χ_i est un mode à fréquence élevée. On est naturellement tenté de négliger les composantes de v_K associées aux modes d'ordre élevé, car :

- La fréquence de coupure du second membre f_K est relativement basse (rappelons que dans le cas d'une guitare, celle ci est de l'ordre de 5000Hz). Donc seuls les premiers modes sont effectivement excités. Par conséquent, les composantes de v_K sont négligeables pour i "grand".
- En outre, l'amortissement est d'autant plus important que la fréquence du mode est grande (voir section 1.3.3), donc les composantes associées décroissent très rapidement au cours du temps. D'autant plus que l'amortissement dans le bois est très important.

On va donc tronquer la somme (4.122) aux $\tilde{n}_p$ premiers modes, où $1 \leq \tilde{n}_p \leq n_p$, c'est à dire :

$$v_K \approx \tilde{v}_K = \sum_{i=0}^{\tilde{n}_p} v_K^i \chi_i. \tag{4.123}$$

Cela revient, en pratique, à définir la matrice de passage tronquée $\tilde{P}$, rectangulaire, de taille n_p x $\tilde{n}_p$, dont les $\tilde{n}_p$ colonnes sont les $\tilde{n}_p$ premiers vecteurs propres de la matrice $(M_h^p)^{-1}K_h$. On définit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_K &= \underset{1\leq i\leq \tilde{n}_p}{\text{diag}}\ (\lambda_i^2), \\ \tilde{A}_K &= (R_p I + \eta \tilde{D}_K), \\ \tilde{f}_K &= \tilde{P}^\top f_{EF}, \end{aligned} \tag{4.124}$$

et on vérifie que :

$$\tilde{P}^\top K_h \tilde{P} = \tilde{D}_K. \tag{4.125}$$

Enfin, v_{EF} et $\tilde{v}_K$ se déduisent l'un de l'autre par les relations de changement de base :

$$\tilde{v}_K = \tilde{P}^\top M_h^p v_{EF} \quad \text{et} \quad v_{EF} \approx \tilde{P}\tilde{v}_K. \tag{4.126}$$

On confondra dorénavant v_K et son approximation $\tilde{v}_K$, ainsi que f_K et $\tilde{f}_K$.

Il nous faut maintenant résoudre le système différentiel linéaire suivant, dont l'avantage essentiel par rapport au problème (4.102) est qu'il est de taille $\tilde{n}_p \leq n_p$. En pratique, il suffit de prendre $\tilde{n}_p = 50$, ce qui rend cette résolution très efficace.

$$\begin{cases} \ddot{v}_K + \tilde{A}_K \dot{v}_K + \tilde{D}_K v_K = f_K^n, \quad \forall t \in]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[\\ v_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_K^{n-\frac{1}{2}} \\ \dot{v}_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{4.127}$$

Remarque 4.10 *Cette méthode est en fait une méthode spectrale pour laquelle, ne connaissant pas les modes propres du problème continu, ils approchés numériquement par la méthode des éléments finis.*

4.3.5 Une nouvelle forme d'amortissement

Comme nous l'avions précisé dans la remarque (1.10), on constate que cette méthode de résolution autorise en fait un ajustement beaucoup plus fin de l'amortissement, mode par mode. En effet, la méthode introduite jusqu'ici conduit à résoudre pour chaque composante $(v_K)_i, 1 \leq i \leq n_p$, l'équation différentielle scalaire :

$$\ddot{u}(t) + 2\alpha(\lambda_i)\dot{u}(t) + \lambda_i^2 u(t) = (f_K)_i(t), \tag{4.128}$$

avec $\alpha(\lambda_i) = \dfrac{R_p + \eta\lambda_i^2}{2}$.

Les équations (4.95) et (4.97) montrent que le taux d'amortissement de ce mode est tout simplement $\alpha(\lambda_i)$. Ici, rien ne nous interdit de choisir une autre forme d'amortissement en fonction de la fréquence du mode : on a toute latitude sur la fonction $\alpha : \lambda \mapsto \alpha(\lambda) \geq 0$.

Ceci est un gros avantage de cette méthode pour la résolution de l'équation de plaque amortie, en particulier en acoustique musical où les phénomènes d'amortissement sont fondamentaux pour la production du son.

En pratique, nous nous contenterons de prendre un taux d'amortissement dépendant linéairement de la fréquence, c'est à dire un amortissement de la forme :

$$\alpha(\lambda) = R_p + \eta\lambda, \tag{4.129}$$

où, bien entendu, les paramètres R_p et η ne sont les mêmes que ci dessus (ne serait ce que pour des raisons de dimension physique).

Notation 4.3 *Dorénavant, nous considérerons que l'amortissement de la plaque est donné, dans la base modale, par la matrice diagonale positive A_K, définie en toute généralité par :*

$$A_K = \underset{1\leq i\leq n_p}{\text{diag}}\ (\alpha(\lambda_i)), \tag{4.130}$$

où α est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ donnée.

4.4 Comparaison des différentes approches

Nous avons donc proposé trois méthode pour résoudre le problème semi-discrétisé en espace (4.7), soit par différence finies en temps *explicites*, soit par différences finies en temps *implicites*, soit par une méthode de type *spectrale*. Regardons maintenant plus en détail quels sont les avantages ($\oplus$) et les inconvénients ($\ominus$) de chacune d'elle, de manière à choisir celle qui sera le mieux adaptée à la résolution de notre problème.

4.4.1 Avantages et inconvénients du schéma explicite

⊕ Cette méthode ne nécessite aucun calcul préliminaire autre que le calcul de la matrice K_h (on n'effectue ni factorisation ni diagonalisation).

⊕ Puisqu'il n'invoque pas l'inversion d'une matrice, le coût à chaque pas de temps est réduit à un simple produit matrice-vecteur de taille n_p. La matrice K_h étant creuse, on optimise ce produit en la stockant au format morse.

⊕ Comparativement au schéma implicite, ce schéma ne crée pas plus de dispersion numérique que le schéma semi-discret. Il n'y a donc pas de perte de précision induite par cette discrétisation en temps.

⊖ La condition de stabilité est extrêmement contraignante. En fait, cet argument élimine d'office cette technique. Le mieux est de regarder un exemple. Le pas du maillage que nous utilisons est de 1 cm, pour pouvoir prendre en considération les raidisseurs. Les paramètres typiques d'une plaque en bois de résonance utilisée pour la table d'harmonie d'une guitare sont donnés par :

$$c_{11} = 10^9 Pa, \quad \rho_p = 400 kg/m^3 \quad \delta = 3mm, \tag{4.131}$$

si bien que le pas de temps imposé par la condition de stabilité (4.18) dans le cas de l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$, si on suppose que la matrice de rigidité adimensionné $\tilde{\mathbf{C}}$ est du type *orthotrope-1* (voir le tableau (4.1)), est donné par :

$$\Delta t = 8,16\ 10^{-7} s, \tag{4.132}$$

soit une fréquence d'échantillonage de 1200 kHz (!!!).

Pour écouter un son, et en particulier sa décroissance au cours du temps, une expérience acceptable dure 3 secondes, soit plus de 3,6 millions de pas de temps, ce qui est vraiment très très gros. Tous les autres inconvénients sous cités de ce schéma découlent en fait de ce seul problème.

⊖ La résolution du problème amorti par une méthode de point fixe présentée à la section 4.2.4.c ne sera malheureusement pas applicable à notre problème, car elle impose typiquement de choisir le coefficient η inférieur à $8\ 10^{-7} s$. Il se trouve que l'amortissement dans le bois est relativement important. Des valeurs typiques des paramètres d'amortissement sont :

$$R_p = 2s, \quad \text{et} \quad \eta = 10^{-6} s. \tag{4.133}$$

On constate qu'on se trouve juste sur la limite de convergence de notre méthode, qui de ce fait manque de souplesse pour autoriser un choix suffisamment réaliste de l'amortissement (il ne faut pas en effet que le choix des paramètres d'amortissements soit imposé par la méthode de résolution qu'on utilise). Autant utiliser le schéma implicite . . .

⊖ Enfin, notre objectif est de résoudre un problème où cette plaque est couplé à une équation de corde et une équation des ondes acoustiques. Afin d'être efficace pour la résolution numérique du problème 3d, nous utiliserons un schéma de résolution

explicite, pour l'équation des acoustiques. Celui ci est stable sous la classique condition CFL :

$$\frac{c_a \Delta t}{h_a} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{4.134}$$

ce qui conduirait, en prenant le pas de temps donné ci dessus, avec $c_a = 34, m.s^{-1}$ à :

$$h_a = 4,81\ 10^{-2} cm, \tag{4.135}$$

soit moins de 0.5 mm!!! Compte tenu des dimensions d'une guitare, il faudrait calculer la pression rayonnée dans un cube d'environ un mètre de côté. On obtiendrait alors un maillage contenant plus de $9\ 10^9$ points, ce qui dépasse largement les capacités de mémoire de la meilleur machine du labo! Ce calcul n'est donc vraiment pas du tout envisageable.

Remarque 4.11 *Sur ce dernier point, si les valeurs numériques n'étaient pas si radicales, on pourrait envisager diverses stratégies pour ne pas tomber sur cet écueil.*

- *On peut choisir un pas d'espace plus grand. De cette manière, on respectera encore la condition de stabilité, mais la dispersion numérique sera plus mauvaise. Ce n'est pas si grave, puisqu'en fait on utilise un maillage en espace beaucoup plus fin que nécessaire. Cette stratégie peut permettre de gagner un facteur 2 ou 3 sur le pas d'espace, sans vraiment nuire à la précision, et donc jusqu'à un facteur 30 environ sur la taille du maillage. Néanmoins, c'est encore insuffisant. Et surtout, c'est très peu souple.*

- *On peut s'inspirer des techniques de raffinement spatio- temporelles proposées par T. Fouquet et P. Joly ([33]), qui permettraient de choisir un pas de temps différent pour la discrétisation de l'équation de plaque et celle de l'équation des ondes acoustiques.*

  Le point clef de cette méthode repose sur un propriété de conservation de l'énergie discrète associé à un schéma de type mixte. Il se trouve que la formulation en domaines fictifs du problème d'interaction fluide-structure que nous proposons au chapitre 2 possède exactement la même structure que la formulation mixte présentée dans [33]. Ces travaux pourraient donc s'appliquer tels quel à ce problème.

  Néanmoins, outre le fait que les valeurs du pas de temps qu'il faudrait envisager ici sont de toute façon disqualifiante, il faut reconnaître que cette méthode est très délicate à mettre en œuvre. [2]

4.4.2 Avantages et inconvénients du schéma implicite

⊕ Puisque ce schéma est inconditionnellement stable, on peut choisir n'importe quel pas de temps.

2. Le sous cyclage est en fait une technique bien connu dans les problèmes d'interaction fluide structure (voir [52]) Ce qui est curieux dans notre cas, c'est que notre problème est l'inverse de celui qui est couramment rencontré. A savoir qu'en général, il faut prendre un pas de temps plus grand pour la structure que pour le fluide . . .

⊕ La résolution du problème amorti ne présente pas de surcoût par rapport au problème non amorti. On peut choisir dans ce cas n'importe quelle valeur du paramètre d'amortissement.

⊖ Il faut inverser une matrice à chaque pas de temps. Cette matrice est d'autant plus grande que nous utilisons une approximation en espace d'ordre élevé.

En pratique, puisque nous voulons réaliser des calculs sur un nombre important de pas de temps. [3]il n'est pas intéressant d'utiliser une méthode de gradient conjugué. Le mieux est d'utiliser la méthode de Cholesky. On factorise la matrice au début du calcul, et il suffit de résoudre le problème par descente remontée à chaque pas de temps. Cette résolution est d'autant plus efficace que la matrice possède une structure bande étroite. L'efficacité de la mise en œuvre de cette méthode peut reposer sur des méthodes certainement beaucoup plus subtiles, mais on peut conjecturer que plus la méthode sera subtile, plus elle sera difficile à mettre en œuvre ...

⊖ Comme le montrent les courbes de dispersion présentées à la section 4.2.3.d, on ne peut pas choisir un pas de temps trop grand sans nuire à la précision du schéma. Nous verrons plus bas qu'une valeur adaptée à notre problème correspond à un "gain" d'un facteur 25 par rapport au schéma explicite. Mais on observe sur les figures (4.4, 4.15 et 4.8) que pour cette valeur de α, la dispersion s'est sérieusement dégradée. Elle bien plus mauvaise que celle du schéma semi-discret.

⊖ Un autre désavantage de cette méthode apparaît lorsqu'on s'intéresse à la résolution du problème complet de modélisation de la guitare. Nous l'avons déjà dit à la section précédente, on utilise un méthode de domaines fictifs pour la résolution du problème d'interaction plaque-air (*cf.* chapitre 2).

Si on choisit le schéma explicite ou la méthode pseudo spectrale pour la résolution de l'équation de plaque, on est amené à inverser un système de la forme :

$$\begin{pmatrix} M_h^p & -B^\top \\ B^\top & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{p_h} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \tag{4.136}$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange qui s'interprête comme le saut de pression à la surface de la guitare et A est une matrice symétrique définie positive.

Dans ce cas, on peut montrer que la résolution se ramène en fait en l'inversion de la matrice $C = A + B^\top (M_h^p)^{-1} B$ qui est symétrique définie positive, le reste des calculs étant alors explicite puisque la matrice de masse M_h^p est diagonale. La taille de C est nettement inférieure à la taille du système ci dessus et elle possède une structure bande essentiellement creuse, donc sa résolution par la méthode de Cholesky est très efficace.

Si on choisit un schéma implicite sur la plaque, on sera alors amené à résoudre un système linéaire matriciel de la forme :

$$\begin{pmatrix} M_h^p + K_h & -B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{p_h} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \tag{4.137}$$

3. disons par exemple qu'il faut au moins 3 secondes de son pour pour pouvoir apprécier correctement son extinction; cela conduit à un nombre de pas de temps qui est nettement supérieur à la taille de la matrice à inverser

Ce système n'est pas symétrique. Pour le résoudre, on peut utiliser la méthode SYMMLQ, qui consiste à réécrire ce système sous la forme d'un système symétrique non positif, et à résoudre ce dernier par une variante du gradient conjugué.

Ainsi, la résolution du problème d'interaction plaque-air est nettement plus coûteuse si on choisit de discrétisation l'équation de plaque avec le schéma implicite.

4.4.3 Avantages et inconvénients de la méthode pseudo-spectrale

⊕ On peut choisir un pas de temps absolument quelconque, puisqu'on effectue une résolution exacte en temps. La précision du schéma est celle du schéma semi-discrétisé en espace, donc elle est indépendante du choix du pas de et ce sans perturber la précision du schéma. Bien entendu, comme il est précisé dans la remarque (4.8), il faut tout de même prendre un pas de temps qui échantillonne correctement le signal, mais ceci est vrai pour n'importe quel schéma.

⊕ La méthode pseudo-spectrale permet en fait de ne calculer que quelques modes (en pratique, on n'en calcule que 50, alors que le nombre total de modes est 3230!). Ceci aura plusieurs conséquences heureuses que nous précisons plus bas. En particulier, les calculs effectués à chaque pas de temps sont très peu importants, voire négligeable, ce est un avantage décisif lorsqu'on veut réaliser des expériences numériques sur un très grand nombre de pas de temps, comme cela est le cas pour la synthèse sonore.

D'autre part, on verra que le fait de choisir un petit nombre de modes joue de façon cruciale dans l'efficacité de la résolution du problème à 6 cordes (*cf.* section 3.6).

⊕ On peut choisir un modèle d'amortissement beaucoup plus général que celui proposé à la section 1.3.3, ainsi qu'il est précisé à la section 4.3.5.

⊖ Il faut diagonaliser la matrice $(M_h^p)^{-1}K_h$ au début des calculs, c'est à dire calculer les valeurs propres mais aussi les vecteurs propres. Cette méthode est donc coûteuse à la fois en temps de calcul, mais aussi en espace mémoire utilisé, puisque la matrice de passage est pleine. On ne peut donc l'appliquer que si la taille du problème est suffisamment réduite par rapport aux moyens de calcul.

Un des intérêts d'utiliser la méthode pseudo spectrale est qu'il ne faut calculer qu'un nombre limité de valeurs et vecteurs propres, ce qui réduit d'autant le coût de ce calcul et la mémoire nécessaire au stockage du résultat.

D'autre part, le véritable facteur limitant dans le modèle de guitare complet est la résolution du problème 3d qui est de très grande taille. En fait, le coût de la diagonalisation de la matrice au début des calculs est absolument négligeable devant le coût des itérations en temps du problème complet (concrètement, cette diagonalisation requiert seulement 3 mns, alors que le calcul total dure 3 heures ...).

⊖ Le système à résoudre à chaque pas de temps est certes diagonal, mais si on veut représenter les déformations de la plaque au cours du temps, il faut reconstruire la solution dans la base éléments finis, ce qui sous entend autant de produits (matrice pleine)(vecteur). Néanmoins, on ne cherche pas en général à observer les déformation sur de longs temps, donc ce soucis n'en est pas vraiment un.

⊖ Pour la résolution du problème complet de guitare, les matrices du schéma discret représentant les couplages entre la corde et la plaque et surtout entre la plaque et l'air deviennent pleines dans la base propre de $(M_h^p)^{-1}K_h$, alors que par construction elles sont essentiellement creuses dans la base éléments finis d'origine. L'efficacité de résolution de l'équation de plaque à chaque pas de temps se paye donc quelque part. Mais ici aussi, le fait de ne choisir qu'un nombre restreint de modes permet de limiter le surcoût engendré par les produits (matrice pleine) (vecteur).

4.4.4 Une comparaison plus quantitative

Comparons un peu plus précisément les coûts de calculs des trois schémas. On note :

- $\bar{k}$ le nombre moyen d'éléments non nuls de la matrice K_h
- B la largeur de la bande. Celle ci dépend du maillage, mais on peut chercher à la rendre la plus petite possible en utilisant un algorithme de type GIBBS.
- la taille de K_h est n_p.
- Δt est le pas de temps du schéma explicite et $G\Delta t$ est le pas de temps du schéma implicite ou celui de la méthode pseudo spectrale

Notre objectif est de déterminer pour quelles valeurs de G le schéma implicite est moins coûteux que le schéma explicite et à partir de quel instant la méthode pseudo spectrale est moins coûteuse que le schéma implicite.

Supposons que l'on veuille réaliser une expérience sur une durée T. Alors on calcule :

- le coût du schéma explicite à chaque pas de temps est un simple produit matrice-vecteur, soit $2\bar{k}n_p$ opérations élémentaires, donc le coût total du calcul est :

$$C_E(T) = \frac{2\bar{k}n_p}{\Delta t} T flops \tag{4.138}$$

- le coût de la factorisation de Cholesky de la matrice $(M_h^p + \Delta t K_h)$ est : $n_p(B^2+3B)flops$ (+ $n_p$extractions de racines carrées), et le coût de la résolution des deux systèmes triangulaires à chaque pas de temps est : $4Bn_p flops$ (on peut trouver ces estimations dans [38]). Donc le coût total du calcul est :

$$C_I(T) = \frac{4Bn_p}{G\Delta t} T + n_p(B^2+3B)flops. \tag{4.139}$$

- le coût de calcul de la diagonalisation de la matrice de raideur est $9n_p^3 flops$ (cette valeur correspond au nombre d'opérations nécessaires pour le calcul de *tous* les vecteurs propres par la méthode QR; il peut être diminué lorsqu'on ne veut en calculer qu'un nombre limité (voir [38] et [12]) et chaque pas de temps demande $8n_p$ flops.

$$C_s(T) = \frac{8n_p}{G\Delta t} T + 9n_p^3 flops. \tag{4.140}$$

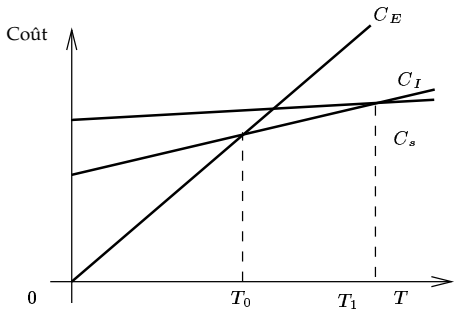


FIG. 4.19: *Comparaison du coût de calcul des schémas explicite ou implicite en fonction de la durée de l'expérience désirée*

Le coût de ces schémas est donc une simple fonction affine de T. Ces deux droites sont tracées sur la figure (4.19) Pour que le coût du schéma implicite soit plus petit que celui du schéma explicite à partir d'un certain seuil T_0, il faut que sa pente soit plus petite, soit :

$$\frac{2\bar{k}n_p}{\Delta t} > \frac{4Bn_p}{G\Delta t}, \tag{4.141}$$

et donc :

$$G > \frac{2B}{\bar{k}} \tag{4.142}$$

Et dans ce cas, on a :

$$T_0 = \frac{\Delta t(B^2+3B)}{2\bar{k} - 4B/G}, \tag{4.143}$$

D'autre part on a :

$$T_1 = G\Delta t \frac{9n_p^2 - (B^2+3B)}{4B-8}, \tag{4.144}$$

où T_1 est le seuil à partir duquel le schéma pseudo spectral est moins coûteux que celui du schéma implicite.

On voit donc ici qu'il est primordial d'optimiser la largeur de bande de la matrice K_h si l'on veut que le schéma implicite soit plus performant que le schéma explicite. Plutôt que de s'attarder plus longtemps sur des considérations générales, regardons un exemple concret, correspondant au maillage que nous utilisons effectivement pour ce modèle de guitare. Les valeurs numériques sont alors :

$$n_p = 3230, \quad \bar{k} \approx 51, \quad B = 330, \quad \text{et} \quad \Delta t = 8,16\ 10^{-7} s, \tag{4.145}$$

On calcule alors que le schéma implicite devient plus efficace dés que l'on prend $G > 13$. Pour que cela devienne vraiment intéressant, il faut bien sûr prendre une plus grande valeur de G, car à coût égal, autant faire de l'explicite qui est plus facile à mettre en œuvre.

On pratique, il faudrait prendre $G = 25$ pour que les calculs soient abordables. Cela conduit à une fréquence d'échantillonage de $49000Hz$ (ce qui est déjà grand). Dans ce cas, on calcule $T_0 \approx 1.8ms$, ce qui revient presque à dire que le schéma implicite est plus efficace que le schéma explicite pour tout T. Néanmoins, pour cette valeur de G, la dispersion numérique du schéma implicite est déjà nettement plus mauvaise que celle du schéma semi-discret si le nombre de points par longueur d'onde est insuffisant.

D'autre part, on calcule $T_1 \approx 1.2s$. Ainsi, malgré un temps de calcul préliminaire très élevé le schéma pseudo spectral rattrape suffisamment rapidement son retard, grâce à un coût négligeable à chaque pas de temps, puisque notre objectif est de calculer jusqu'à au moins 3 s. Cet argument est primordial pour justifier le coût de la diagonalisation de la matrice K_h.

4.4.5 Conclusion

Il n'est pas vraiment nécessaire de s'étendre après la lecture des trois sections qui précèdent. Le schéma explicite est totalement hors jeu. Et si le schéma implicite est clairement moins coûteux, on lui préférera sans hésiter la méthode pseudo spectrale, ne serait ce que parce que la dispersion numérique se dégrade rapidement pour de grandes valeurs du pas de temps, ce qui nuit à la souplesse d'utilisation de ce schéma. En outre, rappelons que nous apprêtons à réaliser des calculs sur un très grand nombre de pas de temps. Même si la méthode spectrale devenait moins coûteuse beaucoup plus tard que dans l'exemple précédent, elle resterait plus compétitive (ce sera le cas par exemple de l'expérience numérique réalisée à la section 5.4 où le pas de temps Δt est beaucoup moins petit).

D'autre part, le fait que la dispersion numérique de l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ soit si mauvaise, et en particulier si dispersive dans certaines directions dés que le maillage n'est pas isotrope, nous incite à choisir l'approximation en espace $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$. Ce choix est confirmé par les résultats numériques présentés dans le chapitre suivant.

Dans tout ce qui suit, nous choisirons donc de résoudre l'équation de plaque à l'aide de l'approximation en espace $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ et d'utiliser la méthode pseudo spectrale pour la discrétisation en temps.

Remarque 4.12 *On a vu que le développement limité de la dispersion numérique du schéma implicite est meilleur que celui de la dispersion numérique du schéma semi-discret. Par conséquent, le schéma implicite est plus précis si on est dans un intervalle de fréquence où ce développement limité est encore valable. Si tel était le cas, il pourrait alors être intéressant de diagonaliser la matrice et de résoudre le schéma en temps par la méthode implicite dans la base propre de l'opérateur de plaque discret, de manière à conjuguer l'efficacité des calculs sur un grand nombre de pas de temps et l'amélioration de la dispersion numérique induite par le schéma implicite.*

Chapitre 5

Résultats numériques

On termine cette partie par quelques expériences numériques destinées à confirmer les résultats de notre analyse, tant sur le choix d'une discrétisation spatiale que sur le choix d'une discrétisation temporelle. de l'équation de plaque seule.

L'objectif de cette étude numérique concernant la discrétisation spatiale est de montrer l'intérêt de la montée en ordre, de comparer les résultats donnés par les différentes approximations spatiales $P_1 - P_1^4$, $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$, et de comparer les résultats que l'on obtient à ce qu'on a pu trouver dans la littérature.

Concernant la discrétisation temporelle, on compare les résultats obtenus avec les trois méthodes sur un problème modèle. En outre, on observe l'effet de la troncature lorsqu'on utilise la méthode spectrale, afin de vérifier *empiriquement* que seuls les modes dont la fréquence est inférieur à la fréquence de coupure de l'excitation sont excités.

La conclusion générale à laquelle on aboutit est qu'il faut utiliser, parmi tous les choix proposés, l'approximation spatiale $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ en espace et la méthode résolution exacte en temps

5.1 Fréquences propres d'une plaque rectangulaire homogène isotrope encastrée

On considère une plaque rectangulaire de longueur 2 et de largeur 1, homogène isotrope, encastrée sur son bord. Dans ce cas, rappelons que l'opérateur de plaque est un bilaplacien. L'équation en temps est donnée par :

$$\boxed{\begin{cases} \rho_p \delta \dfrac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \delta^3 D \Delta^2 u_p = 0, \\ u = \partial_n u = 0, \quad \text{sur } \delta\omega, \end{cases}} \tag{5.1}$$

où $D = \dfrac{E}{12(1-\nu^2)}$ est le module de flexion. On peut alors choisir des paramètres "standards" pour cette plaque, puisque les fréquences propres sont alors proportionnelles à $\delta\sqrt{\dfrac{D}{\rho_p}}$. On prendra donc :

$$\delta = 1, \quad \rho_p = 1 \quad \text{et} \quad D = 1. \tag{5.2}$$

Les fréquences propres d'une telle plaque ne sont pas connues théoriquement. On doit donc se contenter de résultats numériques.

5.1.1 Calcul par raffinement de maillage

On calcule les 50 premières fréquences propres de cette plaque à l'aide des trois approximations spatiales $P_1 - P_1^4$, $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$, obtenues par la diagonalisation de la matrice approchant l'opérateur de plaque.

De manière à vérifier si la méthode a "convergé", on utilise pour chacune d'elle 3 maillages de plus en fin. Plus précisément, de manière à pouvoir comparer effectivement l'ordre 1 et l'ordre 2 à nombre de points similaire, on prend :

- maillages 40x20 , 60x30 et 80x40 , pour l'ordre un.
- maillages 20x10 , 30x15 et 40x20, pour l'ordre deux,

Les résultats de cette première expérience numérique sont présentés sur les figures (5.5) à (5.4).

Remarque 5.1 *Bien que toutes les données représentées soient en fait des valeurs discrètes qu'il conviendrait de représenter par des points ou des croix, comme cela est fait sur les figure 5.5 par exemple, on a préféré relier ces points par une ligne, ce qui améliore la lisibilité des figures, en particulier, lorsqu'on veut comparer sur une même figure deux résultats distincts, comme par exemple sur la figure 5.1.*

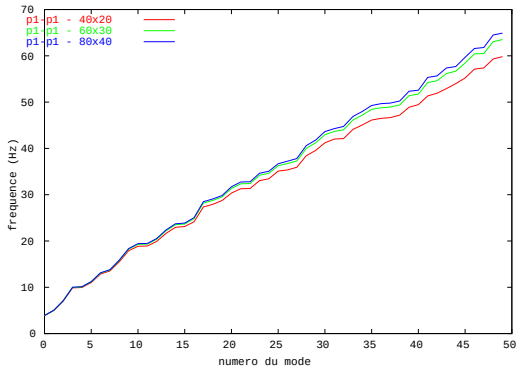


FIG. 5.1: *Fréquences propres d'une plaque rectangulaire homogène isotrope encastrée sur son bord, calculées avec l'approximation spatiale $P_1 - P_1^4$, pour les maillages 40x20 , 60x30 et 80x40*

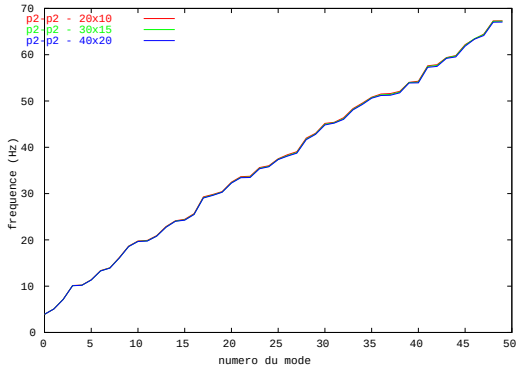


FIG. 5.2: *Fréquences propres d'une plaque rectangulaire homogène isotrope encastrée sur son bord, calculées avec l'approximation spatiale $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$, pour les maillages 20x10 , 30x15 et 40x20*

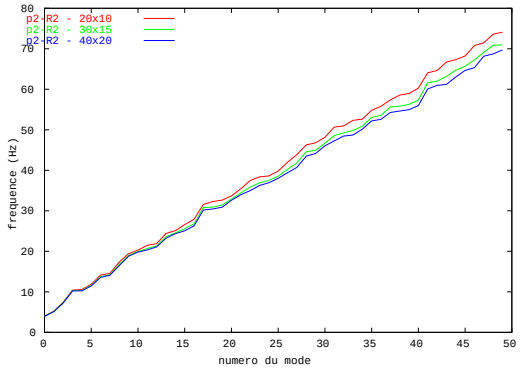


FIG. 5.3: *Fréquences propres d'une plaque rectangulaire homogène isotrope encastrée sur son bord, calculées avec l'approximation spatiale $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$, pour les maillages 20x10 , 30x15 et 40x20*

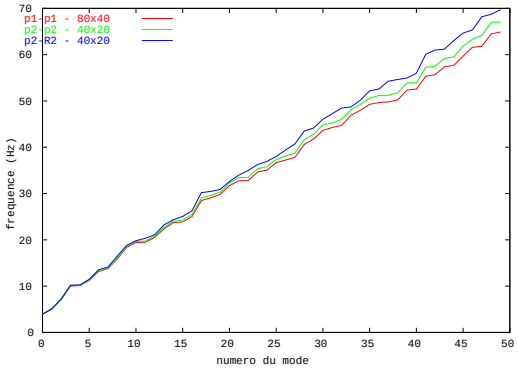


FIG. 5.4: *Comparaison des fréquences propres d'une plaque rectangulaire homogène isotrope encastrée sur son bord, calculées avec les approximations spatiales $P_1 - P_1^4$, $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$, pour les maillages les plus fins (resp. 80x40, 40x20 et 40x20)*

On peut faire les remarques suivantes :

- Le schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ est le plus mauvais, et ce dès les premières fréquences, comme on peut le voir sur la figure (5.5).
- Il est plus intéressant de prendre le schéma d'ordre deux $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ que le schéma d'ordre un $P_1 - P_1^4$, puisqu'à nombre de nœuds comparables, l'erreur commise par le premier est 3 fois inférieure à celle commise par le second.
- Lorsqu'on regarde la convergence des 50 premiers modes, on constate que seule l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ a "convergé", et ce dés le maillage le plus grossier. On peut alors légitimement considérer comme une **référence** le résultat obtenu avec cette approximation, sur le maillage le plus fin.
- Non seulement les approximation $P_1 - P_1^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ n'ont toujours pas convergé, malgré les raffinements successifs, mais en plus, elles diffèrent encore de la solution de référence susmentionnée, sur le maillage le plus fin. On voit donc l'intérêt de monter en ordre, tout du moins de choisir le schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ plutôt que le schéma $P_1 - P_1^4$.

5.1.2 Comparaison aux résultats de Sakata *et al.*

On compare en outre les résultats obtenus à ceux calculés par Sakata et Hosokawa dans [57]. Ils obtiennent une évaluation numérique très précise du déplacement d'une plaque rectangulaire encastrée telle que $l_x = 2l_y$, en effectuant un développement sur une double série trigonométrique, dont ils déduisent les premières pulsations propres. Les résultats de cette comparaison sont regroupés dans le tableau (5.1) et tracés sur la figure (5.5).

Remarque 5.2 *On prendra garde au fait que nous présentons ici les **fréquences** tandis que les valeurs fournies dans [57] sont les **pulsations** (il y a juste un facteur 2π entre les deux, qui n'influe bien sûr pas sur le calcul d'erreur).*

Réf. [57]	$P_1 - P_1^4$		$\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$		$\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$	
fréquence (en Hz)	fréquence (en Hz)	erreur (en %)	fréquence (en Hz)	erreur (en %)	fréquence (en Hz)	erreur (en %)
3.91166	3.90	0.29	3.91	0.06	3.93	0.50
5.06526	5.05	0.36	5.07	0.10	5.11	1.10
7.12531	7.09	0.45	7.13	0.13	7.22	1.13
10.0794	10.02	0.56	10.10	0.15	10.22	1.14
10.1832	10.12	0.59	10.20	0.12	10.25	0.73

TAB. 5.1: *Comparaison entre les fréquences données dans [57] et les valeurs calculées pour les trois approximations spatiales sur les maillages les plus fins*

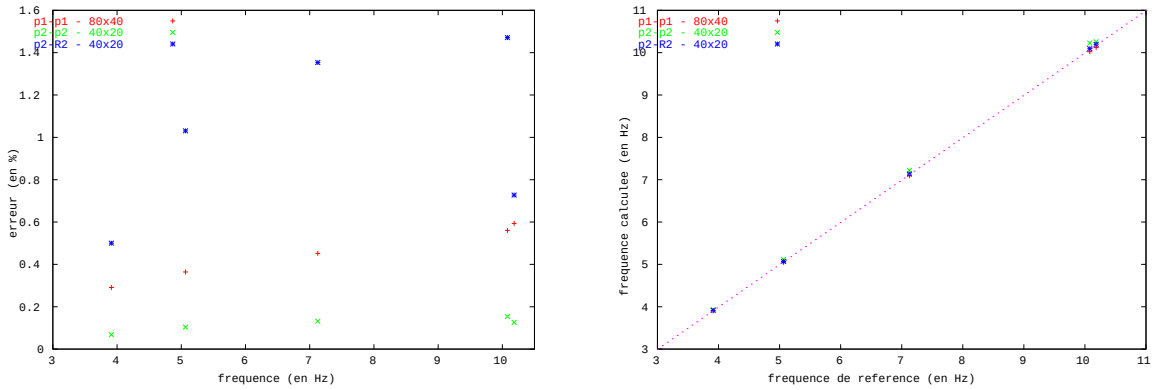


FIG. 5.5: *Erreur commise par les approximations $P_1 - P_1^4$, $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ pour les maillages les plus fins (resp. 80x40, 40x20 et 40x20) — A gauche, les courbes représentent l'écart relatif $(f_{calc} - f_{ref})/f_{ref}$, où f_{calc} et f_{ref} sont respectivement les fréquences propres calculées et celles données dans [57] — A droite, on a tracé les fréquences calculées en fonction des valeurs de référence.*

5.2 Fréquences propres d'une plaque rectangulaire hétérogène encastrée

On effectue maintenant une expérience similaire à la précédente, mais cette fois ci, on suppose que la plaque n'est plus homogène. Plus précisément, on supposera cette plaque est composé de deux milieux homogènes isotropes, de modules de flexion distincts, $D_1 = 1$ et $D_2 = 2$ (voir (5.6)), de densité et d'épaisseur 1.

Nous n'avons pas trouvé de solution de référence dans le cas hétérogène dans la littérature. On effectuera donc un contrôle de convergence des 50 premiers modes. Les résultats obtenus dans ce cas sont présentés sur les figures (5.8) à (5.7).

On aurait pu espérer que le schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$ se comporte mieux sur cet exemple, dans la mesure où il autorise des discontinuités de la composante tangentielle du moment fléchissant. Il n'en est malheureusement rien. Les remarques qu'on peut faire sont en fait identiques à celles données dans le cas homogène.

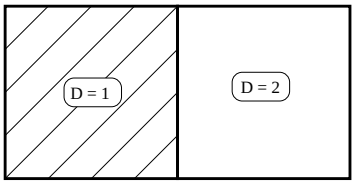


FIG. 5.6: *Une plaque rectangulaire hétérogène composée de 2 couches homogènes.*

Ces deux premières expériences numériques confirment les résultats théoriques de dispersion concernant les faibles performances du schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$.

Puisqu'en outre le fait de monter en ordre est nettement justifié, nous nous contenterons dorénavant de regarder les résultats donnés par l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$.

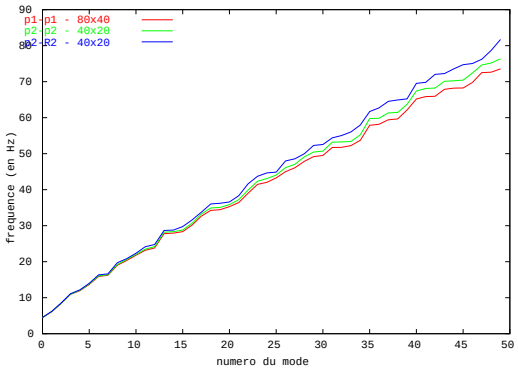


FIG. 5.7: *Comparaison des fréquences propres d'une plaque rectangulaire hétérogène encastrée sur son bord, calculées avec les approximations spatiales $P_1 - P_1^4$, $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ et $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$, pour les maillages les plus fins (resp. 80x40, 40x20 et 40x20)*

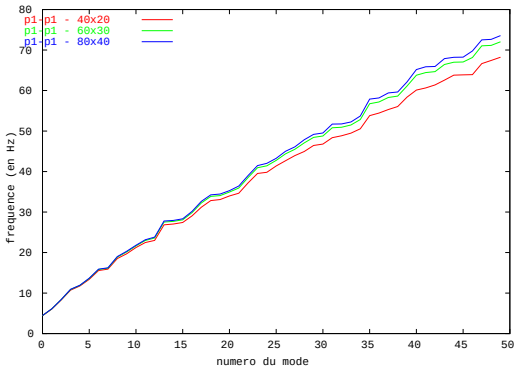


FIG. 5.8: *Fréquences propres d'une plaque rectangulaire hétérogène encastrée sur son bord, calculées avec l'approximation spatiale $P_1 - P_1^4$, pour les maillages 40x20 , 60x30 et 80x40*

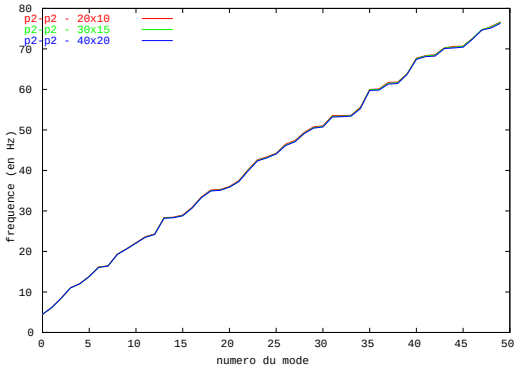


FIG. 5.9: *Fréquences propres d'une plaque rectangulaire hétérogène encastrée sur son bord, calculées avec l'approximation spatiale $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$, pour les maillages 20x10 , 30x15 et 40x20*

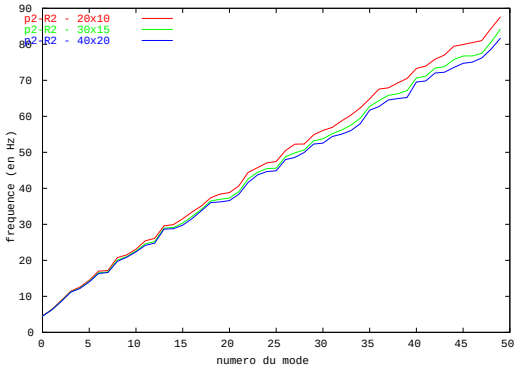


FIG. 5.10: *Fréquences propres d'une plaque rectangulaire hétérogène encastrée sur son bord, calculées avec l'approximation spatiale $\tilde{P}_2 - \tilde{R}_2$, pour les maillages 20x10 , 30x15 et 40x20*

5.3 Fréquences propres d'une plaque circulaire homogène isotrope encastrée

On considère à présent le cas d'une plaque circulaire homogène encastrée, pour laquelle on a des valeurs théoriques de fréquences propres à partir des fonctions de Bessel, ce qui permettra de valider notre approximation dans le cas d'un maillage irrégulier.

Les fréquences théoriques d'une plaque circulaire de rayon a homogène isotrope encastrée, données par Fletcher et Rossing dans [32], sont présentés tel quel dans le tableau (5.2). Elles proviennent de calculs effectués par Leissa ([47]).

La comparaison des fréquences théoriques avec les valeurs calculées par le schéma $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ est présentée dans tableau (5.3) et sur la figure (5.12). Les calculs sont effectués sur deux maillages. Le premier, noté $\mathcal{C}_1$ contient 665 nœuds avec un pas moyen de 2,3 cm et le second est obtenu en raffinant $\mathcal{C}_1$ en découpant chaque triangle en 4. Il contient 2561 nœuds et possède donc un pas moyen de 1,15 cm (voir figure (5.11)). On a choisi ici encore des valeurs standards pour les paramètres physiques (voir (5.2)).

$f_{01} = 0.4694\frac{c_L h}{a^2}$	$f_{11} = 2.08 f_{01}$	$f_{21} = 3.41 f_{01}$	$f_{31} = 5.00 f_{01}$	$f_{41} = 6.82 f_{01}$
$f_{02} = 3.89 f_{01}$	$f_{12} = 5.95 f_{01}$	$f_{22} = 8.28 f_{01}$	$f_{32} = 10.87 f_{01}$	$f_{42} = 13.71 f_{01}$
$f_{03} = 8.72 f_{01}$	$f_{13} = 11.75 f_{01}$	$f_{23} = 15.06 f_{01}$	$f_{33} = 18.63 f_{01}$	$f_{43} = 22.47 f_{01}$

TAB. 5.2: *Fréquences propres d'une plaque circulaire de rayon a isotrope encastrée.* $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$

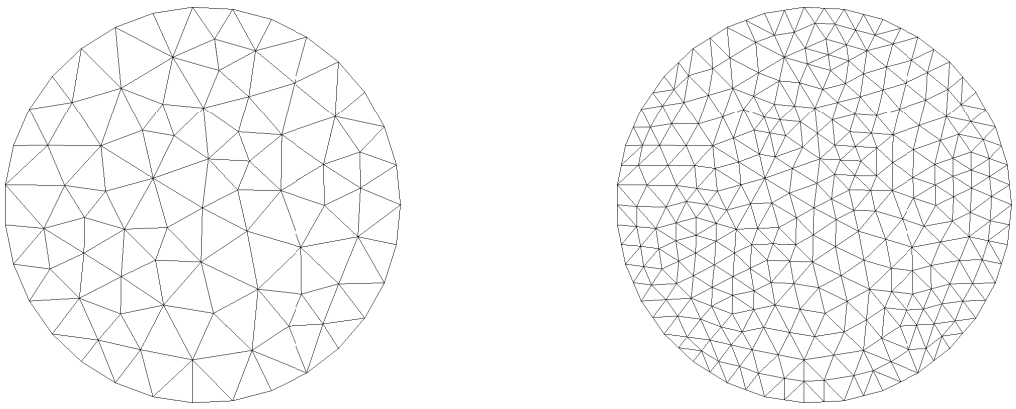


FIG. 5.11: *Maillages du cercle unité* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$.

Réf. [32]	$\mathcal{C}_1$		$\mathcal{C}_2$	
fréquence (en Hz)	fréquence (en Hz)	erreur (en %)	fréquence (en Hz)	erreur (en %)
0.4694	0.474275	1.03856	0.47054	0.242863
0.976352	0.989646	1.3616	0.979955	0.369031
1.60065	1.62812	1.71592	1.60899	0.520784
1.82597	1.61252	1.85541	1.83501	0.495302
2.347	1.54325	2.38322	2.35637	0.399237
2.79293	1.64129	2.83877	2.80849	0.557126
3.20131	1.77996	3.25829	3.21881	0.546716
3.88663	1.29645	3.93702	3.90917	0.579884
4.09317	1.48375	4.1539	4.12018	0.659937
5.10238	1.14108	5.1606	5.13595	0.657972
5.51545	1.199	5.58158	5.55402	0.699307
6.43547	1.0684	6.3667	6.48113	0.709446
7.06916	1.05155	7.1435	7.11963	0.71389
8.74492	1.2491	8.63568	8.80847	0.72
10.547418	1.0812	10.433379	10.6236	0.72

TAB. 5.3: *Comparaison entre les fréquences théoriques et les valeurs calculées pour les deux maillages $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.*

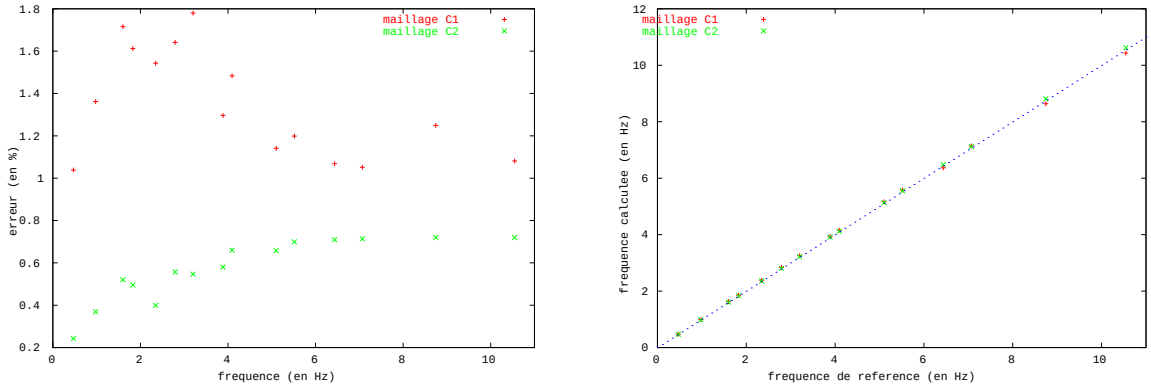


FIG. 5.12: *Erreur commise par l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ pour les maillages $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ — A gauche, les courbes représentent l'écart relatif $(f_{calc} - f_{th})/f_{th}$, où f_{calc} et f_{th} sont respectivement les fréquences propres calculées les fréquences théoriques — A droite, on a tracé les fréquences calculées en fonction des valeurs théoriques.*

5.4 Comparaison des trois discrétisations en temps

Afin d'illustrer le propos de ce chapitre sur la discrétisation en temps, on présente dans cette section quelques une expérience pour comparer en termes de précision et de temps de calcul les résultats obtenus avec chacun des trois schémas en temps présentés ici : le schéma explicite S_E, le schéma implicite S_I et la méthode *pseudo spectrale*. Ces expériences sont réalisées à l'aide de l'approximation spatiale $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$.

En outre, on illustre empiriquement qu'il suffit de prendre un petit nombre de modes, dépendant bien sûr de la fréquence de coupure de l'excitation, pour cette dernière méthode.

5.4.0.a Présentation de l'expérience

On considère une plaque rectangulaire telle que $l_x = 2l_y$, homogène isotrope encastrée, sans amortissements. L'expérience suivante sera réalisée sur un maillage de 30 points sur 15, comportant 2791 nœuds.

On exerce sur cette plaque une force :

$$f_p(x, y, t) = \delta_{(x_0,y_0)} h(t),$$

où $\delta_{(x_0,y_0)}$ est la distribution de Dirac centrée au point (x_0, y_0) et $h(t)$ est la fonction suivante (représentée sue la figure (1.12)) :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t/t_1)) & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi(t - t_1)/t_2)) & \text{pour } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.3}$$

où t_1 et t_2 sont deux paramètres. La fréquence de coupure de cette fonction est tout simplement $F_c = \max(1/t_1, 1/t_2)$. [1]

L'ensemble des paramètres décrivant cette expérience sont regroupés dans le tableau (5.4).

5.4.0.b Validation

- Afin de valider cette expérience, on montre tout d'abord la "convergence" des modes de cette plaque dont la fréquence est inférieure à $2500Hz$ (il y en a 22), c'est à dire un peu au dessus de la fréquence de coupure de l'excitation, en les comparant aux fréquences obtenues sur un maillage deux fois plus fin. L'erreur obtenue est inférieure à 0.27 % (voir figure (5.13)).

- D'autre part, la comparaison entre le résultat calculé par la méthode *pseudo spectrale* avec le maillage 30x15 et avec le maillage 60x30 est présenté sur la figure (5.14).

De manière à approcher correctement la partie temporelle de la force d'excitation, on a choisi pour ces deux calculs un pas de temps tel que la fréquence d'échantillonage soit égale à 10

1. Le fait de choisir une distribution de Dirac en espace permet d'exciter *spatialement* tous les modes de la plaque. Au total, on contrôle donc très précisément les modes excités en jouant sur la fréquence de coupure.

l_x	40 cm
l_y	20 cm
(x_0, y_0)	(12cm, 8cm)
t_1	0.0005 s
t_2	0.0005 s
F_c	2000 Hz
D	9
ρ_p	1
δ	1
h_p	1.33 cm

TAB. 5.4: *Paramètres physiques, géométriques et numériques de l'expérience numérique mise en œuvre pour la comparaison des trois schémas de discrétisations en temps.*

fois la fréquence de coupure, soit :

$$\Delta t^{SP} = 5\,10^{-5} s, \quad \text{et } F_e^{SP} = 20000 Hz. \tag{5.4}$$

- On a vérifié en outre que ce choix était suffisant, en prenant un pas de temps deux fois plus petit, sur le maillage le plus fin, résultat qui est présenté sur la figure (5.14).

Les courbes de la figure (5.14) représentent l'évolution au cours du temps de la vitesse de la plaque (v_p) au point d'excitation (x_0, y_0). Compte tenu de la fréquence des oscillations, on se concentre sur les 20 premières millisecondes.

Puisque dans les deux cas, les deux courbes sont collés, on peut considérer dans la suite que le résultat donné par la méthode *pseudo spectrale* sur le maillage 30x15 avec la fréquence d'échantillonage donnée par (5.4) est une **solution de référence**.

Remarque 5.3 *Ici, à cause des limitations de stockage dans le cas du maillage fin, il n'est pas envisageable de calculer tous les vecteurs propres de la matrice de raideur. Ce calcul est donc réalisé avec les 50 premiers modes, c'est à dire avec les modes dont la fréquence est inférieure à 5000 Hz, ce qui est nettement au dessus de la fréquence de coupure. On vérifiera dans le cas du maillage 30x15 que ce choix est largement suffisant, puisqu'en fait une vingtaine de modes suffisent.*

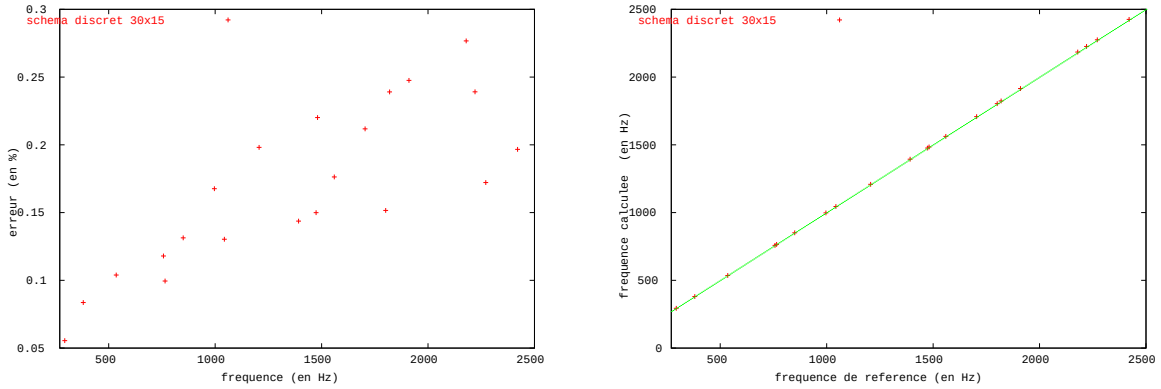


FIG. 5.13: *Validation — Comparaison entre les fréquences propres calculées sur le maillage 30x15 et les fréquences de références calculées sur un maillage 60x30 — A gauche, les courbes représentent l'écart relatif* $(f_{calc} - f_{ref})/f_{ref}$*, où* f_{calc} *et* f_{ref} *sont respectivement les fréquences propres calculées sur le maillage 30x15 et les fréquences de référence, calculées sur le maillage 60x30 — A droite, on a tracé les fréquences calculées en fonction des fréquences de référence.*

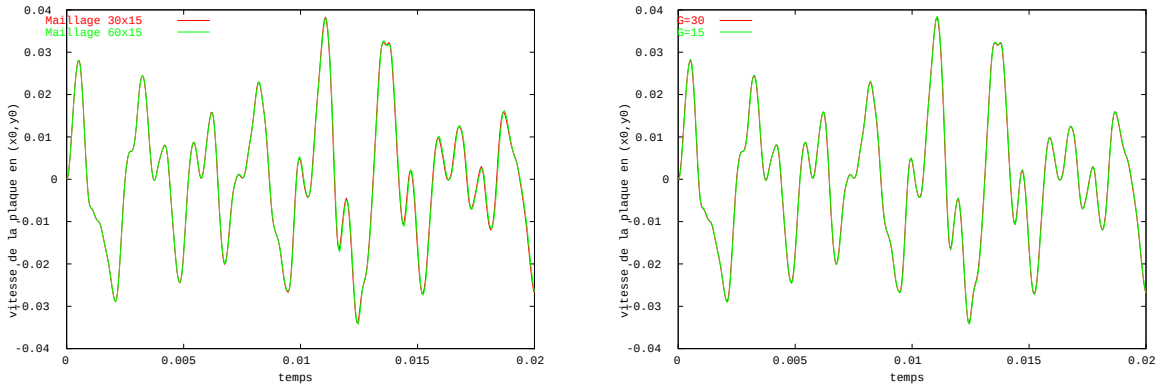


FIG. 5.14: *Validation — A gauche , comparaison entre la solution calculée sur le maillage 30x15 et la solution calculée sur le maillage 60x30 — A droite, comparaison entre la solution calculée pour* $\Delta t^{SP} = 5\,10^{-5} s$*, notée* $G = 30$ *(gain par rapport au schéma explicite) et pour* $\Delta t^{SP} = 2.5\,10^{-5} s$*, notée* $G = 15$ *sur le maillage 60x30.*

5.4.1 Calcul avec le schéma explicite

Ici, le pas de temps est imposé par la condition de stabilité. On calcule, à l'aide des résultats indiqués dans le tableau (4.1) :

$$\Delta t^E = 1.48\,10^{-6}\ s, \quad \text{soit } F_e^E = 675000 Hz$$

Le résultat est certes correct, comme on peut le voir sur la figure (5.15), mais le temps de calcul est sans commune mesure avec les deux autres cas (voir le tableau (5.5)).

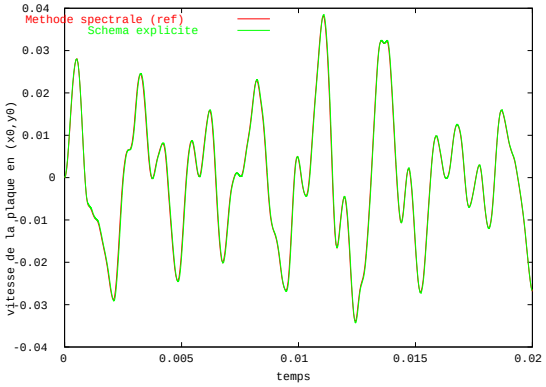


FIG. 5.15: *Comparaison entre la solution calculée par le schéma explicite et la solution calculée par la méthode pseudo spectrale (référence)*

5.4.2 Calcul avec le schéma implicite

Le choix du pas de temps est ici crucial. Si on le prend trop petit, le temps de calcul devient trop long. A l'inverse, si on le prend trop grand, c'est la précision du résultat qui en pâtit. On choisira pour montrer ce phénomène deux pas de temps Δt^I_{10} et Δt^I_{20} correspondant respectivement à une fréquence d'échantillonage égale à 10 et 20 fois la fréquence de coupure, soit :

$$\Delta t^I_{10} = 5\,10^{-5} s, \quad \text{et } \Delta t^I_{20} = 2.5\,10^{-5} s$$

Ces deux choix correspondent respectivement à un gain d'un facteur 30 et 15 par rapport au schéma explicite.

On peut voir sur la courbe de gauche de la figure (5.16) que le pas de temps Δt^I_{10}, suffisant dans le cas de la méthode pseudo spectrale ne l'est pas pour le schéma implicite, puisque les deux courbes sont disjointes dès les premières millisecondes. Le choix du pas de temps Δt^I_{20} conduit à un résultat plus acceptable, mais pour un temps de calcul deux fois plus long.

5.4.3 Comparaison des temps de calculs

On présente dans le tableau suivant les temps de calcul obtenus avec les trois schémas en temps pour diverses durée d'expériences. Dans le cas du schéma explicite, on s'est contenté

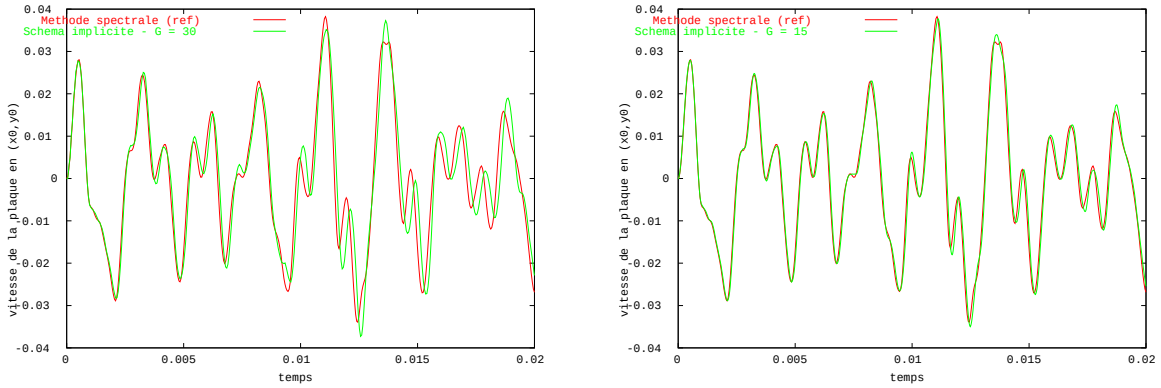


FIG. 5.16: *Comparaison entre la solution calculée par le schéma implicite et la solution calculée par la méthode pseudo spectrale (référence) — A gauche, $\Delta t^I = 5\,10^{-5} s$, notée $G = 30$ (gain par rapport au schéma explicite) — A droite, $\Delta t^I = 2.5\,10^{-5} s$, notée $G = 15$.*

Durée (en s)	0.02 s	0.1 s	0.5 s	1 s	3 s	5 s
Explicite (en s CPU)	34	171	852	1715	5145 *	8575 *
Implicite (en s CPU)	16	27	91	167	477	801
Pseudo spectral (en s CPU)	128.5	128.6	129.1	129.7	130.6	131.6

* Estimations

TAB. 5.5: *Comparaison des temps de calcul pour les trois approximations en temps.*

de calculer pour des durées inférieures à 1s. Les temps de calcul indiqué pour des durées supérieures sont des estimations. Les calculs pour le schéma implicite sont réalisés avec le pas de temps Δt^I_{20}. Les calculs pour la méthode *pseudo spectrale* sont réalisés avec 25 modes et le pas de temps Δt^{SP}.

Ce qui est particulièrement frappant dans ce tableau, c'est que le coût de la méthode spectrale est en fait uniquement réduit à la diagonalisation.

5.4.4 Comparaison des fréquences propres obtenues avec les trois schémas en temps

L'utilisation d'un schéma aux différences finies en temps modifie la valeur des fréquences propres de l'opérateur de plaque discret, comme on l'a vu à la section 4.2.3 dans le cas d'un maillage régulier infini. On pourrait déterminer ces fréquences propres en utilisant des techniques de traitement du signal, mais il est possible ici de calculer théoriquement la modification induite par les schémas implicite et explicite sur les fréquences propres.

Considérons par exemple le schéma explicite (4.8). On note v_h^n la solution discrète obtenue par ce schéma.

On note $(\lambda^2_{i,h})$ les valeurs propres[2] de l'opérateur de plaque discrèt et $(X_{i,h})$ les vecteurs

2. Il s'agit donc ici des pulsations propres.

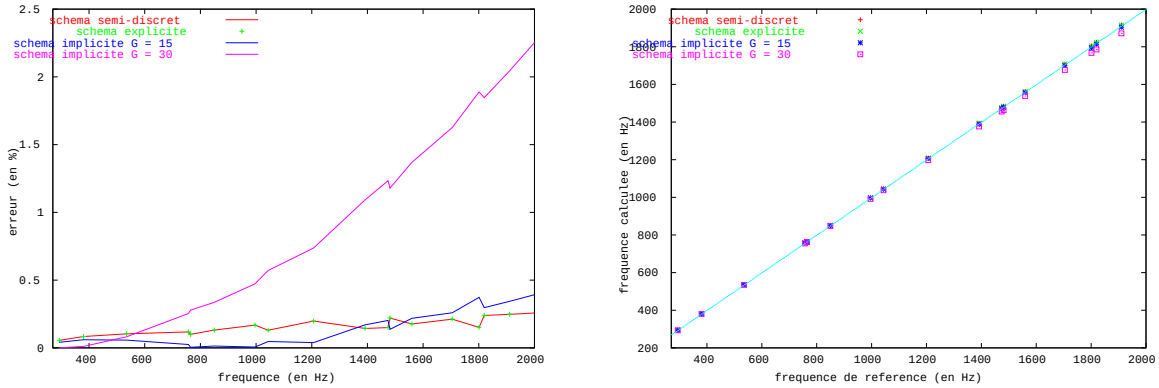


FIG. 5.17: *Comparaison entre les fréquences propres calculées sur le maillage 30x15 pour les trois schémas en temps et les fréquences de références calculées sur un maillage 60x30. Les fréquences propres du schéma implicite sont calculées pour $G = 15$ et $G = 30$ — A gauche, les courbes représentent l'écart relatif $(f_{calc} - f_{ref})/f_{ref}$, où f_{calc} et f_{ref} sont respectivement les fréquences propres calculées sur le maillage 30x15 et les fréquences de référence, calculées sur le maillage 60x30 — A droite, on a tracé les fréquences calculées en fonction des fréquences de référence.*

propres associés. On décompose alors v_h^n sur la base formée par ces vecteurs propres :

$$(v_h^n)_i = \sum_i \alpha_i^n X_{i,h},$$

On vérifie immédiatement, si on suppose que le second membre est nul, que α_i^n est solution de l'équation :

$$\frac{\alpha_i^{n+1} - 2\alpha_i^n + \alpha_i^{n-1}}{\Delta t^2} + \lambda_{i,h}^2 \alpha_i^n = 0.$$

Il s'agit d'une suite récurrente à deux termes. Sous la condition de stabilité, les racines du polynôme caractéristique sont complexes conjuguées, de module 1 et de produit 1. Tout ceci pour justifier de chercher α_i^n sous la forme suivante :

$$\alpha_i^n = \sin(\lambda_{i,h}^E n \Delta t). \tag{5.5}$$

$\lambda_{i,h}^E$ est la i$^{\text{ème}}$ pulsation propre donnée par le schéma implicite.

On obtient alors, selon un calcul similaire à celui présenté à la section 4.2.3 :

$$\boxed{\lambda_{i,h}^E = \frac{2}{\Delta t} \arcsin\left(\frac{\Delta t}{2} \lambda_{i,h}\right)} \tag{5.6}$$

De même, dans le cas du schéma implicite (4.9), on calcule :

$$\boxed{\lambda_{i,h}^I = \frac{2}{\Delta t} \arctan\left(\frac{\Delta t}{2} \lambda_{i,h}\right)} \tag{5.7}$$

On peut alors comparer les jeux de fréquences propres ainsi obtenues aux fréquences propres de l'opérateur discret calculées sur le maillage fin 60x30, que l'on considérera comme les valeurs de références. Les fréquences propres du schéma implicite sont calculées pour le deux valeurs de G utilisées dans cette section, à savoir $G = 15$ et $G = 30$.

On constate que pour $G = 30$, les fréquences du schéma implicite sont mauvaises, comme on pouvait s'y attendre compte tenu des résultat observé ci dessus. En revanche, dans le cas où $G = 15$, on observe que les fréquences obtenues par le schéma implicite sont *meilleures* que celles du schéma semi-discret en dessous de 1400 Hz. Si la fréquence de coupure de l'excitation était inférieure à 1400 Hz, on aurait alors intérêt à résoudre le problème semi-discret la schéma *implicite dans la base propre de l'opérateur de plaque* (voir la remarque (4.12)).

5.5 Troncature et fréquence de coupure

Pour terminer, regardons empiriquement quels sont les modes "utiles", c'est à dire les modes excités lors l'expérience numérique décrite dans la section précédente. Pour cela, on a tracé sur la figure (5.18) les courbes obtenues en tronquant successivement à 1, 5, 10, 15, 20 , 22 modes, que l'on compare à la solution de référence calculée avec tous les modes.

On constate donc que seuls 22 modes suffisent pour obtenir le bon résultat, ce qui correspond en fait à prendre les modes dont la fréquence est inférieure à 2500 Hz, soit un peu au dessus de la fréquence de coupure.

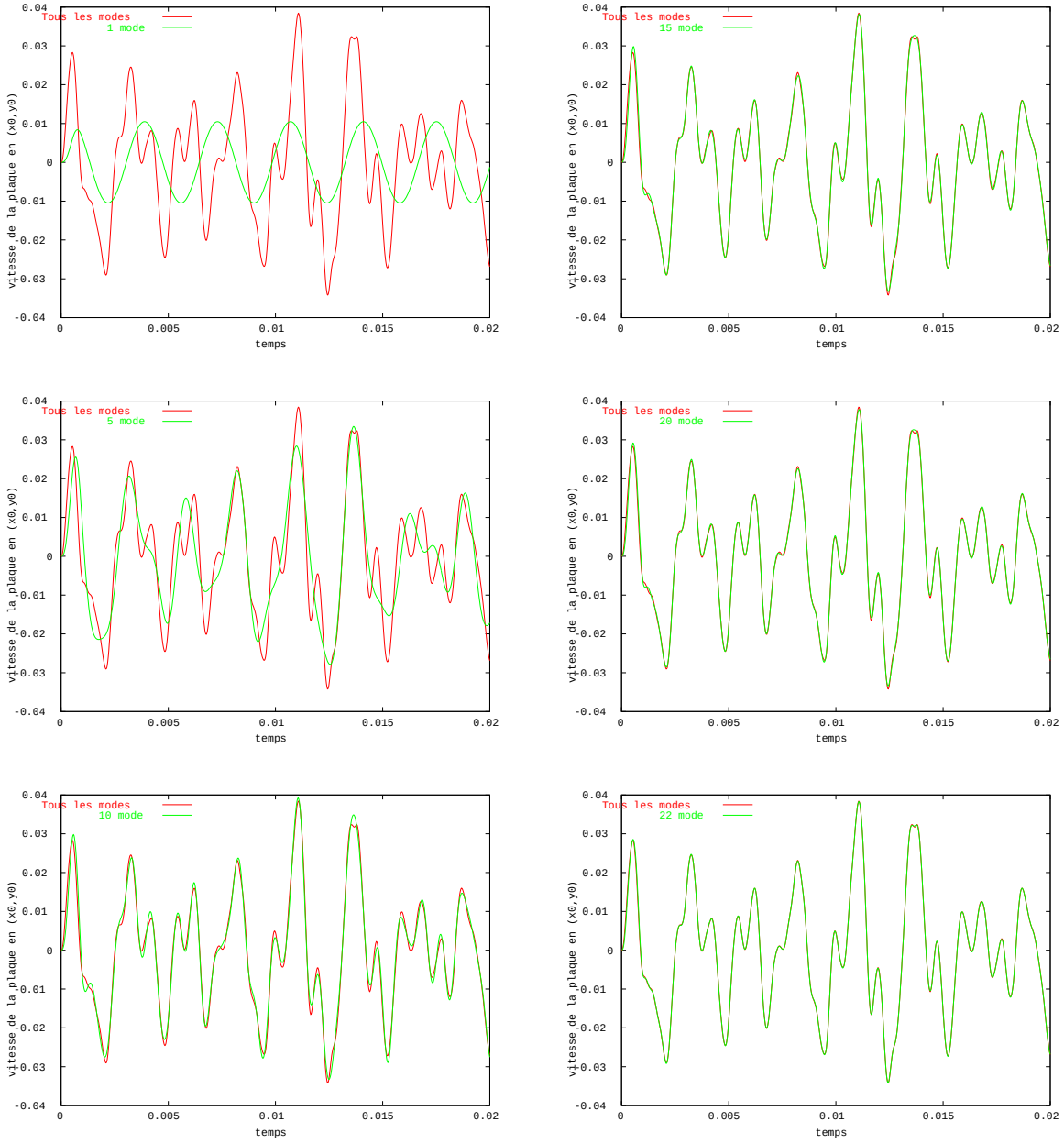


FIG. 5.18: *Comparaison entre la solution de référence calculée avec tous les modes et la solution calculée en tronquant successivement à 1, 5, 10, 15, 20, 22 modes (de haut en bas et de gauche à droite.*

Troisième partie

Résolution numérique du modèle de guitare

Chapitre 1

Analyse du couplage plaque-corde

On s'intéresse à présent à la résolution numérique du problème de couplage liant la corde à la table d'harmonie.

Notre objectif principal est de réussir à écrire une formulation variationnelle de ce problème qui aboutisse à un schéma discret pour lequel il est possible de définir une énergie qui se conserve ou qui décroît au cours du temps. Cette propriété est cruciale pour assurer la stabilité d'un tel schéma. En outre, il nous faut réussir à proposer une méthode de résolution qui soit compatible avec la méthode que nous avons mise en œuvre pour la résolution du problème de Kirchhoff-Love, présentée à la partie II.

On traite tout d'abord le cas où ni la corde, ni la table ne sont amorties. L'introduction de l'amortissement est traitée dans un deuxième temps, à la section 1.2.

Nous avons rencontré des difficultés pour obtenir une formulation mixte du problème amorti selon le même procédé que celui déterminé dans le cas non amorti, à cause de l'intervention du paramètre viscoélastique dans le terme de couplage entre la corde et le chevalet. D'autre part, la recherche d'une identité de l'énergie, même discrète, avec le modèle d'amortissement viscoélastique de corde présenté au chapitre 1, s'est soldée par un échec. Pour contourner ces deux problèmes, nous avons choisi d'effectuer une légère modification du modèle d'amortissement intrinsèque de la corde.

L'approximation spatiale du problème est immédiate.

Pour l'approximation temporelle, on utilise la méthode pseudo-spectrale présentée au chapitre 4 pour la plaque et des différences finies centrées d'ordre 2 en temps pour la corde. Ce schéma conduirait au classique schéma explicite centré dans le cas d'une corde découplée. La discrétisation présentée ici couple donc deux méthodes de discrétisation temporelle radicalement différentes. Cette fois ci c'est le terme d'amortissement fluide qui nous cause des soucis. Nous n'avons pas réussi à montrer théoriquement la stabilité lorsque le terme d'amortissement fluide sur la corde R_c est non nul. On obtient toutefois un résultat de stabilité sous la condition CFL usuelle lorsque R_c est nul. Ce schéma est utilisé en pratique et jusqu'à ce jour il s'avère stable. On propose également, en toute rigueur, un autre schéma pour lequel on est sûr de la stabilité, mais dont la résolution s'avère un peu plus délicate, puisqu'il correspond au schéma implicite dans le cas d'une corde découplée.

La dernière section de ce chapitre est consacrée à la résolution de ces deux schémas.

1.1 Le problème non amorti

Les inconnues de ce problème sont le mouvement de flexion de la plaque, noté $u_p(x,y,t)$, définie dans $\omega \times \mathbb{R}_+$, où ω est le domaine occupé par la plaque et le déplacement vertical de la corde, noté $u_c(x,t)$, défini sur $[0,l_c] \times \mathbb{R}_+$ où l_c est la longueur de la corde. Pour alléger cette présentation, dans la mesure où cela n'affecte pas du tout le couplage corde-plaque, on considère que la plaque est encastrée.

Le mouvement des inconnues u_c et u_p est régi par le système d'équations suivant, présenté au chapitre 1 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x,t) - c_c^2 \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} = f_c(x,t), \quad \text{dans }]0,l_c[\\ u_c(0,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \\ u_c(l_c,t) = \displaystyle\int_\omega G(x,y) u_p(x,y,t) dxdy, \quad \forall t \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_p \dfrac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} = -T\left(\partial_x u_c(l_c,t)\right) G(x,y), \quad \text{dans } \omega \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} + \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) = 0, \quad \text{dans } \omega, \\ u_p = 0, \quad \text{sur } \gamma_0, \\ \partial_n u_p = 0, \quad \text{sur } \gamma_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

auquel il convient d'ajouter des conditions initiales que nous supposerons nulles :

$$\begin{aligned} u_c(x,0) = 0,\ \partial_t u_c(x,0) = 0,\ \text{dans } [0,l_c] \\ u_p(x,y,0) = 0,\ \partial_t u_p(x,y,0) = 0,\ \text{dans } \omega. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Rappelons que l'on a l'estimation d'énergie suivante :

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \int_0^{l_c} f_c \partial_t u_c, \tag{1.3}$$

où :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^{l_c} \rho_c \left|\partial_t u_c\right|^2 + \frac{1}{2}\int_0^{l_c} T \left|\partial_x u_c\right|^2 + \frac{1}{2}\int_\omega \rho_p \left|\partial_t u_p\right|^2 + \frac{1}{2}\int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla}(u_p)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla}(u_p)). \tag{1.4}$$

1.1.1 Réécriture du problème

Pour résoudre l'équation de plaque, nous avons été amené à introduire deux inconnues intermédiaires, la vitesse de la plaque et le moment fléchissant (voir section 1.3) :

$$v_p = \partial_t u_p \quad \text{et } \underline{\underline{\mathcal{M}}} = \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p). \tag{1.5}$$

Il nous faut donc réécrire la condition de contact au chevalet :

$$\partial_t u_c(l_c,t) = \int_\omega G(x,y) v_p(x,y,t)\,dxdy, \forall t \geq 0. \tag{1.6}$$

et il est alors naturel de prendre la vitesse comme nouvelle inconnue sur la corde, ce qui revient à dériver par rapport au temps la première équation de (1.1). Ce faisant, on a "perdu" l'effort exercé par la corde sur la plaque, donné par :

$$-T\partial_x u_c(l_c,t) G(x,y). \tag{1.7}$$

Nous sommes donc amené à introduire également cette inconnue. Finalement, nous introduisons donc la vitesse de la corde v_c et la contrainte q, définies par :

$$v_c = \partial_t u_c \quad \text{et } q = T\partial_x u_c \tag{1.8}$$

Le problème (1.1) s'écrit à présent, à l'aide des inconnues v_c, q, v_p et $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$:

$$\begin{cases} \rho_c \partial_t v_c - \partial_x q = f_c, & \in]0, l_c[\\ \partial_t q - T\partial_x v_c = 0, & \in]0, l_c[\\ v_c(0,t) = 0, & \forall t \\ v_c(l_c,t) = \int_\omega G v_p, & \forall t, \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} \rho_p \partial_t v_p + \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} = -q(l_c,t) G, & \text{dans } \omega, \\ \partial_t \underline{\underline{\mathcal{M}}} - \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) = 0, & \text{dans } \omega, \\ v_p = \partial_n v_p = 0, & \text{sur } \gamma_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

1.1.2 Formulation variationnelle du problème non amorti

Ecrivons à présent une formulation variationnelle du problème (1.9, 1.10).

On multiplie la première équation de (1.9) par une fonction test $v_c^* \in \mathcal{U}$ supposée suffisamment régulière, et on intègre sur $]0, l_c[$. Puis, on multiplie la seconde par une fonction test $q^* \in \mathcal{Q}$ et on effectue une intégration par partie sur le deuxième terme. Les espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{Q}$ seront précisés plus loin. On obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \rho_c v_c v_c^* - \int_0^{l_c} \partial_x q v_c^* = \int_0^{l_c} f_c v_c^*, & \forall v_c^* \in \mathcal{U}, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \frac{1}{T} q q^* + \int_0^{l_c} \partial_x q^* v_c - \left[q^*(x,t) v_c(x,t)\right]_0^{l_c} = 0 & \forall q^* \in \mathcal{Q} \end{cases} \tag{1.11}$$

Les conditions au bord portant sur v_c (*ie.* les 2 dernières équations de (1.9)), conduisent à :

$$\left[q^*(x,t)v_c(x,t)\right]_0^{l_c} = q^*(l_c,t)\int_\omega Gv_p. \tag{1.12}$$

Pour que cette formulation ait un sens, il suffit de choisir :

$$\mathcal{U} = L^2(]0,l_c[) \quad \text{et } \mathcal{Q} = H^1(]0,l_c[). \tag{1.13}$$

Remarque 1.1 *Notons en particulier que dans ce cas $q^*(l_c)$ est bien défini, puisque les fonctions $H^1(]0,l_c[)$ sont continues.*

Remarque 1.2 *Dans cette formulation donc, les conditions au bord portant sur v_c sont traitées comme une condition naturelle. On vérifie bien sûr que, sous des hypothèses de régularité suffisantes, l'interprétation de cette formulation conduit bien à ces conditions au bord.*

D'autre part, on procède comme à la section 1.3.1.c pour obtenir la formulation variationnelle de (1.10). Conformément au choix que nous avons effectué pour la discrétisation spatiale de l'équation de plaque au chapitre 4, nous supposerons ici que l'espace du moment fléchissant est $(H^1(\omega))^4$. Puisque le couplage n'intervient que sous la forme d'un terme au second membre de la première équation de (1.10), celui ci n'a pas d'incidence sur les calculs effectués au chapitre 1, donc ceux ci se transposent directement ici en posant $f_p = -q(l_c,t)$. On obtient finalement le problème variationnel suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } v_c : [0,T] \to \mathcal{U},\ q : [0,T] \to \mathcal{Q},\ v_p : [0,T] \to \mathcal{V} \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X} \text{ tels que :} \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \rho_c v_c v_c^* - \int_0^{l_c} \partial_x q v_c^* = \int_0^{l_c} f_c v_c^*, \quad \forall v_c^* \in \mathcal{U}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \frac{1}{T} q q^* + \int_0^{l_c} \partial_x q^* v_c - q^*(l_c,t)\int_\omega Gv_p = 0 \quad \forall q^* \in \mathcal{Q}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}.\underline{\nabla} v_p^* = -q(l_c,t)\int_\omega Gv_p^*, \quad \forall v_p^* \in \mathcal{V}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*.\underline{\nabla} v_p = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X},
\end{array}\right. \tag{1.14}$$

avec :

$$\begin{array}{l}
\mathcal{U} = L^2(]0,l_c[) \quad \text{et } \mathcal{Q} = H^1(]0,l_c[). \\
\mathcal{V} = H_0^1(\omega) \quad \text{et } \mathcal{X} = (H^1(\omega))^4.
\end{array} \tag{1.15}$$

Remarque 1.3 *Il s'agit d'un problème mixte dont l'analyse rigoureuse selon la théorie de Babuska-Brezzi n'est pas possible à cause de la formulation mixte de plaque qui ne vérifie pas les hypothèses adéquates. Néanmoins, si l'on fait abstraction du couplage (!), précisons que cette formulation variationnelle de l'équation de corde est usuellement appelée formulation mixte "duale" (car elle est plus*

faible que la formulation standard de l'équation des ondes dans laquelle v_c est dans $H^1(]0,l_c[)$). Il est bien connu que cette formulation vérifie alors les deux hypothèses de la théorie des mixtes (voir par exemple [6]), à savoir :

- *La forme bilinéaire d définie par :*

$$d(q,v_c)=\int_0^{l_c}\partial_x q v_c,\quad \forall v_c\in L^2(]0,l_c[),\ q\in H^1(]0,l_c[), \tag{1.16}$$

vérifie la condition inf-sup, c'est à dire :

$$\exists k>0,\ \inf_{v_c\in L^2(]0,l_c[)}\ \sup_{q\in H^1(]0,l_c[)}\ \frac{d(q,v_c)}{\|q\|_{H^1}\,\|v_c\|_{L^2}}\geq k. \tag{1.17}$$

- *La forme bilinéaire m_q définie par :*

$$m_q(q,q^*)=\int_0^{l_c}\frac{1}{T}qq^*,\quad \forall q,q^*\in H^1(]0,l_c[), \tag{1.18}$$

est coercive sur le noyau à gauche de d, c'est à dire :

$$\exists\nu>0, m_q(q,q)\geq\nu\|q\|_{H^1}, \forall q\in\ker D, \tag{1.19}$$

où : $\ker D=\{q\in H^1(]0,l_c[)\ ;\ d(q,v_c)=0,\ \forall v_c\in L^2(]0,l_c[)\}$

Remarque 1.4 *On avait a priori ici le choix entre une une formulation mixte "duale" de l'équation de corde, pour laquelle $(v_c,q)\in L^2(]0,l_c[)\times H^1(]0,l_c[)$ et une formulation "primale", pour laquelle $(v_c,q)\in H^1(]0,l_c[)\times L^2(]0,l_c[)$.*

Dans ce dernier cas, l'effort exercé par la corde sur le chevalet serait traité comme une conséquence naturelle *de la formulation variationnelle, tandis que la condition de contact au chevalet serait introduite dans l'espace. Plus précisément, on aurait :*

$$(v_c^*,v_p^*)\in\left\{(v_c,v_p)\in H^1(]0,l_c[)\times H^1(\omega)\ ;\ v_c(l_c)=\int_\omega Gv_p\right\} \tag{1.20}$$

L'intérêt de la formulation duale est donc qu'on "découple" les espaces où sont choisis v_c et v_p, dans la mesure où on ne leur impose plus de vérifier la condition de contact au chevalet. On évite ainsi d'avoir à construire une approximation conforme de l'espace défini en (1.20). qui, outre une implémentation moins immédiate, rend la résolution du problème discret beaucoup plus malaisée (en particulier, on perd les propriétés de condensation de masse si chèrement recherchées).

Remarque 1.5 *L'énergie de ce problème coïncide avec l'énergie du problème initiale (1.4). On a :*

$$\mathcal{E}(t)=\int_0^{l_c}\rho_c\left|v_c\right|^2+\int_0^{l_c}\frac{1}{T}\left|q\right|^2+\int_\omega\rho_p\left|\partial_t u_p\right|^2+\int_\omega\mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}:\underline{\underline{\mathcal{M}}}. \tag{1.21}$$

où $\mathbf{A}=(\mathbf{C})^{-1}$.

L'identité de l'énergie s'écrit maintenant : $\dfrac{d\mathcal{E}(t)}{dt}=\displaystyle\int_0^{l_c}f_c v_c$.

1.2 Le problème amorti

Regardons à présent comment la formulation précédente est modifiée par l'introduction des termes d'amortissement. Ce problème est présenté dans le chapitre 1. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x,t) - c_c^2(1+\beta\dfrac{\partial}{\partial t})\dfrac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + R_c\dfrac{\partial u_c}{\partial t}(x,t) = f_c(x,t), \text{ dans }]0,l_c[\\ u_c(0,t) = 0, \forall t \geq 0, \\ u_c(l_c,t) = \displaystyle\int_\omega G(x,y)u_p(x,y,t)dxdy, \forall t \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_p\dfrac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - \operatorname{div}\underline{\operatorname{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} + R_p\rho_p\dfrac{\partial u_p}{\partial t} = -T(1+\beta\dfrac{\partial}{\partial t})(\partial_x u_c(l_c,t))G(x,y), \quad \text{dans } \omega \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} + \mathbf{C}\ (1+\eta\dfrac{\partial}{\partial t})\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_p) = 0, \quad \text{dans } \omega, \\ u_p = 0, \text{ sur } \gamma_0, \\ \partial_n u_p = 0, \text{ sur } \gamma_0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Rappelons que l'on la propriété de décroissance de l'énergie suivante :

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \int_0^{l_c} f_c\partial_t u_c - \int_0^{l_c} R_c\left|\partial_t u_c\right|^2 - \int_0^{l_c}\beta\left|\partial^2_{xt}u_c\right|^2 - \int_\omega R_p\left|\partial_t u_p\right|^2 - \int_\omega \eta\mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla}(\partial_t u_p)) : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla}(\partial_t u_p)). \tag{1.23}$$

où :

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^{l_c}\rho_c\left|\partial_t u_c\right|^2 + \int_0^{l_c} T\left|\partial_x u_c\right|^2 + \int_\omega \rho_p\left|\partial_t u_p\right|^2 + \int_\omega \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla}(u_p)) : \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla}(u_p)). \tag{1.24}$$

1.2.1 Réécriture du problème

Commençons par réécrire ce problème à l'aide des inconnues intermédiaires v_c, q, v_p et $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$, introduites plus haut :

$$\begin{cases} \rho_c \partial_t v_c - \partial_x q + R_c v_c = f_c, & \in]0, l_c[\\ \partial_t q - T(1 + \beta \partial_t)\partial_x v_c = 0, & \in]0, l_c[\\ v_c(0,t) = 0, \quad \forall t \\ v_c(l_c,t) = \int_\omega G v_c, \quad \forall t, \end{cases} \tag{1.25}$$

$$\begin{cases} \rho_p \partial_t v_p + \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} + R_p \rho_p v_p = -q(l_c,t) G, & \text{dans } \omega, \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} + \mathbf{C}\ (1 + \eta \dfrac{\partial}{\partial t}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) = 0, & \text{dans } \omega, \\ v_p = \partial_n v_p = 0, \text{ sur } \gamma_0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Il n'est pas du tout évident d'écrire une formulation variationnelle de ce problème pour laquelle on sache démontrer une propriété de décroissance de l'énergie (similaire à (1.23)).

La difficulté provient d'une part du fait que nous avons choisi d'écrire une formulation mixte "duale" de notre problème (*cf.* remarque (1.4)), pour laquelle l'énergie naturelle ne coïncide pas, dans le cas d'un problème viscoélastique, à celle du problème primale, comme c'est le cas dans le problème non amorti (voir remarque (1.7)). Il y a en fait une multitude d'énergie associées à un tel système, mais toutes ne sont pas adaptées. D'autre part, le couplage entre la corde et la plaque n'arrange pas les choses.

Pour arriver à nos fins, **nous avons finalement été amenés à modifier la loi de comportement viscoélastique sur la corde.** Cette modification repose sur la remarque suivante. Considérons une corde seule, soumise au seul amortissement viscoélastique, en l'absence d'effort extérieur. Son mouvement est régi par :

$$\begin{cases} \rho_c \partial_t v_c - \partial_x q = 0, \\ \partial_t q - T(1 + \beta \partial_t)\partial_x v_c = 0, \end{cases} \tag{1.27}$$

Injectant la première équation dans la seconde, on obtient le problème équivalent suivant :

$$\begin{cases} \rho_c \partial_t v_c - \partial_x q = 0, \\ \partial_t q - T \partial_x v_c - \dfrac{\beta}{\rho_c} \partial^2_{xx} q = 0. \end{cases} \tag{1.28}$$

Remarque 1.6 *On vérifie, dans le cas où il y a un terme d'amortissement fluide, et toujours en supposant que le second membre est nul, que ce choix conduit au problème suivant :*

$$\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x,t) - c_c^2 (1 + R_c \beta + \beta \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + R_c \frac{\partial u_c}{\partial t}(x,t) = 0. \tag{1.29}$$

Le nouveau modèle d'amortissement introduit ici n'est donc pas tout à fait équivalent au modèle du départ. Néanmoins, en pratique le terme $R_c\beta$ est tout petit devant 1 (voir tableau (3.1)), donc il s'agit d'une perturbation négligeable.

C'est cette nouvelle loi de comportement que nous prendrons désormais.

Notation 1.1 *Pour simplifier les écritures, nous noterons*

$$\beta \ := \ \frac{\beta}{\rho_c}.$$

1.2.2 Formulation variationnelle du problème amorti

On considère à présent le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_c \partial_t v_c - \partial_x q + R_c v_c = f_c, \quad \in]0, l_c[\\ \partial_t q - T\partial_x v_c - T\beta\partial^2_{xx} q = 0, \quad \in]0, l_c[\\ v_c(0,t) = 0, \quad \forall t \\ v_c(l_c,t) = \int_\omega G v_c, \quad \forall t, \end{array}\right. \tag{1.30}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_p \partial_t v_p + \mathrm{div}\, \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} + R_p \rho_p v_p = -q(l_c,t) G, \quad \text{dans } \omega, \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} + \mathbf{C}\ (1 + \eta \dfrac{\partial}{\partial t}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) = 0, \quad \text{dans } \omega, \\ v_p = \partial_n v_p = 0, \ \text{sur } \gamma_0, \end{array}\right. \tag{1.31}$$

Procédant comme à la section précédente, on multiplie la première équation de (1.30) par une fonction test $v_c^* \in \mathcal{U}$ supposée suffisamment régulière, et on intègre sur $]0, l_c[$. Puis, on multiplie la seconde par une fonction test $q^* \in \mathcal{Q}$ et on effectue une intégration par partie sur le second et le troisième terme. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \rho_c v_c v_c^* - \int_0^{l_c} v_c^* \partial_x q \ + R_c \int_0^{l_c} v_c v_c^* = \int_0^{l_c} f_c v_c^*, \quad \forall v_c^* \in \mathcal{U}, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \frac{1}{T} q q^* + \int_0^{l_c} v_c \partial_x q^* \int_0^{l_c} \beta \partial_x q \partial_x q^* - q^*(l_c,t) v_c(l_c,t) - \beta q^*(l_c,t)\partial_x q(l_c,t) = 0, \quad \forall q^* \in \mathcal{Q}. \end{array}\right. \tag{1.32}$$

Le terme $\beta q^*(l_c,t)\partial_x q(l_c,t)$ est malheureusement un peu parasite dans cette formulation. On ne sait rien a priori de son signe lorsqu'on fait le choix particulier $q^* = q$, ce qui est gênant pour obtenir une propriété de décroissance de l'énergie. Un moyen un peu radical de s'affranchir de ce problème consiste à l'annuler purement et simplement en choisissant un paramètre d'amortissement β variable, nul en l_c.

En pratique, on prend une fonction C^1, positive, constante sur $[0, l_c - 2l_\beta]$ et nulle sur $[l_c - l_\beta, l_c]$, où l_β est un petit segment de corde (voir la figure (1.1)). Ce choix particulier permettra en outre de simplifier la résolution du schéma d'approximation du problème (*cf.* section 1.4.5).

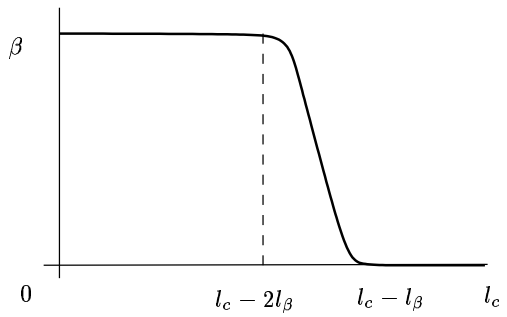


FIG. 1.1: *Le paramètre d'amortissement viscoélastique variable*

La seconde équation de (1.30) s'écrit donc maintenant :

$$\partial_t q - T\partial_x v_c - T\partial_x \beta(x)\partial_x q = 0, \quad \in]0, l_c[\tag{1.33}$$

On procède ensuite comme à la section 1.4 pour obtenir la formulation variationnelle de (1.31). On obtient finalement la formulation variationnelle du problème (1.30, 1.31) :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } v_c : [0,T] \to \mathcal{U},\ q : [0,T] \to \mathcal{Q},\ v_p : [0,T] \to \mathcal{V} \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X} \text{ tels que :} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \rho_c v_c v_c^* - \int_0^{l_c} \partial_x q v_c^* + R_c \int_0^{l_c} v_c v_c^* = \int_0^{l_c} f_c v_c^*, \quad \forall v_c^* \in \mathcal{U}, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \frac{1}{T} q q^* + \int_0^{l_c} \partial_x q^* v_c + \int_0^{l_c} \beta(x)\partial_x q^* \partial_x q^* - q^*(l_c,t)\int_\omega G v_p = 0 \quad \forall q^* \in \mathcal{Q}, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}.\underline{\nabla} v_p^* + R_p \int_\omega \rho_p v_p v_p^* = -q(l_c,t)\int_\omega G v_p^*, \quad \forall v_p^* \in \mathcal{V}, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + (1 + \eta\frac{d}{dt})\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*.\underline{\nabla} v_p = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}, \end{array}\right. \tag{1.34}$$

où :

$$\begin{array}{c} \mathcal{U} = L^2(]0,l_c[) \quad \text{et } \mathcal{Q} = H^1(]0,l_c[). \\ \mathcal{V} = H_0^1(\omega) \quad \text{et } \mathcal{X} = (H^1(\omega))^4. \end{array} \tag{1.35}$$

1.3 Discrétisation spatiale

Afin d'établir une approximation conforme du problème (1.34), on introduit les espaces de dimension finie suivant :

$$\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}, \quad \mathcal{Q}_h \subset \mathcal{Q}, \quad \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}, \quad \mathcal{X}_h \subset \mathcal{X}. \tag{1.36}$$

Le problème semi-discrétisé en espace s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } v_{c_h} : [0,T] \to \mathcal{U}_h,\ q_h : [0,T] \to \mathcal{Q}_h,\ v_{p_h} : [0,T] \to \mathcal{V}_h \ \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h : [0,T] \to \mathcal{X}_h \text{ tels que :} \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \rho_c v_{c_h} v_{c_h}^* - \int_0^{l_c} \partial_x q_h v_{c_h}^* + R_c \int_0^{l_c} v_{c_h} v_{c_h}^* = \int_0^{l_c} f_c v_{c_h}^*, \quad \forall v_{c_h}^* \in \mathcal{U}_h, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \frac{1}{T} q_h q_h^* + \int_0^{l_c} \partial_x q_h^* v_{c_h} + \int_0^{l_c} \beta(x) \partial_x q_h^* \partial_x q_h^* - q_h^*(l_c,t) \int_\omega G v_{p_h} = 0 \quad \forall q_h^* \in \mathcal{Q}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_{p_h} v_{p_h}^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h . \underline{\nabla} v_{p_h}^* + R_p \int_\omega \rho_p v_{p_h} v_{p_h}^* = -q_h(l_c,t) \int_\omega G v_{p_h}^*, \quad \forall v_{p_h}^* \in \mathcal{V}_h, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h : \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^* + (1 + \eta \frac{d}{dt}) \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^* . \underline{\nabla} v_{p_h} = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^*, \in \mathcal{X}_h,
\end{array}\right. \tag{1.37}$$

Ecriture matricielle Soient n_c, la dimension de $\mathcal{U}_h$, n_q, la dimension de $\mathcal{Q}_h$, n_p la dimension de $\mathcal{V}_h$ et n_M la dimension de $\mathcal{X}_h$. On introduit une base de $\mathcal{U}_h$, notée $(\lambda_i)_{1\le i\le n_c}$, une base de $\mathcal{Q}_h$, notée $(\zeta_k)_{1\le k\le n_q}$, une base de $\mathcal{V}_h$, notée $(\varphi_m)_{1\le m\le n_p}$ et une base de $\mathcal{X}_h$, notée $(\underline{\underline{\xi}}_p)_{1\le p\le n_M}$.

On est alors amené à résoudre le système différentiel suivant :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}
M_h^c \dfrac{dv_{c_h}}{dt} - D_h q_h + R_c M_h^c v_{c_h} = f_{c_h}, \\
M_h^q \dfrac{dq_h}{dt} + D_h^\top v_{c_h} + L_h^\beta q_h - J_h^\top v_{p_h} = 0, \\
M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt} - H_h^\top \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h + R_p M_h^p v_{p_h} = -J_h q_h, \\
M_h^{\mathcal{M}} \dfrac{d\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h}{dt} + (1 + \eta \dfrac{d}{dt}) H_h v_{p_h} = 0,
\end{array}\right.} \tag{1.38}$$

où $A^\top$ désigne la transposée d'une matrice A et :

$$
\begin{aligned}
(M_h^c)_{ij} &= \int_\omega \rho_c \lambda_i \lambda_j, \quad 1 \le i,j \le n_c,\\
(M_h^q)_{kl} &= \int_\omega \frac{1}{T}\zeta_i \zeta_j, \quad 1 \le k,l \le n_q,\\
(M_h^p)_{mn} &= \int_\omega \rho_p \varphi_m \varphi_n, \quad 1 \le m,n \le n_p,\\
(M_h^{\mathcal{M}})_{pq} &= \int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\xi}}_p : \underline{\underline{\xi}}_q, \quad 1 \le p,q \le n_M,\\
(D_h)_{ik} &= \int_0^{l_c} \lambda_i \partial_x \zeta_k, \quad 1 \le i \le n_c, \quad 1 \le k \le n_q,\\
(L_h^\beta)_{kl} &= \int_0^{l_c} \beta(x) \partial_x \zeta_k \partial_x \zeta_l \quad 1 \le k,l \le n_q,\\
(J_h)_{mk} &= \zeta_k(l_c) \int_\omega G\varphi_m, \quad 1 \le m \le n_p, \quad 1 \le k \le n_q,\\
(H_h)_{pm} &= \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\xi}}_p . \underline{\nabla} \varphi_m \quad 1 \le p \le n_M, \quad 1 \le m \le n_p,\\
(f_{c_h})_i &= \int_\omega f_c \lambda_i, \quad 1 \le i \le n_c.
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

1.3.1 Approximation des espaces $H^1(\omega)$ et $(H^1(\omega))^4$

Pour l'approximation par éléments finis des espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$, on utilisera l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ présentée à la section 2.1. Rappelons en particulier que celle ci conduit, grâce à la technique de condensation de masse, à une matrice de masse M_h^p diagonale et à une matrice de masse $M_h^{\mathcal{M}}$ diagonale par blocs 4x4.

1.3.2 Approximation des espaces $L^2(]0,l_c[)$ et $H^1(]0,l_c[)$

Pour l'approximation de $\mathcal{U} = L^2(]0,l_c[)$ et $\mathcal{Q} = H^1(]0,l_c[)$, on introduit un maillage uniforme de $]0,l_c[$, de pas $h_c = \frac{l_c}{M+1}$ où $M \in \mathbb{N}$ est le nombre de points intérieurs, formé des nœuds entiers et demi-entiers :

$$
x_i = ih_c, \quad 0 \le i \le M+1 \ \text{ et } \ x_{i+\frac{1}{2}} = (i+\frac{1}{2})h_c, \quad 0 \le i \le M. \tag{1.40}
$$

1.3.2.a Les éléments de Lagrange de bas degré

• On approche $H^1(]0,l_c[)$ à l'aide de l'espace d'éléments finis de Lagrange continus d'ordre 1, défini par :

$$
\boxed{\mathcal{Q}_h = \left\{ q_h \in C^0([0,l_c]) \ ; \ q_{h|[x_k,x_{k+1}]} \in P_1, \quad 0 \le k \le M+1 \right\}.} \tag{1.41}
$$

Rappelons que les degrés de liberté de cet espace, notés $(\zeta'_k)_{0\leq k\leq M+1}$ sont les valeurs aux nœuds entiers, soit :

$$\langle \zeta'_k, q_h \rangle = q_h(x_k), \quad 0 \leq k \leq M+1. \tag{1.42}$$

Ainsi, la base duale associée étant notée $(\zeta_k)_{0\leq k\leq M+1}$, on a :

$$q_h = \sum_{k=0}^{M+1} q_h(x_k)\zeta_k, \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h. \tag{1.43}$$

- D'autre part, on approche $L^2(]0, l_c[$ à l'aide de l'espace d'éléments finis de Lagrange discontinus d'ordre 0, défini par :

$$\boxed{\mathcal{U}_h = \left\{ v_{c_h} \in L^2(]0, l_c[) \ ; \ v_{c_h|[x_i, x_{i+1}]} \in P_0, \quad 0 \leq i \leq M \right\}.} \tag{1.44}$$

Les degrés de liberté de cet espace, notés $(\lambda'_i)_{0\leq i\leq M}$ sont les valeurs aux nœuds demi-entiers, soit :

$$\langle \lambda'_i, v_{c_h} \rangle = v_{c_h}(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad 0 \leq i \leq M \tag{1.45}$$

Ainsi, la base duale associée étant notée $(\lambda_i)_{0\leq i\leq M}$, on a :

$$v_{c_h} = \sum_{i=0}^{M} v_{c_h}(x_i)\lambda_i, \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h. \tag{1.46}$$

Remarque 1.7 *Ce choix d'espace d'approximation vérifie la conditions inf-sup discrète uniforme associée à la forme bilinéaire d définie en (1.16), c'est à dire (voir [6]) :*

$$\exists k_0 > 0, \inf_{v_{c_h} \in \mathcal{U}_h)} \sup_{q_h \in \mathcal{Q}_h} \frac{d(q_h, v_{c_h})}{\|q_h\|_{H^1} \|v_{c_h}\|_{L^2}} \geq k_0. \tag{1.47}$$

et aussi la condition de coercivité discrète uniforme associée à la forme bilinéaire m_{v_c} définie en (1.18), c'est à dire :

$$\exists \nu_0 > 0, m_q(q_h, q_h) \geq \nu_0 \|q_h\|_{H^1}, \forall q_h \in \ker D_h, \tag{1.48}$$

où : $\ker D_h = \{ q_h \in \mathcal{Q}_h \ ; \ d(q_h, v_{c_h}) = 0, \ \forall v_{c_h} \in \mathcal{U}_h \}$

Remarque 1.8 *Reprenant les notations ci dessus, on peut donner la dimension des espaces $\mathcal{U}_h$ et $\mathcal{Q}_h$ en fonction de M :*

$$n_c = M + 1 \quad \text{et } n_q = M + 2. \tag{1.49}$$

1.3.2.b Condensation de masse

La matrice de masse M_h^c est diagonale dans la base canonique de l'espace $\mathcal{U}_h$. Mais la matrice de masse M_h^q, elle, est tridiagonale dans la base canonique de $\mathcal{Q}_h$. Pour éviter d'avoir à l'inverser, on utilise la technique de condensation de masse qui réduit cette matrice à une diagonale en effectuant un calcul approchée à l'aide d'une formule de quadrature appropriée, sans nuire à la précision du schéma. On calcule ainsi :

$$\begin{aligned} M_h^c &= \rho_c h_c I \\ M_h^q &= \frac{h_c}{T}\,\mathrm{diag}(\frac{1}{2}, 1, \dots, 1, \frac{1}{2}). \end{aligned} \tag{1.50}$$

1.3.2.c Structure des matrices D_h, L_h^β et J_h

- La seule fonction de base de l'espace $\mathcal{Q}_h$ qui n'est pas nulle en l_c est ζ_{n_q}. On en déduit, considérant la définition de la matrice J_h, que seule la dernière colonne est non nulle. En outre, cette colonne est essentiellement creuse, puisque si le support de la fonction de base (φ_m) de l'espace $\mathcal{V}_h$ ne rencontre pas le support de G, on a immédiatement :

  $$(J_h)_{m,n_q} = \int_\omega G\varphi_m = 0.$$

  On notera $j_h \in \mathbb{R}^{n_p}$ la dernière colonne de J_h.

- La matrice L_h^β est tridiagonale, symétrique positive, ce qu'on vérifie aisément sur sa définition variationnelle :

  $$(L_h^\beta\, q_h, q_h) = \int_0^{l_c} \beta(x)\,|\partial_x q_h|^2 \tag{1.51}$$

  mais elle n'est pas définie pour le choix de fonction d'amortissement β que nous avons fait. Plus précisément, on supposera que $l_\beta > h_c$, (l_β est défini sur la figure (1.1)) pour qu'on ait :

  $$(L_h^\beta\, \zeta_k, \zeta_{n_q}) = \int_0^{l_c} \beta(x)\partial_x\, \partial_x dx = 0, \tag{1.52}$$

  puisqu'alors β est nulle sur le support de ζ_{n_q}.

  Ainsi, *la dernière ligne de L_h^β est nulle* (et également la dernière colonne, puisqu'elle est symétrique).

- Seules la diagonale principale et la seconde diagonale de la matrice D_h sont non nulles.

Remarque 1.9 *Si on avait supposé β constante (ce qui est le cas sur l'essentiel de l'intervalle $]0, l_c[$), ce choix conduirait à la classique approximation par différences finies en espace de l'équation de corde :*

$$\begin{cases} \rho_c \dfrac{d(v_{c_h})_{i+\frac{1}{2}}}{dt} - \dfrac{(q_h)_{i+1} - (q_h)_i}{h_c} + \rho_c R_c \dfrac{(v_{c_h})_{i+\frac{1}{2}} + (v_{c_h})_{i-\frac{1}{2}}}{2} = (f_{c_h})_i, \\ \dfrac{1}{T}\dfrac{d(q_h)_i}{dt} - \dfrac{(v_{c_h})_{i+\frac{1}{2}} - (v_{c_h})_{i-\frac{1}{2}}}{h_c} - \beta \dfrac{(q_h)_{i+1} - 2(q_h)_i + (q_h)_{i-1}}{h_c^2} = 0. \end{cases} \tag{1.53}$$

1.4 Discrétisation temporelle

On effectue à présent la discrétisation temporelle du problème semi-discret en espace. Nous avons décidé, suite à l'analyse sur la discrétisation temporelle de l'équation de plaque effectuée au chapitre 4, d'utiliser une technique de résolution exacte pour la discrétisation en temps de cette équation (présentée en détail à la section 4.3).

L'équation de corde ne nécessite pas un traitement aussi particulier. Nous nous contenterons donc d'appliquer des différences finies en temps, centrées, d'ordre 2 sur cette équation. La discrétisation présentée ici est une méthode originale qui couple deux méthodes de discrétisation temporelle radicalement différentes.

Le point crucial de cette étape est la recherche d'une énergie discrète pour laquelle on puisse obtenir une propriété de décroissance qui assurera que la norme des inconnues discrète reste bornée au cours du temps sous une éventuelle condition de stabilité, de type cfl.

1.4.1 Diagonalisation de l'équation de plaque discrète

Procédant comme au chapitre 4, on commence par éliminer le moment fléchissant du système différentiel matriciel (1.38). Il suffit pour cela de dériver la troisième équation par rapport au temps et de reporter la quatrième dans le résultat obtenu. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} M_h^c \dfrac{dv_{c_h}}{dt} - D_h q_h + R_c M_h^c v_{c_h} = f_{c_h}, \\ M_h^q \dfrac{dq_h}{dt} + D_h^\top v_{c_h} + L_h^\beta q_h - J_h^\top v_{p_h} = 0, \\ M_h^p \dfrac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + (1 + \eta \dfrac{d}{dt}) K_h v_{p_h} + R_p M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt} = -J_h \dfrac{dq_h}{dt}, \end{array}\right. \tag{1.54}$$

où K_h est la matrice définie par :

$$K_h = H_h (M_h^{\mathcal{M}})^{-1} H_h^\top. \tag{1.55}$$

Pour la résolution de l'équation de plaque, il faut diagonaliser la matrice $(M_h^p)^{-1} K_h$. Suivant la démarche présentée à la section 4.3.4, on ne calculera que les premières composantes du vecteur v_{p_h} dans la base propre de la matrice $(M_h^p)^{-1} K_h$. Commençons par quelques rappels et notations :

Notation 1.2 *On rappelle les notations et résultats suivants (*cf. *section 4.3) :*

- *On note :*
  - ⋆ v_{EF} *les composantes de* v_{p_h} *dans la base canonique des éléments finis,*
  - ⋆ v_K *les composantes de* v_{p_h} *dans la base propre de* K_h *déterminée ci dessus.*

- *On* tronque *la vecteur v_K en ne considérant que les $\tilde{n}_p$ premiers modes. Ainsi, notant $(\chi)_{1\leq i\leq n_p}$ la famille des n_p vecteurs propres de la matrice $(M_h^p)^{-1}K_h$, on effectue l'approximation :*

$$v_K \approx \tilde{v}_K = \sum_{i=0}^{\tilde{n}_p} v_K^i \chi_i. \tag{1.56}$$

et on confondra désormais v_K et $\tilde{v}_K$

- *On a :*

$$\tilde{P}^\top K_h \tilde{P} = D_K$$

où :

  - ⋆ *$D_K = \underset{1\leq i\leq \tilde{n}_p}{\text{diag}}\ (\lambda_i^2)$ est la matrice diagonale des $\tilde{n}_p$ premières valeurs propres de $(M_h^p)^{-1}K_h$, strictement positive, rangées dans l'ordre croissant,*
  - ⋆ *$\tilde{P}$ est la matrice de passage tronquée. Elle vérifie la relation :*

$$\tilde{P}^\top M_h^p \tilde{P} = I, \tag{1.57}$$

exprimant que la base propre est orthonormale pour le produit scalaire $(.,.)_{M_h^p}$.

- *On note $A_K = (R_p\, I + \eta\, D_K)$, la matrice diagonale positive d'amortissement de la plaque. Plus généralement, conformément à la note (4.3) on prendra*

$$A_K = \underset{1\leq i\leq \tilde{n}_p}{\text{diag}}\ (\alpha(\lambda_i)),$$

où α est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ donnée.

- *v_K et v_{EF} se se déduisent l'un de l'autre par les relations de changement de base :*

$$\tilde{v}_K = \tilde{P}^\top M_h^p v_{EF} \quad \text{et} \quad v_{EF} \approx \tilde{P}\tilde{v}_K. \tag{1.58}$$

- *Enfin, on pose :*

$$J_K = \tilde{P}^\top J_h \tag{1.59}$$

Notons que malgré cette notation trompeuse, J_K n'est pas la matrice représentant J_h dans la base propre tronquée ...

De même que la matrice J_h, seule la dernière colonne de J_K est non nulle. Mais comme $\tilde{P}$ est pleine, la dernière colonne de J_K n'est pas creuse bien que celle de J_h le soit.

On multiplie la troisième équation de (1.54) par $\tilde{P}^\top$. D'autre part, on réécrit le terme de couplage intervenant dans la seconde équation en fonction de v_K, à l'aide de (1.58). On obtient alors, compte tenu des relations rappelées ci dessus :

$$\boxed{\begin{cases} M_h^c \dfrac{dv_{c_h}}{dt} - D_h q_h + R_c M_h^c v_{c_h} = f_{c_h}, \\ M_h^q \dfrac{dq_h}{dt} + D_h^\top v_{c_h} + L_h^\beta q_h - J_K^\top v_K = 0, \\ \dfrac{d^2 v_K}{dt^2} + A_K \dfrac{dv_K}{dt} + D_K v_K = -J_K \dfrac{dq_h}{dt}. \end{cases}} \tag{1.60}$$

Sous cette forme, on a la propriété de conservation de l'énergie du problème semi-discret suivante :

Propriété 1.1 *L'énergie de la corde est définie par :*

$$E_{c_h}(t) = \frac{1}{2}\|\frac{dv_{c_h}}{dt}\|^2_{M_h^c} + \frac{1}{2}\|\frac{dq_h}{dt}\|^2_{M_h^q}, \tag{1.61}$$

celle de la plaque est définie par :

$$E_{p_h}(t) = \frac{1}{2}\|\frac{v_K}{dt}\|^2 + \frac{1}{2}\|v_K\|^2_{D_K} \tag{1.62}$$

Alors l'énergie totale $E_h(t) = E_{c_h}(t) + E_{p_h}(t)$ vérifie :

$$\frac{dE_h}{dt}(t) = (\frac{df_{c_h}}{dt}, \frac{dv_{c_h}}{dt}) - R_c\|\frac{dv_{c_h}}{dt}\|^2_{M_h^c} - \|\frac{dq_h}{dt}\|^2_{L_h^\beta} - \|\frac{dv_K}{dt}\|^2_{A_K} \tag{1.63}$$

A part le premier terme, qui représente une puissance fournie à la corde, tous les termes du membre de droite de la relation (1.63) sont négatifs. On en déduit que dés que l'effort exercé sur la corde est nul, l'énergie totale du système décroît.

Remarque 1.10 *Dans la mesure où la matrice L_h^β est seulement symétrique positive sans être définie, la notation $\|\frac{dq_h}{dt}\|_{L_h^\beta}$ est un peu abusive, mais elle permet de garder une présentation homogène. De même la matrice A_K est en toute généralité seulement symétrique positive, mais pas nécessairement définie. Mais est ce si important ces choses là ?*

▷ PREUVE : On commence par dérivée les deux premières équations de (1.54) par rapport au temps. Puis on multiplie scalairement les deux équations obtenues par $\frac{dv_{c_h}}{dt}$ et $\frac{dq_h}{dt}$ respectivement. D'autre part, on multiplie scalairement la dernière équation de (1.54) par $\frac{dv_{p_h}}{dt}$. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\|\frac{dv_{c_h}}{dt}\|^2_{M_h^c}) - (D_h\frac{dq_h}{dt}, \frac{dv_{c_h}}{dt}) + R_c\|\frac{dv_{c_h}}{dt}\|^2_{M_h^c} = (\frac{df_{c_h}}{dt}, \frac{dv_{c_h}}{dt}) \\ \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\|\frac{dq_h}{dt}\|^2_{M_h^q}) + (\frac{dq_h}{dt}, D_h^\top\frac{dv_{c_h}}{dt}) + \|\frac{dq_h}{dt}\|^2_{L_h^\beta} - (J_K^\top\frac{dv_K}{dt}, \frac{dq_h}{dt}) = 0, \\ \frac{dE_{p_h}}{dt} + \|\frac{dv_K}{dt}\|^2_{A_K} = -(J_K\frac{dq_h}{dt}, \frac{dv_K}{dt}). \end{cases} \tag{1.64}$$

Il suffit alors de sommer ces trois équations pour obtenir la relation (1.63) ◁

Remarque 1.11 *Le fait qu'en sommant les termes de couplage entre v_{c_h} et q_h et entre q_h et v_K s'éliminent exprime que ces couplages sont* conservatifs. *Lors de la discrétisation en temps, on cherchera à conserver ce caractère conservatif du couplage. C'est là le point délicat de la recherche d'une propriété similaire pour un schéma discrétisé en temps, comme on le verra plus loin.*

Remarque 1.12 *On notera en particulier que puisqu'on a dérivé l'équation de plaque, il a fallu définir une énergie de la corde portant sur les quantités dérivées* $\frac{dv_{c_h}}{dt}$ *et* $\frac{dq_h}{dt}$.

Ce point est crucial dans la preuve ci dessus, car il permet d'éliminer les termes couplant v_{c_h} *à* q_h *et* v_K *à* q_h. *On fera de même pour définir une énergie sur les schémas totalement discrétisés.*

1.4.2 Deux schémas de discrétisation en temps

Dans la mesure du possible, nous voudrions définir une discrétisation en temps du problème (1.54) qui soit *essentiellement* explicite, dans le sens où nous voudrions éviter d'avoir à résoudre un système linéaire de trop grande taille à chaque pas de temps. Trop grand voulant dire portant sur toutes les inconnues v_{c_h}, q_h et v_{p_h}.

Dans cette optique, on peut proposer le schéma suivant, noté S^1_{cp} qui est inspiré d'une discrétisation explicite centrée de l'équation de corde seule, et de la méthode présentée en 4.3 pour la résolution en temps de l'équation de plaque.

$$
S^1_{cp} \; : \; \left\{ \begin{array}{l}
M^c_h \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} - v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_h q_h^n + R_c M^c_h \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = f^n_{c_h}, \\
M^q_h \dfrac{q_h^{n+1} - q_h^n}{\Delta t} + D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + L^\beta_h \dfrac{q_h^{n+1} + q_h^n}{2} - J_K^\top v_K^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\
\left\{ \begin{array}{l}
\ddot{v}_K + A_K \dot{v}_K + D_K v_K = -J_K \dfrac{q_h^{n+1} - q^{n-1}}{2\Delta t}, \quad \forall t \in]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[\\
v_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_K^{n-\frac{1}{2}} \text{ et } \dot{v}_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}.
\end{array} \right.
\end{array} \right. \tag{1.65}
$$

Précisons dés maintenant que si l'on connaît $v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}$ et q_h^n, alors on calcule explicitement $v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$. En outre, le fait d'avoir supposé l'amortissement β nul sur un voisinage de l_c permet de découpler la dernière composante de q_h, q_{n_q}, des autres $(q_i)_{1\leq i<n_q}$, qu'on peut alors déterminer explicitement. Il reste juste à inverser un système linéaire en (q_{n_q}, v_K), résolution qui sera présentée à la section 1.4.5. On a bien un schéma *essentiellement* explicite.

Mais nous verrons dans la section suivante qu'on ne réussit malheureusement pas à définir une énergie discrète pour laquelle on peut démontrer une propriété de décroissance similaire à celle du schéma semi-discret donnée à la propriété (1.1).

En fait, nous n'avons pas réussi à déterminer de schéma essentiellement explicite pour lequel on est assuré d'avoir un résultat de stabilité reposant sur une propriété de décroissance de

l'énergie. Pour cela, nous sommes obligés de proposer le schéma implicite suivant, noté S^2_{cp} :

$$S^2_{cp} \; : \; \left\{ \begin{array}{l} M^c_h \dfrac{v^{n+1}_{c_h} - v^n_{c_h}}{\Delta t} - D_h \dfrac{q^{n+1}_h + q^n_h}{2} + R_c M^c_h \dfrac{v^{n+1}_{c_h} + v^n_{c_h}}{2} = f^{n+\frac{1}{2}}_{c_h}, \\ M^q_h \dfrac{q^{n+1}_h - q^n_h}{\Delta t} + D^\top_h \dfrac{v^{n+1}_{c_h} + v^n_{c_h}}{2} + L^\beta_h \dfrac{q^{n+1}_h + q^n_h}{2} - J^\top_K v^{n+\frac{1}{2}}_K = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \ddot{v}_K + A_K \dot{v}_K + D_K v_K = -J_K \dfrac{q^{n+1}_h - q^{n-1}}{2\Delta t}, \quad \forall t \in]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[\\ v_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_K^{n-\frac{1}{2}} \text{ et } \dot{v}_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{1.66}$$

1.4.3 Analyse de stabilité

De la même manière que dans le cas semi-discrétisé, il faut définir une énergie de corde discrète portant sur des quantités *dérivées*. Pour cela, nous devons tout d'abord préciser les notations suivantes :

Notation 1.3 *On définit les dérivées discrètes en temps :*

$$\begin{aligned} \overset{\blacktriangle}{v}{}^n_{c_h} &= \frac{v^{n+\frac{1}{2}}_{c_h} - v^{n-\frac{1}{2}}_{c_h}}{\Delta t}, \\ \overset{\blacktriangle}{q}{}^{n+\frac{1}{2}}_h &= \frac{q^{n+1}_h - q^n_h}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

1.4.3.a Conservation de l'énergie discrète du schéma S^1_{cp}

On peut alors énoncer une propriété de conservation d'énergie du schéma S^1_{cp} :

Propriété 1.2 *L'énergie discrète de la corde est définie par :*

$$E_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}\right)_{M_h^c} + \frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{M_h^q}^2, \tag{1.68}$$

celle de la plaque est définie par :

$$E_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\|v_K^{n+\frac{1}{2}}\|_{D_K}^2 \tag{1.69}$$

Alors l'énergie totale $E_h^{n+\frac{1}{2}} = E_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + E_{p_h}^{n+\frac{1}{2}}$ *vérifie :*

$$\frac{E_h^{n+\frac{1}{2}} - E_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left(\frac{f_{c_h}^{n+1} - f_{c_h}^{n-1}}{2\Delta t}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}\right) - R_c\left(\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} + 2\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n} + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-1}}{4}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}\right)_{M_h^c}$$
$$- \|\frac{\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}\|_{L_h^\beta}^2 - \frac{1}{\Delta t}\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \|\dot{v}_K\|_{A_K}^2 \tag{1.70}$$

▷ PREUVE : Elle suit de très près la preuve de la propriété (1.1). La différence essentielle, et c'est là toute la difficulté pour obtenir une identité de l'énergie d'un schéma totalement discret, provient du fait que s'il y a une seule façon d'écrire une dérivée continue ou une valeur à un instant donné, il y a plusieurs manières de dériver discrètement ou de définir une valeur à l'instant n. L'annulation des termes de couplage n'est plus immédiate et requiert par conséquent plus de manipulations.

On commence par multiplier scalairement la troisième équation de (1.65) par $\dot{v}_K$ puis on intègre en temps sur l'intervalle $[t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}]$, et on divise l'ensemble par Δt (ce qui revient en fait à prendre la valeur moyenne de la quantité intégrée sur $[t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}]$). Compte tenu du fait que

$$\frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\Delta t}$$

est constant sur l'intervalle d'intégration, on obtient :

$$\frac{E_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - E_{p_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -(J_K\frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}) - \frac{1}{\Delta t}\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \|\dot{v}_K\|_{A_K}^2 \tag{1.71}$$

Il nous faut maintenant dériver discrètement par rapport au temps les deux premières équations de (1.65). On obtient :

$$M_h^c\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} - \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}}{\Delta t} - D_h\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} + R_c\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}}{2} = \frac{f_{c_h}^{n+1} - f_{c_h}^{n}}{\Delta t}, \tag{1.72}$$

$$M_h^q\frac{\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} - \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + D_h^\top\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n} + L_h^\beta\frac{\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n-\frac{1}{2}}}{2} - J_K^\top\frac{v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0, \tag{1.73}$$

On multiplie alors (1.73) par :

$$\frac{\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\Delta t},$$

ce qui permettra d'éliminer le terme couplant v_κ à $\overset{\blacktriangle}{q}_h$. On obtient :

$$\frac{\frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2_{M_h^q} - \frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{M_h^q}}{\Delta t} + (D_h^\top \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n, \frac{\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n-\frac{1}{2}}}{2})$$
$$+ \|\frac{\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}\|^2_{L_h^\beta} - (J_\kappa^\top \frac{v_\kappa^{n+\frac{1}{2}} - v_\kappa^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\Delta t}) = 0. \quad (1.74)$$

Enfin, pour pouvoir éliminer le terme couplant $\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}$ à $\overset{\blacktriangle}{q}_h$ on effectue la moyenne de (1.72) écrite aux instants $n+\frac{1}{2}$ et $n-\frac{1}{2}$, puis on multiplie le résultat par $\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n$. On obtient :

$$\frac{\frac{1}{2}(\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n)_{M_h^c} - \frac{1}{2}(\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-1})_{M_h^c}}{\Delta t} - (D_h \frac{\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n)$$
$$+ R_c(\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} + 2\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-1}}{4}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n)_{M_h^c} = (\frac{f_{c_h}^{n+1} - f_{c_h}^{n-1}}{2\Delta t}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n) \quad (1.75)$$

Il n'y a plus qu'à sommer les équations (1.75), (1.74) et (1.71) pour obtenir la relation (1.70). ◁

Remarque 1.13 *Ainsi que nous l'avions annoncé, ce schéma nous soucie quelque peu dans la mesure où nous n'avons pas réussi à démontrer que le second membre est négatif dés que l'effort exercé sur la corde est nul. En effet, on ne peut rien dire a priori du signe de :*

$$R_c\left(\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} + 2\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-1}}{4}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n\right)_{M_h^c}, \quad (1.76)$$

et pourtant, il semble bien que si le pas de temps est suffisamment petit, les quantités :

$$\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} + 2\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-1}}{4} \text{ et } \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n$$

sont suffisamment proches pour qu'on puisse espérer que leur produit scalaire est positif, sous une éventuelle condition portant sur le pas de temps.

Malgré cette incertitude, nous avons tout de même mis en œuvre ce schéma, qui s'avère stable en pratique, sous la condition de stabilité usuelle $\frac{c_c \Delta t}{h_c} \leq 1$, démontrée plus loin si on suppose l'amortissement fluide nul.

Remarque 1.14 *En fait, il n'y a pas de choix pour déterminer un schéma de ce type. On commence par choisir (arbitrairement) un intervalle de résolution de l'équation de plaque (ici $[t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}]$). Pour discrétiser en temps le terme $\frac{dq_h}{dt}$ qui intervient dans cette équation, on a a priori le choix entre les deux dérivées discrètes centrées d'ordre 2 suivantes :*

$$\frac{dq_h}{dt}(t^n) \approx \frac{q^{n+\frac{1}{2}} - q^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \text{ ou } \frac{dq_h}{dt}(t^n) \approx \frac{q^{n+1} - q^{n-1}}{2\Delta t} \tag{1.77}$$

Cherchant alors à obtenir une propriété de décroissance de l'énergie discrète, on vérifie, en suivant la preuve ci dessus que le premier choix conduit à une impasse, car on ne peut éliminer le terme couplant v_K à q_h. On est donc obligé de discrétiser q_h aux instants entiers.

Remarque 1.15 *On pourrait proposer un troisième schéma pour essayer d'obtenir une propriété de décroissance de l'énergie discrète à partir du schéma "explicite" de l'équation de corde. Sa construction repose sur la remarque suivante :*

On considère le schéma explicite classique, centré d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} - v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_h q_h^n + R_c M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = f_{c_h}^n, \\ M_h^q \dfrac{q_h^{n+1} - q_h^n}{\Delta t} + D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + L_h^\beta \dfrac{q_h^{n+1} + q_h^n}{2} = 0. \end{array} \right. \tag{1.78}$$

On vérifie aisément que le schéma suivant, obtenu en effectuant la moyenne de la première équation du schéma ci dessus écrite aux instants n et $n+1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{3}{2}} - v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_h \dfrac{q_h^{n+1} + q_h^n}{2} + R_c M_h^p \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{3}{2}} + 2v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{4} = \dfrac{f_{c_h}^{n+1} + f_{c_h}^n}{2}, \\ M_h^q \dfrac{q_h^{n+1} - q_h^n}{\Delta t} + D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + L_h^\beta \dfrac{q_h^{n+1} + q_h^n}{2} = 0. \end{array} \right. \tag{1.79}$$

est équivalent à (1.78) à condition de vérifier initialement :

$$M_h^c \frac{v_{c_h}^{\frac{1}{2}} - v_{c_h}^{-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_h q_h^0 + R_c M_h^c \frac{v_{c_h}^{\frac{1}{2}} + v_{c_h}^{-\frac{1}{2}}}{2} = f_{c_h}^0, \tag{1.80}$$

On peut alors modifier légèrement la première équation de (1.79) de la façon suivante (notons que le schéma obtenu reste alors équivalent au schéma explicite classique dans le cas où le terme d'amortissement fluide est nul, ie. *$R_c = 0$) :*

$$M_h^c \frac{v_{c_h}^{n+\frac{3}{2}} - v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_h \frac{q_h^{n+1} + q_h^n}{2} + R_c M_h^p v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{f_{c_h}^{n+1} + f_{c_h}^n}{2}. \tag{1.81}$$

Suivant la même démarche que dans la preuve de la propriété (1.2), on montre que ce schéma vérifie l'identité d'énergie suivante :

$$\frac{E_{c_h'}^{n+1} - E_{c_h'}^n}{\Delta t} = (\frac{f_{c_h}^{n+1} + f_{c_h}^n}{2}, v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}) - R_c (v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}, v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}})_{M_h^c} - \|\frac{q_h^{n+\frac{1}{2}} + q_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}\|_{L_h^\beta}^2 \tag{1.82}$$

où : $E^n_{c'_h} = \frac{1}{2}(v^{n+\frac{1}{2}}_{c_h}, v^n_{c_h})_{M^c_h} + \frac{1}{2}\|q^{n+\frac{1}{2}}_h\|^2_{M^q_h}$,

Cette fois ci, on a donc réussi à écrire un schéma centré d'ordre 2 pour lequel on a une propriété de décroissance de l'énergie. Mais rien ne prouve que l'"'énergie" ainsi définie est positive.

On observe en pratique que ce schéma semble inconditionnellement instable, ce qui explique sûrement pourquoi on ne réussit pas à montrer théoriquement que cette "énergie" est positive. C'est surtout ce qui explique pourquoi nous avons abandonné ce schéma. Comme quoi définir une énergie discrète dont on est sûr de la décroissance ne suffit pas*, encore faut-il montrer qu'elle est positive ...*

1.4.3.b Conservation de l'énergie discrète du schéma S^2_{cp}

On peut de même énoncer une propriété de conservation d'énergie du schéma S^2_{cp} :

Propriété 1.3 *L'énergie discrète de la corde est définie par :*

$$E^{n+\frac{1}{2}}_{c_h} = \frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{v}{}^{n+\frac{1}{2}}_{c_h}\|^2_{M^c_h} + \frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{q}{}^{n+\frac{1}{2}}_h\|^2_{M^q_h}, \tag{1.83}$$

celle de la plaque est définie par :

$$E^{n+\frac{1}{2}}_{p_h} = \frac{1}{2}\|\dot{v}^{n+\frac{1}{2}}_K\|^2 + \frac{1}{2}\|v^{n+\frac{1}{2}}_K\|^2_{D_K} \tag{1.84}$$

Alors l'énergie totale $E^{n+\frac{1}{2}}_h = E^{n+\frac{1}{2}}_{c_h} + E^{n+\frac{1}{2}}_{p_h}$ *vérifie :*

$$\frac{E^{n+\frac{1}{2}}_h - E^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left(\overset{\blacktriangle}{f}{}^n_{c_h}, \frac{\overset{\blacktriangle}{v}{}^{n+\frac{1}{2}}_{c_h} + \overset{\blacktriangle}{v}{}^{n-\frac{1}{2}}_{c_h}}{2}\right) - R_c\|\frac{\overset{\blacktriangle}{v}{}^{n+\frac{1}{2}}_{c_h} + \overset{\blacktriangle}{v}{}^{n-\frac{1}{2}}_{c_h}}{2}\|_{M^c_h}$$
$$- \|\frac{\overset{\blacktriangle}{q}{}^{n+\frac{1}{2}}_h + \overset{\blacktriangle}{q}{}^{n-\frac{1}{2}}_h}{2}\|^2_{L^\beta_h} - \frac{1}{\Delta t}\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \|\dot{v}_K\|^2_{A_K} \tag{1.85}$$

▷ PREUVE : On procède comme pour la preuve de la propriété (1.2). Les équations (1.71) et (1.74) sont encore valables.

Puis on dérive discrètement en temps la première équation de (1.66), et on la multiplie

scalairement par $\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2}$. On obtient :

$$\frac{\frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}\|^2_{M_h^c} - \frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{M_h^c}}{\Delta t} - (D_h \frac{\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2}) + R_c\|\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2}\|_{M_h^c} = \left(\overset{\blacktriangle}{f}_{c_h}^{n}, \frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2}\right) \quad (1.86)$$

Il suffit alors de sommer les équations (1.71), (1.74), et (1.86) pour obtenir la relation (1.85). ◁

1.4.3.c Stabilité des schéma S^1_{cp} et S^2_{cp}

Les deux résultats de décroissance de l'énergie de la section précédente permettent d'analyser simplement la stabilité des schémas S^1_{cp} et S^2_{cp}. Avec un bémol cependant, puisque nous ne savons montrer la stabilité du schéma S^1_{cp} que dans le cas où on suppose l'amortissement fluide nul, soir $R_c = 0$. Commençons par la stabilité du schéma S^2_{cp}, puisque ce résultat est immédiat.

On observe que l'énergie totale associée au schéma S^2_{cp} est en fait une forme quadratique positive portant sur les inconnues discrètes v_{c_h}, q_h et v_{p_h}. La propriété de décroissance de l'énergie de ce schéma (1.3) assure donc que ces inconnues restent bornées au cours du temps. On en déduit le :

Lemme 1.1 *Le schéma S^2_{cp} est inconditionnellement stable.*

En revanche, le schéma S^1_{cp} est soumis à une condition de stabilité. On remarque cette fois ci que l'énergie qui lui est associée est une forme quadratique non nécessairement positive, à cause du terme :

$$\left(\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_h^c}.$$

En fait, si Δt est suffisamment petit, les inconnues $\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}$ tendent à se confondre, et on peut contrôler cette quantité, ce qui assure la stabilité du schéma. On obtient ainsi le :

Lemme 1.2 *On suppose que $R_c = 0$. Alors l'énergie discrète de la corde $E_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$ définie en (1.68) est positive dés que la condition :*

$$\frac{c_c \Delta t}{h_c} < 1, \tag{1.87}$$

est vérifiée, et dans ce cas, le schéma S_{cp}^1 est stable.

▷ PREUVE : Celle ci est très usuelle. Il nous faut donc contrôler le signe de :

$$E_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}\right)_{M_h^c} + \frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{M_h^q}^2.$$

Or, d'après l'égalité de la médiane, on a :

$$\left(\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}\right)_{M_h^c} = \frac{1}{4}\left[\|\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}\|_{M_h^c}^2 - \|\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} - \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}\|_{M_h^c}^2\right], \tag{1.88}$$

et d'après l'équation (1.72),on a, en omettant le second membre :

$$\|\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} - \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}\|_{M_h^c}^2 = \|(M_h^c)^{-1} D_h \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{M_h^c}^2 \tag{1.89}$$

On introduit alors :

$$\alpha_h = \sup_{q_h \in \mathcal{Q}_h} \frac{\left(D_h q_h, (M_h^c)^{-1} D_h q_h\right)}{\|q_h\|_{M_h^q}^2}. \tag{1.90}$$

On en déduit l'inégalité suivante :

$$2E_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} \geq \left(1 - \frac{\alpha_h \Delta t^2}{4}\right)\|q_h\|_{M_h^q}^2 + \|\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}}{2}\|_{M_h^c}^2 \tag{1.91}$$

Pour que l'énergie de la corde soit positive, il suffit donc de vérifier la condition :

$$\frac{\alpha_h \Delta t^2}{4} < 1. \tag{1.92}$$

Le calcul de α_h est très classique. On vérifie qu'il s'agit en fait du rayon spectrale de la matrice

$$(M_h^q)^{-1} D^\top (M_h^c)^{-1} D,$$

qui, dans le cas particulier d'un maillage régulier de l'intervalle $]0, l_c[$, n'est autre que le "laplacien discret standard" à trois points. On sait alors que :

$$\alpha_h \leq \frac{4c_c}{h_c^2} + O(1),$$

et on a ainsi démontré que sous la condition (1.87) l'énergie discrète est positive.

Lorsque $R_c = 0$, alors l'identité (1.70) assure que l'énergie discrète totale décroît au cours du temps. Comme celle ci est positive sous la condition de stabilité (1.87), on en déduit que le schéma est stable. ◁

Remarque 1.16 *La condition de stabilité (1.87) est la même que la condition de stabilité que celle du schéma explicite centré d'ordre 2 appliqué à l'équation de corde seule, ce qui illustre la robustesse du traitement du couplage plaque-corde par cette méthode.*

Remarque 1.17 *Dans le cas d'une corde seule et uniquement soumise à un amortissement fluide, on aurait le schéma explicite centré usuel suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} - v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_h q_h^n + R_c \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = f_{c_h}^n, \\ M_h^q \dfrac{q_h^{n+1} - q_h^n}{\Delta t} + D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} = 0. \end{array} \right. \tag{1.93}$$

En définissant l'énergie suivante :

$$E_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \| \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} \|_{M_h^c}^2 + \frac{1}{2} (\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{q}_h^n)_{M_h^q}, \tag{1.94}$$

on montre d'une manière similaire à tout ce qui précède que ce schéma est stable dés que la condition (1.87) est vérifiée.

Malheureusement, on ne peut faire ce choix pour l'énergie du schéma S_{cp}^1, d'abord parce que le soucis de décroissance de cette énergie se reporterait sur le terme d'amortissement visqueux.[1] *Et surtout parce qu'on ne pourrait pas éliminer le terme couplant v_K à $\overset{\blacktriangle}{q}_h$, ce qui nous empêcherait d'obtenir une identité de l'énergie.*

1.4.4 Analyse de la dispersion numérique de l'équation de corde seule

On effectue dans cette section une rapide analyse de dispersion numérique de l'équation de corde seule, non amortie, similaire à celle effectuée à la section 4.2.3. Le but de cette présentation est de donner un ordre d'idée de la précision des deux schémas présentés ci dessus concernant l'équation de corde, et en particulier de rappeler que le schéma explicite est en fait *exact* lorsque l'on se place en limite de condition de stabilité, alors que le schéma implicite est dispersif (et par conséquent moins précis) dans tous les cas. Ces résultats sont extrêmement classiques (voir par exemple [26]).

Rappelons que le propos de cette étude est l'analyse de solutions particulières de type onde plane progressives harmoniques. Elle s'effectue donc sur maillage infini régulier. La dispersion numérique donne une mesure de l'erreur commise par le schéma discret sur la vitesse de phase d'une solution de type onde plane de l'équation continue.

On considère donc une corde seule, non amortie, de longueur infinie. Son mouvement est régi par l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}. \tag{1.95}$$

1. Quoique sur ce point, on pourrait sûrement s'en sortir en "jouant" sur la loi de comportement viscoélastique de la corde, de la même manière que nous avons fait ici.

Lorsqu'on gèle le couplage avec la plaque, et qu'on écarte l'amortissement, le schéma S_{cp}^1 conduit au classique schéma explicite centré d'ordre 2, après avoir éliminé la contrainte q :

$$S_E \ : \frac{v_{c_h}^{n+1} - 2v_{c_h}^n + v_{c_h}^{n-1}}{\Delta t^2} - c_c^2 \Delta_h v_{c_h}^n = 0, \tag{1.96}$$

où Δ_h désigne le classique laplacien discret à trois points :

$$(\Delta_h v_{c_h})_i = \frac{(v_{c_h})_{i+1} - 2(v_{c_h})_i + (v_{c_h})_{i-1}}{h_c^2} \tag{1.97}$$

Le schéma S_{cp}^2 conduit lui au classique schéma implicite centré d'ordre 2 suivant :

$$S_I \ : \frac{v_{c_h}^{n+1} - 2v_{c_h}^n + v_{c_h}^{n-1}}{\Delta t^2} - c_c^2 \Delta_h \frac{v_{c_h}^{n+1} + 2v_{c_h}^n + v_{c_h}^{n-1}}{4} = 0. \tag{1.98}$$

1.4.4.a Relation de dispersion continue

Un onde plane harmonique de la forme :

$$u(x,t) = e^{i(\omega t - kx)},$$

est solution de (1.95) si et seulement si elle vérifie la relation dispersion continue :

$$\omega = c_c k. \tag{1.99}$$

La vitesse de phase d'une telle onde est donc :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c_c. \tag{1.100}$$

Celle ci est indépendante du nombre d'onde : l'équation des ondes est donc non dispersive, contrairement à l'équation de plaque. Néanmoins, cette propriété n'est en général plus vraie au niveau discret.

1.4.4.b Dispersion numérique des schémas S_E et S_I

On recherche maintenant des solutions de type onde plane harmonique discrète des schémas explicite S_E et implicite S_I ci dessus. Pour un nombre d'onde k fixé, on cherche donc la pulsation ω_h pour une solution de la forme :

$$u_p^n = e^{i\omega_h n\Delta t - ikp\Delta x}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \tag{1.101}$$

Reportant (1.101) dans (1.96), on obtient, suite à un calcul similaire à celui présenté à la section 4.2.3 :

$$\omega_h = \frac{2}{\Delta t} \arcsin\left[\frac{c_c \Delta t}{h_c} \sin^2\left(\frac{k h_c}{2}\right)\right], \tag{1.102}$$

et par conséquent, la dispersion numérique du schéma (1.96) est :

$$q_h^E = \frac{\omega_h}{\omega} = \frac{1}{\alpha K \pi} \arcsin(\alpha \sin(K\pi)), \tag{1.103}$$

où on a introduit :

$$\begin{cases} K = \dfrac{kh_c}{2\pi}, \text{l'inverse du nombre de points par longueur d'onde,} \\ \alpha = \dfrac{c_c \Delta t}{h_c}. \end{cases} \tag{1.104}$$

Remarque 1.18 *La condition de stabilité du schéma S_E donnée en (1.87) s'écrit :*

$$\alpha \leq 1.$$

Lorsque l'on prend $\alpha = 1$ dans la relation ci dessus, alors on vérifie que :

$$q_h^E = \frac{1}{K\pi} \arcsin(\sin(K\pi)) = 1, \tag{1.105}$$

(tout au moins pour $0 \leq K \leq 1/2$). On ne commet aucune erreur sur la vitesse de phase. Cela n'est pas surprenant, puisqu'en fait, dans ce cas, il s'agit de la méthode des caractéristiques et par conséquent le schéma est exacte

D'autre part, reportant (1.101) dans (1.98), on obtient :

$$\omega_h = \frac{2}{\Delta t} \arctan\left[\frac{c_c \Delta t}{h_c} \sin^2\left(\frac{kh_c}{2}\right)\right], \tag{1.106}$$

et par conséquent, la dispersion numérique du schéma (1.96) est :

$$q_h^I = \frac{\omega_h}{\omega} = \frac{1}{\alpha K \pi} \arctan(\alpha \sin(K\pi)), \tag{1.107}$$

Cette fois ci, on observe que le schéma S_I est *dispersif* pour toute valeur de α. Ainsi, bien que le schéma implicite soit inconditionnellement stable, on lui préférera le schéma explicite tout simplement parce qu'il est exacte.

1.4.5 Résolution des schémas de discrétisation en temps

L'objectif de cette section est de montrer comment on résout effectivement à chaque pas de temps les systèmes linéaires donnés par les schémas S_{cp}^1 et S_{cp}^2.

Pour les deux schémas, la discrétisation temporelle de l'équation de plaque est la même. Il s'agit de :

$$\begin{cases} \ddot{v}_K + A_K \dot{v}_K + D_K v_K = -J_K \dfrac{q_h^{n+1} - q^{n-1}}{2\Delta t}, \quad \forall t \in]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[\\ v_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_K^{n-\frac{1}{2}} \text{ et } \dot{v}_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{1.108}$$

On a vu à la section 4.3.3 que la solution de ce problème est donnée par :

$$\begin{aligned} v_K^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) - \mathcal{R}_{\Delta t} J_K(\frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\Delta t}) \\ \dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) - \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} J_K(\frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\Delta t}), \end{aligned} \tag{1.109}$$

où $\mathcal{S}_{\Delta t}$ est la résolvante de l'équation homogène et $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est la résolvante donnant la solution particulière à conditions initiales nulles, dans le cas où le second membre est une constante. Rappelons aussi que $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est une matrice diagonale définie positive (*cf.* théorème (4.3)).

En fait, $\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}$ n'est pas vraiment une inconnue du problème. Il s'agit seulement de la déterminer à chaque pas de temps pour connaître les conditions initiales du problème (1.108) au pas de temps suivant. Les deux équations de (1.109) sont redondantes, puisque la seconde n'est autre que la dérivée de la première par rapport au temps, prise à l'instant Δt.

1.4.5.a Résolution du schéma S_{cp}^1

Le problème S_{cp}^1 donné en (1.65) s'écrit donc à présent :

$$\boxed{\begin{cases} M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} - v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_h q_h^n + R_c M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = f_{c_h}^n, \\ M_h^q \dfrac{q_h^{n+1} - q_h^n}{\Delta t} + D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + L_h^\beta \dfrac{q_h^{n+1} + q_h^n}{2} - J_K^\top v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\ v_K^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) - \mathcal{R}_{\Delta t} J_K(\dfrac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\Delta t}). \end{cases}} \tag{1.110}$$

Les inconnues sont $v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$, q_h^{n+1} et $v_K^{n+\frac{1}{2}}$, toutes les autres variables étant connues à cette étape du calcul. Ce système est implicite, dans la mesure où il n'est pas triangulaire, mais nous allons voir qu'en pratique, sa résolution est aisée.

Tout d'abord, puisque la matrice M_h^c est diagonale, la première équation donne explicitement $v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$. On calcule en effet :

$$v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1 - R_c\Delta t/2}{1 + R_c\Delta t/2} v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_c h_c (1 + R_c\Delta t/2)}(D_h q_h^n + f_{c_h}^n). \tag{1.111}$$

D'autre part, comme nous avons supposé que l'amortissement visqueux β est nul au voisinage du chevalet (*cf.* section 1.3.2.c), on peut découpler la dernière composante du vecteur q_h (que l'on notera Q^{n+1}) des autres. On note :

$$q_h^{n+1} = (\bar{q}_h^{n+1}, Q^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n_q - 1} \times \mathbb{R}, \tag{1.112}$$

En toute rigueur, il faudrait également introduire une notation spécifique pour définir les restrictions des matrices M_h^c, $D_h^\top$ et L_h^β aux composantes $\bar{q}_h$ du vecteur q, mais bon.

On note j_K la dernière colonne de la matrice J_K. On réécrit alors les deux dernières équations de (1.65) de la façon suivante, compte tenu de l'expression de la matrice de masse M_h^q(voir (1.50)) :

$$\left\{\begin{array}{l} M_h^q \dfrac{\bar{q}_h^{n+1}-\bar{q}_h^n}{\Delta t} + D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + L_h^\beta \dfrac{\bar{q}_h^{n+1}+\bar{q}_h^n}{2} = 0, \\ \dfrac{h_c}{2T}\dfrac{Q^{n+1}-Q^n}{\Delta t} + (D_h v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}})_{n_q} - j_K^\top v_K^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\ v_K^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) - \mathcal{R}_{\Delta t} j_K (\dfrac{Q_h^{n+1}-Q^{n-1}}{2\Delta t}). \end{array}\right. \tag{1.113}$$

La première équation de ce système conduit à :

$$(M_h^q + \frac{\Delta t}{2} L_h^\beta)\bar{q}_h^{n+1} = (M_h^q - \frac{\Delta t}{2} L_h^\beta)\bar{q}_h^n - \Delta t D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}. \tag{1.114}$$

Le second membre de cette équation est connu à cette étape du calcul. Il nous faut donc inverser la matrice :

$$C_q^1 = \left(M_h^q + \frac{\Delta t}{2} L_h^\beta\right), \tag{1.115}$$

qui est tridiagonale symétrique définie positive d'après les propriétés des matrices M_h^q et L_h^β(*cf.* section 1.3.2.c).

Ensuite on multiplie la seconde équation de (1.113) par $2\Delta t$ $2\Delta t j_K^\top$ et la troisième par $2\Delta t j_K^\top$, puis on ajoute. On obtient :

$$(\frac{h_c}{T} + j_K^\top \mathcal{R}_{\Delta t} j_K) Q^{n+1} = \frac{h_c}{T} Q^n - 2\Delta t (D_h v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}})_{n_q} - 2\Delta t j_K \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}). \tag{1.116}$$

Or $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est définie positive, donc : $j_K^\top \mathcal{R}_{\Delta t} j_K = \|j_K\|^2_{\mathcal{R}_{\Delta t}} \geq 0$, et par conséquent, le réel

$$\frac{h_c}{T} + j_K^\top \mathcal{R}_{\Delta t} j_K$$

est strictement positif. Cette dernière équation nous donne donc Q^{n+1}, et puisqu'on connaît également $\bar{q}_h^{n+1}$, on connaît désormais q_h^{n+1}. La dernière équation de (1.113) nous donne enfin $v_K^{n+\frac{1}{2}}$.

Finalement, **la résolution du schéma S_{cp}^1 ne demande au total que l'inversion d'une matrice tridiagonale symétrique définie positive à chaque pas de temps. Il nous faut calculer successivement :**

1. $v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$ par (1.111),
2. q_h^{n+1} en deux étapes par (1.114), en inversant C_q^1, puis (1.116)
3. $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ par la dernière équation de (1.113)
4. $\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}$ par la deuxième équation de (1.109)

Remarque 1.19 *En fait, si l'amortissement visqueux sur la corde était nul, ce système serait entièrement explicite, puisqu'on aurait alors :*

$$C_q^1 = M_h^q,$$

et M_h^q est diagonale.

Remarque 1.20 *On pourrait appliquer la méthode de résolution par point fixe du problème amorti présentée à la section 4.2.4.c pour inverser l'équation (1.114), mais puisqu'ici la matrice à inverser est tridiagonale définie positive, cette technique ne présente pas d'intérêt, si ce n'est pire.*

1.4.5.b Résolution du schéma S_{cp}^2

La résolution du schéma S_{cp}^2 est en fait très proche de celle du schéma S_{cp}^1. Rappelons que ce problème, donné en (1.66), s'écrit à présent :

$$\boxed{\begin{cases} M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+1} - v_{c_h}^n}{\Delta t} - D_h \dfrac{q_h^{n+1} + q_h^n}{2} + R_c M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+1} + v_{c_h}^n}{2} = f_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}, \\ M_h^q \dfrac{q_h^{n+1} - q_h^n}{\Delta t} + D_h^\top \dfrac{v_{c_h}^{n+1} + v_{c_h}^n}{2} + L_h^\beta \dfrac{q_h^{n+1} + q_h^n}{2} - J_K^\top v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\ v_K^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) - \mathcal{R}_{\Delta t} J_K (\dfrac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\Delta t}). \end{cases}} \tag{1.117}$$

Cette fois ci, on ne peut plus découpler la dernière composante de q_h des autres. Néanmoins, ce système se ramène lui aussi à l'inversion d'une matrice tridiagonale définie positive. On réécrit le système précédent sous la forme :

$$\begin{cases} v_{c_h}^{n+1} & -\dfrac{\Delta t}{2(1 + R_c \Delta t/2)} (M_h^c)^{-1} D_h q_h^{n+1} & & = & \tilde{v}_{c_h}, \\ \dfrac{\Delta t}{2} D_h^\top v_{c_h}^{n+1} & +(M_h^q + \dfrac{\Delta t}{2} L_h^\beta) q_h^{n+1} & -\Delta t J_K^\top v_K^{n+\frac{1}{2}} & = & \tilde{q}_h, \\ & \dfrac{1}{2\Delta t} \mathcal{R}_{\Delta t} J_K q_h^{n+1} & +v_K^{n+\frac{1}{2}} & = & \tilde{v_K}, \end{cases} \tag{1.118}$$

où on a posé :

$$\begin{cases} \tilde{v}_{c_h} = \dfrac{1 - R_c \Delta t/2}{1 + R_c \Delta t/2} v_{c_h}^n + \dfrac{\Delta t}{(1 + R_c \Delta t/2)} (M_h^c)^{-1} (\dfrac{D_h q_h^n}{2} + f_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}), \\ \tilde{q}_h = (M_h^q - \dfrac{\Delta t}{2} L_h^\beta) q_h^n - \dfrac{\Delta t D_h^\top}{2} v_{c_h}^n, \\ \tilde{v_K} = \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) + \dfrac{1}{2\Delta t} \mathcal{R}_{\Delta t} J_K q_h^{n+1}. \end{cases} \tag{1.119}$$

Notons l_1, l_2, l_3 les trois lignes de ce système. On calcule alors :

$$(l_2) - \frac{dt}{2} D_h^\top (l_1) + \Delta t J_K^\top (l_3).$$

On obtient :

$$\left(M_h^q + \frac{\Delta t^2}{4(1+R_c\Delta t/2)} D_h^\top (M_h^c)^{-1} D_h + \frac{\Delta t}{2} L_h^\beta + \frac{J_K^\top \mathcal{R}_{\Delta t} J_K}{2}\right) q_h^n + 1 = \tilde{q}_h - \frac{dt}{2} D_h^\top \tilde{v}_{c_h} + \Delta t J_K^\top \tilde{v_K}. \tag{1.120}$$

Il nous faut donc inverser la matrice :

$$C_q^2 = \left(M_h^q + \frac{\Delta t^2}{4(1+R_c\Delta t/2)} D_h^\top (M_h^c)^{-1} D_h + \frac{\Delta t}{2} L_h^\beta + \frac{J_K^\top \mathcal{R}_{\Delta t} J_K}{2}\right)$$

Compte tenu de la structure particulière des matrices M_h^q, M_h^c, D_h, L_h^β, J_K et $\mathcal{R}_{\Delta t}$, on vérifie aisément que cette matrice est elle aussi symétrique, définie, positive. tridiagonale (*cf.* section 1.3.2.c). En particulier, on vérifie que le seul élément non nul de la matrice $J_K^\top \mathcal{R}_{\Delta t} J_K$ est le dernier élément de la diagonale (il vaut $\|j_K\|_{\mathcal{R}^2_{\Delta t}}$).

Connaissant q_h^{n+1}, on peut alors calculer explicitement $v_{c_h}^{n+1}$ et $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ à l'aide de la première et la dernière équation de (1.118) respectivement. Pour finir, il reste à calculer $\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}$ par la deuxième équation de (1.109).

Finalement, **la résolution du schéma S_{cp}^2 ne demande lui aussi que l'inversion d'une matrice tridiagonale symétrique définie positive à chaque pas de temps. Il nous faut calculer successivement :**

1. q_h^{n+1} par (1.120) en inversant C_q^2,
2. $v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$ par la première équation de (1.118),
3. $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ par la dernière équation de (1.118),
4. $\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}$ par la deuxième équation de (1.109)

Remarque 1.21 *Notons que contrairement au schéma S_{cp}^1, la matrice C_q^2 n'est pas diagonale lorsque l'amortissement visqueux est nul.* Il faut donc l'inverser dans tous les cas.

1.4.6 Conclusion

Au total, le coût de la résolution des deux schémas S_{cp}^1 et S_{cp}^2 est simplement celui de l'inversion d'une matrice tridiagonale symétrique définie positive à chaque pas de temps. Une telle inversion est très peu coûteuse, d'autant plus que cette matrice est de petite taille (égale au nombre de points du maillage de la corde) par rapport à l'ensemble du problème. En pratique, on calcule sa factorisée de Cholesky au début des itérations et on résout le système par descente remontée à chaque pas de temps.

Nous avons choisi de coder le schéma S^1_{cp} car il est un peu plus aisé à mettre en œuvre. Il requiert en effet un peu moins de manipulations, ce qui sera d'autant plus appréciable pour la résolution du modèle complet de guitare. En outre, si on annule le couplage entre la corde et la plaque, le schéma S^1_{cp} est exact, puisqu'il s'agit alors de la méthode des caractéristiques, alors que le schéma S^2_{cp} est dispersif, comme on l'a vu à la section 1.4.4.

Chapitre 2

Analyse du couplage plaque-air

Abordons à présent le couplage entre la table d'harmonie et l'air environnant.

Ce problème d'interaction fluide-structure, posé dans un domaine de géométrie complexe est un problème tridimensionnel de grande taille. C'est par conséquent la partie la plus limitante de ce calcul numérique. On commence par montrer les avantages et inconvénients des méthodes de discrétisation spatiale usuelles, à savoir la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis (section 2.1).

Afin de préserver l'efficacité des différences finies pour la résolution d'un problème de cette taille tout en approchant précisément la géométrie du domaine, on utilise une méthode de domaines fictifs (section 2.2), proposée par Glowinsky pour résoudre le problème du laplacien stationnaire [37] et adaptée ici des travaux de Leila Rhaouti sur la modélisation numérique de la timbale [54].

Cette méthode fait disparaître la guitare du domaine de calcul du champ acoustique, ce qui permet d'utiliser un maillage cubique régulier qui conduit en pratique à une méthode de différences finies centrées d'ordre 2. La guitare est en fait réintroduite dans le calcul par l'intermédiaire d'un multiplicateur de Lagrange vivant sur la surface de la guitare. La contrepartie à payer est d'avoir à inverser à chaque pas de temps une matrice symétrique définie positive de la taille de cette inconnue surfacique à chaque pas de temps.

Après avoir décrit les éléments finis usuels utilisés pour l'approximation des espaces intervenants dans la formulation en domaines fictifs (section 2.3), on propose un schéma de résolution en temps : méthode pseudo-spectrale pour la plaque et différences finies centrées explicites pour l'air. On montre ensuite un résultat de stabilité du schéma obtenu.

On termine ce chapitre par la présentation de la résolution effective du schéma.

Présentation du problème

Le mouvement de la plaque est décrit par sa flexion, notée $u_p(x, y, t)$, définie dans $\omega \times \mathbb{R}_+$, où ω est le domaine occupé par la plaque. Nous considérons ici le cas général d'une plaque amortie, encastrée sur une partie de son bord γ_0, et soumise à une condition de bord libre le long de l'autre partie, γ_l. Les vibrations de l'air sont décrites par la pression acoustique,

notée $p(x,y,z,t)$ et la vitesse moyenne des particules, notée $\underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,t)$, qui est un vecteur à trois dimensions, définies dans $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, où Γ est la surface de la guitare. Rappelons que cette dernière est décomposée en deux parties, ω, la table supérieure et Σ, le reste du corps de la guitare.

On suppose que l'on exerce sur la plaque un effort surfacique, vertical, d'intensité f_p (histoire de mettre le système en vibration, il faut bien lui fournir un peu d'énergie). Le mouvement des inconnues u_p, p et $\underline{\mathbf{v}}_a$ est alors régi par le système d'équations suivantes, présentées au chapitre 1 :

$$\begin{cases} \rho_p \partial_t u_p + \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} + R_p \rho_p u_p = f_p - [p]_{|\omega}, \quad \text{dans } \omega, \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} + \mathbf{C}\ (1 + \eta \dfrac{\partial}{\partial t}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p) = 0, \quad \text{dans } \omega, \\ u_p = \partial_n u_p = 0, \text{ sur } \gamma_0, \ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{n} = 0, \quad \text{sur } \gamma_l, \\ (\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{\tau}] = 0, \quad \text{sur } \gamma_l, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \rho_a \dfrac{\partial \underline{\mathbf{v}}_a}{\partial t} + \underline{\nabla} p = 0, \quad \text{dans } \Omega \\ \mu_a \dfrac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a = 0, \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\mathbf{v}}_a(x,y,0,t) \cdot \underline{e}_z = \dfrac{\partial u_p}{\partial t}(x,y,t), \quad \text{sur } \omega \\ \underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,t) \cdot \underline{N} = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $[p]_{|\omega}$ désigne le saut de pression à travers la table d'harmonie de la guitare.

Il convient aussi d'ajouter des conditions initiales que nous supposerons nulles :

$$\begin{gathered} u_p(x,y,0) = 0, \ \partial_t u_p(x,y,0) = 0, \ \text{dans } \omega, \\ p(x,y,z,0) = 0, \ \underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,0), \ \text{dans } \Omega. \end{gathered} \tag{2.3}$$

On a l'estimation d'énergie suivante :

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \int_0^{l_c} f_p \partial_t u_p, \tag{2.4}$$

où :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_\omega \rho_p \left|\partial_t u_p\right|^2 + \frac{1}{2} \int_\omega \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla}(u_p)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla}(u_p)) + \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_a \left|\underline{\mathbf{v}}_a\right|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega \mu_a \left|p\right|^2. \tag{2.5}$$

2.1 Avantages et inconvénients des méthodes usuelles

2.1.1 La méthode des éléments finis

Dans cette section, nous supposerons, pour alléger les écritures, que l'amortissement est nul et que la plaque est encastrée sur tout son bord (*ie.* $\gamma_l = \emptyset$).

Suivant la démarche que nous avons adopté jusqu'ici, le plus naturel est de chercher à déterminer une formulation variationnelle primale de ce problème Pour cela, on commence par éliminer la vitesse $\underline{\mathbf{v}}_a$, de l'équation des ondes acoustique, de mainière à obtenir une simple équation des ondes scalaires. Mais il faut alors réécrire les conditions d'interaction fluide structure (c'est à dire les deux dernières équations de (2.2)) à l'aide de la pression acoustique. Il suffit de les dériver par rapport au temps, puis d'utiliser la première équation de (2.2). On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_a}\frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}, \text{ sur } \omega, \\ \frac{1}{\rho_a}\frac{\partial p}{\partial N} &= 0, \text{ sur } \Sigma. \end{aligned} \tag{2.6}$$

D'autre part, il nous faut bien sûr écrire une formulation variationnelle qui soit compatible avec la méthode mise en œuvre pour la résolution du problème de Kirchhoff-Love, présentée à la partie II. On réécrit donc le problème (2.1, 2.2) sous la forme suivante, à l'aide des inconnues v_p, $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ et p :

$$\begin{cases} \rho_p \partial_t v_p + \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} = f_p - [p]_{|\omega}, & \text{dans } \omega, \\ \partial_t \underline{\underline{\mathcal{M}}} - \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) = 0, & \text{dans } \omega, \\ v_p = \partial_n v_p = 0, \text{ sur } \gamma_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_a^2 \Delta p = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{1}{\rho_a}\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\dfrac{\partial v_p}{\partial t}, & \text{sur } \omega, \\ \dfrac{1}{\rho_a}\dfrac{\partial p}{\partial N} = 0, & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{2.8}$$

Pour obtenir la formulation variationnelle de ce nouveau problème, il nous faut tout d'abord décomposer le domaine Ω en deux parties, l'intérieur de la guitare, noté Ω_i, et l'extérieur, noté Ω_e. On multiplie la première équation de (2.8) par une fonction test $p^* \in \mathcal{P}$, supposée suffisamment régulière et on effectue une intégration par partie à l'aide de la formule de Green, sur les deux parties Ω_i et Ω_e du domaine Ω. On ne précise pas le détail de ces calculs qui sont sans surprise. D'autre part, on procède comme à la section 1.3.1.c pour obtenir la formulation variationnelle de (2.7). On aboutit ainsi au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } v_p : [0,T] \to \mathcal{V},\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X} \text{ et } p : [0,T] \to \mathcal{P}, \text{ tels que :} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \cdot \underline{\nabla} v_p^* = \int_\omega f_p v_p^* - \int_\omega [p]_{|\omega} v_p^*, \quad \forall v_p^* \in \mathcal{V}, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + \int_\omega \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \cdot \underline{\nabla} v_p = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}, \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \mu_a p p^* + \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \frac{1}{\rho_a} \underline{\nabla} p \cdot \underline{\nabla} p^* + \frac{d}{dt}\int_\omega [p^*]_{|\omega} v_p = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

où :

$$\Omega = \Omega_i \cup \Omega_e$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = H_0^1(\omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{X} = (H^1(\omega))^4 \\ \mathcal{P} = H^1(\Omega) = H^1(\mathbb{R} \setminus \Gamma). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Remarque 2.1 *Les conditions sur la surface de la guitare apparaissent donc comme des conditions aux limites naturelles de cette formulation, puisqu'il s'agit en fait de conditions de type Neumann (c'est parce que le flux de pression est nul à travers le corps de la guitare Σ que l'intégrale de bord ne porte que sur ω). On notera que le saut de pression est bien nul au niveau du trou, par continuité de la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur le disque qui ferme la rose.*

En fait, le principal soucis de cette formulation variationnelle est lié au fait qu'il s'agit d'un problème tridimensionnel. En effet :

- L'approximation conforme de $H^1(\Omega)$ exige la construction d'un maillage de Ω. Compte tenu de la géométrie de l'instrument, cela veut dire qu'il faut construire un maillage *tétrahédrique* de Ω_e et de Ω_i (voir figure (2.1), qui est en 2d, pour des raisons évidentes de représentabilité). La génération de tels maillages, si elle est aujourd'hui facilité par l'existence de mailleurs de plus en plus efficaces et rapides, demande un travail long et difficile si on veut obtenir un résultat de qualité.

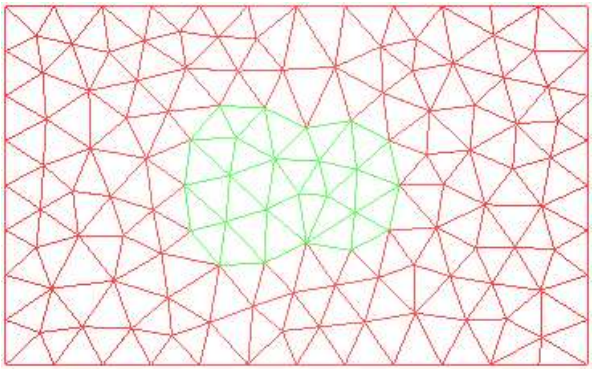


FIG. 2.1: *Maillage triangulaire conforme de $\Omega = \Omega_i \cup \Omega_e$ prenant en compte la géométrie de la guitare.*

- Il faut stocker tous les coefficients de la matrice de raideur obtenue lors de l'approximation spatiale de la dernière équation de (2.9). En fait, cela veut dire que l'approximation du laplacien que l'on construit par cette méthode dépend du point du maillage où l'on se trouve. Mais comme il s'agit d'un problème tridimensionnel, la taille de cette matrice peut rapidement devenir très grande (elle serait typiquement de l'ordre de 10^6 lignes). Ainsi, même si par essence la méthode des éléments finis conduit à des matrices très creuses, elle est tout de même très gourmande en stockage. En outre, il faut accéder à chaque pas de temps à l'ensemble de tous ces coefficients en mémoire, ce qui induit des temps de calcul très longs lorsque le nombre de pas de temps est important.

- Compte tenu de la taille du problème, il est bien sûr hors de question d'utiliser un schéma de discrétisation en temps implicite. Mais s'il est envisageable de mettre en œuvre une technique de condensation de masse de manière à obtenir un schéma explicite, la condition de stabilité imposée par un tel schéma dépend fortement du maillage. Pour un peu que certains tétrahèdres soient petits, cette condition de stabilité peut conduire à un pas de temps petit également, et donc encore à un surcoût de calcul (on retrouve ici la nécessité de construire un maillage de qualité; mais cela n'a absolument rien d'évident de réussir à construire un maillage le plus homogène possible).

L'intérêt de cette formulation est qu'elle prend en compte très précisément la géométrie complexe de l'instrument, puisque celui ci est maillé à l'aide de tétrahèdre. En outre, et ce point est également fondamental, la stabilité du schéma discret est assurée grâce à une propriété de conservation de l'énergie similaire à (2.5), obtenue à l'aide des propriétés d'un tel schéma induites par l'approximation variationnelle.

2.1.2 La méthode des différences finies

Pour résoudre un problème tridimensionnel en étant un tant soit peu efficace, il faudrait utiliser la méthode des différences finies. En effet, les défauts de la méthode des éléments finis présentée ci dessus disparaissent, tout simplement.

Cette méthode s'appuie sur un maillage régulier, composé de petits cubes, qu'il est trivial de construire. Et puisque ces cubes sont tous de même taille, on contrôle aisément leur pas, et par conséquent le pas de temps imposé par la condition de stabilité. Enfin, la régularité du maillage est telle que l'approximation du laplacien ne dépend pas du point où on se trouve, ce qui veut dire qu'aucun stockage n'est nécessaire, et par conséquent, les calculs à chaque ne requièrent pas d'accès superflus en mémoire.

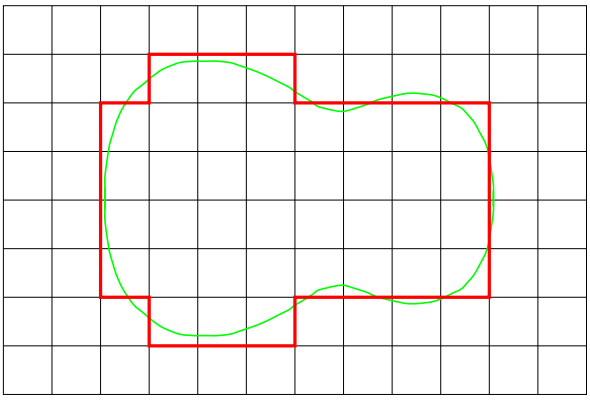


FIG. 2.2: *Maillage régulier Ω, approchant la géométrie de l'instrument par des marches d'escalier.*

Malheureusement, on ne peut pas mettre en œuvre cette technique ici, justement à cause de la régularité du maillage, qui approche trop grossièrement la géométrie du problème, comme on peut le voir sur la figure (2.2). Le fait d'approcher la forme de la guitare par une une surface en marche d'escaliers entraîne l'apparition de diffractions parasites sur les bords artificiels de l'instrument. Pour remédier à ce problème, il faut avoir recours à un

maillage très fin, ce qui entraîne un un surcoût inenvisageable. Un exemple numérique qui met en évidence ce phénomène de diffraction parasite est présenté dans [18]. On pourrait éventuellement chercher à écrire les conditions au bord de l'instrument par une méthode de pénalisation, mais cette technique n'est pas très robuste.

D'autre part, l'écriture d'un schéma stable couplant l'équation des ondes acoustiques à l'équation de plaque n'a rien d'évident. L'idéal, pour assurer la stabilité d'un tel couplage au niveau discret, est de pouvoir s'appuyer sur une propriété de conservation ou de décroissance de l'énergie, et pour cela, la méthode des éléments finis est reine.

2.2 Une formulation en domaines fictifs

Finalement, ni la méthode des éléments finis, ni la méthode des différences finies n'est satisfaisante, soit parce que c'est trop coûteux, soit parce que la géométrie du problème n'est pas suffisamment bien prise en compte. **La méthode des domaines fictifs, apparaît comme un compromis entre ces deux techniques.**

L'idée est de faire disparaître la guitare, ce qui permettra de mailler régulièrement le domaine du champ acoustique, et d'obtenir par conséquent un schéma de type différences finies, très efficace. Concrètement, on réalise en fait un prolongement des inconnues du champ acoustique $\underline{\mathbf{v}}_a$ et p à $\mathbb{R}^3$ tout entier. Les conditions au bord de l'instrument sont alors prises en compte de façon faible, par l'intermédiaire d'un multiplicateur de Lagrange, noté λ, qui s'interprête comme le saut de pression à la surface de l'instrument. Il suffit de construire un maillage surfacique de la guitare pour approcher λ, ce qui est d'autant plus aisé ici qu'il s'agit d'un cylindre. Ainsi, on prend en compte de manière très précise la géométrie du problème.

Enfin, cette méthode repose sur une formulation mixte du problème d'interaction fluide-structure, pour laquelle on a une propriété de conservation de l'énergie, qui nous permettra d'assurer la stabilité du schéma discret.

Cette technique s'appelle à juste titre *méthode de domaines fictifs*, puisque la guitare (fictive) n'apparaît plus dans le maillage du domaine du champ acoustique. Elle a été proposée par R.Glowinsky, T.W. Pan et J.Perriaux pour la résolution du problème stationnaire de Dirichlet intérieur (voir [37]), puis généralisée aux problèmes d'évolutions par F. Collino, F. Millot et P. Joly (voir [18]) et appliquée à de nombreux cas (voir par exemple [54], [34] ou [63]). Il s'avère qu'elle est bien adaptée pour des problèmes aux limites de type Dirichlet. Comme les conditions d'interactions fluide-structure (2.6) sont en fait de type Neumann, la formulation adéquate de l'équation des ondes acoustiques est en vitesse-pression (p et $\underline{\mathbf{v}}_a$) .

2.2.1 Formulation variationnelle

Il nous faut donc maintenant écrire une formulation variationnelle du problème suivant, écrit à l'aide des inconnues v_p, $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$, p et $\underline{\mathbf{v}}_a$:

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_p \dfrac{\partial v_p}{\partial t} - \operatorname{div} \underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} + R_p \rho_p \dfrac{\partial v_p}{\partial t} = f_p - [p]_{|\omega}, \quad \text{dans } \omega \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} + \mathbf{C}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) = 0, \quad \text{dans } \omega, \\ v_p = 0, \quad \text{sur } \gamma_0, \\ \partial_n v_p = 0, \quad \text{sur } \gamma_0, \\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{n} = 0, \quad \text{sur } \gamma_l, \\ (\underline{\operatorname{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}).\underline{\tau}] = 0, \quad \text{sur } \gamma_l, \end{array}\right. \tag{2.11}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_a \dfrac{\partial \underline{\mathbf{v}}_a}{\partial t} + \underline{\nabla} p = 0, \quad \text{dans } \Omega \\ \mu_a \dfrac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a = 0, \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\mathbf{v}}_a(x,y,0,t) \cdot \underline{e}_z = v_p(x,y,t), \quad \text{sur } \omega \\ \underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,t) \cdot \underline{N} = 0, \quad \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

• Pour voir comment on peut définir un prolongement de $\underline{\mathbf{v}}_a$ et p à tout $\mathbb{R}^3$, commençons par écrire une formulation variationnelle de (2.12). On multiplie la première équation par une fonction test $\underline{\mathbf{v}}_a^* \in \mathcal{W}$, suffisamment régulière, et on effectue une intégration par partie à l'aide de la formule de Stokes sur les deux parties Ω_i et Ω_e du domaine Ω. Puis on multiplie la seconde équation de (2.12) par une fonction test $p^* \in \mathcal{P}$ et on intègre simplement sur Ω. On obtient (rappelons que $\underline{N}$ désigne la normale extérieure à la guitare, c'est à dire la normale extérieure à Ω_i) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{\mathbf{v}}_a^* - \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} p \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a^* - \int_\Gamma [p]_{|\Gamma} \underline{\mathbf{v}}_a^* \cdot \underline{N} = 0, \quad \forall \underline{\mathbf{v}}_a^* \in \mathcal{W}, \\ \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_{\Omega_i \cup \Omega_e} p p^* + \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} p^* \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a = 0, \quad \forall p^* \in \mathcal{P}, \end{array}\right. \tag{2.13}$$

où $[p]_{|\Gamma}$ désigne le saut de pression à travers la surface de l'instrument, soit, l'indice i désignant l'intérieur et l'indice e l'extérieur :

$$[p]_{|\Gamma} = (p_e)_{|\Gamma} - (p_i)_{|\Gamma}, \tag{2.14}$$

• A ce stade, pour pouvoir calculer le saut de pression $[p]_{|\Gamma}$, il faut encore connaître la valeur de la pression de part et d'autre de la surface de la guitare, ce qui implique de construire un maillage de Ω, c'est à dire un maillage de Ω_e et de Ω_i. On considère alors ce saut de pression comme une inconnue supplémentaire, **ce qui revient à introduire l'inconnue surfacique** $\lambda = [p]_{|\Gamma}$.

• D'autre part, on ne peut pas traiter les conditions sur la surface de l'instrument comme des conditions essentielles introduites dans l'espace $\mathcal{W}$, car ici encore, cela nous obligerait

à construire un maillage de Ω. C'est pourquoi on écrit ces conditions sous une forme variationnelle, obtenue en multipliant les deux dernières équations de (2.12) par une fonction test $\lambda^* \in \mathcal{L}$, supposée suffisamment régulière :

$$\int_\omega v_p \lambda^* - \int_\Gamma \lambda^* \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N} = 0, \forall \lambda^* \in \mathcal{L}. \tag{2.15}$$

- Il est alors naturel de prendre p dans $L^2(\Omega_e \cup \Omega_i)$, qui se prolonge naturellement sur $\mathbb{R}^3$, puisque Γ est de mesure nulle. D'autre part, on prend $\underline{\mathbf{v}}_a$, dans $H(\mathrm{div}, \Omega_e \cup \Omega_i)$, qui se prolonge naturellement à $\mathbb{R}^3$ par continuité de la composante normale. Puisque la trace des fonctions de $H(\mathrm{div}, \mathbb{R}^3)$ sur Γ est dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, l'espace naturel dans lequel il faut choisir λ est $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Plus précisément, le saut de pression étant nul le long de la rose, *ie.* sur le bord γ_l, il faut prendre λ dans $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma)$. Comme $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma) \subset L^2(\omega)$, la formulation faible (2.15) a bien un sens.

- Enfin, on procède comme à la section 1.3.1.c pour obtenir la formulation variationnelle de (2.11). On aboutit ainsi au problème variationnel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{Trouver } v_p : [0,T] \to \mathcal{V},\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X}, & \\
\qquad p : [0,T] \to \mathcal{P},\ \underline{\mathbf{v}}_a : [0,T] \to \mathcal{W},\ \text{et } \lambda : [0,T] \to \mathcal{L},\ \text{tels que :} & \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} . \underline{\nabla} v_p^* - \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}], v_p^* \rangle_{\gamma_l} & \\
\qquad + R_p \displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* = \int_\omega f_p v_p^* - \int_\omega v_p^* \lambda_{|\omega}, & \forall v_p^* \in \mathcal{V}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + (1 + \eta\frac{d}{dt}) \left[\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* . \underline{\nabla} v_p + \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*\,\underline{n}).\underline{\tau}], v_p \rangle_{\gamma_l} \right] = 0, & \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \rho_a \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{\mathbf{v}}_a^* - \int_{\mathbb{R}^3} p\,\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{v}}_a^* - \langle \underline{\mathbf{v}}_a^* \cdot \underline{N}, \lambda \rangle_\Gamma = 0, & \forall \underline{\mathbf{v}}_a^* \in \mathcal{W}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \mu_a p p^* + \int_{\mathbb{R}^3} p^*\,\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{v}}_a = 0, & \forall p^* \in \mathcal{P}, \\
\displaystyle\int_\omega v_p \lambda^* - \langle \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N}, \lambda^* \rangle_\Gamma = 0, & \forall \lambda^* \in \mathcal{L}.
\end{array}\right. \tag{2.16}$$

où $\langle ., . \rangle_{\gamma_l}$ désigne le crochet de dualité défini sur $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_l) \times H^{\frac{1}{2}}(\gamma_l)$, $\langle ., . \rangle_\Gamma$ désigne le crochet de dualité défini sur $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V} = \left\{ v_p \in H^1(\omega)\ ;\ v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\}, \\
&\mathcal{X} = \left\{ (H^1(\omega))^4\ ;\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}) \,.\, \underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l \right\}, \\
&\mathcal{P} = L^2(\mathbb{R}^3), \\
&\mathcal{W} = H(\mathrm{div}, \mathbb{R}^3), \\
&\mathcal{L} = H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

2.2.2 Quelques propriétés de cette formulation variationnelle

On définit les formes bilinéaires continues suivantes :

$$
\left|\begin{array}{l}
m_{v_p}(v_p, v_p^*) = \displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^*, \quad \forall v_p, v_p^* \in H^1(\omega), \\
m_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*) = \displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \in (H^1(\omega))^4, \\
h(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, v_p) = \displaystyle\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}.\underline{\nabla} v_p + \langle \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}], v_p\rangle_{\gamma_l}, \quad \forall v_p \in H^1(\omega),\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} \in (H^1(\omega))^4, \\
b_\omega(v_p, \lambda) = \displaystyle\int_\omega v_p \lambda_{|\omega}, \quad \forall v_p \in H^1(\omega), \lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\
m_{v_a}(\underline{\mathbf{v}}_a, \underline{\mathbf{v}}_a^*) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \rho_a \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{\mathbf{v}}_a^*, \quad \forall \underline{\mathbf{v}}_a, \underline{\mathbf{v}}_a^* \in H(\mathrm{div}, \mathbb{R}^3), \\
m_p(p, p^*) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \mu_a p p^*, \quad \forall p, p^* \in L^2(\mathbb{R}^3), \\
d(\underline{\mathbf{v}}_a, p) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} p\, \mathrm{div}\, \underline{\mathbf{v}}_a, \quad \forall \underline{\mathbf{v}}_a \in H(\mathrm{div}, \mathbb{R}^3), p \in L^2(\mathbb{R}^3), \\
b_\Gamma(\underline{\mathbf{v}}_a, \lambda) = \langle \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N}, \lambda^*\rangle_\Gamma, \quad \forall \underline{\mathbf{v}}_a \in H(\mathrm{div}, \mathbb{R}^3), \lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),
\end{array}\right. \tag{2.18}
$$

ce qui permet de réécrire le problème (2.16) sous la forme abstraite suivante :

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\text{Trouver } v_p : [0,T] \to \mathcal{V},\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X}, & \\
\qquad p : [0,T] \to \mathcal{P},\ \underline{\mathbf{v}}_a : [0,T] \to \mathcal{W},\ \text{et } \lambda : [0,T] \to \mathcal{L},\ \text{tels que :} & \\
\dfrac{d}{dt} m_{v_p}(v_p, v_p^*) - h(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, v_p^*) + R_p m_{v_p}(v_p, v_p^*) = (f_p, v_p^*) - b_\omega(v_p^*, \lambda), & \forall v_p^* \in \mathcal{V}, \\
\dfrac{d}{dt} m_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{\mathcal{M}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*) + (1 + \eta \dfrac{d}{dt}) h(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, v_p) = 0, & \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}, \\
\dfrac{d}{dt} m_{v_a}(\underline{\mathbf{v}}_a, \underline{\mathbf{v}}_a^*) - d(\underline{\mathbf{v}}_a^*, p) - b_\Gamma(\underline{\mathbf{v}}_a^*, \lambda) = 0, & \forall \underline{\mathbf{v}}_a^* \in \mathcal{W}, \\
\dfrac{d}{dt} m_p(p, p^*) + d(\underline{\mathbf{v}}_a, p^*) = 0, & \forall p^* \in \mathcal{P}, \\
b_\omega(v_p, \lambda^*) - b_\Gamma(\underline{\mathbf{v}}_a, \lambda^*) = 0, & \forall \lambda^* \in \mathcal{L}.
\end{array}\right. \tag{2.19}
$$

Il s'agit d'un problème mixte non standard dans lequel intervient un triple multiplicateur de Lagrange (v_p, p, λ). L'analyse rigoureuse du caractère bien posé de cette formulation mixte selon la théorie de Babuska-Brezzi n'a rien d'évident. En particulier, l'obtention de la condition inf-sup dans le cas d'un multiplicateur de Lagrange multiple n'est pas immédiate, comme on peut le voir dans la démonstration proposée par C. Tsogka dans le cas de la formulation en domaines fictifs de l'équation des ondes scalaires ([63]). En outre, le fait que la formulation mixte de l'équation de plaque seule ne vérifie pas les conditions standards de la théorie des mixtes n'arrange pas les choses. On peut toutefois vérifier les critères suivants dans le cas de notre problème :

Lemme 2.1 • *La forme bilinéaire b définie par :*

$$b((v_p,\underline{\mathbf{v}}_a),\lambda) = b_\omega(v_p,\lambda) + b_\Gamma(\underline{\mathbf{v}}_a,\lambda), \quad \forall v_p \in H^1(\omega), \underline{\mathbf{v}}_a \in H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3), \lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \tag{2.20}$$

vérifie la condition inf-sup, c'est à dire :

$$\exists k>0, \quad \inf_{\lambda\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \sup_{\substack{v_p\in H^1(\omega)\\ \underline{\mathbf{v}}_a\in H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3)}} \frac{b((v_p,\underline{\mathbf{v}}_a),\lambda)}{\|(v_p,\underline{\mathbf{v}}_a)\|_{H^1\times H(\mathrm{div})}\,\|\lambda\|_{H^{\frac{1}{2}}}} \geq k. \tag{2.21}$$

- *La forme bilinéaire g vérifie la condition inf-sup, c'est à dire :*

$$\exists k>0, \inf_{p\in L^2(\mathbb{R}^3)} \sup_{\underline{\mathbf{v}}_a\in H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3)} \frac{d(\underline{\mathbf{v}}_a,p)}{\|\underline{\mathbf{v}}_a\|_{H(\mathrm{div})}\,\|p\|_{L^2}} \geq k. \tag{2.22}$$

- *La forme bilinéaire m_{v_a} est coercive sur le noyau à gauche de d, c'est à dire :*

$$\exists \nu>0, m_{v_a}(\underline{\mathbf{v}}_a,\underline{\mathbf{v}}_a) \geq \nu\|\underline{\mathbf{v}}_a\|_{H(\mathrm{div})}, \forall \underline{\mathbf{v}}_a \in \ker D, \tag{2.23}$$

où : $\ker D = \{\underline{\mathbf{v}}_a \in H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3)\ ;\ d(\underline{\mathbf{v}}_a,p)=0,\ \forall p\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$

▷ PREUVE : Par continuité des formes bilinéaires b, b_ω, b_Γ et d, on définit classiquement les opérateurs continus B, B_ω, B_Γ et D par :

$$\begin{aligned}
&\langle B(v_p,\underline{\mathbf{v}}_a),\lambda\rangle_\Gamma = b((v_p,\underline{\mathbf{v}}_a),\lambda), \quad \forall v_p\in H^1(\omega),\underline{\mathbf{v}}_a\in H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3),\lambda\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\\
&\langle B_\omega v_p,\lambda\rangle_\Gamma = b_\omega((v_p,\underline{\mathbf{v}}_a),\lambda), \quad \forall v_p\in H^1(\omega),\underline{\mathbf{v}}_a\in H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3),\lambda\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\\
&\langle B_\Gamma \underline{\mathbf{v}}_a,\lambda\rangle_\Gamma = b_\Gamma((v_p,\underline{\mathbf{v}}_a),\lambda), \quad \forall v_p\in H^1(\omega),\underline{\mathbf{v}}_a\in H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3),\lambda\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\\
&\langle D\underline{\mathbf{v}}_a,p\rangle = b((v_p,\underline{\mathbf{v}}_a),\lambda), \quad \forall v_p\in H^1(\omega),\underline{\mathbf{v}}_a\in H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3),\lambda\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

On observe que B_Γ n'est autre que l'opérateur de trace normale défini de $H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, qui est surjectif (voir par exemple [61]). Comme on a :

$$\forall v_p\in\underline{\mathbf{v}}_a, \quad B(v_p,\underline{\mathbf{v}}_a) = B_\omega v_p + B_\Gamma\underline{\mathbf{v}}_a, \tag{2.25}$$

la surjectivité de B découle tout simplement de celle de B_Γ. D'autre part, D n'est autre que l'opérateur de divergence défini de $H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ qui est lui aussi surjectif.

Les conditions inf-sup (2.21) et (2.22) sont alors une simple conséquence du lemme (2.6)

D'autre part, le noyau à gauche de d, qui n'est autre que $\ker D$, est l'ensemble des champs de $H(\mathrm{div},\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle. La coercivité de m_{v_a}, sur $\ker D$ découle alors de :

$$\left|\begin{array}{l} \|\underline{\mathbf{v}}_a\|^2_{H(\mathrm{div})} = \|\underline{\mathbf{v}}_a\|^2_{L^2} = m_{v_a}(\underline{\mathbf{v}}_a,\underline{\mathbf{v}}_a)\\ \forall \underline{\mathbf{v}}_a\in\ker D. \end{array}\right. \tag{2.26}$$

◁

2.3 Discrétisation spatiale

Afin d'établir une approximation spatiale du problème (2.19), on introduit les espaces de dimension finie suivants :

$$\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}, \quad \mathcal{X}_h \subset \mathcal{X}, \quad \mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}, \quad \mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}, \quad \mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}. \tag{2.27}$$

Le problème semi-discrétisé en espace s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } v_{p_h} : [0,T] \to \mathcal{V}_h,\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h : [0,T] \to \mathcal{X}_h, \\
\qquad q_h : [0,T] \to \mathcal{P}_h,\ \underline{\mathbf{v}}_{a_h} : [0,T] \to \mathcal{W}_h, \text{ et } \lambda_h : [0,T] \to \mathcal{L}_h, \text{ tels que :} \\
\dfrac{d}{dt} m_{v_p}(v_{p_h}, v^*_{p_h}) - h(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h, v^*_{p_h}) + R_p m_{v_p}(v_{p_h}, v^*_{p_h}) = (f_{p_h}, v^*_{p_h}) - b_\omega(v^*_{p_h}, \lambda_h), \quad \forall v^*_{p_h} \in \mathcal{V}_h, \\
\dfrac{d}{dt} m_{\mathcal{M}}(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h) + (1 + \eta \dfrac{d}{dt}) h(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h, v_{p_h}) = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h, \in \mathcal{X}_h, \\
\dfrac{d}{dt} m_{v_a}(\underline{\mathbf{v}}_{a_h}, \underline{\mathbf{v}}^*_{a_h}) - d(\underline{\mathbf{v}}^*_{a_h}, p_h) - b_\Gamma(\underline{\mathbf{v}}^*_{a_h}, \lambda_h) = 0, \quad \forall \underline{\mathbf{v}}^*_{a_h} \in \mathcal{W}_h, \\
\dfrac{d}{dt} m_p(p_h, p^*_h) + d(\underline{\mathbf{v}}_{a_h}, p^*_h) = 0, \quad \forall p^*_h \in \mathcal{P}_h, \\
b_\omega(v_{p_h}, \lambda^*_h) - b_\Gamma(\underline{\mathbf{v}}_{a_h}, \lambda^*_h) = 0. \forall \lambda^*_h \in \mathcal{L}_h.
\end{array}\right. \tag{2.28}$$

Remarque 2.2 *Le caractère bien posé et la consistance de cette approximation reposent entre autres sur la vérification de conditions inf-sup discrètes et de coercivité discrète similaires à celles obtenues dans le cas continu. Nous revenons plus en détail sur cet aspect à la section 2.3.2.d en ce qui concerne la condition inf-sup discrète liée à la formulation en domaines fictifs et à la remarque (2.4) en ce qui concerne la la condition inf-sup discrète et la coercivité discrète de la formulation mixte de l'équation des ondes acoustiques*

Ecriture matricielle Soient n_p la dimension de $\mathcal{V}_h$, n_M la dimension de $\mathcal{X}_h$, n_{v_a} la dimension de $\mathcal{W}_h$, n_p la dimension de $\mathcal{P}_h$ et n_λ la dimension de $\mathcal{L}_h$.

On introduit une base de $\mathcal{V}_h$, notée $(\varphi_m)_{1\leq m\leq n_p}$, une base de $\mathcal{X}_h$, notée $(\underline{\underline{\xi}}_p)_{1\leq p\leq n_M}$, une base de $\mathcal{W}_h$, notée $(\underline{\Phi}_i)_{1\leq i\leq n_{v_a}}$, une base de $\mathcal{P}_h$, notée $(\Psi_k)_{1\leq k\leq n_p}$, et une base de $\mathcal{L}_h$, notée $(\Lambda_r)_{1\leq r\leq n_\lambda}$.

On est alors amené à résoudre le système différentiel suivant :

$$\boxed{\begin{cases} M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt} - H_h^\top \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h + R_p M_h^p v_{p_h} = f_{p_h} - (B_{\omega_h})^\top \lambda_h, \\ M_h^{\mathcal{M}} \dfrac{d\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h}{dt} + (1 + \eta \dfrac{d}{dt}) H_h v_{p_h} = 0, \\ M_h^a \dfrac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt} - G_h p_h - (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h = 0, \\ M_h^{p_a} \dfrac{dp_h}{dt} + G_h^\top \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0, \\ B_{\omega_h} v_{p_h} - B_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0. \end{cases}} \tag{2.29}$$

où $A^\top$ désigne la transposée d'une matrice A et :

$$\begin{aligned}
(M_h^p)_{mn} &= \int_\omega \rho_p \varphi_m \varphi_n, \quad 1 \le m, n \le n_p \\
(M_h^{\mathcal{M}})_{pq} &= \int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\xi}}_p \underline{\underline{\xi}}_q, \quad 1 \le p, q \le n_M \\
(M_h^a)_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_a \underline{\Phi}_i \cdot \underline{\Phi}_j, \quad 1 \le i, j \le n_{v_a} \\
(M_h^{p_a})_{kl} &= \int_{\mathbb{R}^3} \mu_a \Psi_k \Psi_l, \quad 1 \le k, l \le n_p \\
(H_h)_{pm} &= \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\xi}}_p . \underline{\nabla} \varphi_m + \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\xi}}_p \underline{n}).\underline{\tau}], \varphi_m \rangle_{\gamma_l}, \quad 1 \le p \le n_M, \quad 1 \le m \le n_p, \\
(f_{p_h})_m &= \int_\omega f_p \varphi_m, \quad 1 \le i \le n_p, \\
(G_h)_{i,k} &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{div}\, \underline{\Phi}_i \Psi_k, \quad 1 \le i \le n_{v_a}, \quad 1 \le k \le n_p, \\
(B_{\omega_h})_{r,m} &= \int_\omega \varphi_m \Lambda_{r\,|\omega}, \quad 1 \le m \le n_p, \quad 1 \le r \le n_\lambda, \\
(B_{\Gamma_h})_{r,i} &= \langle \underline{\Phi}_i \cdot \underline{N}\,,\, \Lambda_r \rangle_\Gamma, \quad 1 \le i \le n_{v_a}, \quad 1 \le r \le n_\lambda,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

2.3.1 Approximation des espaces $H^1(\omega)$ et $(H^1(\omega))^4$

Pour l'approximation par éléments finis des espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$, on utilisera l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ présentée à la section 2.1. Rappelons en particulier que celle ci conduit, grâce à la technique de condensation de masse, à une matrice de masse M_h^p diagonale et à une matrice de masse $M_h^{\mathcal{M}}$ diagonale par blocs 4x4.

2.3.2 Approximation des espaces $L^2(\Omega)$, $H(\mathrm{div}, \Omega)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

2.3.2.a Restriction à un domaine borné : les conditions aux limites absorbantes

Il nous faut approcher les espaces $H(\mathrm{div}, \mathbb{R}^3)$ et $L^2(\mathbb{R}^3)$, ce qui est numériquement inenvisageable, puisque $\mathbb{R}^3$ étant un domaine non borné, il faudrait construire un maillage de dimen-

sion infinie. Le domaine de calcul est alors artificiellement borné et il convient de déterminer un traitement spécifique des frontières artificielles ainsi introduites.

Pour cela, il existe essentiellement trois méthodes :

- Les méthodes intégrales reposent sur la connaissance d'un noyau de Green et permettent de poser le problème uniquement sur la frontière qui borne artificiellement le domaine.
- La technique des couches parfaitement absorbantes (PML, pour Perfectly Matched Layered), introduite par Bérenger [4], consiste à entourer le domaine de calcul par un milieu artificiel dans lequel les ondes sont atténuées,
- La technique des conditions aux limites absorbantes (CLA), introduite par B. Engquist et A. Majda [24] dans les années soixante-dix, consiste à adjoindre aux équations une conditions aux limites définie sur le bord artificiel déterminée à l'aide d'une approximation de la condition transparente définie sur ce bord.

Nous avons choisi ces dernières dans le cas d'une approximation d'ordre élevée de la condition de transparence, proposée par F. Collino (voir [17]), essentiellement pour leur simplicité d'utilisation. Ces conditions aux limites s'incorporent sans difficulté dans notre problème. Dans un soucis de simplicité et de clarté de présentation, elles ne sont pas présentées ici.

Ainsi, **les calculs sont restreints à un parallélépipède rectangle entourant la guitare, que nous noterons encore Ω.** Il nous faut à présent construire une approximation des espaces $L^2(\Omega)$ et $H(\mathrm{div},\Omega)$. On introduit pour cela un maillage Ω_h de Ω en petits cubes d'arête h_a. Un tel cube est noté C.

2.3.2.b Les éléments finis de Raviart-Thomas

- On approche $L^2(\Omega)$ à l'aide de l'espace d'éléments finis de Lagrange discontinus d'ordre 0, défini par :

$$\boxed{\mathcal{P}_h = \left\{ p_h \in L^2(\Omega) \; ; \; p_{h|C} \in Q_0, \forall C \in \Omega_h \right\}} \tag{2.31}$$

Les degrés de liberté de cet espace sont tout simplement les valeurs au centre des cubes de Ω_h (voir figure (2.3)).

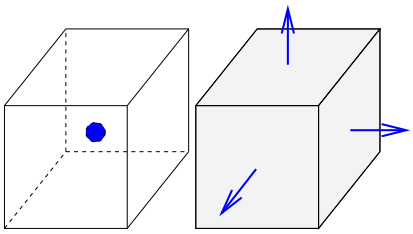


FIG. 2.3: *A gauche, le degré de liberté de l'élément fini de Lagrange P_0 discontinu — A droite, les degrés de liberté de l'élément fini de Raviart-Thomas de bas degré*

- D'autre part, on approche $H(\mathrm{div},\Omega)$ à l'aide de l'espace d'éléments finis de Raviart-Thomas de bas degré (voir par exemple [50]), défini par :

$$\boxed{\mathcal{W}_h = \left\{ \underline{\mathbf{v}}_{a_h} \in H(\mathrm{div},\Omega)\ ;\ \underline{\mathbf{v}}_{a_h|C} \in R(C), \forall C \in \Omega_h \right\}} \tag{2.32}$$

où $R(C)$ désigne l'espace des polynômes définis sur le cube C par :

$$R(C) = \left\{ \underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \alpha_x + \beta_x x \\ \alpha_y + \beta_y y \\ \alpha_z + \beta_z z \end{pmatrix}\ ;\ \alpha_x,\beta_x,\alpha_y,\beta_y,\alpha_z,\beta_z \in \mathbb{R} \right\} = Q_{1,0,0} \times Q_{0,1,0} \times Q_{0,0,1} \tag{2.33}$$

où $Q_{i,j,k}$ désigne l'ensemble des polynômes de trois variables de degré inférieur à i en la première variable, inférieur à j en la seconde variable, et inférieur à k en la troisième variable.

On vérifie que la composante normale de tout champ $\underline{\mathbf{v}}_a$ appartenant à $R(C)$ est constante sur chaque face, ce qui permet de contrôler la continuité de cette composante et assure que l'espace $\mathcal{W}_h$ est bien un sous espace de $H(\mathrm{div},\Omega)$. Les degrés de liberté de cet espace sont donc les valeurs de la composante normale du champ sur chaque face du maillage. Ils sont représentés schématiquement sur la figure (2.3).

Remarque 2.3 *A titre indicatif, rappelons que l'expression des fonctions de base sur le cube unité de référence, noté $\hat{C}$, sont données par :*

$$\left|\begin{array}{ll} \underline{\Phi}_1(x,y,z) = (x-1)\underline{e}_x, & \underline{\Phi}_2(x,y,z) = x\underline{e}_x, \\ \underline{\Phi}_3(x,y,z) = (y-1)\underline{e}_y, & \underline{\Phi}_4(y,y,z) = y\underline{e}_y, \\ \underline{\Phi}_5(x,y,z) = (z-1)\underline{e}_z, & \underline{\Phi}_6(z,y,z) = z\underline{e}_z, \end{array}\right. \tag{2.34}$$

où $\underline{\Phi}_i$ est la fonction de base associée à la face i, pour $1 \leq i \leq 6$. La face 1 est contenue dans le plan d'équation $x = 0$, la face 2 dans le plan $x = 1$, la face 3 dans le plan $y = 0$, la face 4 dans le plan $y = 1$, la face 5 dans le plan $z = 0$,la face 6 dans le plan $z = 1$.

Remarque 2.4 *Ce choix d'espace d'approximation vérifie la conditions inf-sup discrète uniforme associée à la forme bilinéaire d, c'est à dire (voir [50]) :*

$$\exists k_0 > 0,\ \inf_{p_h \in \mathcal{P}_h} \sup_{\underline{\mathbf{v}}_{a_h} \in \mathcal{W}_h} \frac{d(\underline{\mathbf{v}}_{a_h}, p_h)}{\|\underline{\mathbf{v}}_{a_h}\|_{H(\mathrm{div})}\, \|p_h\|_{L^2}} \geq k_0, \tag{2.35}$$

et aussi la condition de coercivité discrète uniforme associée à la forme bilinéaire m_{v_a}, c'est à dire :

$$\exists \nu_0 > 0, m_{v_a}(\underline{\mathbf{v}}_{a_h}, \underline{\mathbf{v}}_{a_h}) \geq \nu_0 \|\underline{\mathbf{v}}_{a_h}\|_{H(\mathrm{div})}, \forall \underline{\mathbf{v}}_{a_h} \in \ker D_h, \tag{2.36}$$

où : $\ker D_h = \{ \underline{\mathbf{v}}_{a_h} \in \mathcal{W}_h\ ;\ d(\underline{\mathbf{v}}_{a_h}, p_h) = 0,\ \forall p_h \in \mathcal{P}_h \}$

2.3.2.c Approximation de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

On introduit un maillage triangulaire de la surface Γ, noté $\mathcal{G}_h$, de pas h_λ. On approche alors l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ à l'aide des éléments finis de Lagrange continus d'ordre 1, c'est à dire :

$$\mathcal{L}_h = \left\{ \lambda_h \in C^0(\Gamma) \; ; \; \lambda_{h|K} \in P_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{G}_h \right\} \tag{2.37}$$

La présentation détaillée faite à la section 2.3.1.a de cet espace d'approximation dans le cas d'un domaine plan se transpose sans difficulté au cas d'une surface. En particulier, l'introduction de la condition de nullité sur le bord γ_l s'interprète comme un simple "rayage" des degrés de libertés qui sont sur γ_l.

2.3.2.d A propos de la condition inf-sup discrète de la formulation en domaines fictifs

La consistance de la méthode des domaines fictifs repose sur la vérification de la condition inf-sup discrète uniforme analogue à la condition continue (2.21). Il s'agit ici de vérifier :

$$\exists k_0 > 0, \inf_{\lambda_h \in \mathcal{L}_h} \sup_{\underline{\mathbf{v}}_{a_h} \in \mathcal{W}_h} \frac{b_\Gamma(\underline{\mathbf{v}}_{a_h}, \lambda_h)}{\|\underline{\mathbf{v}}_{a_h}\|_{H(\mathrm{div})} \|\lambda\|_{H^{\frac{1}{2}}}} \geq k_0. \tag{2.38}$$

En particulier, cette condition implique que le noyau de la matrice $(B_{\Gamma_h})^\top$ est réduit à $\{0\}$, ou en d'autres termes que la matrice $(B_{\Gamma_h})^\top$ est injective, ce qui assure l'unicité du multiplicateur de Lagrange discret λ_h.

La démonstration de cette condition n'a rien d'évident. **Elle repose sur une condition de compatibilité entre le maillage Ω_h du domaine acoustique et le maillage $\mathcal{G}_h$ de la surface de la guitare**. Cette condition s'écrit :

$$\boxed{h_\lambda \geq \alpha h_a,} \tag{2.39}$$

où α est une constante supérieure à 1. Plusieurs études théoriques ont été réalisées sur ce sujet. Girault et Glowinsky ont montré cette condition dans le cas du problème de Dirichlet (voir [35]). Ils donnent une valeur universelle de α (*ie.* indépendante de Ω et Γ), mais probablement pessimiste. Joly et Rhaouti [43] obtiennent, dans le cas du problème de Neumann qui nous concerne ici, une constante α supposée assez grande, mais qui n'est pas connue explicitement, et qui dépend a priori des domaines Ω et Γ.

En pratique, on vérifie du point de vue numérique que la condition inf-sup discrète est vérifiée sous la condition :

$$h_\lambda \geq 1,1 \, h_a. \tag{2.40}$$

Remarque 2.5 *Ainsi, la condition inf-sup discrète nous impose de prendre un maillage en espace du domaine acoustique suffisamment* fin*, puisque son pas doit être inférieur à celui du maillage surfacique de la guitare. S'agissant d'un problème tridimensionnel, il faut prendre garde à ne pas le choisir trop petit, au risque de rendre les calculs inabordables.*

En pratique, pour simplifier le calcul de la matrice B_{ω_h}, on fait coïncider la restriction du maillage surfacique de la guitare $\mathcal{G}_h$ avec le maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine ω, occupé par la table d'harmonie (ceci

nous évite d'avoir à calculer les intersections des triangles de ces deux maillages). Mais il nous faut un maillage relativement fin pour prendre en compte les raidisseurs de la plaque dans notre modèle. Cette coïncidence des maillage surfacique liée à la contrainte sur le pas d'espace dans l'air nous empêche de mailler la table d'harmonie avec toute latitude. Si on veut un maillage plus précis, il faut alors effectuer le calcul des deux maillages surfaciques $\mathcal{T}_h$ et $\mathcal{G}_h$.

Remarque 2.6 *Il est assez facile de comprendre que la condition inf-sup discrète uniforme repose sur une condition de compatibilité des maillages de la forme (2.39). Rappelons que lorsque la dimension de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange λ, notée n_λ, est supérieure à celle de l'espace d'approximation de la variable primale $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}$, notée n_{v_a}, il est évident que la condition inf-sup discrète n'est pas vérifiée. En effet, la matrice $(B_{\Gamma_h})^\top$ est alors de taille $n_{v_a} x n_\lambda$ avec $n_\lambda > n_{v_a}$, et d'après le théorème du rang, son noyau ne peut être réduit à $\{0\}$.*

L'exemple suivant, proposé dans la thèse de L. Rhaouti ([54]), s'appuie sur une généralisation de cette idée. Il est présenté dans le cas bidimensionnel pour simplifier. Ω_h est alors un maillage composé de carrés et $\mathcal{G}_h$ est un maillage composé de segments.

Supposons que l'un des carrés C du maillage Ω_h contienne le support d'au moins cinq fonctions de base de l'espace $\mathcal{L}_h$, ce qui revient à supposer que ce carré contient six segments consécutifs du maillage $\mathcal{G}_h$ (voir la figure (2.4)). C'est une manière un peu radicale de ne pas vérifier (2.39).

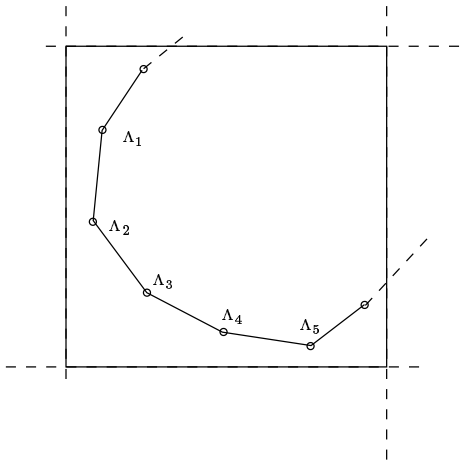


FIG. 2.4: *Un exemple où la condition inf-sup discrète n'est pas vérifiée*

Rappelons que la base de l'espace $\mathcal{W}_h$ est notée $(\underline{\Phi}_i)_{1\leq i\leq n_{v_a}}$, tandis que la base de l'espace $\mathcal{L}_h$ est notée $(\Lambda_r)_{1\leq r\leq n_\lambda}$. Quitte à renuméroter, nous pouvons supposer que les 4 fonctions de base de $\mathcal{W}_h$ non nulles sur le carré C sont numérotées de 1 à 4 et que les 5 fonctions de base de $\mathcal{L}_h$ dont le support est inclus dans C sont numérotées de 1 à 5.

Puisque le support de $(\Lambda_r)_{1\leq r\leq 5}$ est inclus dans C, ces 5 fonctions sont nulles hors du carré C. On en déduit que :

$$(B_{\Gamma_h})_{ri} = 0, \quad \forall 1 \leq r \leq 5, \quad \forall 5 \leq i \leq n_{v_a}. \tag{2.41}$$

En d'autre termes, la matrice $(B_{\Gamma_h})^\top$ a la forme suivante :

$$(B_{\Gamma_h})^\top = \begin{pmatrix} \tilde{b} & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

où $\tilde{b}$ est une matrice de taille 4x5 et n'est pas injective. Par conséquent, $(B_{\Gamma_h})^\top$ n'est pas injective, ce qui revient à dire que la condition inf-sup discrète n'est pas vérifiée.

2.3.2.e Condensation de masse

La matrice de masse $M_h^{p_a}$ est diagonale dans la base canonique de l'espace $\mathcal{P}_h$. Mais la matrice de masse M_h^a ne possède pas cette heureuse propriété. Cette fois encore, on utilise la condensation de masse pour réduire cette matrice à une diagonale, sans nuire à la précision du schéma, en effectuant un calcul approché à l'aide d'une formule de quadrature.

On a vu au chapitre 2 que l'obtention de la condensation de masse pour les éléments finis de Raviart-Thomas triangulaires sur maillage quelconque n'a rien d'évident. Dans notre cas, nous ne sommes heureusement pas obligés de mettre en œuvre une construction sophistiquée pour arriver à nos fins. En effet, la structure particulière du maillage est telle que les fonctions de base de l'espace $\mathcal{W}_h$ vérifient des relations d'orthogonalité bien arrangeantes.

Deux fonctions de base définies sur le cube unité $\hat{C}$, associées à des faces orthogonales entre elles, sont orthogonales (voir (2.34)). D'autre part, si $\underline{\Phi}_i$ et $\underline{\Phi}_j$ sont associées à deux faces parallèles, on approche le calcul du coefficient (i,j) de M_h^a à l'aide de la formule des trapèzes :

$$\int_{\hat{C}} \rho_a \underline{\Phi}_i \cdot \underline{\Phi}_j = \frac{\rho_a}{2}(\underline{\Phi}_i(M_i)\cdot\underline{\Phi}_j(M_i) + \underline{\Phi}_i(M_j)\cdot\underline{\Phi}_j(M_j)), \tag{2.43}$$

où M_f désigne le milieu de la face $f, f \in \{i,j\}$, et on vérifie immédiatement que ce calcul conduit à une matrice de masse diagonale.

Ainsi, en faisant abstraction des bords, on a :

$$\begin{aligned} M_h^{p_a} &= \mu_a h_a^3, \\ M_h^a &= \rho_a h_a^3. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Remarque 2.7 *De même que pour l'approximation spatiale de l'équation de corde, le fait de prendre un maillage structuré du domaine acoustique conduit en fait à un classique schéma aux différences finies en espace de l'équation des ondes acoustiques. Les composantes normales de $\underline{\mathbf{v}}_{a_h} = (\underline{\mathbf{v}}^x_{a_h}, \underline{\mathbf{v}}^y_{a_h}, \underline{\mathbf{v}}^z_{a_h})$ sont approchées par leurs valeurs au milieu des faces du maillage Ω_h et p_h est approchée par ses valeurs au milieu des cubes du maillage.*

$$\begin{cases} \rho_a \dfrac{d(\underline{\mathbf{v}}^x_{a_h})_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{dt} + \dfrac{(p_h)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (p_h)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{h_a} = 0, \\ \rho_a \dfrac{d(\underline{\mathbf{v}}^y_{a_h})_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{dt} + \dfrac{(p_h)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (p_h)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{h_a} = 0, \\ \rho_a \dfrac{d(\underline{\mathbf{v}}^z_{a_h})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{dt} + \dfrac{(p_h)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (p_h)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{h_a} = 0, \end{cases} \tag{2.45}$$

et :

$$\begin{aligned}\mu_a \frac{d}{dt}(p_h)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad &+\frac{(\underline{\mathbf{v}}^x_{a_h})_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (\underline{\mathbf{v}}^x_{a_h})_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{h_a} \\ &+\frac{(\underline{\mathbf{v}}^y_{a_h})_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} - (\underline{\mathbf{v}}^y_{a_h})_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{h_a} \\ &+\frac{(\underline{\mathbf{v}}^z_{a_h})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} - (\underline{\mathbf{v}}^z_{a_h})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{h_a}\end{aligned} \tag{2.46}$$

2.4 Discrétisation temporelle

On effectue à présent la discrétisation temporelle du problème semi-discrétisé en espace. De même qu'au chapitre précédent concernant l'approximation du couplage plaque-corde, nous utilisons une technique de discrétisation en temps différente pour chacune des deux équations. Une technique de résolution *exacte* pour l'équation de plaque, présentée en détail à la section 4.3, et une discrétisation plus classique par différences finies en temps pour l'équation des ondes acoustiques.

2.4.1 Diagonalisation de l'équation de plaque discrète

On procède exactement comme au chapitre précédent. Il faut tout d'abord éliminer le moment fléchissant du système différentiel matriciel (2.29). On obtient :

$$\boxed{\begin{cases} M_h^p \dfrac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + (1+\eta\dfrac{d}{dt})K_h v_{p_h} + R_p M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt} = \dfrac{df_{p_h}}{dt} - (B_{\omega_h})^\top \dfrac{d\lambda_h}{dt}, \\ M_h^a \dfrac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt} - G_h p_h - (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h = 0, \\ M_h^{p_a} \dfrac{dp_h}{dt} + G_h^\top \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0, \\ B_{\omega_h} v_{p_h} - B_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0. \end{cases}} \tag{2.47}$$

où K_h est la matrice définie par :

$$K_h = H_h (M_h^{\mathcal{M}})^{-1} H_h^\top. \tag{2.48}$$

Pour la résolution de l'équation de plaque, il faut diagonaliser la matrice $(M_h^p)^{-1}K_h$. Suivant la démarche présentée à la section 4.3.4, on ne calculera que les premières composantes du vecteur v_{p_h} dans la base propre de la matrice $(M_h^p)^{-1}K_h$. Effectuons à nouveau quelques rappels et notations :

Notation 2.1 *On rappelle les notations et résultats suivants (*cf. *section 4.3) :*

- *On note :*
  - ⋆ v_{EF} *les composantes de* v_{p_h} *dans la base canonique des éléments finis,*

  - ⋆ *v_K les composantes de v_{p_h} dans la base propre de K_h déterminée ci dessus.*

- *On* tronque *la vecteur v_K en ne considérant que les $\tilde{n}_p$ premiers modes. Ainsi, notant $(\chi)_{1\leq i\leq n_p}$ la famille des n_p vecteurs propres de la matrice $(M_h^p)^{-1}K_h$, on effectue l'approximation :*

$$v_K \approx \tilde{v}_K = \sum_{i=0}^{\tilde{n}_p} v_K^i \chi_i. \tag{2.49}$$

  et on confondra désormais v_K et $\tilde{v}_K$

- *On a :*

$$\tilde{P}^\top K_h \tilde{P} = D_K$$

  où :

  - ⋆ *$D_K = \underset{1\leq i\leq \tilde{n}_p}{\text{diag}}\ (\lambda_i^2)$ est la matrice diagonale des $\tilde{n}_p$ premières valeurs propres de $(M_h^p)^{-1}K_h$, strictement positive, rangées dans l'ordre croissant,*
  - ⋆ *$\tilde{P}$ est la matrice de passage tronquée. Elle vérifie la relation :*

$$\tilde{P}^\top M_h^p \tilde{P} = I, \tag{2.50}$$

    exprimant que la base propre est orthonormale pour le produit scalaire $(.,.)_{M_h^p}$.

- *On note $A_K = (R_p\, I + \eta\, D_K)$, la matrice diagonale positive d'amortissement de la plaque. Plus généralement, conformément à la note (4.3) on prendra*

$$A_K = \underset{1\leq i\leq \tilde{n}_p}{\text{diag}}\ (\alpha(\lambda_i)),$$

  où α est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ donnée.

- *v_K et v_{EF} se se déduisent l'un de l'autre par les relations de changement de base :*

$$v_K = \tilde{P}^\top M_h^p v_{EF} \quad \text{et} \quad v_{EF} \approx \tilde{P} v_K. \tag{2.51}$$

- *Enfin, on pose :*

$$B_{K_h} = \tilde{P}^\top B_{\omega_h} \tag{2.52}$$

  Notons encore que malgré cette notation trompeuse, B_{K_h} n'est pas la matrice représentant B_{ω_h} dans la base propre tronquée ...

  Si la matrice B_{ω_h} est essentiellement creuse, comme le veut à la méthode des éléments finis, la matrice B_{K_h} n'a aucune raison de l'être puisque $\tilde{P}$ est pleine.

On multiplie la première équation de (2.47) par $\tilde{P}^\top$. D'autre part, on réécrit le terme de couplage intervenant dans la dernière équation en fonction de v_K, à l'aide de (2.51). On

obtient alors, compte tenu des relations rappelées ci dessus :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v_K}{dt^2} + A_K \dfrac{dv_K}{dt} + D_K v_K = \dfrac{df_{p_h}}{dt} - (B_{K_h})^\top \dfrac{d\lambda_h}{dt}, \\ M_h^a \dfrac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt} - G_h p_h - (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h = 0, \\ M_h^{p_a} \dfrac{dp_h}{dt} + G_h^\top \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0, \\ B_{K_h} v_K - B_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0. \end{cases} \tag{2.53}$$

Sous cette forme, on a la propriété de conservation de l'énergie du problème semi-discret suivante :

Propriété 2.1 *L'énergie de la plaque est définie par :*

$$E_{p_h}(t) = \frac{1}{2}\|\frac{dv_K}{dt}\|^2 + \frac{1}{2}\|v_K\|^2_{D_K}, \tag{2.54}$$

celle de l'air est définie par :

$$E_{a_h}(t) = \frac{1}{2}\|\frac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt}\|^2_{M_h^a} + \frac{1}{2}\|\frac{dp}{dt}\|^2_{M_h^{p_a}}, \tag{2.55}$$

Alors l'énergie totale $E_h(t) = E_{p_h}(t) + E_{a_h}(t)$ vérifie :

$$\frac{dE_h}{dt}(t) = (\frac{df_{p_h}}{dt}, \frac{dv_K}{dt}) - \|\frac{dv_K}{dt}\|^2_{A_K} \tag{2.56}$$

Ainsi, puisque A_K est positive, dés que le second membre f_p est nul, l'énergie totale du système décroît.

▷ PREUVE : On commence par dériver la deuxième et la troisième équation de (2.53) par rapport au temps. Puis on multiplie scalairement les deux équations obtenues par $\frac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt}$ et $\frac{dp_h}{dt}$ respectivement. D'autre part, on multiplie la première équation de (2.53) par $\frac{dv_{p_h}}{dt}$. On obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{dE_{p_h}}{dt} + \|\frac{dv_K}{dt}\|^2_{A_K} = (\frac{df_{p_h}}{dt} - (B_{K_h})^\top \frac{d\lambda_h}{dt}, \frac{dv_K}{dt}), \\ &\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\|\frac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt}\|^2_{M_h^a}) - (G_h \frac{dp_h}{dt}, \frac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt}) - ((B_{\Gamma_h})^\top \frac{d\lambda_h}{dt}, \frac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt}) = 0, \\ &\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\|\frac{dp_h}{dt}\|^2_{M_h^{p_a}}) + (G_h^\top \frac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt}, \frac{dp_h}{dt}) = 0. \end{aligned} \tag{2.57}$$

En sommant ces équations, il reste :

$$\frac{dE_h}{dt} = (\frac{df_{c_h}}{dt}, \frac{dv_K}{dt}) - \|\frac{dv_K}{dt}\|^2_{A_K} + (\frac{d\lambda_h}{dt}, (B_{\Gamma_h})^\top \frac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt} - (B_{K_h})^\top \frac{dv_K}{dt}). \tag{2.58}$$

Il suffit de dériver la dernière équation de (2.53) par rapport au temps pour vérifier que le dernier terme ci dessus est nul, ce qui nous donne la relation (2.56). ◁

2.4.2 Un schéma de discrétisation en temps

Il n'est pas envisageable de proposer un schéma qui conduise à la résolution d'un système linéaire de grande taille à chaque pas de temps, pour l'approximation en temps de l'équation des ondes acoustiques. **A cause de la taille du problème tridimensionnel, notre objectif est ici, plus encore que pour la résolution du problème couplé plaque-corde, de proposer un schéma essentiellement explicite.** Pour cela, on cherche à l'écrire comme une perturbation du schéma usuel explicite centré d'ordre 2 de l'équation des ondes acoustiques. L'équation de plaque, elle, est discrétisé selon le procédé décrit à la section 4.3.

Le point crucial de cette étape est la recherche d'une énergie discrète pour laquelle on puisse obtenir une propriété de décroissance qui assurera que la norme des inconnues discrètes reste bornée au cours du temps sous une éventuelle condition de stabilité, de type cfl. De même que dans le cas semi-discret, l'énergie portera entre autres sur les quantités p_h et $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}$ dérivées discrètement en temps. Pour assurer le caractère conservatif du couplage, comme on le verra dans la preuve de la propriété suivante (2.1), il faut en fait écrire une discrétisation de la dérivée en temps de la dernière équation de (2.53). Les conditions initiales étant nulles, cela ne change pas le problème. Cette idée nous conduit au schéma suivant :

$$
S_{pa} \; : \; \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \ddot{v}_K + A_K \dot{v}_K + D_K v_K = \dfrac{f_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - f_{p_h} n - \frac{1}{2}}{\Delta t} - B_{K_h} \dfrac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad \forall t \in]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[\\ v_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_K^{n-\frac{1}{2}} \text{ et } \dot{v}_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \\ M_h^a \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n}{\Delta t} - G_h p_h^{n+\frac{1}{2}} - (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\ M_h^{p_a} \dfrac{p_h^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_h \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n = 0, \\ B_{K_h} \dfrac{v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - B_{\Gamma_h} \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}}{2\Delta t} = 0. \end{array} \right.
$$

(2.59)

Remarque 2.8 *Notons que dans la dernière équation de ce système, la discrétisation de* $\dfrac{dv_K}{dt}$ *n'est pas la même que celle de* $\frac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt}$*. Ce choix est en fait imposé par la conservation de l'énergie, comme on le verra dans la preuve ci après.*

2.4.3 Analyse de stabilité

De la même manière que dans le cas semi-discrétisé, il faut définir une énergie discrète du champ acoustique portant sur des quantités *dérivées*. Pour cela, nous devons tout d'abord préciser les notations suivantes :

Notation 2.2 *On définit les dérivées discrètes en temps :*

$$\begin{aligned} \overset{\blacktriangle}{p}_h^n &= \frac{p_h^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \\ \overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n}}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

2.4.3.a Conservation de l'énergie discrète du schéma S_{pa}

On peut alors énoncer une propriété de conservation d'énergie du schéma S_{pa} :

Propriété 2.2 *L'énergie discrète de la plaque est définie par :*

$$E_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\|v_K^{n+\frac{1}{2}}\|_{D_K}^2 \tag{2.61}$$

celle du champ acoustique est définie par :

$$E_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}\|_{M_h^a}^2 + \frac{1}{2}\left(\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n}\right)_{M_h^{pa}} \tag{2.62}$$

Alors l'énergie totale $E_h^{n+\frac{1}{2}} = E_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} + E_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}$ vérifie :

$$\frac{E_h^{n+\frac{1}{2}} - E_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left(\frac{f_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - f_{p_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \frac{v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right) - \frac{1}{\Delta t}\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \|\dot{v}_K\|_{A_K}^2 \tag{2.63}$$

Il s'agit bien d'un résultat de décroissance de l'énergie, puisque dés que l'effort exercé sur la plaque est nul, l'énergie décroît, grâce à la positivité de A_K.

▷ PREUVE : On commence par multiplier scalairement la troisième équation de (2.59) par $\dot{v}_K$ puis on intègre en temps sur l'intervalle $[t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}]$, et on divise l'ensemble par Δt (ce qui revient en fait à prendre la valeur moyenne de la quantité intégrée sur $[t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}]$). Compte tenu du fait que

$$\frac{f_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - f_{p_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

sont constants sur l'intervalle d'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{E_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - E_{p_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left(\frac{f_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - f_{p_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \frac{v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - v_{p_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right) - \frac{1}{\Delta t}\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \|\dot{v}_K\|_{A_K}^2 \\ - \left((B_{K_h})^\top \frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \frac{v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - v_{p_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right) \end{aligned} \tag{2.64}$$

Il nous faut maintenant dériver discrètement par rapport au temps la deuxième et la troisième équation de (2.59), ce qui conduit à :

$$M_h^a \frac{\overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} - \overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - G_h \overset{\blacktriangle}{p}_h^n - (B_{\Gamma_h})^\top \frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0, \tag{2.65}$$

$$M_h^{p_a} \frac{\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1} - \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n}}{\Delta t} + G_h^\top \overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \tag{2.66}$$

On multiplie alors (2.65) par :

$$\frac{\overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}}{2\Delta t},$$

on obtient :

$$\frac{\frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}\|^2_{M_h^a} - \frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}\|^2_{M_h^a}}{\Delta t} - (G_h \overset{\blacktriangle}{p}_h^n, \frac{\overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2}) - ((B_{\Gamma_h})^\top \frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \frac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}}{2\Delta t}) = 0. \tag{2.67}$$

Enfin, pour pouvoir éliminer le terme couplant $\overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}$ à $\overset{\blacktriangle}{p}_h$, on effectue la moyenne de (2.66) écrite aux instants $n+\frac{1}{2}$ et $n-\frac{1}{2}$, puis on multiplie le résultat par $\overset{\blacktriangle}{p}_h^n$, ce qui nous donne :

$$\frac{\frac{1}{2}(\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n})_{M_h^{p_a}} - \frac{1}{2}(\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n}, \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n-1})_{M_h^{p_a}}}{\Delta t} + (G_h^\top \frac{\overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \overset{\blacktriangle}{p}_h^n) \tag{2.68}$$

En sommant les équations (2.64), (2.67) et (2.68), il reste :

$$\begin{aligned}\frac{E_h^{n+\frac{1}{2}} - E_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = (\frac{f_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - f_{p_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \frac{v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - v_{p_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}) - \frac{1}{\Delta t}\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \|\dot{v}_K\|^2_{A_K} \\ + (\frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, B_{\Gamma_h}\frac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}}{2\Delta t} - B_{K_h}\frac{v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} - v_{p_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t})\end{aligned} \tag{2.69}$$

C'est justement pour que le dernier terme de cette équation soit nul que nous avons déterminé la discrétisation en temps de la dernière équation de (2.53). Ce choix conduit alors à la relation (2.63). ◁

2.4.3.b Stabilité du schéma S_{pa}

Le résultat de décroissance de l'énergie précédent nous permet de déterminer une condition sous laquelle le schéma S_{pa} est stable, en procédant de la même façon qu'à la section 1.4.3 pour l'analyse de stabilité des schémas proposés pour la résolution du problème de couplage plaque-corde.

L'énergie totale associée au schéma S_{pa} est une forme quadratique portant sur les inconnues discrètes v_{p_h}, $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}$ et p_h. Celle ci n'est pas nécessairement positive à cause du terme :

$$\left(\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n}\right)_{M_h^{p_a}}.$$

On peut néanmoins s'assurer de sa positivité dés que le pas de temps est suffisamment petit. Plus précisément, on a le :

Lemme 2.2 *: L'énergie discrète du champ acoustique $E_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}$, définie en (2.62), est positive dés que la condition :*

$$\frac{c_a \Delta t}{h_a} < \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{2.70}$$

est vérifiée, et dans ce cas, le schéma S_{pa} est stable.

▷ PREUVE : C'est exactement la même preuve que celle du lemme (1.2), appliquée à l'équation des ondes acoustiques. Il nous faut donc contrôler le signe de :

$$\left(\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n}\right)_{M_h^{p_a}}.$$

Or, d'après l'égalité de la médiane, on a :

$$\left(\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n}\right)_{M_h^{p_a}} = \frac{1}{4}\left[\|\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1} + \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n}\|^2_{M_h^{p_a}} - \|\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1} - \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n}\|^2_{M_h^{p_a}}\right], \tag{2.71}$$

et d'après l'équation (2.66),on a :

$$\|\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1} - \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n}\|^2_{M_h^{p_a}} = \|(M_h^{p_a})^{-1} G_h^\top \overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}\|^2_{M_h^{p_a}} \tag{2.72}$$

On introduit alors :

$$\alpha_h = \sup_{\underline{\mathbf{v}}_{a_h} \in \mathcal{W}_h} \frac{\left(G_h^\top \underline{\mathbf{v}}_{a_h}, (M_h^{p_a})^{-1} G_h^\top \underline{\mathbf{v}}_{a_h}\right)}{\|\underline{\mathbf{v}}_{a_h}\|^2_{M_h^a}}. \tag{2.73}$$

On en déduit l'inégalité suivante :

$$2E_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} \geq \left(1 - \frac{\alpha_h \Delta t^2}{4}\right) \|\underline{\mathbf{v}}_{a_h}\|^2_{M_h^a} + \|\frac{\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1} + \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n}}{2}\|^2_{M_h^{p_a}} \tag{2.74}$$

Pour que l'énergie du champ acoustique soit positive, il suffit donc de vérifier la condition :

$$\frac{\alpha_h \Delta t^2}{4} < 1. \tag{2.75}$$

Le calcul de α_h est très classique. On vérifie qu'il s'agit en fait du rayon spectrale de la matrice

$$(M_h^a)^{-1} G_h (M_h^{p_a})^{-1} G_h^\top,$$

qui, dans le cas particulier d'un maillage régulier cubique, n'est autre que le "laplacien discret tridimensionnel" standard à sept points. On sait alors que :

$$\alpha_h \leq \frac{12 c_a^2}{h_a^2} + O(1),$$

et on a ainsi démontré que sous la condition (2.70) l'énergie discrète est positive.

L'identité d'énergie (2.63) assure que l'énergie discrète décroît au cours du temps. Comme celle ci est positive sous la condition de stabilité (2.70), on en déduit que le schéma est stable. ◁

Remarque 2.9 *La condition de stabilité (2.70) est indépendante de la formulation en domaine fictifs. Il s'agit de la même condition de stabilité que celle du schéma explicite centré d'ordre 2 appliqué à l'équation des ondes acoustiques seule. Il s'agit donc d'une méthode robuste pour le traitement du couplage fluide structure.*

Remarque 2.10 *Ce résultat nous donne donc les estimations suivantes, portant sur les inconnues discrètes* $v_K^{n+\frac{1}{2}}$, $p_h^{n+\frac{1}{2}}$ *et* $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n$

$$\left|\begin{array}{l} \|\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \sqrt{2E_h^{n+\frac{1}{2}}} \\ \|v_K^{n+\frac{1}{2}}\|_{D_K} \leq \sqrt{2E_h^{n+\frac{1}{2}}} \\ \|\dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n}{\Delta t}\|_{M_h^a}^2 \leq \sqrt{\dfrac{2}{1-\beta}E_h^{n+\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{1}{2}\|\dfrac{p_h^{n+\frac{3}{2}} - p_h^{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t}\|_{M_h^{pa}} \leq \sqrt{2E_h^{n+\frac{1}{2}}} \end{array}\right. \tag{2.76}$$

où on a posé :

$$\beta = \frac{\sqrt{3}c_a^2\Delta t^2}{h_a^2} < 1. \tag{2.77}$$

L'énergie discrète ne faisant pas intervenir le multiplicateur de Lagrange, on ne peut pas en déduire directement une estimation portant sur $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$*. Néanmoins, si la condition inf-sup discrète est vérifiée, on obtient aisément une telle estimation (voir [54]).*

2.4.4 Résolution du schéma S_{pa}

On présente dans cette section comment on résout effectivement à chaque pas de temps le système linéaire donné par le schéma S_{pa}. Pour alléger cette présentation, on supposera ici que f_{p_h} est nul. Rappelons tout d'abord que la solution de la première équation de S_{pa} :

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{v}_K + A_K\dot{v}_K + D_K v_K = -B_{K_h}\dfrac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad \forall t \in]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[\\ v_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_K^{n-\frac{1}{2}} \text{ et } \dot{v}_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}, \end{array}\right. \tag{2.78}$$

est donnée par (voir section 4.3.3) :

$$\begin{aligned} v_K^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) - \mathcal{R}_{\Delta t} B_{K_h}(\frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}) \\ \dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) - \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} B_{K_h}(\frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}), \end{aligned} \tag{2.79}$$

où $\mathcal{S}_{\Delta t}$ est la résolvante de l'équation homogène et $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est la résolvante donnant la solution particulière à conditions initiales nulles, dans le cas où le second membre est une constante. Rappelons en particulier que $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est une matrice diagonale définie positive (*cf.* théorème (4.3)).

Rappelons également que $\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}$ n'est pas vraiment une inconnue du problème. Il s'agit seulement de la déterminer à chaque pas de temps pour connaître les conditions initiales du problème (2.78) au pas de temps suivant.

Le problème S_{pa} s'écrit à présent :

$$\boxed{\begin{cases} v_K^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) - \mathcal{R}_{\Delta t} B_{K_h}(\frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}), \\ M_h^a \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n}}{\Delta t} - G_h p_h^{n+\frac{1}{2}} - (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\ M_h^{p_a} \dfrac{p_h^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_h \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n = 0, \\ B_{K_h} \dfrac{v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - B_{\Gamma_h} \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}}{2\Delta t} = 0. \end{cases}} \tag{2.80}$$

Les inconnues sont les variables $v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}}$, $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$, $p_h^{n+\frac{1}{2}}$ et $\lambda^{n+\frac{1}{2}}$, toutes les autres variables étant connues à cette étape du calcul. Ce système est implicite, mais nous allons voir qu'il peut se ramener à l'inversion d'une matrice symétrique définie positive dont la taille est celle de l'espace du multiplicateur λ_h, qui est nettement inférieure à la taille du système.

Tout d'abord, puisque la matrice $M_h^{p_a}$ est diagonale, la troisième équation de ce schéma donne explicitement $p_h^{n+\frac{1}{2}}$. On a tout simplement :

$$p_h^{n+\frac{1}{2}} = p_h^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t (M_h^{p_a})^{-1} G_h \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n. \tag{2.81}$$

D'autre part, si on connaissait le multiplicateur $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$, alors les deux premières équations de (2.80) seraient également explicites. Cherchons donc à déterminer $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$. Pour cela, commençons par réécrire les équations 1, 2 et 4 du système (2.80) sous la forme :

$$\begin{cases} v_K^{n+\frac{1}{2}} & & + & \dfrac{1}{\Delta t}\mathcal{R}_{\Delta t}(B_{K_h})^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} & = & \tilde{v_K}, \\ & M_h^a \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} & - & \Delta t (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} & = & \underline{\tilde{\mathbf{v}}}_a, \\ 2B_{K_h} v_K^{n+\frac{1}{2}} & & - & B_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} & = & \tilde{\lambda}, \end{cases} \tag{2.82}$$

où on a posé :

$$\begin{cases} \tilde{v_K} = \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) + \dfrac{1}{\Delta t}\mathcal{R}_{\Delta t}(B_{K_h})^\top \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}, \\ \underline{\tilde{\mathbf{v}}}_a = M_h^a \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n + \Delta t G_h p_h^{n+\frac{1}{2}}, \\ \tilde{\lambda} = 2\Delta t B_{K_h} v_K^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t B_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}. \end{cases} \tag{2.83}$$

Notons l_1, l_2, l_3 les trois lignes de ce système. On calcule alors :

$$2B_{K_h}(l_1) - B_{\Gamma_h}(M_h^a)^{-1}(l_2) - (l_3).$$

On obtient :

$$\left(\frac{2}{\Delta t}B_{K_h}\mathcal{R}_{\Delta t}(B_{K_h})^\top + \Delta t B_{\Gamma_h}(M_h^a)^{-1}(B_{\Gamma_h})^\top\right)\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = 2B_{K_h}\tilde{v_K} - B_{\Gamma_h}(M_h^a)^{-1}\underline{\tilde{\mathbf{v}}}_a - \tilde{\lambda}. \tag{2.84}$$

Il faut donc inverser la matrice :

$$C_\lambda = \left(\frac{2}{\Delta t}B_{K_h}\mathcal{R}_{\Delta t}(B_{K_h})^\top + \Delta t B_{\Gamma_h}(M_h^a)^{-1}(B_{\Gamma_h})^\top\right), \tag{2.85}$$

qui est symétrique positive, puisque les matrices M_h^a et $\mathcal{R}_{\Delta t}$ sont des matrices définies positives. En outre, lorsque la condition inf-sup discrète (2.38) est vérifiée, alors la matrice $(B_{\Gamma_h})^\top$ est injective et par conséquent C_λ est définie positive. Sa taille n'est pas très importante, puisqu'elle est égale de la dimension de l'espace $\mathcal{L}_h$, soit le nombre de sommets du maillage surfacique de la guitare $\mathcal{G}_h$. En pratique, on calcule sa factorisée de Cholesky et on résout le système par descente-remontée à chaque pas de temps.

Remarque 2.11 *La matrice $\frac{2}{\Delta t}B_{K_h}\mathcal{R}_{\Delta t}(B_{K_h})^\top$ est symétrique positive, mais n'est pas définie. En effet, les lignes de $(B_{K_h})^\top$ correspondant à des degrés de liberté du multiplicateur λ_h qui ne sont pas situés sur la table d'harmonie sont nulles, comme on peut le voir sur la définition de B_{ω_h} donnée en (2.30). $(B_{K_h})^\top$ n'est donc pas injective.*

Connaissant $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$, on peut alors calculer explicitement $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ et $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$ à l'aide des deux pre-

mières équations de (2.82).

Finalement, **on a remplacé résolution du système linéaire (2.80) de taille $\tilde{n}_p + n_{v_a} + n_p + n_\lambda$ par l'inversion d'une matrice symétrique définie positive de taille n_λ à chaque pas de temps, le reste des équations étant alors explicite. Il nous faut calculer successivement :**

1. $p_h^{n+\frac{1}{2}}$ par (2.81) ,
2. $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$ par (2.84), en inversant C_λ,
3. $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$ par la deuxième équation de (2.82),
4. $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ par la première équation de (2.82),
5. $\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}$ par la deuxième équation de (2.79).

Remarque 2.12 *C_λ est la somme de deux matrices :*

- $\frac{2}{\Delta t} B_{K_h} \mathcal{R}_{\Delta t} (B_{K_h})^\top$ *qui est pleine, à cause du changement de base effectué pour la résolution de l'équation de plaque. Plus précisément en fait, si on note n_s le nombre de sommets de $\mathcal{G}_h$ situés sur la table d'harmonie, alors $\frac{2}{\Delta t} B_{K_h} \mathcal{R}_{\Delta t} (B_{K_h})^\top$ est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.86}$$

  où A est une matrice pleine symétrique positive de taille n_s. Par conséquent, la matrice C_λ contiendra elle aussi une matrice bloc pleine de taille n_s. Un inconvénient de la méthode de résolution exacte de l'équation de plaque, comme on l'a déjà signalé, est justement qu'elle conduit à des matrices pleines, ce qui s'oppose à l'utilisation d'algorithmes d'inversions efficaces standards. Le calcul du produit $B_{K_h} \mathcal{R}_{\Delta t} (B_{K_h})^\top$ est en outre coûteux, puisque B_{K_h} contient une sous matrice pleine de taille $n_s x \tilde{n}_p$, mais il est l'est d'autant moins que l'on peut prendre des petites valeurs de $\tilde{n}_p$, grâce à la méthode pseudo-spectrale *(typiquement $\tilde{n}_p = 50$).*

- $\Delta t B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} (B_{\Gamma_h})^\top$ *possède une structure bande pour un peu qu'on fasse attention à la numérotation utilisée pour le maillage $\mathcal{G}_h$. En effet, deux fonctions de base de l'espace $\mathcal{L}_h$ sont "connectés" si leurs supports rencontrent des cubes adjacents. Néanmoins, dans la mesure où de toutes façons la matrice C_λ n'aura pas cette structure bande à cause de $\frac{2}{\Delta t} B_{K_h} \mathcal{R}_{\Delta t} (B_{K_h})^\top$, il n'est pas nécessaire de s'attarder trop longtemps sur sur la numérotation de $\mathcal{G}_h$. Le calcul du produit $B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} (B_{\Gamma_h})^\top$ est négligeable, à la fois parce que B_{Γ_h} est très creuse, mais aussi parce que M_h^a est diagonale (c'est même une homothétie).*

Chapitre 3

Résolution du problème complet

Nous présentons dans ce chapitre la résolution numérique du modèle complet de guitare, couplant la table d'harmonie à la corde et à l'air ambiant. On se contente essentiellement de regrouper tous les résultats des deux chapitres précédents sans plus de démonstration. Le propos est de vérifier que ce "recollement" se passe effectivement bien.

Les deux aspects important de ce chapitre de synthèse sont d'une part qu'on obtient aisément une propriété de décroissance de l'énergie discrète et par conséquent les conditions qui assurent la stabilité du schéma. D'autre part, on observe que le coût de la résolution du système à inverser à chaque pas de temps s'avère en fait être tout simplement la somme des coûts de résolution des problèmes de couplage plaque-corde et plaque-air. Le couplage global n'induit donc pas de complexité supplémentaire.

Jusqu'ici, nous avons présenté une guitare à une corde. Nous proposons un schéma pour la résolution du problème à 6 cordes, ou plus généralement du problème à K cordes, K étant un entier aussi grand qu'on veut. Nous verrons que la méthode *pseudo spectrale* joue en fait un rôle crucial dans l'efficacité de la résolution de ce schéma. En effet, le fait de ne considérer qu'un nombre restreint de modes de la table d'harmonie conduit à l'inversion d'une matrice de petite taille, préliminaire au calcul, et donc à un surcoût suffisamment faible pour qu'on puisse l'envisager.

On s'intéresse dans la dernière section à la mise en œuvre informatique de la méthode. C'est l'occasion de préciser l'ensemble des paramètres physiques et numériques choisis pour les expériences numériques de ce modèle de guitare, tel qu'il est exploité dans la prochaine partie du document.

3.1 Formulation variationnelle mixte

Nous suivons la démarche présentée dans les chapitres 1 et 2 pour établir une formulation variationnelle mixte du modèle complet de guitare donné en (1.43). Plus précisément, nous établissons ici une synthèse des formulations établies aux sections 1.2.2 et 2.2. Il n'y a au-

cune difficulté particulière, donc nous présentons directement la formulation obtenue [1]. La formulation variationnelle mixte de notre modèle de guitare est donc :

$$
\mathcal{P}_g \; : \; \left\{ \begin{array}{l}
\text{Trouver } v_c : [0,T] \to \mathcal{U},\ q : [0,T] \to \mathcal{Q},\ v_p : [0,T] \to \mathcal{V},\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} : [0,T] \to \mathcal{X}, \\
\qquad p : [0,T] \to \mathcal{P},\ \underline{\mathbf{v}}_a : [0,T] \to \mathcal{W},\ \text{et } \lambda : [0,T] \to \mathcal{L},\ \text{tels que :} \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \rho_c v_c v_c^* - \int_0^{l_c} \partial_x q v_c^* + R_c \int_0^{l_c} v_c v_c^* = \int_0^{l_c} f_c v_c^*, \quad \forall v_c^* \in \mathcal{U}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \frac{1}{T} q q^* + \int_0^{l_c} \partial_x q^* v_c + \int_0^{l_c} \beta(x) \partial_x q^* \partial_x q^* - q^*(l_c,t) \int_\omega G v_p = 0 \quad \forall q^* \in \mathcal{Q}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} . \underline{\nabla} v_p^* - \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}) . \underline{\tau}], v_p^* \rangle_{\gamma_l} \\
\qquad\qquad + R_p \displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^* = -q(l_c,t) \int_\omega G v_p^* - \int_\omega v_p^* \lambda_{|\omega}, \quad \forall v_p^* \in \mathcal{V}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* + (1 + \eta \frac{d}{dt}) \left[\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^* . \underline{\nabla} v_p + \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^* \underline{n}) . \underline{\tau}], v_p \rangle_{\gamma_l} \right] = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, \in \mathcal{X}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \rho_a \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{\mathbf{v}}_a^* - \int_{\mathbb{R}^3} p \,\mathrm{div}\, \underline{\mathbf{v}}_a^* - \langle \underline{\mathbf{v}}_a^* \cdot \underline{N}, \lambda \rangle_\Gamma = 0, \quad \forall \underline{\mathbf{v}}_a^* \in \mathcal{W}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \mu_a p p^* + \int_{\mathbb{R}^3} p^* \,\mathrm{div}\, \underline{\mathbf{v}}_a = 0, \quad \forall p^* \in \mathcal{P}, \\
\displaystyle\int_\omega v_p \lambda^* - \langle \underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{N}, \lambda^* \rangle_\Gamma = 0. \forall \lambda^* \in \mathcal{L}.
\end{array} \right. \tag{3.1}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= L^2(]0, l_c[), \\
\mathcal{Q} &= H^1(]0, l_c[), \\
\mathcal{V} &= \left\{ v_p \in H^1(\omega) \,;\, v_p = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\}, \\
\mathcal{X} &= \left\{ (H^1(\omega))^4 \,;\, (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\, \underline{n}) \,.\, \underline{n} = 0 \text{ sur } \gamma_l \right\}, \\
\mathcal{P} &= L^2(\mathbb{R}^3), \\
\mathcal{W} &= H(\mathrm{div}, \mathbb{R}^3), \\
\mathcal{L} &= H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

3.2 Discrétisation spatiale

Afin d'établir une approximation conforme de cet espace, on introduit les espaces de dimension finie suivants :

$$
\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}, \quad \mathcal{Q}_h \subset \mathcal{Q}, \quad \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}, \quad \mathcal{X}_h \subset \mathcal{X}, \quad \mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}, \quad \mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}, \quad \mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}. \tag{3.3}
$$

1. En particulier, il suffit de considérer que le second membre f_p introduit dans le problème couplant la plaque à l'air est l'effort exercé par la corde au chevalet, soit : $f_p(x,y,t) = -q(l_c,t)G(x,y)$ dans l'équation (2.1). Tout le reste est absolument identique

Ces espaces d'approximation, construits par la méthode des éléments finis, sont présentés en détail aux sections 1.3.2, 2.1 et 2.3.2. Pour mémoire :

- $\mathcal{U}$ est approché par éléments finis P_0 discontinus,
- $\mathcal{Q}$ est approché par des éléments finis P_1 continus,
- $\mathcal{V}$ est approché par éléments finis $\tilde{P}_2$ continus (*ie.* $P_2 \oplus$ bulle),
- $\mathcal{X}$ est approché par éléments finis $(\tilde{P}_2)^4$,
- $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}$ est approché par éléments finis de Raviart-Thomas cubiques de plus bas degré,
- $\mathcal{P}$ est approché par éléments finis Q_0 discontinus,
- $\mathcal{L}$ est approché par éléments finis P_1 continus.

Le problème semi-discrétisé en espace s'écrit :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver } v_{c_h} : [0,T] \to \mathcal{U}_h,\ q_h : [0,T] \to \mathcal{Q}_h,\ v_{p_h} : [0,T] \to \mathcal{V}_h,\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h : [0,T] \to \mathcal{X}_h, \\
\qquad p_h : [0,T] \to \mathcal{P}_h,\ \underline{\mathbf{v}}_{a_h} : [0,T] \to \mathcal{W}_h, \text{ et } \lambda : [0,T] \to \mathcal{L}_h, \text{ tels que :} \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \rho_c v_{c_h} v^*_{c_h} - \int_0^{l_c} \partial_x q_h v^*_{c_h} + R_c \int_0^{l_c} v_{c_h} v^*_{c_h} = \int_0^{l_c} f_c v^*_{c_h}, \quad \forall v^*_{c_h} \in \mathcal{U}_h, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{l_c} \frac{1}{T} q_h q^*_h + \int_0^{l_c} \partial_x q^*_h v_{c_h} + \int_0^{l_c} \beta(x) \partial_x q^*_h \partial_x q^*_h - q^*_h(l_c,t) \int_\omega G v_{p_h} = 0 \quad \forall q^*_h \in \mathcal{Q}_h, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_{p_h} v^*_{p_h} - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h . \underline{\nabla} v^*_{p_h} - \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h \underline{n}).\underline{\tau}], v^*_{p_h} \rangle_{\gamma_l} \\
\qquad\qquad + R_p \displaystyle\int_\omega \rho_p v_{p_h} v^*_{p_h} = -q_h(l_c,t) \int_\omega G v^*_{p_h} - \int_\omega v^*_{p_h}(\lambda_h)_{|\omega}, \quad \forall v^*_{p_h} \in \mathcal{V}, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h + (1 + \eta \frac{d}{dt}) \left[\int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h . \underline{\nabla} v_{p_h} + \langle \partial_\tau [(\underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h \underline{n}).\underline{\tau}], v_{p_h} \rangle_{\gamma_l} \right] = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*_h, \in \mathcal{X}_h, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \rho_a \underline{\mathbf{v}}_{a_h} \cdot \underline{\mathbf{v}}^*_{a_h} - \int_{\mathbb{R}^3} p_h \,\mathrm{div}\, \underline{\mathbf{v}}^*_{a_h} - \langle \underline{\mathbf{v}}^*_{a_h} \cdot \underline{N}, \lambda_h \rangle_\Gamma = 0, \quad \forall \underline{\mathbf{v}}^*_{a_h} \in \mathcal{W}_h, \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \mu_a p_h p^*_h + \int_{\mathbb{R}^3} p^*_h \,\mathrm{div}\, \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0, \quad \forall p^*_h \in \mathcal{P}_h, \\
\displaystyle\int_\omega v_{p_h} \lambda^*_h - \langle \underline{\mathbf{v}}_{a_h} \cdot \underline{N}, \lambda^*_h \rangle_\Gamma = 0. \forall \lambda^*_h \in \mathcal{L}_h.
\end{array}
\right. \tag{3.4}
$$

On introduit une base de chacun des espaces d'approximation. La formulation semi-discrète

précédente conduit alors au système différentiel matriciel suivant :

$$\boxed{\begin{cases} M_h^c \dfrac{dv_{c_h}}{dt} - D_h q_h + R_c M_h^c v_{c_h} = f_{c_h}, \\ M_h^q \dfrac{dq_h}{dt} + D_h^\top v_{c_h} + L_h^\beta q_h - J_h^\top v_{p_h} = 0, \\ M_h^p \dfrac{dv_{p_h}}{dt} - H_h^\top \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h + R_p M_h^p v_{p_h} = -J_h q_h - (B_{\omega_h})^\top \lambda_h, \\ M_h^{\mathcal{M}} \dfrac{d\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h}{dt} + (1 + \eta \dfrac{d}{dt}) H_h v_{p_h} = 0, \\ M_h^a \dfrac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt} - G_h p_h - (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h = 0, \\ M_h^{p_a} \dfrac{dp_h}{dt} + G_h^\top \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0, \\ B_{\omega_h} v_{p_h} - B_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0, \end{cases}} \tag{3.5}$$

où $A^\top$ désigne la transposée d'une matrice A. Le vecteur f_{c_h} et les matrices M_h^c, M_h^q, M_h^p, $M_h^{\mathcal{M}}$, M_h^a, $M_h^{p_a}$, D_h, L_h^β, J_h, H_h, G_h, B_{ω_h} et B_{Γ_h}, sont définis en (1.39) et (2.30) [2]

3.3 Discrétisation temporelle

Effectuons maintenant la discrétisation temporelle, suivant le même procédé que celui présenté dans les sections 1.4 et 2.4. On déroule le même tapis. Le point le plus important est de contrôler que l'énergie discrète du système totale définie à partir des énergies discrètes des systèmes partiels présentées dans les deux sections suscitées possède, elle encore, une propriété de décroissance qui assurera la stabilité du schéma.

3.3.1 Diagonalisation de l'équation de plaque discrète

Pour la résolution de l'équation de plaque semi-discrète par la méthode *pseudo-spectrale*, on commence par éliminer le moment fléchissant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h$ du système (3.5). Ensuite, on effectue un changement de base qui permet d'écrire toutes les équations dans lesquelles intervient v_{p_h} dans la base propre de la matrice $(M_h^p)^{-1} H_h^\top (M_h^{\mathcal{M}})^{-1} H_h$. Ces manipulations ont été précisées en détail dans les sections 1.4 et 2.4. Les notations sont indiquées dans les notes (1.2) et (2.1).

2. On prendra garde au fait que la définition de la matrice H_h donnée en (1.39) correspond au problème de plaque encastré, choisi alors dans un soucis de simplicité. La "bonne" définition de la matrice H_h est donnée en (2.30)

On obtient alors le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} M_h^c \dfrac{dv_{c_h}}{dt} - D_h q_h + R_c M_h^c v_{c_h} = f_{c_h}, \\ M_h^q \dfrac{dq_h}{dt} + D_h^\top v_{c_h} + L_h^\beta q_h - J_K^\top v_K = 0, \\ \dfrac{d^2 v_K}{dt^2} + A_K \dfrac{dv_K}{dt} + D_K v_K = -J_K \dfrac{dq_h}{dt} - (B_{K_h})^\top \dfrac{d\lambda_h}{dt}, \\ M_h^a \dfrac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt} - G_h p_h - (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h = 0, \\ M_h^{p_a} \dfrac{dp_h}{dt} + G_h^\top \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0, \\ B_{K_h} v_K - B_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{v}}_{a_h} = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Et les propriétés de décroissance de l'énergie discrète (1.1) et (2.1) se prolongent sans difficulté à ce problème. On a :

Propriété 3.1 *L'énergie de la corde est définie par :*

$$E_{c_h}(t) = \frac{1}{2} \| \frac{dv_{c_h}}{dt} \|^2_{M_h^c} + \frac{1}{2} \| \frac{dq_h}{dt} \|^2_{M_h^q}, \tag{3.7}$$

celle de la plaque est définie par :

$$E_{p_h}(t) = \frac{1}{2} \| \frac{v_K}{dt} \|^2 + \frac{1}{2} \| v_K \|^2_{D_K}, \tag{3.8}$$

et celle de l'air est définie par :

$$E_{a_h}(t) = \frac{1}{2} \| \frac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt} \|^2_{M_h^a} + \frac{1}{2} \| \frac{dp}{dt} \|^2_{M_h^{p_a}}. \tag{3.9}$$

Alors l'énergie totale $E_h(t) = E_{c_h}(t) + E_{p_h}(t) + E_{a_h}(t)$ vérifie :

$$\frac{dE_h}{dt}(t) = (\frac{df_{c_h}}{dt}, \frac{dv_{c_h}}{dt}) - R_c \| \frac{dv_{c_h}}{dt} \|^2_{M_h^c} - \| \frac{dq_h}{dt} \|^2_{L_h^\beta} - \| \frac{dv_K}{dt} \|^2_{A_K} \tag{3.10}$$

3.3.2 Un schéma de discrétisation en temps

Comme nous l'avons signalé à la fin du chapitre 1, pour faciliter la mise en œuvre, nous avons choisi d'implémenter le schéma S^1_{cp} pour la discrétisation temporelle du problème de couplage plaque-corde, bien que nous n'ayons pas réussi à démontrer théoriquement la stabilité lorsqu'on introduit un terme d'amortissement fluide sur la corde. Néanmoins on observe ce schéma est stable en pratique, sous la même condition de stabilité que celle obtenue dans le cas d'une corde seule. Nous regroupons donc les schémas en temps S^1_{cp} et S_{pa} présentés respectivement en (1.65) et (2.59). Rappelons juste que pour obtenir une identité de l'énergie, nous sommes amenés à discrétiser la dérivée en temps de la dernière

équation de (3.6). On obtient le schéma suivant, noté S_g, pour la la discrétisation temporelle du problème (3.6) :

$$
S_g \ : \ \left\{
\begin{array}{l}
M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} - v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_h q_h^n + R_c M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = f_{c_h}^n, \\
M_h^q \dfrac{q_h^{n+1} - q_h^n}{\Delta t} + D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + L_h^\beta \dfrac{q_h^{n+1} + q_h^n}{2} - J_K^\top v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\
\left\{
\begin{array}{l}
\ddot{v}_K + A_K \dot{v}_K + D_K v_K = -J_K \dfrac{q_h^{n+1} - q^{n-1}}{2\Delta t} - (B_{K_h})^\top \dfrac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \quad \forall t \in]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[, \\
v_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_K^{n-\frac{1}{2}} \text{ et } \dot{v}_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}},
\end{array}
\right. \\
M_h^a \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n}{\Delta t} - G_h p_h^{n+\frac{1}{2}} - (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\
M_h^{p_a} \dfrac{p_h^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_h \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n = 0, \\
B_{K_h} \dfrac{v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - B_{\Gamma_h} \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}}{2\Delta t} = 0.
\end{array}
\right.
\tag{3.11}
$$

Remarque 3.1 *Cette discrétisation en temps n'a rien d'immédiat. En effet, on ne choisit pas le même schéma pour approcher $\frac{dq_h}{dt}$ et $\frac{d\lambda_h}{dt}$ dans la troisième équation, de même qu'on ne choisit pas le même schéma pour approcher $\frac{dv_K}{dt}$ et $\frac{d\underline{\mathbf{v}}_{a_h}}{dt}$ dans la dernière. Ce choix est imposé par la recherche d'une identité de l'énergie discrète.*

3.3.3 Analyse de stabilité

De la même manière que dans le cas semi-discrétisé, il faut définir une énergie discrète de la corde et du champ acoustique portant sur des quantités *dérivées*. Rappelons donc les notations suivantes :

Notation 3.1 *On définit les dérivées discrètes en temps :*

$$
\begin{array}{ll}
\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^n = \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} - v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, & \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{q_h^{n+1} - q_h^n}{\Delta t} \\
\overset{\blacktriangle}{p}_h^n = \dfrac{p_h^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, & \overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n}{\Delta t}
\end{array}
\tag{3.12}
$$

On peut alors énoncer une propriété d'identité de l'énergie du schéma S_g, qui se démontre sans difficulté en suivant les preuves des propriétés (2.2) et (1.2) :

Propriété 3.2 *L'énergie discrète de la corde est définie par :*

$$E_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n})_{M_h^c} + \frac{1}{2}\|\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{M_h^q}^2, \tag{3.13}$$

celle de la plaque est définie par :

$$E_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\|v_K^{n+\frac{1}{2}}\|_{D_K}^2, \tag{3.14}$$

et celle du champ acoustique est définie par :

$$E_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|\underline{\overset{\blacktriangle}{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}\|_{M_h^a}^2 + \frac{1}{2}(\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n})_{M_h^{p_a}}. \tag{3.15}$$

Alors l'énergie totale $E_h^{n+\frac{1}{2}} = E_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + E_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} + E_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}$ vérifie :

$$\begin{aligned}\frac{E_h^{n+\frac{1}{2}} - E_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = (\frac{f_{c_h}^{n+1} - f_{c_h}^{n-1}}{2\Delta t}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n}) - R_c(\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n+1} + 2\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n} + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n-1}}{4}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h}^{n})_{M_h^c} \\ - \|\frac{\overset{\blacktriangle}{q}_h^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{q}_h^{n-\frac{1}{2}}}{2}\|_{L_h^\beta}^2 - \frac{1}{\Delta t}\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \|\dot{v}_K\|_{A_K}^2\end{aligned} \tag{3.16}$$

Enfin, ce résultat nous permet d'analyser la stabilité du schéma S_g. Le lemme suivant se démontre sans difficulté à l'aide des preuves des lemmes (1.2) et (2.2) :

Lemme 3.1 *On suppose que $R_c = 0$. Alors l'énergie discrète de la corde $E_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$, définie en (3.13), est positive dés que la condition :*

$$\frac{c_c \Delta t}{h_c} < 1, \tag{3.17}$$

est vérifiée. D'autre part, l'énergie discrète du champ acoustique $E_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}$, définie en (3.15), est positive dés que la condition :

$$\frac{c_a \Delta t}{h_a} < \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{3.18}$$

est vérifiée.
Dans ce cas, le schéma S_g est stable.

3.4 Résolution du schéma S_g

Il nous faut maintenant montrer comment on résout effectivement le schéma S_g à chaque pas de temps. C'est ici qu'est l'aspect vraiment nouveau de ce chapitre par rapport aux deux autres, puisque le système à inverser est un tantinet plus compliqué. On montre ici, avec un peu plus de manipulations que dans les chapitres précédents, que **ce système se ramène en fait à l'inversion de deux matrices symétriques définies positives, l'une, tridiagonale, est de taille n_q, l'autre est de taille n_λ. Le reste des calculs est entièrement explicite.**

Il faut tout d'abord résoudre l'équation de plaque. La solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{v}_K + A_K\dot{v}_K + D_K v_K = -J_K\dfrac{q_h^{n+1}-q^{n-1}}{2\Delta t} - (B_{K_h})^\top\dfrac{\lambda_h^{n+\frac12}-\lambda_h^{n-\frac12}}{\Delta t}, \quad \forall t\in]t^{n-\frac12}, t^{n+\frac12}[, \\ v_K(t^{n-\frac12}) = v_K^{n-\frac12} \text{ et } \dot{v}_K(t^{n-\frac12}) = \dot{v}_K^{n-\frac12}, \end{array}\right. \tag{3.19}$$

est donnée par (voir section 4.3.3) :

$$\begin{aligned} v_K^{n+\frac12} &= \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac12}, \dot{v}_K^{n-\frac12}) - \mathcal{R}_{\Delta t}(B_{K_h})^\top(\frac{\lambda_h^{n+\frac12}-\lambda_h^{n-\frac12}}{\Delta t}) - \mathcal{R}_{\Delta t}J_K(\frac{q_h^{n+1}-q_h^{n-1}}{2\Delta t}) \\ \dot{v}_K^{n+\frac12} &= \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac12}, \dot{v}_K^{n-\frac12}) - \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t}(B_{K_h})^\top(\frac{\lambda_h^{n+\frac12}-\lambda_h^{n-\frac12}}{\Delta t}) - \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t}J_K(\frac{q_h^{n+1}-q_h^{n-1}}{2\Delta t}), \end{aligned} \tag{3.20}$$

où $\mathcal{S}_{\Delta t}$ est la résolvante de l'équation homogène et $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est la résolvante donnant la solution particulière à conditions initiales nulles, dans le cas où le second membre est une constante.

Rappelons aussi que $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est une matrice diagonale définie positive (*cf.* théorème (4.3)). Enfin, rappelons que $\dot{v}_K^{n+\frac12}$ n'est pas vraiment une inconnue du problème. Il s'agit seulement de la déterminer à chaque pas de temps pour connaître les conditions initiales du problème (3.20) au pas de temps suivant.

Le schéma S_g donné en (3.11) s'écrit donc à présent :

$$\left\{\begin{array}{l} M_h^c\dfrac{v_{c_h}^{n+\frac12}-v_{c_h}^{n-\frac12}}{\Delta t} - D_h q_h^n + R_c M_h^c\dfrac{v_{c_h}^{n+\frac12}+v_{c_h}^{n-\frac12}}{2} = f_{c_h}^n, \\ M_h^q\dfrac{q_h^{n+1}-q_h^n}{\Delta t} + D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac12} + L_h^\beta\dfrac{q_h^{n+1}+q_h^n}{2} - J_K^\top v_{p_h}^{n+\frac12} = 0, \\ v_K^{n+\frac12} = \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac12}, \dot{v}_K^{n-\frac12}) - \mathcal{R}_{\Delta t}(B_{K_h})^\top(\dfrac{\lambda_h^{n+\frac12}-\lambda_h^{n-\frac12}}{\Delta t}) - \mathcal{R}_{\Delta t}J_K(\dfrac{q_h^{n+1}-q_h^{n-1}}{2\Delta t}) \\ M_h^a\dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}-\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n}{\Delta t} - G_h p_h^{n+\frac12} - (B_{\Gamma_h})^\top\lambda_h^{n+\frac12} = 0, \\ M_h^{p_a}\dfrac{p_h^{n+\frac12}-p_h^{n-\frac12}}{\Delta t} + G_h\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n = 0, \\ B_{K_h}\dfrac{v_K^{n+\frac12}-v_K^{n-\frac12}}{\Delta t} - B_{\Gamma_h}\dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}-\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}}{2\Delta t} = 0. \end{array}\right. \tag{3.21}$$

Les inconnues de ce système sont $v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$, q_h^{n+1}, $v_K^{n+\frac{1}{2}}$, $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$, $p_h^{n+\frac{1}{2}}$ et $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$, toutes les autres variables étant connues à cette étape du calcul. La démarche pour le résoudre est la même que dans les deux chapitres précédents. On commence par résoudre les équations qui sont en fait explicites, puis on ramène la résolution du système restant à l'inversion d'un système linéaire symétrique défini positif portant sur le multiplicateur de Lagrange $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$.

- Tout d'abord, puisque la matrice M_h^c est diagonale, la première équation donne explicitement $v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$:

$$v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1 - R_c\Delta t/2}{1 + R_c\Delta t/2} v_{c_h}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_c h_c (1 + R_c\Delta t/2)}(D_h q_h^n + f_{c_h}^n). \tag{3.22}$$

- D'autre part, puisque la matrice $M_h^{p_a}$ est diagonale, la cinquième équation de ce schéma donne explicitement $p_h^{n+\frac{1}{2}}$. On a tout simplement :

$$p_h^{n+\frac{1}{2}} = p_h^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t (M_h^{p_a})^{-1} G_h \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n. \tag{3.23}$$

- Enfin, comme nous avons supposé que l'amortissement visqueux sur la corde, β, est nul au voisinage du chevalet (*cf.* section 1.3.2.c), on peut découpler la dernière composante du vecteur q_h (que l'on notera Q^{n+1}) des autres. On note :

$$q_h^{n+1} = (\bar{q}_h^{n+1}, Q^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n_q - 1} \times \mathbb{R}, \tag{3.24}$$

La seconde équation du schéma se réécrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h^q \dfrac{\bar{q}_h^{n+1} - \bar{q}_h^n}{\Delta t} + D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}} + L_h^\beta \dfrac{\bar{q}_h^{n+1} + \bar{q}_h^n}{2} = 0, \\ \dfrac{h_c}{2T} \dfrac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + (D_h v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}})_{n_q} - j_K^\top v_K^{n+\frac{1}{2}} = 0, \end{array} \right. \tag{3.25}$$

dont on déduit $\bar{q}_h^{n+1}$:

$$C_q \bar{q}_h^{n+1} = (M_h^q - \frac{\Delta t}{2} L_h^\beta) \bar{q}_h^n - \Delta t D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}. \tag{3.26}$$

où :

$$\boxed{C_q = (M_h^q + \frac{\Delta t}{2} L_h^\beta).} \tag{3.27}$$

est tridiagonale symétrique définie positive d'après les propriétés des matrices M_h^q et L_h^β(*cf.* section 1.3.2.c).

Il reste :

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} \dfrac{h_c}{T} Q^{n+1} & - & 2\Delta t j_K^\top v_K^{n+\frac{1}{2}} & & & & & = & \tilde{Q}, \\ \dfrac{\mathcal{R}_{\Delta t} j_K}{2\Delta t} Q_h^{n+1} & + & v_K^{n+\frac{1}{2}} & & & + & \dfrac{\mathcal{R}_{\Delta t} (B_{K_h})^\top}{\Delta t} \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} & = & \tilde{v_K} \\ & & & M_h^a \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} & - & \Delta t (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} & & = & \underline{\tilde{\mathbf{v}}}_a, \\ & & 2 B_{K_h} v_K^{n+\frac{1}{2}} & - & B_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} & & & = & \tilde{\lambda}, \end{array} \right. \tag{3.28}$$

où on a posé :

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{Q} = \dfrac{h_c}{T} Q^n - 2\Delta t D_h^\top v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \tilde{v_K} = \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac{1}{2}}, \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}}) + \dfrac{\mathcal{R}_{\Delta t} j_K}{2\Delta t} Q_h^n + \dfrac{\mathcal{R}_{\Delta t} (B_{K_h})^\top}{\Delta t} \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}, \\ \underline{\tilde{\mathbf{v}}}_a = M_h^a \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n + \Delta t G_h p_h^{n+\frac{1}{2}}, \\ \tilde{\lambda} = 2\Delta t B_{K_h} v_K^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t B_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}. \end{array}\right. \tag{3.29}$$

Pour résoudre ce nouveau système, on se ramène tout d'abord à un système en $(Q_h^{n+1}, \lambda_h^{n+\frac{1}{2}})$, qui une fois résolu permettra de calculer explicitement $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$ et $v_K^{n+\frac{1}{2}}$. Ici, il nous faut tout d'abord effectuer un petit changement de variable pour transformer ce problème en un problème antisymétrique, de manière à aboutir naturellement à un système symétrique. C'est peut-être le plus simple. $\mathcal{R}_{\Delta t}$ étant symétrique définie positive, on peut poser :

$$\left\{\begin{array}{l} v_R^{n+\frac{1}{2}} = (\mathcal{R}_{\Delta t})^{-\frac{1}{2}} v_K^{n+\frac{1}{2}}, \\ \tilde{v_R} = (\mathcal{R}_{\Delta t})^{-\frac{1}{2}} \tilde{v_K}, \\ B_R = \sqrt{\mathcal{R}_{\Delta t}} B_{K_h}, \\ j_R = \sqrt{\mathcal{R}_{\Delta t}} j_K. \end{array}\right. \tag{3.30}$$

Puisque $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est diagonale, l'extraction de $\sqrt{\mathcal{R}_{\Delta t}}$ est heureusement immédiate (dans le cas contraire, il aurait fallu invoquer la factorisée de Cholesky de $\mathcal{R}_{\Delta t}$, ce qui est déjà autrement plus coûteux). On multiplie donc la seconde équation de (3.28) par $(\mathcal{R}_{\Delta t})^{-\frac{1}{2}}$, et on introduit v_R dans les autres. Le système (3.28) s'écrit à présent :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \dfrac{h_c}{T} Q^{n+1} & - & 2\Delta t j_R^\top v_R^{n+\frac{1}{2}} & & & & & = & \tilde{Q}, \\ j_R \dfrac{Q_h^{n+1}}{2\Delta t} & + & v_R^{n+\frac{1}{2}} & & & + & \dfrac{1}{\Delta t} (B_R)^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} & = & \tilde{v_R} \\ & & & M_h^a \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} & - & \Delta t (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} & = & \underline{\tilde{\mathbf{v}}}_a, \\ & & 2B_R v_R^{n+\frac{1}{2}} & - & B_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} & & & = & \tilde{\lambda}, \end{array}\right. \tag{3.31}$$

Notons l_1, l_2, l_3, l_4 les quatre lignes de ce système. On calcule alors :

$$2\Delta t j_R^\top (l_2) + (l_1) \to (l_1) \quad \text{et} \quad [2B_R(l_2) - B_{\Gamma_h}(M_h^a)^{-1}(l_3) - (l_4)] \to (l_4).$$

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} (\frac{h_c}{T} + j_R^\top j_R) Q_h^{n+1} + 2 j_R^\top (B_R)^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{Q} + 2\Delta t j_R^\top \tilde{v_R} = \tilde{Q}', \\ (l_2) \\ (l_3), \\ \frac{B_R j_R}{\Delta t} Q_h^{n+1} + \left(\frac{2}{\Delta t} B_R (B_R)^\top + \Delta t B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} (B_{\Gamma_h})^\top \right) \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = 2 B_R \tilde{v_R} - B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} \underline{\tilde{\mathbf{v}}}_a - \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}'. \end{array}\right. \tag{3.32}$$

On injecte alors la première équation de ce système dans la quatrième. On obtient finalement :

$$\left[\frac{2B_R}{\Delta t} \left(I - \frac{j_R j_R^\top}{\frac{h_c}{T} + \|j_R\|^2} \right) (B_R)^\top + \Delta t B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} (B_{\Gamma_h})^\top \right] \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{B_R j_R}{\Delta t (\frac{h_c}{T} + \|j_R\|^2)} \tilde{Q}' + \tilde{\lambda}'. \tag{3.33}$$

Il nous faut donc inverser la matrice :

$$\boxed{C_\lambda = \left[\frac{2B_R}{\Delta t} \left(I - \frac{j_R j_R^\top}{\frac{h_c}{T} + \|j_R\|^2} \right) (B_R)^\top + \Delta t B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} (B_{\Gamma_h})^\top \right]} \tag{3.34}$$

Il n'est pas immédiat, sous cette forme, d'affirmer que cette matrice est définie positive. En fait, on a insidieusement inversé la matrice $I + \frac{T}{h_c} j_R j_R^\top$, inversion qui peut s'écrire explicitement grâce à sa structure particulière. On a en effet le :

Lemme 3.2 *Soient j un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ et M une matrice symétrique définie positive de taille n. La matrice :*

$$I + jMj^\top$$

est symétrique définie positive donc son inverse l'est aussi et :

$$(I + jMj^\top)^{-1} = I - \frac{jMj^\top}{1 + \|j\|_M^2}$$

▷ PREUVE : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, calculons le produit :

$(I + jMj^\top)(I + jMj^\top) = I + jMj^\top + \alpha jMj^\top + j(Mj^\top j)Mj^\top = I + [1 + \alpha(1 + \|j\|_M^2)]jMj^\top$

Il suffit donc de prendre $\alpha = \frac{-1}{1+\|j\|^2}$ pour que ce produit soit égal à l'identité. ◁

On en déduit en particulier, en prenant $M = \frac{T}{h_c} I$, que :

$$(I + \frac{T}{h_c} j_R j_R^\top)^{-1} = I - \frac{j_R j_R^\top}{\frac{h_c}{T} + \|j_R\|^2}, \tag{3.35}$$

et donc que :

$$C_\lambda = \left[\frac{2B_R}{\Delta t}(I + \frac{T}{h_c} j_R j_R^\top)^{-1} B_R + \Delta t B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} (B_{\Gamma_h})^\top \right] \tag{3.36}$$

et sous cette forme, il est évident que C_λ est symétrique positive. En outre, lorsque la condition inf-sup discrète (2.38) est vérifiée, alors la matrice $(B_{\Gamma_h})^\top$ est injective et par conséquent C_λ est définie positive.

Remarque 3.2 *Le calcul de la matrice C_λ n'est pas beaucoup plus coûteux ici que dans le cas où la plaque est seulement couplé à l'air. En effet, il demande "juste" le calcul de deux produits de matrices pleines supplémentaires. D'une part le calcul de :*

$$A = I - \frac{j_R j_R^\top}{\frac{h_c}{T} + \|j_R\|^2},$$

qui est une matrice de taille $\tilde{n}_p$, puis le calcul de AB_R qui est de taille ($\tilde{n}_p$ x n_s) où n_s est le nombre de sommets de $\mathcal{G}_h$ situés sur la table d'harmonie. Grâce à la méthode pseudo-spectrale*, ces produits sont relativement peu coûteux (typiquement $\tilde{n}_p = 50$ et $n_s \approx 400$). Ils sont effectués à l'aide de la bibliothèque de routines* blas*.*

Connaissant $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$, on peut calculer Q_h^{n+1} à l'aide de (3.32) (donc on connaît désormais q_h^{n+1}), puis $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ et $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$ à l'aide de (3.28).

Finalement, on a remplacé la résolution du système linéaire (3.21) de taille $n_c + n_q + \tilde{n}_p + n_{v_a} + n_p + n_\lambda$ par l'inversion d'une matrice symétrique tridiagonale symétrique définie positive de taille n_q et l'inversion d'une matrice symétrique définie positive de taille n_λ.

Le coût global de ce schéma est :

Calculs préliminaires :

a. calcul de la matrice C_λ (eq. (3.34)) et de sa factorisée de Cholesky,

b. calcul de la matrice C_q (eq. (3.27)) et de sa factorisée de Cholesky.

A chaque pas de temps, il nous faut calculer successivement :

1. $v_{c_h}^{n+\frac{1}{2}}$ par (3.22),
2. $p_h^{n+\frac{1}{2}}$ par (3.23) ,
3. $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$ par (3.33), en inversant C_λ,
4. q_h^{n+1} en deux étapes par (3.26), en inversant C_q^1, puis par la première équation de (3.32),
5. $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$ par la troisième équation de (3.28),
6. $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ par la deuxième équation de (3.28),
7. $\dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}}$ par la seconde équation de (3.20).

3.5 Complément : présentation d'un autre schéma possible

Ces quelques pages de calculs montrent que la résolution du schéma S_g est moins évidente que celle des schémas S_{cp}^1 et S_{pa}. On peut se demander à juste titre quelle surcoût engendrerait la résolution du schéma obtenu en utilisant le schéma S_{cp}^2 pour la discrétisation du problème de couplage plaque-corde plutôt que le choix présenté ici. Nous présentons succinctement les résultats, omettant le détail de calculs qui ressemblent aux précédents.

Nous regroupons donc les schémas en temps S_{cp}^2 et S_{pa} présentés respectivement en (1.66) et

(2.59). Dans ce cas, la discrétisation du problème (3.6), conduit au schéma suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+1}-v_{c_h}^n}{\Delta t} - D_h \dfrac{q_h^{n+1}+q_h^n}{2} + R_c M_h^c \dfrac{v_{c_h}^{n+\frac12}+v_{c_h}^{n-\frac12}}{2} = f_{c_h}^{n+\frac12}, \\ M_h^q \dfrac{q_h^{n+1}-q_h^n}{\Delta t} + D_h^\top \dfrac{v_{c_h}^{n+1}+v_{c_h}^n}{2} + L_h^\beta \dfrac{q_h^{n+1}+q_h^n}{2} - J_K^\top v_{p_h}^{n+\frac12} = 0, \\ v_K^{n+\frac12} = \mathcal{S}_{\Delta t}(v_K^{n-\frac12}, \dot v_K^{n-\frac12}) - \mathcal{R}_{\Delta t}(B_{K_h})^\top (\dfrac{\lambda_h^{n+\frac12}-\lambda_h^{n-\frac12}}{\Delta t}) - \mathcal{R}_{\Delta t} J_K (\dfrac{q_h^{n+1}-q_h^{n-1}}{2\Delta t}) \\ M_h^a \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}-\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n}{\Delta t} - G_h p_h^{n+\frac12} - (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h^{n+\frac12} = 0, \\ M_h^{p_a} \dfrac{p_h^{n+\frac12}-p_h^{n-\frac12}}{\Delta t} + G_h \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n = 0, \\ B_{K_h} \dfrac{v_K^{n+\frac12}-v_K^{n-\frac12}}{\Delta t} - B_{\Gamma_h} \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}-\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}}{2\Delta t} = 0, \end{array}\right. \tag{3.37}$$

En suivant la même démarche que dans présent chapitre, on montre, à l'aide d'une propriété de décroissance de l'énergie discrète, valable même lorsque que R_c est non nul, que ce schéma est stable sous la seule condition de stabilité :

$$\frac{c_a \Delta t}{h_a} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{3.38}$$

Les inconnues de ce système sont à présent $v_{c_h}^{n+1}$, q_h^{n+1}, $v_K^{n+\frac12}$, $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$, $p_h^{n+\frac12}$ et $\lambda_h^{n+\frac12}$, toutes les autres variables étant connues à cette étape du calcul. La démarche pour le résoudre est toujours la même. On commence par calculer $p_h^{n+\frac12}$ à l'aide de la cinquième équation, qui est explicite.

Il reste maintenant un système implicite dont les inconnues sont $v_{c_h}^{n+1}$, q_h^{n+1}, $v_K^{n+\frac12}$, $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$, et $\lambda_h^{n+\frac12}$. On commence par éliminer $v_{c_h}^{n+1}$ et $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$, par des manipulations usuelles. On obtient, tous calculs faits, après avoir effectué le changement de variable indiqué en (3.30), le système en $(Q_h^{n+1}, v_R^{n+\frac12}\lambda_h^{n+\frac12})$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcccccl} C_q q_h^{n+1} & - & \Delta t J_R^\top v_R^{n+\frac12} & & & = & \tilde q, \\ \dfrac{J_R}{2\Delta t} q_h^{n+1} & + & v_R^{n+\frac12} & + & \dfrac{B_R^\top}{\Delta t}\lambda_h^{n+\frac12} & = & \tilde{v_R}, \\ & & 2B_R v_R^{n+\frac12} & - & \Delta t B_{\Gamma_h}(M_h^a)^{-1} B_{\Gamma_h}^\top \lambda_h^{n+\frac12} & = & \tilde\lambda, \end{array}\right. \tag{3.39}$$

où on a posé :

$$C_q = \left(M_h^q + \frac{\Delta t^2}{4(1+R_c\Delta t/2)} D_h^\top (M_h^c)^{-1} D_h + \frac{\Delta t}{2} L_h^\beta \right), \tag{3.40}$$

est tridiagonale symétrique définie positive d'après les propriétés des matrices M_h^c, M_h^q, L_h^β et D_h (*cf.* section 1.3.2.c), et où $\tilde q$, $\tilde{v_R}$ et $\tilde\lambda$ sont connus *explicitement* à ce stade du calcul. On

calcule alors :

$$(\Delta t J_R^\top (l_2) + (l_1)) \to (l_1) \quad \text{et} \quad [2B_R(l_2) - (l_4)] \to (l_4).$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_q + \Delta t J_R^\top J_R) q_h^{n+1} + J_R^\top B_R^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t J_R \tilde{v_R} + \tilde{q} = \tilde{q}', \\ \dfrac{B_R J_R}{\Delta t} q_h^{n+1} + \left(\dfrac{2}{\Delta t} B_R (B_R)^\top + \Delta t B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} (B_{\Gamma_h})^\top \right) \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = 2B_R \tilde{v_R} - B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} \underline{\tilde{\mathbf{v}}}_a - \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}'. \end{array} \right. \tag{3.41}$$

La grosse différence avec le système (3.32) est qu'on ne peut pas donner explicitement q_h^{n+1} en fonction de $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$: il faut inverser la matrice $(C_q + \Delta t J_R^\top J_R)$, qui est tridiagonale, symétrique définie positive, de taille n_q. Injectant la première équation de (3.41) dans la seconde, on aboutit finalement à :

$$\left[\frac{2B_R}{\Delta t} \left(I - J_R (C_q + J_R^\top J_R)^{-1} J_R^\top \right) (B_R)^\top + \Delta t B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} (B_{\Gamma_h})^\top \right] \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = (C_q + J_R^\top J_R)^{-1} \frac{B_R j_R}{\Delta t} \tilde{q}' + \tilde{\lambda}'. \tag{3.42}$$

Il nous faut donc tout d'abord calculer le second membre de cette équation en inversant $(C_q + \Delta t J_R^\top J_R)$, puis inverser la matrice :

$$C_\lambda = \left[\frac{2B_R}{\Delta t} \left(I - J_R (C_q + J_R^\top J_R)^{-1} J_R^\top \right) (B_R)^\top + \Delta t B_{\Gamma_h} (M_h^a)^{-1} (B_{\Gamma_h})^\top \right]. \tag{3.43}$$

Le fait que la matrice C_λ est symétrique définie positive n'est pas immédiat cette fois encore. En fait, c'est une conséquence de la condition inf-sup discrète de la formulation en domaine fictifs (2.38), qui assure que $(B_{\Gamma_h})^\top$ est injective, et de la relation suivante, que l'on peut vérifier en effectuant simplement le produit (si si, ça se fait bien) :

$$\left(I - J_R (C_q + J_R^\top J_R)^{-1} J_R^\top \right) = (I + J_R C_q^{-1} J_R^\top)^{-1}. \tag{3.44}$$

Remarque 3.3 *Pour trouver ce résultat qui n'a rien d'intuitif, il faut en fait commencer par éliminer q_h^{n+1} avant d'éliminer $v_R^{n+\frac{1}{2}}$ dans le système (3.39). Néanmoins, le seul intérêt d'effectuer le calcul dans cet ordre est qu'il nous permet de montrer facilement que C_λ est symétrique définie positive, car il faut alors inverser la matrice $(I + J_R C_q^{-1} J_R^\top)$ à chaque pas de temps pour déterminer $v_R^{n+\frac{1}{2}}$, ce qui n'est pas nécessaire si l'on calcule dans l'ordre présenté ci dessus.*

On verra dans la section suivante que dans le cas d'une guitare à plusieurs cordes on est obligé ce commencer par éliminer les inconnues $q_{h,k}^{n+1}$ (il y en a une par corde) et donc d'inverser à chaque pas de temps une matrice de taille $\tilde{n}_p$.

Par rapport au schéma S_g, le calcul de la matrice C_λ exige donc d'une part d'évaluer l'inverse d'une matrice symétrique positive de taille $\tilde{n}_p$, et d'autre part de calculer :

$$C_q^{-1} J_R^\top.$$

Comme seule la dernière ligne de $J_R^\top$ est non nulle, il suffit de calculer $C_q^{-1}\zeta_{n_q}$, où ζ_{n_q} est le dernier vecteur de la base de $\mathcal{Q}_h$, ce qui est négligeable.

Enfin, on calcule q_h^{n+1} en inversant à nouveau $(C_q + \Delta t J_R^\top J_R)$, puis on calcule, explicitement cette fois, $v_K^{n+\frac{1}{2}}$, $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$ et $v_{c_h}^{n+1}$

Au total, par rapport au schéma S_g, celui ci nécessite de calculer l'inverse d'une matrice de taille $\tilde{n}_p$ au début du calcul, puis de résoudre un système linéaire symétrique défini positif de plus à chaque pas de temps.

3.6 Une guitare à 6 cordes

Regardons à présent comment le schéma S_g est modifié lorsqu'on considère que la table n'est pas couplée à une seule corde mais à 6 cordes, comme c'est le plus usuel, ou plus généralement à K cordes, où K est un entier non nul. Dans ce cas, on doit résoudre K équations de cordes distinctes et chacune d'entre elles exerce un effort sur la table d'harmonie par l'intermédiaire du chevalet selon le même modèle que précédemment.

L'ajout de cordes supplémentaires s'insert naturellement dans le modèle proposé et l'écriture de la formulation variationnelle associée à ce problème est immédiate. Il n'est pas vraiment nécessaire de détailler toutes les étapes du calcul, ni d'introduire toutes les notations pour chaque corde. Celles ci sont évidentes. Elles consistent tout simplement en l'introduction de l'indice k. Précisons quand même :

- Pour chaque corde k, $1 \leq k \leq K$, on note :

$$v_{c_h,k} \quad \text{et} \quad q_{h,k} \tag{3.45}$$

  les inconnues discrètes qui permettent de décrire son mouvement.

- On note J_k la matrice couplant la $K^{\text{ème}}$ corde à la table d'harmonie.

On aboutit à un schéma numérique très proche du schéma S_g, que l'on notera S_g^K, dont on démontre la stabilité conditionnelle à l'aide d'une propriété de décroissance de l'énergie discrète. La vérification de ces résultats étant immédiate, on se contente de les énoncer. La différence n'apparaît véritablement que lorsqu'il s'agit de résoudre ce schéma, qui est un peu plus coûteux , comme on peut s'y attendre.

Le schéma S_g est modifié de la façon suivante :

$$
S_g^K \; : \; \left\{ \begin{array}{l}
M_{h,k}^c \dfrac{v_{c_h,k}^{n+\frac{1}{2}} - v_{c_h,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_{h,k} q_{h,k}^n + R_{c_k} M_{h,k}^c \dfrac{v_{c_h,k}^{n+\frac{1}{2}} + v_{c_h,k}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = f_{c_h,k}^n, \quad \forall 1 \leq k \leq K, \\
M_{h,k}^q \dfrac{q_{h,k}^{n+1} - q_{h,k}^n}{\Delta t} + D_{h,k}^\top v_{c_h,k}^{n+\frac{1}{2}} + L_{h,k}^\beta \dfrac{q_{h,k}^{n+1} + q_{h,k}^n}{2} - J_k^\top v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad \forall 1 \leq k \leq K, \\
\left\{ \begin{array}{l}
\ddot{v}_K + A_K \dot{v}_K + D_K v_K = - \displaystyle\sum_{k=1}^K \left(J_k \frac{q_{h,k}^{n+1} - q^{n-1}}{2\Delta t} \right) - (B_{K_h})^\top \frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \quad \forall t \in]t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}[, \\
v_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_K^{n-\frac{1}{2}} \text{ et } \dot{v}_K(t^{n-\frac{1}{2}}) = \dot{v}_K^{n-\frac{1}{2}},
\end{array} \right. \\
M_h^a \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n}{\Delta t} - G_h p_h^{n+\frac{1}{2}} - (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\
M_h^{p_a} \dfrac{p_h^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_h \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^n = 0, \\
B_{K_h} \dfrac{v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - B_{\Gamma_h} \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} - \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n-1}}{2\Delta t} = 0.
\end{array} \right. \tag{3.46}
$$

On démontre sans surprise l'identité d'énergie suivante, équivalent immédiat de la propriété (3.2) :

Propriété 3.3 *L'énergie discrète de chaque corde est définie par :*

$$
E_{c_h,k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h,k}^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h,k}^{n})_{M_{h,k}^c}, + \frac{1}{2} \| \overset{\blacktriangle}{q}_{h,k}^{n+\frac{1}{2}} \|_{M_{h,k}^q}^2, \quad \forall 1 \leq k \leq K, \tag{3.47}
$$

celle de la plaque est définie par :

$$
E_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \| \dot{v}_K^{n+\frac{1}{2}} \|^2 + \frac{1}{2} \| v_K^{n+\frac{1}{2}} \|_{D_K}^2, \tag{3.48}
$$

et celle du champ acoustique est définie par :

$$
E_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \| \overset{\blacktriangle}{\underline{\mathbf{v}}}_{a_h}^{n+\frac{1}{2}} \|_{M_h^a}^2 + \frac{1}{2} (\overset{\blacktriangle}{p}_h^{n+1}, \overset{\blacktriangle}{p}_h^{n})_{M_h^{p_a}}. \tag{3.49}
$$

Alors l'énergie totale $E_h^{n+\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{k=1}^K E_{c_h,k}^{n+\frac{1}{2}} + E_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} + E_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}$ *vérifie :*

$$
\begin{aligned}
\frac{E_h^{n+\frac{1}{2}} - E_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = & \sum_{k=1}^K (\frac{f_{c_h,k}^{n+1} - f_{c_h,k}^{n-1}}{2\Delta t}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h,k}^{n}) - \sum_{k=1}^K R_{c_k} (\frac{\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h,k}^{n+1} + 2\overset{\blacktriangle}{v}_{c_h,k}^{n} + \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h,k}^{n-1}}{4}, \overset{\blacktriangle}{v}_{c_h,k}^{n})_{M_{h,k}^c} \\
& - \| \frac{\overset{\blacktriangle}{q}_{h,k}^{n+\frac{1}{2}} + \overset{\blacktriangle}{q}_{h,k}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \|_{L_{h,k}^\beta}^2 - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \| \dot{v}_K \|_{A_K}^2
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

Cette propriété nous permet d'analyser la stabilité la stabilité du schéma S_g^K, de la même manière que celle de S_g. On a le :

Lemme 3.3 *On suppose que* $R_{c_k} = 0, \quad \forall 1 \leq k \leq K$. *Alors l'énergie discrète de chaque corde* $E_{c_h,k}^{n+\frac{1}{2}}$, *définie en (3.47), est positive dés que les* K *conditions :*

$$\frac{c_{c,k}\Delta t}{h_{c,k}} < 1, \tag{3.51}$$

sont vérifiées. D'autre part, l'énergie discrète du champ acoustique $E_{a_h}^{n+\frac{1}{2}}$, *définie en (3.15), est positive dés que la condition :*

$$\frac{c_a\Delta t}{h_a} < \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{3.52}$$

est vérifiée.
Dans ce cas, le schéma S_g^K *est stable.*

Les inconnues de ce système sont $(v_{c_h,k}^{n+\frac{1}{2}})_{1\leq k\leq K}$, $(q_{h,k}^{n+1})_{1\leq k\leq K}$, $v_K^{n+\frac{1}{2}}$, $\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1}$, $p_h^{n+\frac{1}{2}}$ et $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$, toutes les autres variables étant connues à cette étape du calcul. Pour résoudre ce schéma, on procède de la même manière que pour la résolution du schéma S_g. Cependant, la multiplicité des cordes force à aboutir à un système portant sur les inconnues $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ et $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$, plutôt qu'à un système portant sur les inconnues $Q^{n+1}, \lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$. En effet, maintenant v_K est "couplé" aux K équations de corde et au multiplicateur $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$, on ne peut donc pas l'éliminer aussi simplement que lorsqu'il y a une seule corde. Cette situation nous forcera à inverser une matrice pleine de taille $\tilde{n}_p$ à chaque pas de temps.

On donne seulement les grandes lignes du calcul, sans rentrer trop dans le détail de chaque étape. On commence par résoudre les équations qui sont en fait explicites, ce qui nous donne $(v_{c_h,k}^{n+\frac{1}{2}})_{1\leq k\leq K}$ et $p_h^{n+\frac{1}{2}}$.

D'autre part, on découple la dernière composante du vecteur $q_{h,k}$ associé à chaque corde, que l'on notera $Q_{h,k}$, des autres. On note :

$$q_{h,k}^{n+1} = (\bar{q}_{h,k}^{n+1}, Q_{h,k}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n_q-1} \times \mathbb{R}, \quad \forall 1 \leq k \leq K. \tag{3.53}$$

On obtient alors les K inconnues $(\bar{q}_{h,k}^{n+1})_{1\leq k\leq K}$ en inversant pour chacune d'elle la matrice :

$$C_{q,k} = M_{h,k}^q + \frac{\Delta t}{2} L_{h,k}^\beta, \quad 1 \leq k \leq K, \tag{3.54}$$

qui est tridiagonale symétrique définie positive. Il reste, après avoir effectué le changement

de variable indiqué en (3.30), le système suivant : :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \dfrac{h_{c,k}}{T_k}Q_{h,k}^{n+1} & - & 2\Delta t j_{R,k}^\top v_R^{n+\frac{1}{2}} & & & & = & \tilde{Q_{h,k}}, & \forall 1 \leq k \leq K, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{K} j_{R,k}\frac{Q_{h,k}^{n+1}}{2\Delta t} & + & v_R^{n+\frac{1}{2}} & & & + \dfrac{1}{\Delta t}(B_R)^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} & = & \tilde{v_R} & \\ & & & M_h^a \underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} & - & \Delta t (B_{\Gamma_h})^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} & = & \underline{\tilde{\mathbf{v}}}_a, & \\ & & 2B_R v_R^{n+\frac{1}{2}} & - & B_{\Gamma_h}\underline{\mathbf{v}}_{a_h}^{n+1} & & = & \tilde{\lambda}, & \end{array}\right. \tag{3.55}$$

où $\tilde{Q_{h,k}}$, $\tilde{v_R}$ et $\tilde{\lambda_h}$ sont connus explicitement à cette

Notons $(l_{1,k}), (l_2), (l_3), (l_4)$ les lignes de ce système. On calcule alors :

$$(l_2) - \sum_{k=1}^{K} \frac{T_k}{2h_{c,k}\Delta t} j_{R,k}(l_{1,k}) \rightarrow (l_2), \quad \text{et} \quad [-B_{\Gamma_h}(M_h^a)^{-1}(l_3) - (l_4)] \rightarrow (l_4).$$

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} (l_{1,k}), \quad \forall 1 \leq k \leq K, \\ (I + \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \frac{T_k}{h_{c,k}} j_{R,k} j_{R,k}^\top) v_R + \frac{1}{\Delta t} B_R^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{v_R}' \\ (l_3), \\ -2B_R v_R + \left(\Delta t B_{\Gamma_h}(M_h^a)^{-1}(B_{\Gamma_h})^\top\right) \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\lambda}'. \end{array}\right. \tag{3.56}$$

La matrice de taille $\tilde{n}_p$:

$$C_{v_R} = (I + \sum_{k=1}^{K} \frac{T_k}{h_{c,k}} j_{R,k} j_{R,k}^\top) \tag{3.57}$$

est pleine, symétrique définie positive. Le fait que $\tilde{n}_p$ est petit permet d'envisager le calcul de son inverse, que l'on stocke. On injecte alors la deuxième équation de (3.56) dans la quatrième. On obtient :

$$\left[\frac{2B_R}{\Delta t} C_{v_R}^{-1} B_R^\top + \Delta t B_{\Gamma_h}(M_h^a)^{-1}(B_{\Gamma_h})^\top\right] \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = C_{v_R}^{-1}\tilde{v_R}' - \tilde{\lambda}'. \tag{3.58}$$

Il nous faut cette fois ci inverser la matrice :

$$C_\lambda = \left[\frac{2B_R}{\Delta t} C_{v_R}^{-1} B_R^\top + \Delta t B_{\Gamma_h}(M_h^a)^{-1}(B_{\Gamma_h})^\top\right], \tag{3.59}$$

qui est symétrique positive, puisque les matrices $C_{v_R}^{-1}$ et $(M_h^a)^{-1}$ le sont. En outre, lorsque la condition inf-sup discrète de la formulation en domaines fictifs (2.38) est vérifiée, alors la matrice $(B_{\Gamma_h})^\top$ est injective et par conséquent C_λ est définie positive.

Connaissant $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$, on peut alors calculer $v_R^{n+\frac{1}{2}}$, à l'aide de la deuxième équation de (3.56), en inversant C_{v_R} (qui est maintenant un produit matrice-vecteur, puisque $C_{v_R}^{-1}$ est stockée). Enfin, on calcule $Q_{h,k}^{n+1}$ à l'aide des K premières équations de (3.55).

3.7 Aspects numériques

3.7.1 Choix des paramètres numériques du modèle de guitare

Regroupons l'ensemble des contraintes portant sur les paramètres numériques :

- Condition de stabilité de l'équation de corde (*cf.* équation (3.17)) :

$$\frac{c_c \Delta t}{h_c} \leq 1. \tag{3.60}$$

- Condition de stabilité de l'équation des ondes acoustiques (*cf.* équation (3.18)) :

$$\frac{c_a \Delta t}{h_a} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{3.61}$$

- Condition inf-sup discrète pour la méthode des domaines fictifs (*cf.* section 2.3.2.d) :

$$\frac{h_\lambda}{h_a} > 1,1. \tag{3.62}$$

En outre, pour le calcul de la matrice B_ω couplant la plaque et le multiplicateur de lagrange, on utilise un maillage surfacique de la guitare *qui coïncide avec le maillage de la table d'harmonie*. Ce choix particulier facilite grandement la mise en œuvre. Néanmoins il impose par conséquent de choisir un pas d'espace de la table d'harmonie vérifiant :

$$h_p > h_a,$$

ce qui limite sérieusement le choix de la dimension des raidisseurs collés sous la table d'harmonie puisque ceux ci forment des sous domaines du maillage de la guitare (voir la figure (2.1)). Il n'est pas envisageable de prendre un pas dans l'air de 5mm, car cela conduirait à des maillages cubiques très gros, et par conséquent à des temps de calcul très longs, ou bien il faudrait diminuer drastiquement la taille du domaine entourant la guitare, ce qui n'est pas souhaité.

On a donc choisi de modéliser des raidisseurs de 1.5 cm de large, de manière à prendre un pas dans l'air qui ne conduise pas à des calculs exagérément gros. Les maillages utilisés pour la table d'harmonie et pour le saut de pression sont présentés sur la figure (3.1). Le pas d'espace du maillage de la table d'harmonie est de 1.2cm.

On choisit alors un pas d'espace dans l'air de 1.1 cm de manière à respecter la condition imposée par la condition inf-sup discrète. En faisant un tel choix, on garantit 10 points par longueur d'onde jusqu'à près de 3000Hz. Une analyse de dispersion numérique de l'équation de ondes acoustiques seule permet alors de vérifier que l'erreur commise sur les fréquences inférieures à 3000Hz ne dépasse pas 0,3% (voir par exemple [54]), ce qui est excellent.

On peut alors calculer le pas de temps, déterminé à l'aide de la condition CFL dans l'air (3.61) , avec $c_a = 344 m.s^-1$:

$$\Delta t \approx 1.8510^{-5} s$$

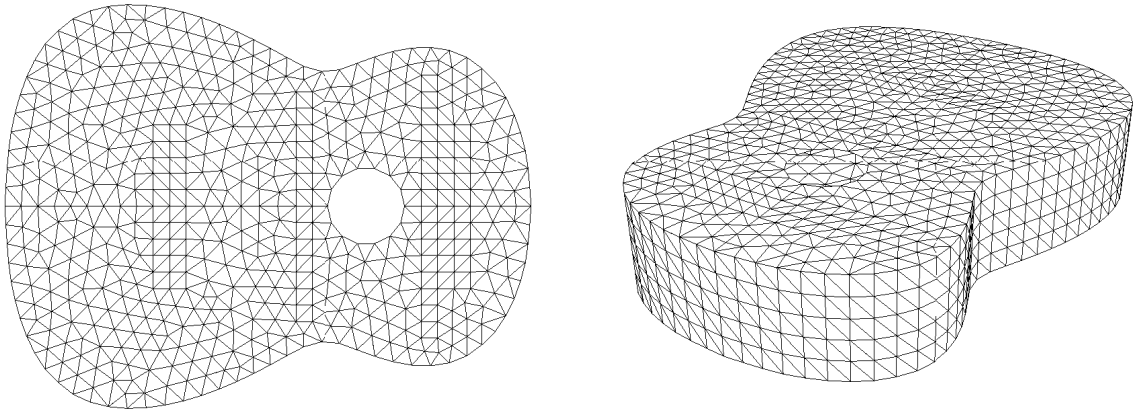


FIG. 3.1: *Maillage de la table d'harmonie et de la surface de la guitare*

Une fois le pas de temps déterminé, il reste à calculer le pas d'espace sur la corde, ici encore à l'aide de la condition CFL (3.60), qui dépend de la corde considérée.

On a représenté dans le tableau (3.1) l'ensemble des paramètres physiques et numériques utilisés pour le modèle de guitare exploité au chapitre 2.

3.7.2 Mise en œuvre

Le schéma de résolution S_g du modèle de guitare a été implémenté en C++. Des passerelles vers le Fortran77 se sont avérées nécessaires, pour utiliser des librairies ou routines existantes :

- La diagonalisation de la matrice de raideur de l'équation de plaque est assurée par la routine DSPEVX de *lapack*; la résolution des divers systèmes linéaires définis positifs par la méthode de Cholesky est également assurée par lapack;
- Tous les produits matriciels faisant intervenir des matrices pleines, sont effectués à l'aide des routines de la librairie *blas*,
- Le calcul des intersections des triangles du maillage surfacique de la guitare avec les cubes du maillage volumique nécessaire pour le calcul de la matrice de couplage domaine fictif B_Γ est réalisé à l'aide d'une routine f77 écrite par Sylvain Garcès dans le cadre de sa thèse sur portant sur la méthode des domaines fictifs [34]. La mise en œuvre de la méthode repose d'une manière fondamentale sur le calcul de ces intersections. La routine de Sylvain est donc un outil précieux. Merci beaucoup.
- Le calcul des conditions aux limites absorbantes est réalisé à l'aide d'une librairie f77 créée par Francis Collino. Je n'ose pas imaginer le temps que j'aurai mis à incorporer cette librairie dans le code sans l'aide précieuse de Francis. Merci beaucoup.

Paramètres du pincer de corde :

$f_m = 2N$	$t_1 = 0.015s$	$t_2 = 0.0004s$	$x_0 = 55cm$	$\delta_c = 0.006m$

Paramètres physiques et numériques des cordes :

Quantité	Mi1	Si2	Sol3	Re4	La5	Mi6
$\rho_c\ (kg.m^{-1})$	0.000545	0.000582203	0.00092419	0.0016467	0.002934	0.00525
T	100N	60N	60N	60N	60N	60N
R_c	1.85 s^{-1}	1.75 s^{-1}	1.7 s^{-1}	0.85 s^{-1}	0.8 s^{-1}	0.75
β	$7.10^{-8}s$	$7.5.10^{-8}s$	$8.10^{-8}s$	$9.10^{-8}s$	$9.10^{-8}s$	$9.10^{-8}s$
l_c	65 cm	65 cm	65 cm	65 cm	65 cm	65 cm
h_c	8.4 mm	6.3 mm	5mm	3.7 mm	2.8 mm	2.1mm
N_c	76	102	129	172	230	308

Paramètres physiques de la table d'harmonie :

Quantité	table	chevalet	raidisseurs
E_1	9925 MPa	900 MPa	1200 MPa
E_2	852 MPa	10000 MPa	15000 MPa
G_{12}	600 MPa	800 MPa	900 MPa
ν_{12}	0.3	0.3	0.3
ρ_p	350 $(kg.m^{-3})$	400 $(kg.m^{-3})$	400 $(kg.m^{-3})$
δ	2.9 mm	6 mm	14 mm
R_p	$7s^{-1}$	$7s^{-1}$	$7s^{-1}$
η	0.005 s	0.005 s	0.005 s

Paramètres numériques des maillages surfaciques

$h_p = 1.2cm$	$n_p = 3230$	$\tilde{n}_p = 50$	$N_s = 571$	$n_\lambda = 1260$

Paramètres physiques et numériques de l'air :

$h_a = 1.1cm$	$\rho_a = 1.21kg.m^{-3}$	$c_a = 344m.s^{-1}$
$L_x = 0.9m$	$L_y = 0.8m$	$L_z = 0.9m$
$N_x = 76$	$N_y = 68$	$N_z = 76$

TAB. 3.1: *Paramètres physiques et géométriques du modèle numérique de guitare*

Quatrième partie

Résultats numériques

Chapitre 1

Expériences de validation

On présente dans ce chapitre quelques expériences de validation numérique. Tout d'abord, une comparaison entre les résultats donnés par la méthode des domaines fictifs avec la méthode des différences finies dans le cas d'une boite rectangulaire montre la précision de la méthode (section 1.1).

D'autre part, on effectue une analyse de convergence par raffinement de maillage. Cette analyse est effectuée dans deux cas : le calcul des fréquences propres de la table d'harmonie *in vacuo* (c'est à dire de la table découplée de la corde et de l'air) et le calcul des fréquences propres de la guitare complète. On constate que les fréquences propres de la guitare complète sont approchées avec une bonne précision à l'exception des modes de table pour lesquels l'erreur est plus importante (section 1.2).

On montre ensuite empiriquement que seuls les 50 premiers modes de la table d'harmonie contribuent au rayonnement acoustique de la guitare, ce qui correspond à une fréquence de coupure de l'ordre de 3000Hz (section 1.3).

Pour terminer ces tests, on compare les fréquences et les modes d'une table d'harmonie homogène orthotrope in vacuo, calculés par notre méthode à ceux obtenus par Elejabarieta *et al.* [48] (section 1.4).

1.1 Validation de la méthode des domaines fictifs : le cas d'une boîte parallélépipédique

De manière à vérifier la validité de la méthode des domaines fictifs introduite au chapitre 2, on compare les résultats qu'elle fournit à ceux obtenus par une méthode de différences finies, applicable dans le cas d'une boîte parallélépipédique.

1.1.1 Description de l'expérience

On cherche donc à résoudre l'équation des ondes acoustiques dans une boîte rectangulaire $\mathcal{B}$, de dimensions $l_x \times l_y \times l_z$ avec conditions de Neumann. On supposera qu'initialement, la pression est un "pulse" de rayon r_0, centré au point S_0. Plus précisément, on prendra la

fonction C^1 suivante :

$$p(X,0) = \psi(X) = \begin{cases} \left| 1 - \left(\dfrac{d(X,S_0)}{r_0} \right)^3 \right|^2 & \text{pour } d(X,S_0) \leq r_0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.1}$$

où $d(X,S_0)$ désigne la distance du point X au point S_0. On suppose en outre que la vitesse initiale est nulle. Ce problème s'écrit :

$$\begin{cases} \rho_a \dfrac{\partial \underline{\mathbf{v}}_a}{\partial t} + \underline{\nabla} p = 0, & \text{dans } \mathcal{B} \\ \mu_a \dfrac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}_a = 0, & \text{dans } \mathcal{B} \\ \underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,t) \cdot \underline{N} = 0, & \text{sur } \delta\mathcal{B}, \\ p(x,y,z,0) = \psi(x,y,z), & \text{dans } \mathcal{B}, \\ \underline{\mathbf{v}}_a(x,y,z,0) = 0, & \text{dans } \mathcal{B}. \end{cases} \tag{1.2}$$

On résout tout d'abord ce problème par une méthode de différences finies explicites centrées d'ordre 2 (le schéma spatial est donné en (2.45), le schéma en temps est standard), sur un maillage de 30 x 18 x 12 points. Le pas d'espace est noté h_a, et le pas de temps Δt.

Lorsque le calcul est effectué par la méthode des domaines fictifs, la boîte est plongée dans un domaine Ω, de dimensions $\tilde{l}_x \times \tilde{l}_y \times \tilde{l}_z$ sur les bords duquel on utilisera des conditions aux limites absorbantes de degré 12. Le pas d'espace est le même pour les deux méthodes, et par conséquent le pas de temps également, puisque la condition de stabilité est la même. Enfin, on note h_λ le pas d'espace du maillage surfacique de la boîte (qui doit être, rappelons le, un peu plus *grand* que $h_a$pour que la condition inf-sup discrète soit vérifiée) et N_λ le nombre de degré de liberté du multiplicateur de Lagrange λ, c'est à dire la taille de la matrice symétrique définie positive à inverser à chaque pas de temps.

L'ensemble des paramètres physiques, géométriques et numériques de cette expérience sont regroupés dans le tableau (1.1).

$l_x \times l_y \times l_z$	$\tilde{l}_x \times \tilde{l}_y \times \tilde{l}_z$	S_0	r_0
50 x 30 x 20 cm	70 x 50 x 45 cm	(22,12,7)	5cm

ρ_a	c_a	Δt	h_a	h_λ	N_λ
$1.21 kg.m^{-3}$	340 $m.s^{-1}$	$2.810^{-5} s$	1.67 cm	2cm	1552

TAB. 1.1: *Paramètres géométriques, physiques et numériques de l'expérience de comparaison entre la méthode des domaines fictifs et la méthode des différences finies dans le cas d'une boîte parallélépipédique*

1.1.2 Résultats

Les deux courbes de la figure (1.1) représentent l'évolution au cours du temps de la pression au point S_0, calculée par les deux méthodes. Compte tenu de la fréquence des oscillations, on se concentre sur des fenêtres d'une largeur de 20 millisecondes. D'autre part, on a représenté sur la figure (1.2) l'évolution au cours du temps de la pression en un point situé *hors de la boite* par la méthode des domaines fictifs (il s'agit du point de coordonnées $(22, 12, 32)$). Attention, l'échelle n'est pas du tout la même sur ces deux figures.

La pression calculée par ces deux méthodes est donc la même, et ce avec un nombre de point tout à fait acceptable, c'est à dire qu'il n'a pas été nécessaire de raffiner outre mesure le maillage en espace pour obtenir une concordance des résultats, et ce malgré une excitation haute fréquence du système. En outre, on vérifie que la méthode des domaines fictifs laisse très peu "passer" d'énergie à travers la boite *fictive*, comme on peut l'observer sur la figure (1.2), puisque la pression à l'extérieur de la boîte est plus de 200 fois inférieure à la pression à l'intérieur de la boite.

On a également représenté sur la figure (1.3) des instantanés représentant une coupe de la pression acoustique dans le plan $y = S_0^y$ pendant les 2 premières millisecondes, calculées par les deux méthodes. La ressemblance entre les deux séries d'instantanés se passe de commentaires.

Remarque 1.1 *Le but de cette expérience est de comparer les résultats obtenus par les deux méthodes. Il va de soit que la méthode des domaines fictifs, développée pour prendre en considérations des domaines géométriques complexes, est totalement inapropriée ici. En effet :*

- *les conditions sur le bord de la boite sont approchées, alors qu'elle sont exactes avec la méthode des différences finies,*
- *on effectue un calcul dans un domaine plus grand,*
- *on doit inverser une matrice de taille N_λ à chaque pas de temps.*

1.2 Etude de convergence par raffinement de maillage

Un moyen de contrôler la validité de nos résultats est de les comparer à un calcul réalisé sur un maillage deux fois plus fin On présente dans cette section les résultats d'un tel calcul lorsque l'on pince la corde basse (Mi6).

Concrètement, on construit un maillage de la table supérieur de la guitare deux fois plus fin, et on choisit un pas d'espace h_a deux fois plus fin, et par conséquent un pas de temps deux fois plus fin. Le temps de calcul devient énorme, puisque, si l'on considère uniquement le problème 3d, il y 16 fois plus d'opérations que dans le cas de l'expérience sur maillage normal. Mais en outre ici, il faut diagonaliser l'opérateur de plaque discret, ce qui est très coûteux pour une matrice de cette taille (12774 nœuds ...)

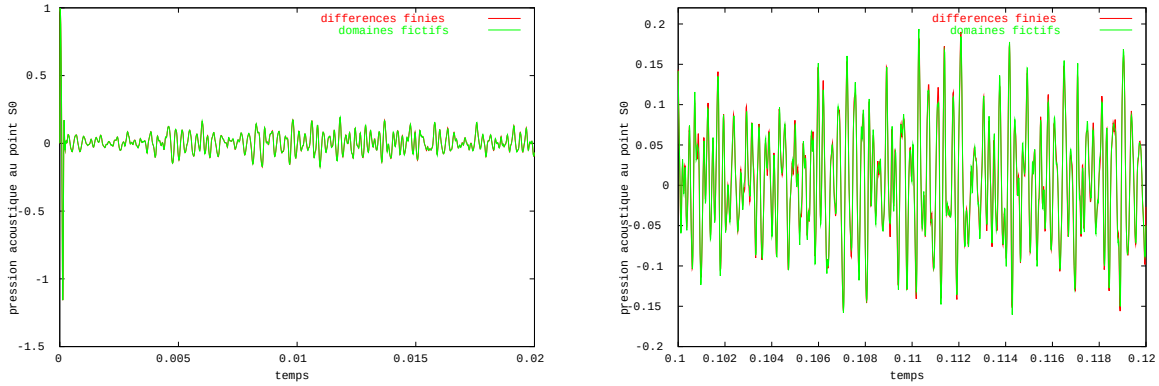


FIG. 1.1: — *Comparaison entre la pression au cours du temps au point S_0, calculée par la méthode des domaines fictifs et par la méthode des différences finies — A gauche $t \in [0, 20ms]$ — A droite, $t \in [100ms, 120ms]$*

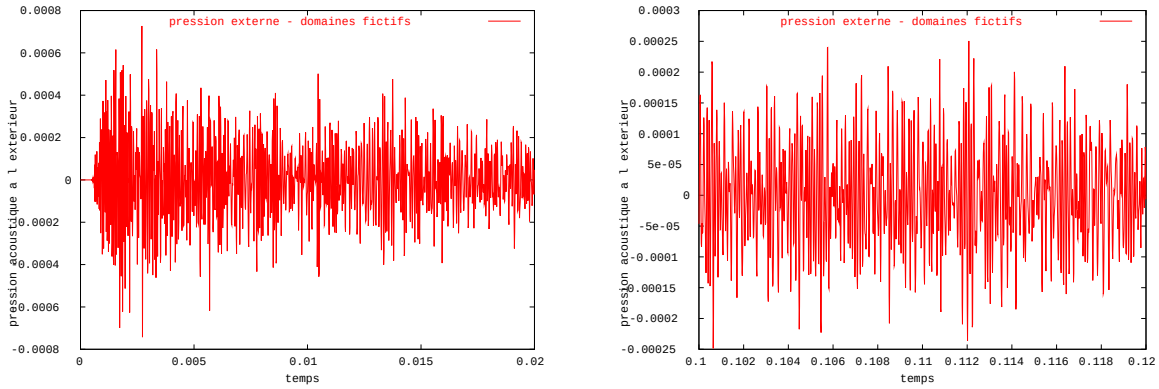


FIG. 1.2: *Pression au cours du temps à l'extérieur de la boite, calculée par la méthode des domaines fictifs — A gauche $t \in [0, 20ms]$ — A droite, $t \in [100ms, 120ms]$ Elle n'est pas nulle, mais elle est négligeable devant la pression interne*

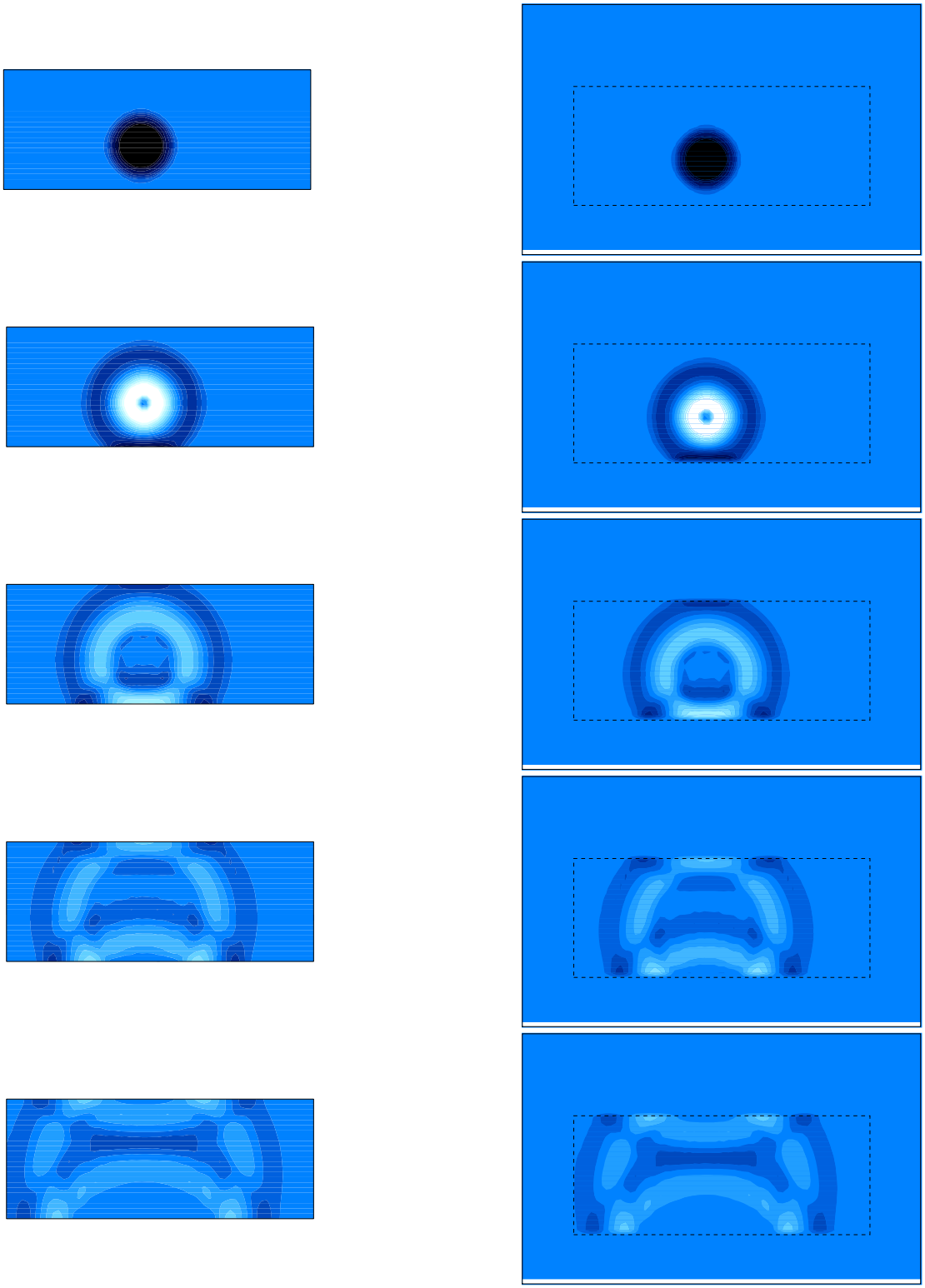


FIG. 1.3: *Comparaison entre les instantanés de pression acoustique dans le plan $y = S_0^y$ au cours des 2 premières ms — A gauche, méthode des différences finies — A droite, méthode des domaines fictifs.*

1.2.1 Fréquences propres de la table d'harmonie *in vacuo*

On compare tout d'abord les 50 premières fréquences propres de la table d'harmonie *in vacuo*, calculée dans le cas des deux maillages "normal" et "fin". Les résultats de cette comparaison sont présenté sur la figure (1.4).

Le moins qu'on puisse dire est que ce résultat est un peu décevant, puisque l'erreur commise sur ces 50 premières fréquences est comprise entre 1% et 3% ! En fait, le maillage normal *sous-estime* les fréquences propres de la table d'harmonie. Cela est certainement dû au fait que ce maillage n'est pas assez fin au niveau des raidisseurs situés de part et d'autre de la rose, ce qui la rend "plus souple" qu'elle n'est en réalité. Cette petite erreur n'est pas disqualifiante en pratique, puisque les fréquences obtenues sur le maillage normal sont cohérentes et correspondent à des variations typiques de table d'harmonie de guitare réelle. D'autre part, on verra à la section suivante que cette erreur diminue magiquement dans le cas d'une guitare complète.

Cette performance moyenne confirme toutefois que la modélisation des raidisseurs nécessite un traitement très spécifique.

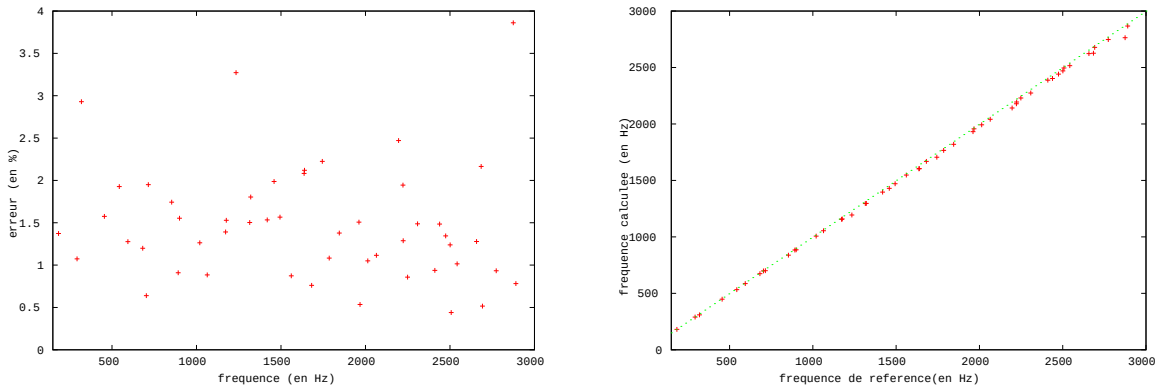


FIG. 1.4: *Erreur commise sur les fréquences propres de l'opérateur de plaque par le maillage normal par rapport à celles du maillage fin — A gauche, les courbes représentent l'écart relatif* $(f_{calc} - f_{th})/f_{th}$*, où* f_{calc} *et* f_{th} *sont respectivement les fréquences propres calculées sur le maillage normal et les fréquences de référence calculées sur le maillage fin — A droite, on a tracé les fréquences calculées en fonction des valeurs de référence.*

1.2.2 Comparaison des deux calculs dans le cas d'une guitare complète

On compare à présent la pression acoustique calculée dans le cas d'un maillage deux fois plus fin à obtenue par le calcul normal. La courbe de la figure (1.5) représente l'évolution au cours du temps de la pression acoustique en un point S_0 situé à 55 cm au dessus de la guitare, au cours des 100 premières millisecondes.

On constate sans surprise que les deux courbes ne sont pas parfaitement collés, ce qui est dû à l'erreur commise sur les fréquences propres de la table d'harmonie.

D'autre part, on calcule les fréquences de la guitare complète en effectuant une détection de

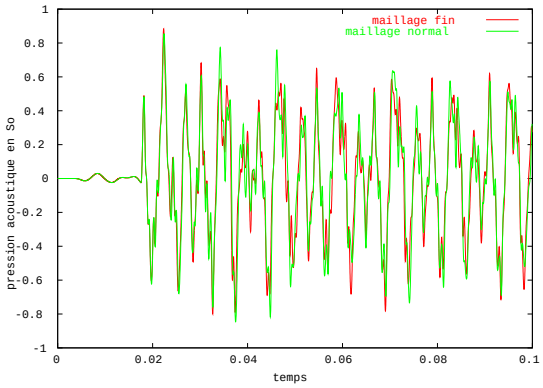


FIG. 1.5: *Comparaison entre la pression acoustique calculée par le maillage fin et celle calculée par le maillage normale au cours de 100 premières millisecondes.*

pics à -50dB sur la transformée de Fourier de ces deux signaux. Les fréquences obtenues par les deux calculs sont comparées sur la figure (1.6).

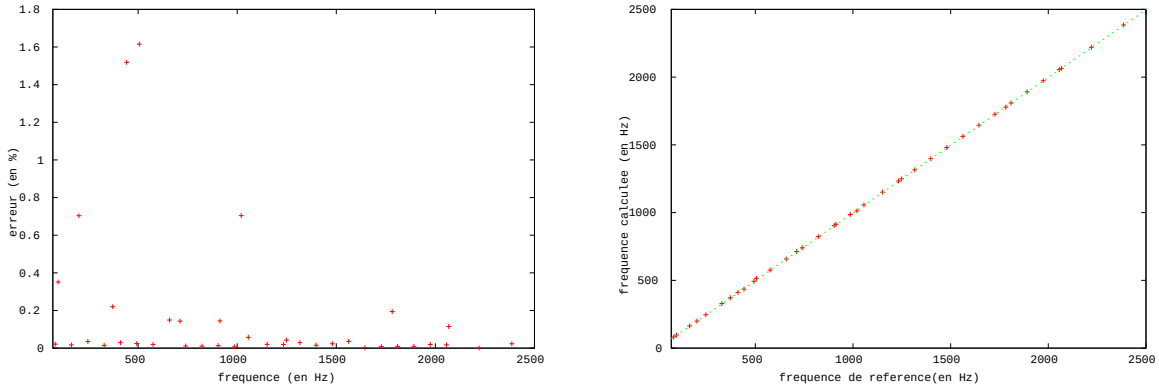


FIG. 1.6: *Erreur commise sur les fréquences propres de la guitare complète, calculée par le maillage normal, par rapport à celles du maillage fin. Ces fréquences sont obtenues à l'aide de la FFT du signal de pression acoustique enregistré en S_0 — A gauche, les courbes représentent l'écart relatif $(f_{calc} - f_{th})/f_{th}$, où f_{calc} et f_{th} sont respectivement les fréquences calculées sur le maillage normal et les fréquences de référence calculées sur le maillage fin — A droite, on a tracé les fréquences calculées en fonction des valeurs de référence.*

On constate que :

- dans le cas de la guitare complète, l'erreur commise sur les fréquences est essentiellement inférieure à 0.4 %. Sur cette figure, seules 4 fréquences présentent une erreur supérieure à 0.6%; il s'agit des fréquences 201 Hz, 442 Hz, 506 Hz et 1020 Hz (dont deux seulement dépassent 1% d'erreur). Ainsi l'erreur est tout à fait acceptable dans le cas d'une guitare réelle.
- On identifie aisément les fréquences de cordes qui sont de multiples de 83 Hz. L'erreur sur ces fréquences est inférieure à 0.03%, ce qui est excellent.

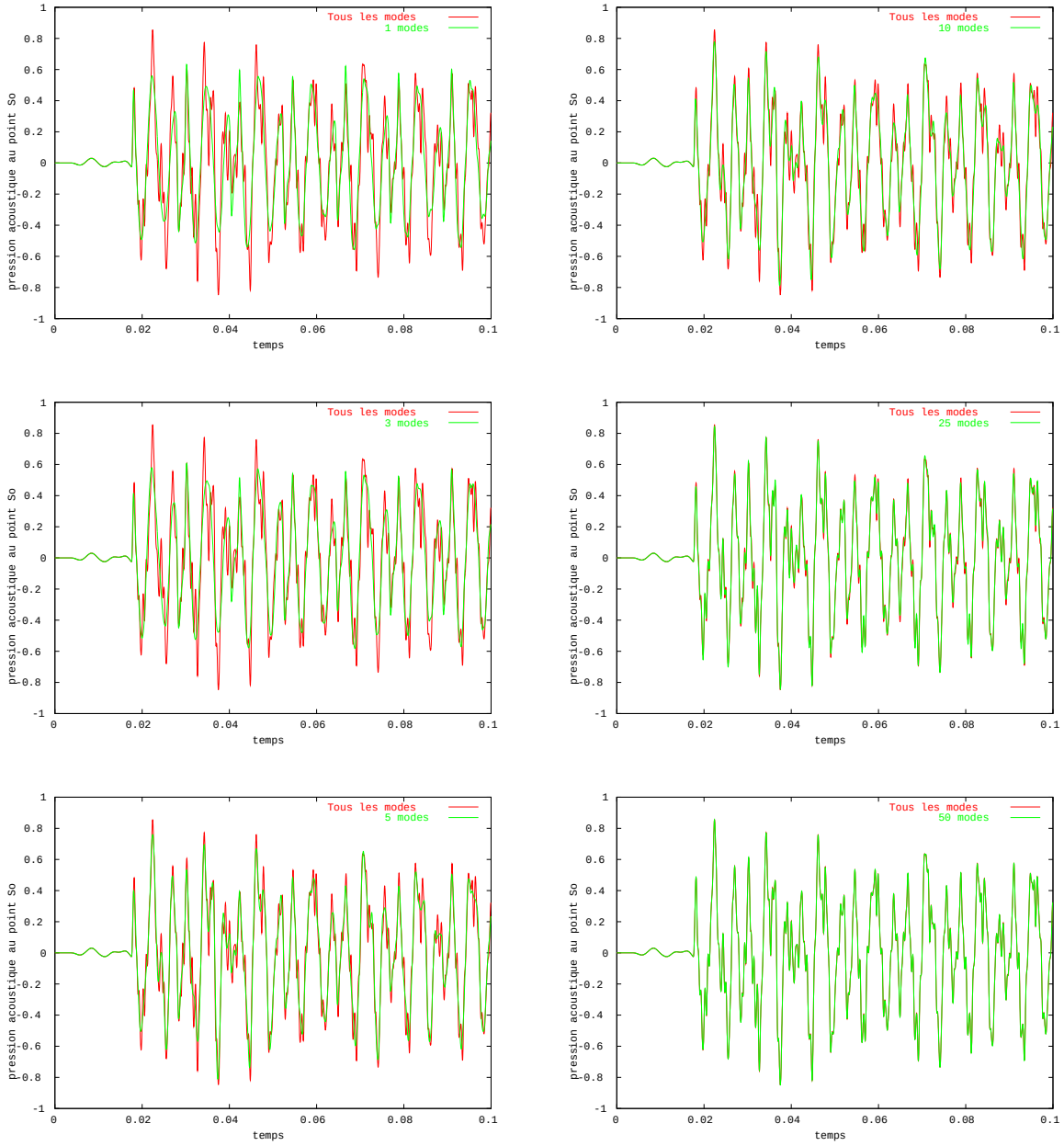


FIG. 1.7: *Comparaison entre la pression acoustique de référence, calculée avec tous les modes et la pression calculée en tronquant successivement à 1, 3, 5, 15, 25 et 50 modes (de haut en bas et de gauche à droite.)*

Remarque 1.2 *Suite au couplage entre la table d'harmonie et la cavité, les fréquences de la table se sont déplacées, et il n'est pas toujours évident d'identifier les modes de table dans la guitare complète. On sait néanmoins que la fréquence de 201 Hz correspond à la première fréquence de la table d'harmonie (voir la section 2.5 et aussi [60]), et on peut conjecturer que les 3 autres correspondent également à des fréquences de tables.*

Il est curieux de noter que l'erreur commise sur la première fréquence de la table vaut 1.3% pour la table in vacuo *alors qu'elle n'est plus que de 0.7% dans le cas d'une guitare complète.*

1.3 Influence des composantes modales

On regarde empiriquement quels sont les modes "utiles", c'est à dire les modes de la table d'harmonie qui contribuent au rayonnement du son lorsqu'on pince la corde basse de la guitare. Cette analyse est similaire à celle réalisée à la section 5.5 dans le cas d'une plaque rectangulaire *in vacuo*.

On a tracé sur la figure (1.7) la pression acoustique au cours des 100 premières millisecondes au point S_0, obtenues en tronquant successivement à 1, 3, 5, 10, 25 et 50 modes, que l'on compare à la solution de référence calculée avec tous les modes. On constate donc que 50 modes suffisent. Cela correspond à prendre les modes dont la fréquence est inférieure à 3000 Hz.

D'autre part, on remarque que l'essentielle du signal est obtenu avec un seul mode. Cette observation montre ainsi que **le premier mode la table rayonne très efficacement**; l'essentiel de l'énergie acoustique est donc en fait transmise par ce mode.

1.4 Fréquences propres d'une table d'harmonie de guitare non raidie

Nous comparons maintenant les fréquences et les modes d'une table d'harmonie de guitare homogène orthotrope, percée d'un trou, calculées par l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ aux résultats présentés par Elejabarieta *et al.* dans [48].

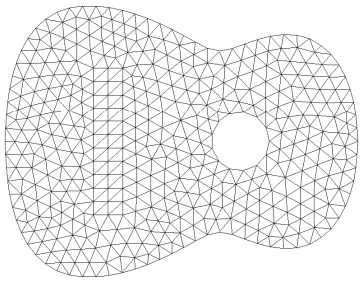


FIG. 1.8: *Maillage de la table d'harmonie d'une guitare*

Les valeurs des paramètres physiques de cette table d'harmonie sont présentés dans la figure (1.2). Leurs résultats sont calculé à l'aide d'un logiciel d'éléments finis nommé ABAQUS [39] sur un maillage de 6590 nœuds, par une méthode non précisée. Ils fournissent uniquement les 8 premiers modes. Nous avons reproduit ce calcul à l'aide d'un maillage contenant 3690 nœuds, présenté sur la figure (1.8).

La comparaison des fréquences calculées par l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$ à celles données dans [48] sont présentées dans le tableau (1.3) et sur la figure (1.10). La figure (1.9) montre la comparaison entre les modes.

Cette comparaison est satisfaisante. On observe une parfaite concordance des 7 premiers modes, et les fréquences calculées sont très proches. Nous n'avons pas construit un maillage spécifique pour réaliser cette comparaison. Le maillage utilisé n'a donc pas exactement la même forme que celui de Elejabarieta *et al.*, ce qui peut expliquer la différence observée sur les fréquences.

E_1	5600 MPa
E_2	520 MPa
G_{12}	600 MPa
ν_{12}	0.33
ρ_p	342 $kg.m^{-3}$
δ	2.70 mm

TAB. 1.2: *Paramètres physiques pour la table d'harmonie utilisés dans [48].*

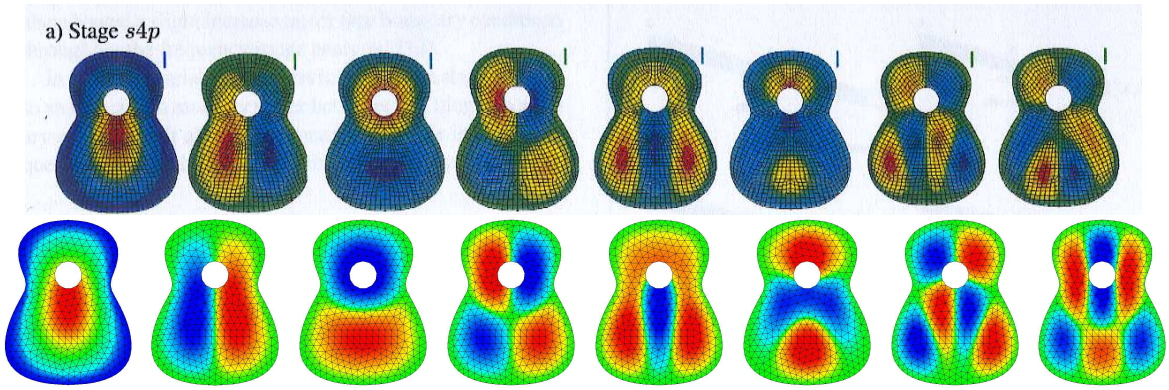


FIG. 1.9: *Comparaisons entre les déformées modales données dans [48] (en haut) et calculées par l'approximation $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$.*

Réf. [48]	$\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$	
fréquence (en Hz)	fréquence (en Hz)	erreur (en %)
72	73.3314	1.8492
134	136.861	2.13474
148	151.304	2.23227
201	207.199	3.08403
215	219.323	2.01072
238	245.449	3.12962
300	309.841	3.2803
323	330.858	2.43294

TAB. 1.3: *Comparaison entre les fréquences d'une table d'harmonie de guitare homogène orthotrope données dans [48] et les valeurs calculées par l'approximation* $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$.

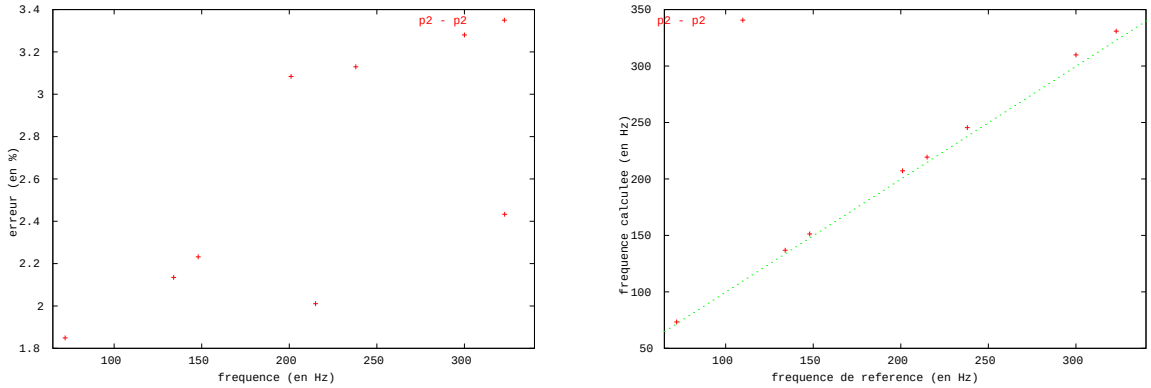


FIG. 1.10: *Comparaison entre les fréquences d'une table d'harmonie de guitare homogène orthotrope données dans [48] et les valeurs calculées par l'approximation* $\tilde{P}_2 - \tilde{P}_2^4$.— *A gauche, les courbes représentent l'écart relatif* $(f_{calc} - f_{ref})/f_{ref}$, *où* f_{calc} *et* f_{ref} *sont respectivement les fréquences propres calculées les fréquences données dans [48] — A droite, on a tracé les fréquences calculées en fonction des fréquences données dans [48].*

Chapitre 2

Modèle numérique de guitare

Ce chapitre est consacré à la présentation de résultats numériques exploitables à l'aide de notre modèle. Son réalisme permet de faire un grand nombre de mesures similaires à celles réalisées sur des instruments réels, qui permettent d'estimer la qualité de l'instrument, ou son fonctionnement acoustique.

Les résultats obtenus sont comparés qualitativement à ceux que l'on peut trouver dans la littérature. Les paramètres physiques utilisés pour ces expériences numériques sont des valeurs typiques des matériaux considérés, donnés à la section 3.7.1, mais il ne s'agit pas de paramètres mesurés sur une guitare précise. Le modèle présenté ici ne cherche donc pas à imiter une guitare particulière.

On obtient des résultats qualitatifs très satisfaisants concernant la déformée et la fréquence des premiers modes (voir section 2.1).

La première vérification consiste en fait en une écoute des signaux de pression produits par le modèle, afin d'apprécier si oui ou non on reconnaît une guitare. Une analyse plus objective est présentée à la section 2.2, où les signaux simulés sont comparés à des signaux enregistrés à partir d'une guitare réelle, dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Cette comparaison montre la bonne reproductibilité de la décroissance des partiels de corde, mais elle laisse entrevoir des lacunes.

Parmi les indicateurs permettant d'apprécier la qualité d'un instrument, l'un des plus importants est peut-être la mesure de l'admittance au chevalet. C'est une mesure de la *mobilité* de la table d'harmonie à l'endroit où elle est couplée avec les cordes. Il est essentiel que la table soit mobile pour que la corde puisse lui transmettre efficacement ses vibrations. Le modèle permet de mesurer cette admittance dans différentes situations, ce qui permet d'apprécier l'influence des divers couplages (section 2.3).

On retrouve en particulier l'importance de la fréquence de cavité de Helmholtz, qui permet d'augmenter la mobilité en basse fréquence. Une mesure de cette fréquence lorsque les bords de la cavité sont rigides est réalisée à la section 2.5, ce qui permet de vérifier une loi empirique de couplage entre ce mode et le premier mode de la table. **La qualité de ce résultat montre la fiabilité de la méthode des domaines fictifs pour prendre en compte les interactions fluide-structure sur des objets de forme géométrique complexe.**

Un autre indicateur de qualité important est la directivité de la guitare. Il s'agit d'une mesure de l'homogénéité du rayonnement du son dans l'espace environnant la guitare. Outre la simulation de mesures usuelles de directivité, qui porte sur des valeurs moyennées en temps, le modèle numérique permet de regarder la directivité instantanée de la guitare.

On peut également réaliser des expériences difficilement accessibles par des mesures, et c'est certainement là un aspect innovant très intéressant de ce modèle. On présente à la section 2.4 l'influence du couplage avec la cavité d'air sur l'amortissement des modes de la table d'harmonie. Une telle étude est en fait extrêmement délicate expérimentalement, voire impossible.

Tous ces résultats sont très prometteurs et montrent à la fois la fiabilité de la méthode et le bien fondé de cette approche. L'ensemble de ces expériences numériques montre les grandes potentialités d'un tel modèle, qu'il conviendra d'exploiter plus encore. Elle montre également les améliorations nécessaires qu'il faudrait apporter pour obtenir une description plus réaliste de l'instrument.

2.1 Influence des raidisseurs et du chevalet sur les modes de la table d'harmonie

Il est possible d'observer l'évolution des modes de la table d'harmonie lorsque l'on ajoute successivement les raidisseurs et le chevalet. Le système de barrage induit des changements considérables sur la forme et la fréquence des modes. Afin de montrer le caractère localisé de cette influence, on montre également les modes obtenus pour une table homogène *équivalente* possédant une raideur transverse moyenne, choisie de sorte que les fréquences soient à peu près équivalentes à celles de la guitare barrée.

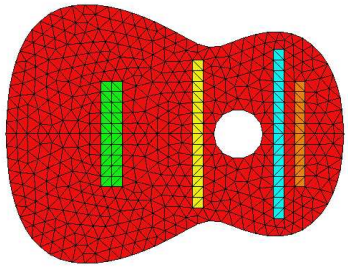


FIG. 2.1: *Maillage de la table d'harmonie, comportant 3 raidisseurs et le chevalet.*

Dans la mesure où les raidisseurs placés en travers des cernes du bois ont une influence nettement plus importante que les raidisseurs collés en éventail sur le ventre de la guitare (voir [55]), on intègre seulement ces derniers dans le modèle. Le chevalet possède également une importance considérable dans le système de barrage de la table. Le maillage incluant les raidisseurs et le chevalet est présenté sur la figure (2.1). On rappelle les paramètres physiques du bois utilisés pour la table, les raidisseurs et le chevalet, regroupés dans le tableau (2.1). Ils s'inspirent des valeurs utilisées par Richardson et Roberts pour une étude similaire ([55]).

Quantité	table	chevalet	raidisseurs	table *équivalente*
E_1	9925 MPa	900 MPa	1200 MPa	9925 MPa
E_2	852 MPa	10000 MPa	15000 MPa	4235 MPa
G_{12}	600 MPa	800 MPa	900 MPa	600 MPa
ν_{12}	0,3	0,3	0,3	0,3
ρ_p	350 ($kg.m^{-3}$)	400 ($kg.m^{-3}$)	400 ($kg.m^{-3}$)	350 ($kg.m^{-3}$)
δ	2.9 mm	6 mm	14 mm	2.9 mm

TAB. 2.1: *Paramètres physiques pour la table d'harmonie utilisés pour ce modèle.*

La figure (2.3) représente les modes de la table *in vacuo* et les fréquences propres associées dans les quatre cas suivants :

1. table orthotrope homogène, encastrée sur le bord extérieur, et avec condition de bord libre le long de la rose,
2. ajout des raidisseurs, pas de chevalet,
3. guitare complète :raidisseurs + chevalet,
4. table orthotrope homogène avec une raideur transverse "moyennant" l'effet des raidisseurs.

Notation 2.1 *La numérotation de ces modes,* $(1,1), (2,1)$ *etc..., correspond à une nomenclature couramment utilisée pour décrire les modes d'une table d'harmonie de guitare. Il s'agit grossièrement du nombre de "ventres" rencontrés respectivement selon l'axe transverse et selon l'axe de symétrie de la table.*

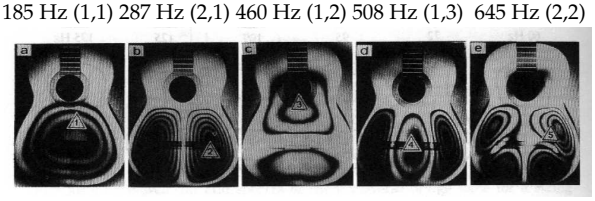
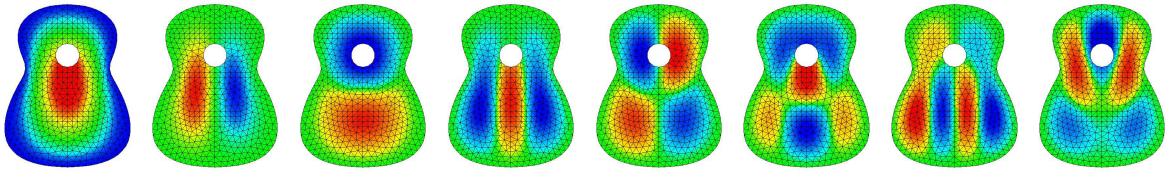


FIG. 2.2: *Les cinq premiers modes d'une guitare classique collée sur son bord et sans cavité (Jannson, 1971 [42])*

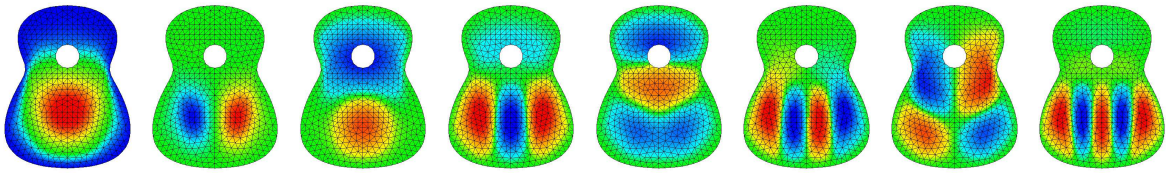
On peut faires les remarques suivantes :

- L'effet des raidisseurs et du chevalet porte à la fois sur les fréquences (celles-ci augmentent) et sur la forme des modes. On peut distinguer :
  - ⋆ L'effet des raidisseurs est de restreindre les mouvements de la table au ventre de la guitare,



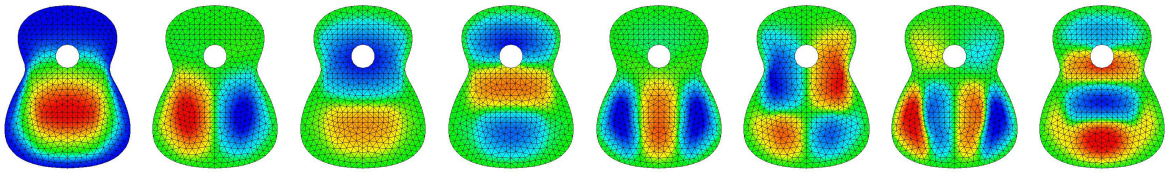
107 Hz	183 Hz	246 Hz	298 Hz	303 Hz	422 Hz	431 Hz	436 Hz
(1,1)	(2,1)	(1,2)	(3,1)	(2,2)	(3,2)	(4,1)	(3,1)'

Table homogène orthotrope



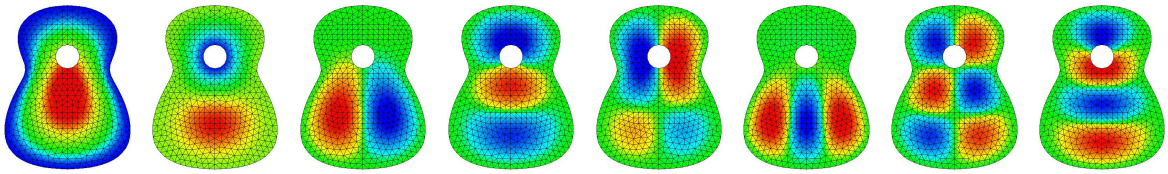
185 Hz	286 Hz	312 Hz	379 Hz	457 Hz	494 Hz	585 Hz	651 Hz
(1,1)	(2,1)	(1,2)	(3,1)	(1,3)	(4,1)	(2,2)	(5,1)

Table avec raidisseurs, sans chevalet



181 Hz	289 Hz	309 Hz	448 Hz	532 Hz	586 Hz	673 Hz	698 Hz
(1,1)	(2,1)	(1,2)	(1,3)	(3,1)	(2,2)	(4,1)	(1,4)

Table avec raidisseurs et avec chevalet



178 Hz	291 Hz	373 Hz	472 Hz	516 Hz	633 Hz	646 Hz	737 Hz
(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)	(3,1)	(2,3)	(1,4)

Table homogène "équivalente"

FIG. 2.3: *Les huit premiers modes de la table d'harmonie et la fréquence associée au cours de la construction du système de barrage.*

  - ⋆ La présence du chevalet a pour conséquence d'augmenter la fréquence des modes de type $(m, 1)$, pour $m > 2$, comme par exemple le mode (3,1) qui passe de 379 Hz à 532 Hz. Le mode (2,1) est moins affecté par le chevalet, car il peut pivoter autour de son centre.
  - ⋆ En outre, le chevalet élargit le ventre central des modes (1,2) et (3,1), ce qui favorise un comportement de type "monopolaire" et augmente par conséquent la capacité de rayonnement acoustique de ces modes (voir [9]). Le chevalet a donc un effet très important sur le rayonnement du son, puisqu'*il favorise les modes qui rayonnent le mieux*.

- Si l'on exclut le mode (3,1), les déformées modales des 5 premiers modes de la table complète correspondent à celles mesurées par Jannson ([42]), dans des conditions similaires (bord collés sur un support fixe (encastrement) et sans cavité) (voir la figure (2.2)) (la concordance avec certaines fréquences mesurées par cet auteur est particulièrement est totalement fortuite).

- L'insertion du mode (3,1) entre les modes (1,3) et (2,2) par rapport aux résultats qu'on trouve d'une manière générale dans la littérature est certainement du au fait que les struts "en éventail" ne sont pas prises en compte dans le maillage utilisé.

- Dans le cas de la table équivalente, si les fréquences sont à peu près similaires à celles de la table complète, les déformées modales n'ont rien à voir. En particulier, les vibrations sont plus importantes autour du trou. Il est donc nécessaire de considérer le système de barrage *localement*.

2.2 Spectres temps-fréquence des six cordes à vide

La première expérience numérique portant sur la guitare complète que l'on a envie de réaliser est de pincer l'une des six cordes et d'écouter le son produit. L'oreille est un excellent moyen de contrôle de la validité du résultat, car elle réalise spontanément une analyse extrêmement fine du signal. Le cerveau est alors capable de comparer le son obtenu à sa propre bibliothèque de sons.

Il n'est malheureusement pas possible de coucher un tel son sur le papier. Contentons nous d'une description subjective. Les sons obtenus sont globalement corrects. Le timbre obtenu est clair et la décroissance du son très réaliste. On reconnaît le son d'une guitare, ce qui est une grande satisfaction. Néanmoins, la simplicité du modèle de pincer conduit à une attaque un peu percussive. En outre, on n'entend pas les bruits de frottement du doigt sur la corde, qui contribuent à caractériser le son spécifique du pincer de corde d'une guitare. Le raffinement du modèle de pincer est peut-être la première extension qu'il faudrait ajouter au modèle actuel pour mieux caractériser l'attaque.

On peut également représenter ces sons d'une manière plus objective, à l'aide de spectres en temps-fréquence. La figure (2.4) représente le signal calculé pour les six cordes à vide de la guitare pendant 6 secondes et le spectre associé [1].

1. Sauf la première corde, pour laquelle le signal mesuré ne dure que 4 secondes (en fait, le son est très vite amorti à cette fréquence).

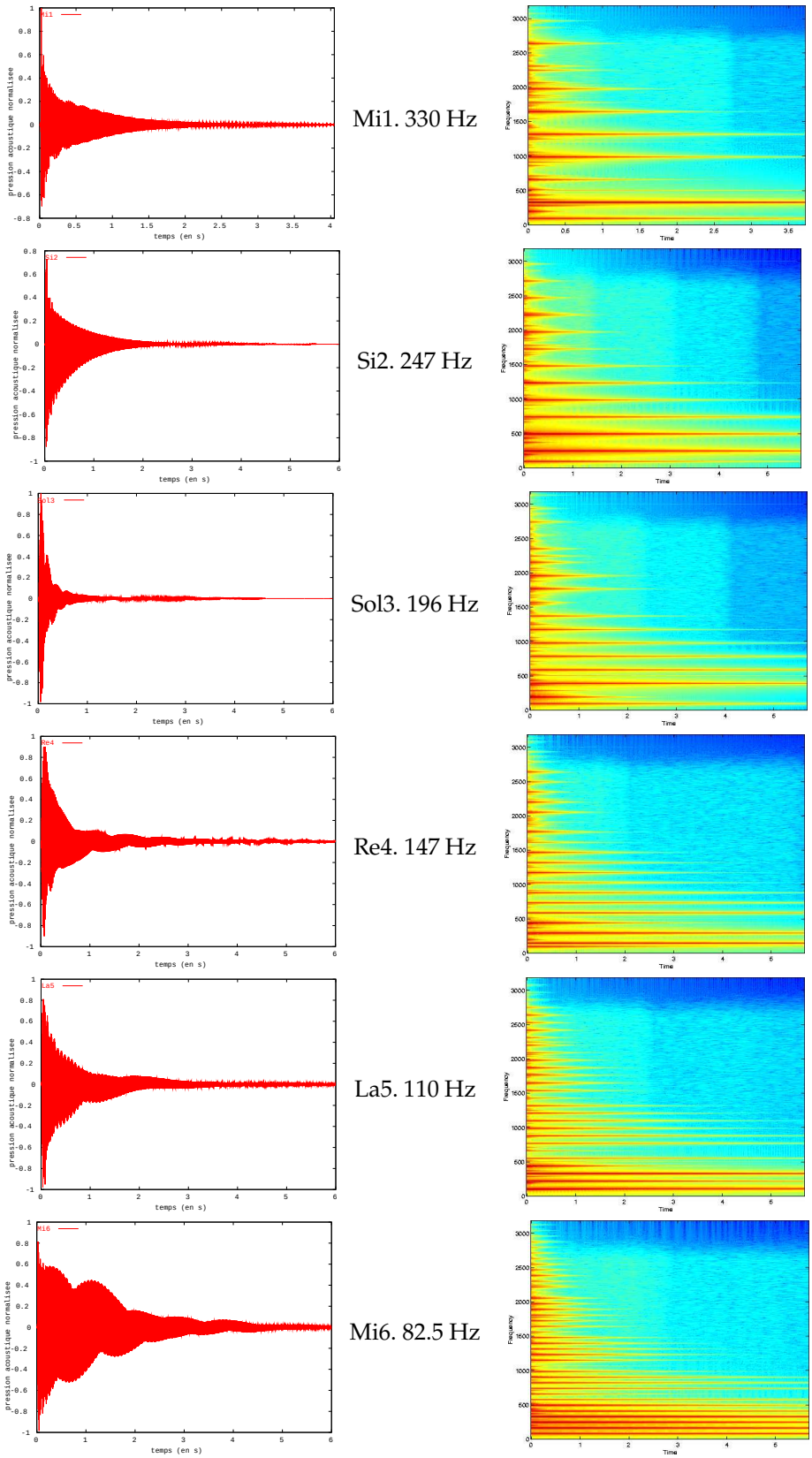


FIG. 2.4: *Signaux en temps et spectre temps-fréquence des 6 cordes à vide de la guitare. Simulations.*

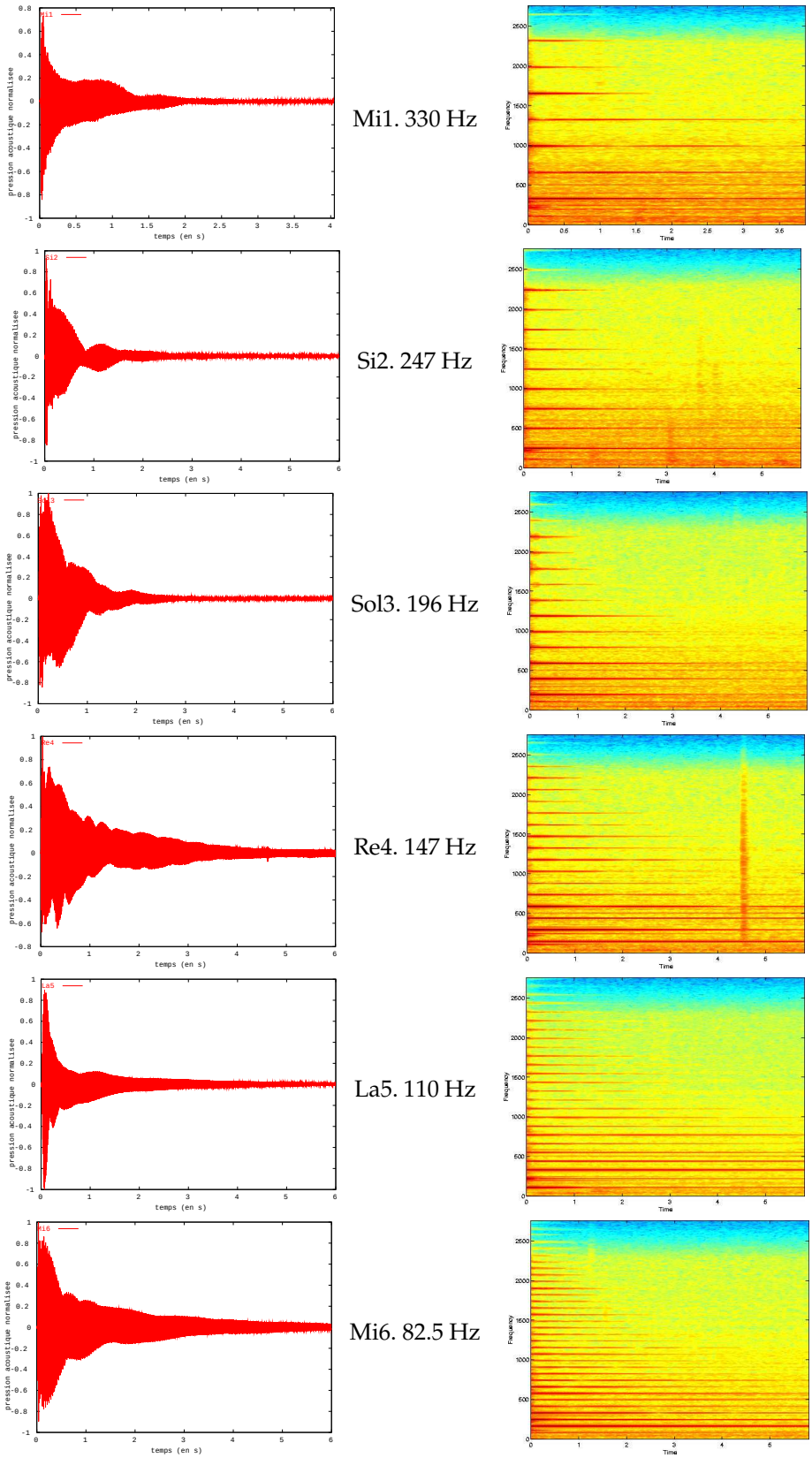


FIG. 2.5: *Signaux en temps et spectre temps-fréquence des 6 cordes à vide de la guitare. Mesures sur une guitare Fleta (source : A. Chaigne)*

A titre comparatif, on a représenté sur la figure (2.5) les courbes équivalentes obtenues à l'aide du signal enregistré sur une guitare Fleta. Il n'est pas question ici de faire une comparaison détaillée entre les résultats réels et simulés, car la guitare simulée ne correspond pas à la guitare Fleta présentée ici. L'objet de cette comparaison est uniquement qualitatif.

On peut faire les remarques suivantes :

- Les spectres temps-fréquence de la guitare simulée sont très proches de ceux de la guitare réelle. En particulier, la décroissance des partiels de cordes est correctement approchée par le modèle.
- Les bruits de table au début du signal sont vite étouffés, et la guitare simulée a bien le comportement attendu d'une guitare, à savoir qu'elle rayonne essentiellement les modes de corde. On note toutefois que ces bruits de table sont nettement moins importants dans le signal réel que dans le signal simulé, ce qui suggère d'augmenter les paramètres d'amortissement de la table.
- On observe sur la guitare simulée la persistance du premier mode de la guitare, à 96 Hz (il s'agit du mode de cavité de Helmholtz; voir section 2.5), et ce pour les 6 notes, ce qui n'est pas le cas de la guitare réelle, pour lequel cette fréquence n'est présente durablement que pour les deux notes les plus graves.

  Ceci est dû au fait que nous n'avons pas du tout modélisé les phénomènes d'amortissement dans l'air, qui jouent visiblement un rôle important, tout au moins pour le mode de Helmholtz.
- L'enveloppe des signaux n'a pas la même allure dans les deux cas. Dans le cas des signaux de pression produits par les notes aigües, elle est en fait exponentiellement décroissante pour la guitare simulée alors qu'elle est beaucoup plus torturée dans le cas d'une guitare réelle.

  D'autre part, le La5 de la guitare réelle (par exemple) présente une nette cassure, appelée "double décroissance". La corde est très fortement amortie au début puis plus doucement ensuite. Ceci est dû à la double polarisation de la corde : les déplacements verticaux sont plus rapidement absorbés par le mouvement de flexion de la table que les déplacements horizontaux. Compte tenu des faibles pertes internes au sein de la corde, celle-ci peut vibrer longtemps dans le plan horizontal, en restituant peu à peu son énergie. Dans la mesure où le modèle ne simule qu'une seule polarisation, il ne peut reproduire un tel phénomène.

2.3 Admittance au chevalet

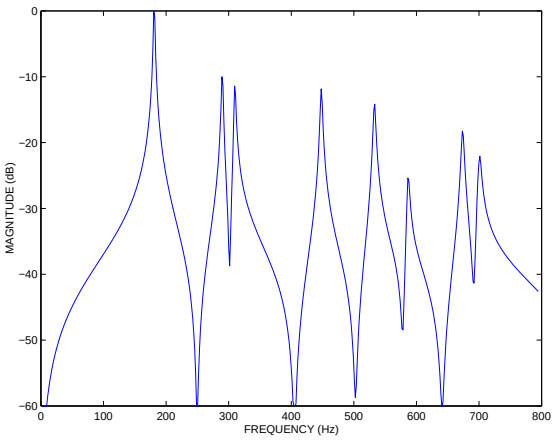
Un facteur essentiel (et bien établi) de la qualité d'une guitare est la mobilité du chevalet. Plus celui ci est mobile, mieux il transmettra les vibrations de la corde à la table d'harmonie. En particulier, les nœuds d'un mode d'une bonne table d'harmonie de guitare ne doivent pas être situés juste sous le chevalet, car sinon, les cordes ne pourraient pas être couplées à ce mode. Concrètement, la mesure de la mobilité du chevalet est représentée par son admittance (voir par exemple [25]).

On excite la table d'harmonie en un point x_0 du chevalet à l'aide d'une force $f_p(t)$ dont la fréquence de coupure est la plus grande possible, de manière à ce qu'elle ait un spectre large bande. On mesure alors la vitesse de la table $v_p(t)$, au point d'impact. L'admittance au point x_0 est alors définie par :

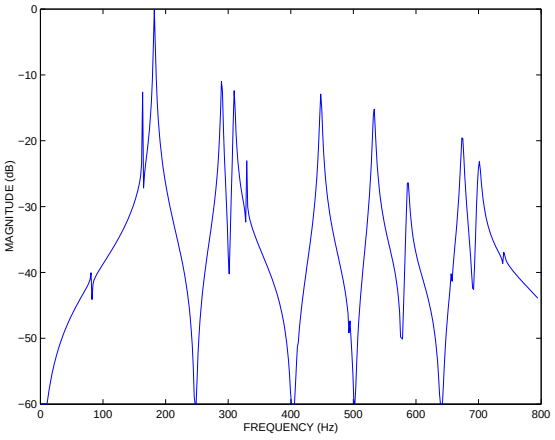
$$\boxed{Y(\omega) = \frac{\hat{v}_p(\omega)}{\hat{f}_p(\omega)},} \tag{2.1}$$

où $\hat{\varphi}(\omega)$ désigne la transformée de Fourier d'une fonction $\varphi(t)$. Plus le module de cette quantité est grande, plus le chevalet est mobile à la fréquence considérée. En outre, la largeur des pics permet d'obtenir le facteur de qualité du mode considéré, c'est à dire une mesure de l'amortissement du mode. Plus le pic est large, plus le mode considéré est amorti.

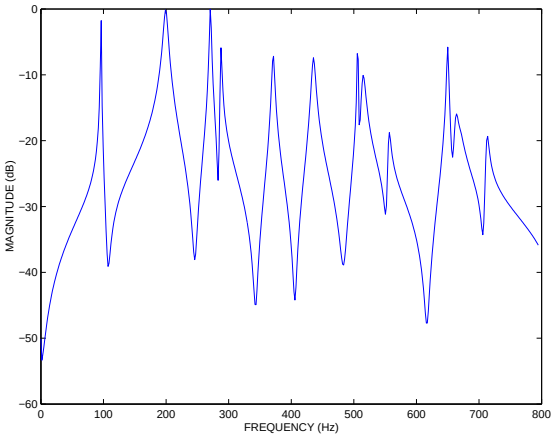
En pratique, on impose au chevalet la force décrite à la section 5.4, en prenant $t_1 = t_2 = 0,0002s$, soit une fréquence de coupure de 5000Hz. Le point d'impact est situé au niveau de la 6$^{\text{ème}}$ corde (Mi grave). Les transformée de Fourier sont calculées par FFT, sous Matlab.



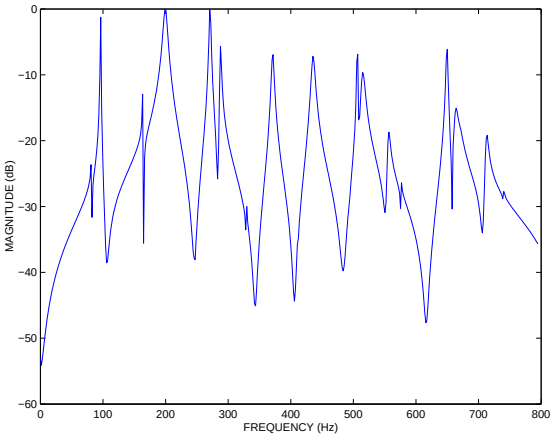
1 — Table d'harmonie in vacuo



2 — Table d'harmonie couplée à la corde



3 — Table d'harmonie couplée à l'air



4 — Guitare complète

FIG. 2.6: *Courbes d'admittance au chevalet (au point d'attache de la corde de Mi grave).*

Le modèle permet d'observer l'admittance au chevalet en découplant les différentes parties de la guitare. La figure (2.6) représente l'admittance au chevalet calculée dans les quatre cas suivants :

1. table d'harmonie *in vacuo*,
2. table couplée à la corde,
3. table couplée à l'air,
4. guitare complète.

On peut faire les remarques suivantes :

- Le mode de la table le plus mobile est le mode (1,1) (à 181 Hz), dans tous les cas.
- On observe un fort couplage entre le premier mode de la table et le premier mode de cavité de Helmholtz, puisque le mode de table passe à 201 Hz. Le pic de ce mode est beaucoup plus large lorsque la table est couplée à l'air, ce qui indique le couplage à l'air est *très efficace* : il rayonne beaucoup et donc s'amortit plus vite.
- Le pic du mode (4,4) (à 673 Hz) de la table augmente fortement lors du couplage avec l'air, ce qui indique qu'il interagit également fortement avec l'air. En fait, ce mode interagit fortement avec l'un des modes de la cavité dont la fréquence est à 699 Hz (voir section 2.5).
- Le fondamental de la corde grave (à 83 Hz) a une très faible amplitude lorsqu'il est couplé à la table seule. Le fait d'ajouter la cavité introduit la fréquence de Helmholtz (à 96 Hz), et a pour conséquence d'augmenter notablement l'amplitude du fondamental de la corde, qui gagne 15 dB.
- Les modes de cordes sont très faiblement amortis, comparativement aux modes de table ou de cavité.
- Le pic de la fréquence de Helmholtz (à 96 Hz) est très étroit, ce qui indique un très faible amortissement. Cela confirme l'observation faite sur les spectres temps-fréquence des 6 cordes à vide.

Remarque 2.1 *Pour mesurer précisément l'efficacité de rayonnement d'un mode, on pourrait carrément se contenter de réduire la table d'harmonie à ce seul mode, et regarder comment il interagit avec l'air. L'un des intérêts d'un tel modèle est qu'il autorise des constructions absolument virtuelles de ce type, qui peuvent contribuer à mieux comprendre le fonctionnement acoustique intime de l'instrument.*

2.4 Influence du rayonnement sur l'amortissement de la table

Un autre aspect très intéressant de ce modèle est qu'il permet de montrer l'influence du couplage entre la plaque et l'air (et dans une moindre mesure entre la plaque et la corde) sur l'amortissement de la table d'harmonie. Il est en effet très difficile de distinguer par des mesures l'origine des pertes de la table d'harmonie. On n'a accès qu'à une valeur globale d'amortissement.

2.4.1 Peut-on distinguer expérimentalement l'amortissement interne de l'amortissement par rayonnement ?

La mise en œuvre de techniques de mesure peut s'avérer très délicate. Afin de mesurer la part relative de l'amortissement interne de l'amortissement par rayonnement, B. David a effectué des mesures *sous vide* ([19]). Mais le bois étant un matériau d'origine *végétale*, il réagit très fortement à un tel traitement (en particulier, il se déshydrate totalement), ce qui a pour conséquence de modifier radicalement ses propriétés physiques.

D'autre part, les mesures de paramètres d'amortissement mode par mode reposent en particulier sur l'hypothèse que chaque mode vibre comme un oscillateur amorti, c'est à dire sous la forme d'une sinusoïde amortie. Si ce n'est pas le cas, il peut s'avérer difficile de réaliser une analyse modale à partir de mesures effectuées sur une plaque réelle par des techniques de traitement du signal (voir à ce sujet [46]).

2.4.2 Comparaison entre l'amortissement d'une table *in vacuo* et d'une table couplée à une cavité d'air

La méthode numérique développée ici est justement bien adaptée à cette analyse, puisqu'on calcule chaque composante des modes de la table au cours du temps. Il est donc possible d'observer leur évolution dans différents cas. Notons que c'est là un intérêt de plus de résoudre l'équation de plaque par une méthode spectrale plutôt que par différences finies classiques en temps [2].

On a représenté sur la figure (2.7) la comparaison entre les premières composantes modales au cours du temps de la table d'harmonie *in vacuo* (en rouge) et de la table d'harmonie couplée à l'air (en bleu), pour l'expérience décrite à la section précédente. On exerce donc *exactement la même force* dans les deux cas. Ainsi, **la différence entre chaque courbe montre exactement la part d'amortissement due au couplage avec l'air.**

Notons tout d'abord que conformément au modèle utilisé, l'amortissement des modes dans le cas de la table *in vacuo*, dû aux pertes *intrinsèques* dans la table d'harmonie, est exponentiellement décroissant. D'autre part, on peut faire les remarques suivantes :

- L'influence de l'air sur l'amortissement de la table est globalement très importante : on

2. En effet, si on avait résolu par un schéma classique aux différences finies, on aurait seulement eu accès au déplacement de la table. Il faudrait alors recourir à des techniques d'analyse modale pour obtenir la décroissance mode par mode, et on aurait le même type de difficulté pour réaliser une telle analyse que dans le cas de mesures réelles.

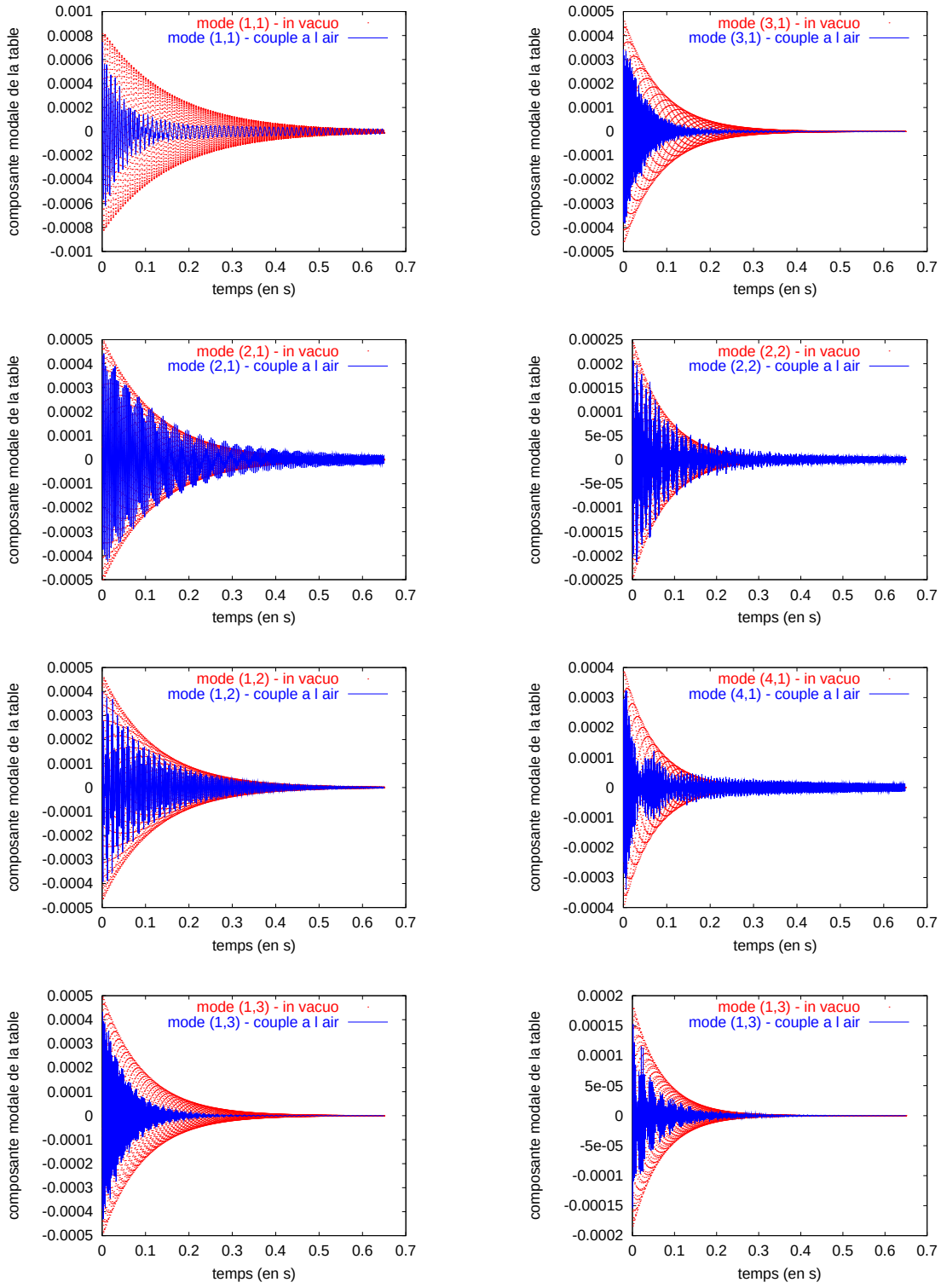


FIG. 2.7: *Comparaison entre la table* in vacuo *et la table couplée à la cavité d'air : évolution au cours du temps des huit premières composantes modales de la table d'harmonie.*

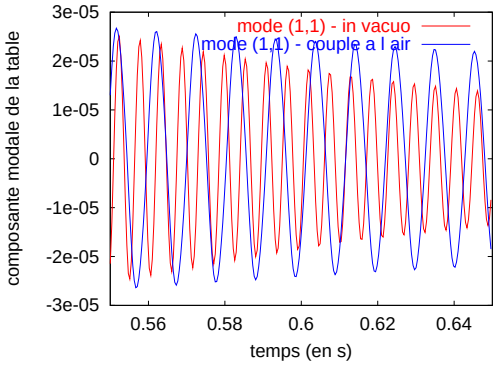


FIG. 2.8: *"Zoom" sur la comparaison entre la table* in vacuo *et la table couplée à la cavité d'air : évolution de la composante modale du mode (1,1) de la table d'harmonie sur l'intervalle de temps [0.55s, 0.65s].*

constate que presque tous les modes sont affectés fortement par ce couplage.

- Comme on l'a fait remarquer à la section précédente, le mode (1,1) est particulièrement couplé à l'air. L'amortissement de ce mode est donc beaucoup plus important dans le cas où il est couplé à l'air que lorsque la table est dans le vide. En outre, si on regarde plus en détail les oscillations de ce mode en zoomant sur l'intervalle de temps $[0.55s, 0.65s]$, comme cela est présenté sur la figure (2.8), on constate que loin de s'amortir exponentiellement, ce mode est en quelque sorte "entretenu" à la fréquence de résonance de la cavité (*ie.*. 96 Hz). En effet, à partir de 0,55s environ, l'amplitude des oscillations du mode (1,1) devient plus importante lorsque la plaque est couplée à l'air que lorsqu'elle vibre seule. En outre la fréquence des oscillations de ce mode est deux fois plus faible dans le cas couplé, ce qui correspond à la fréquence de la cavité. Néanmoins, cet entretien par le premier mode de cavité serait certainement moins important si l'on introduisait un terme d'amortissement dans l'air, comme cela a déjà été suggéré plusieurs fois jusqu'ici.

- Ce qui frappe peut-être le plus, c'est que l'hypothèse d'amortissement exponentiellement décroissant ne s'applique *absolument pas* dans le cas où la table est couplée à l'air. Cela est particulièrement vrai dans le cas du mode (4,1) de la table (à 673 Hz).

- Le mode (2,1) est relativement peu affecté par le couplage. Il s'agit en fait d'un mode dipolaire, dont le rayonnement est peu efficace. Il en est de même, dans une moindre mesure, du mode (2,2).

2.5 Les modes de cavité

2.5.1 Le couplage entre le premier mode de la table et la fréquence de cavité de Helmholtz

Rossing *et al.* [60] ont montré, par des mesures expérimentales sur plusieurs guitares, une relation simple liant le premier mode de la table d'harmonie et celui de la cavité découplées aux deux premiers modes de la guitare.

Remarque 2.2 *Le premier mode de la cavité est en fait la* fréquence de Helmholtz, *dû à la présence du trou, qui est plus basse que les fréquences de la cavité fermée. La fréquence de Helmholtz d'une cavité percée d'un trou est en première approximation proportionnelle au rapport* $\sqrt{S/V}$, *où* S *est la surface du trou et* V *le volume de la cavité (voir par exemple [9]). Lorsque l'on diminue la taille du trou, cette fréquence tend vers 0. Elle devient nulle dans le cas d'une cavité fermée avec condition aux bords de Neumann.*

On note f_p la première fréquence de la table d'harmonie, f_h la fréquence de Helmholtz de la cavité, et f_+ et f_- les deux premiers modes de la guitare. Alors, on a la relation suivante, exacte dans le cas d'un modèle simple de deux oscillateurs couplés :

$$f_p^2 + f_h^2 = f_+^2 + f_-^2. \tag{2.2}$$

Des mesures effectuées sur cinq guitares différentes du rapport

$$\frac{f_+^2 + f_-^2}{f_p^2 + f_h^2}$$

conduisent à des valeurs comprises entre $0,96$ et $1,05$ (voir [60]). Il est intéressant de vérifier que notre modèle vérifie également cette loi simple.

2.5.2 Détermination de la fréquence de Helmholtz et des deux premières fréquences de la guitare

Pour déterminer la fréquence des modes de cavité *rigide* de la guitare, c'est à dire lorsque celle ci n'est pas couplée à la table d'harmonie, on injecte un "pulse" au centre de la caisse, du type de celui présenté à la section 1.1 et on rigidifie la table. On effectue ensuite une détection des pics (à -60dB) de la FFT du signal enregistré au point d'impact. Les 10 premières fréquences de la cavité ainsi mesurées sont présentées dans le tableau (2.2).

Ainsi la fréquence de Helmholtz de la guitare vaut 117 Hz. Rappelons d'autre part que la première fréquence de la table d'harmonie vaut 181 Hz.

D'autre part, pour déterminer les deux premières fréquences de la guitare, on effectue également une détection de pics sur le signal de pression enregistré en un point situé au-dessus de la guitare (ces valeurs sont par exemple données à la section 1.2.2). On obtient :

$$f_- = 96Hz \quad \text{et} \quad f_+ = 201Hz \tag{2.3}$$

numéro	fréquence
1	117 Hz
2	355 Hz
3	699 Hz
4	905 Hz
5	1046 Hz
6	1194 Hz
7	1245 Hz
8	1414 Hz
9	1661 Hz
10	1751 Hz

TAB. 2.2: *Fréquences propres de la cavité rigide*

On calcule alors

$$\frac{f_+^2 + f_-^2}{f_p^2 + f_h^2} = 1,068,$$

ce qui est à peine au dessus de la fourchette de valeurs obtenues dans [60], et donc tout à fait remarquable. Ce résultat confirme la fiabilité de la méthode des domaines fictifs, puisque celle-ci permet de reproduire fidèlement le comportement vibratoire d'une cavité de forme complexe.

2.6 Le rayonnement du son

2.6.1 Définition de la directivité d'un instrument

Comme pour tout instrument de musique, le rayonnement d'une guitare dépend de la fréquence et de la direction. On parle de la *directivité* de l'instrument. Cette caractérisation du champ sonore généré par la guitare est une information fondamentale sur ses propriétés, et la qualité d'un instrument en dépend fortement. On comprend aisément qu'il serait dommage que l'essentiel du son soit rayonné dans un cône de dimensions réduites. La connaissance de la directivité de la guitare intéressera en particulier les techniciens du son, qui sauront placer leurs micros en conséquence.

On mesure expérimentalement la directivité d'une source sonore centrée en un point O en mesurant la *pression efficace* le long d'un cercle de centre O et de rayon fixé r (voir [9]). Cette mesure est effectuée en champ lointain, c'est à dire pour un rayon r grand devant la longueur d'onde de la source. La pression efficace est la valeur quadratique moyenne de la pression en un point repéré par l'angle θ sur le cercle, c'est à dire :

$$\boxed{p_{eff}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=t_0}^{t_0+T} p^2(\theta,t)dt.}} \tag{2.4}$$

On suppose donc ici que la source émet une onde stationnaire (ou plus précisément que le régime stationnaire est établi à partir de l'instant t_0) et que T est grand devant la fréquence des oscillations.

En pratique, on pose la guitare sur une table tournante, et on effectue des mesures à l'aide d'un micro situé à une distance r de la guitare (figure (2.9)).

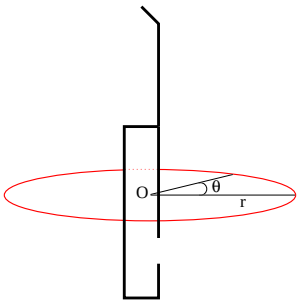


FIG. 2.9: *Schéma du protocole de mesure de directivité*

Celle ci est excitée à l'aide d'un vibreur placé au chevalet, à une fréquence sinusoïdale *pure*, notée f, qui est en général une des fréquences de résonances de la guitare (voir par exemple [1]). Les cordes sont étouffées, car ce qui nous intéresse ici, c'est la directivité du système d'amplification de la guitare, à savoir la table d'harmonie couplée à la cavité d'air (la corde est un excitateur).

Cette mesure permet de tracer le *diagramme de directivité* de la guitare à la fréquence f, qui est le diagramme en coordonnées polaire de la pression efficace mesurée normalisée en décibels, c'est à dire que l'on trace la courbe [3]

$$\varphi(\theta) = 20 \log_{10} \left[\frac{p_{eff}(\theta)}{\max\limits_{\theta' \in [0,2\pi]} p_{eff}(\theta')} \right] \tag{2.5}$$

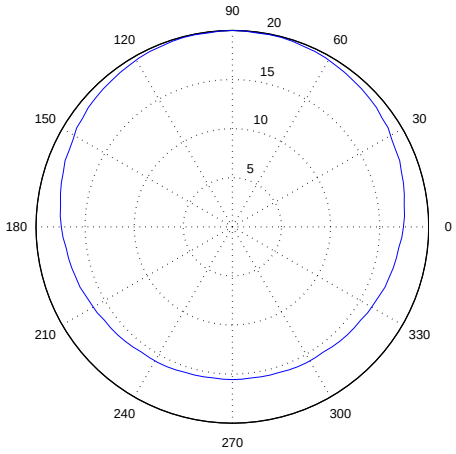
2.6.2 Diagrammes de directivité

On réalise donc cette expérience sur notre guitare numérique. On a représenté sur la figure (2.10) les diagrammes de directivité obtenus en étouffant les cordes et en excitant sinusoïdalement la guitare au chevalet à la hauteur de la corde basse aux fréquences de résonance suivantes :

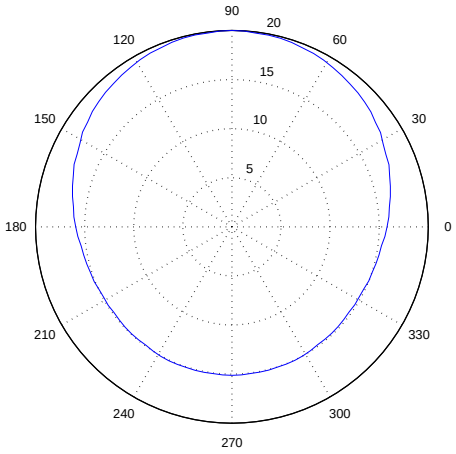
$$96Hz, \quad 201Hz, \quad 370, \quad 659Hz, \quad 822Hz \quad \text{et} \quad 1020Hz.$$

Le cercle sur lequel sont effectuées les mesures est situé dans le plan d'équation $x = 25cm$, c'est à dire le plan normal à l'axe de symétrie de la table d'harmonie à égale distance de la rose et du chevalet. Le rayon du cercle est 80 cm. Cette valeur est inférieure à celle utilisée pour des mesures expérimentales. Plus le rayon est grand, plus la taille du domaine de calcul 3d est grand.

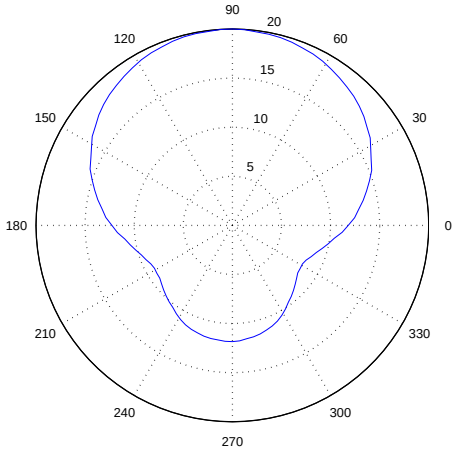
3. En pratique même, comme $\varphi(\theta)$ est négative, la courbe est inversée, si bien que l'on trace en définitive $\theta \mapsto p_{dB} + \varphi(\theta)$, où p_{dB} est un seuil arbitraire fixé ici à 20 dB.



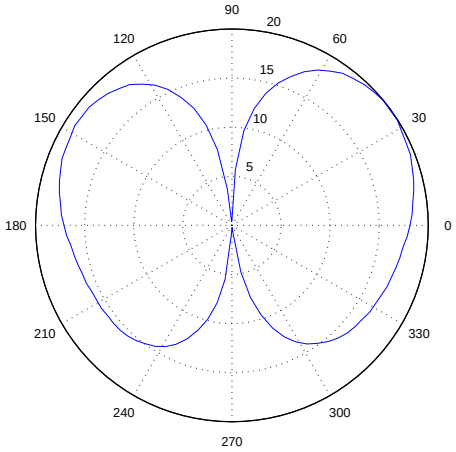
95 Hz



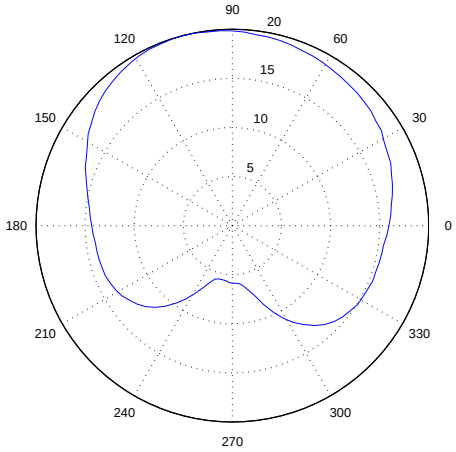
200 Hz



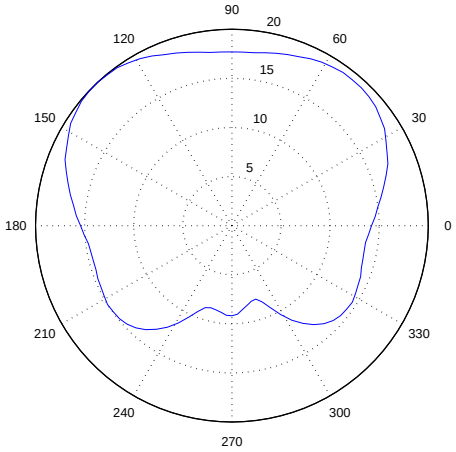
370 Hz



655 Hz



822 Hz



1020 Hz

FIG. 2.10: *Diagrammes de directivité*

On ne peut donc pas choisir un rayon trop important, au risque de voir s'allonger un peu trop les temps de calculs. Le rayon choisi ici est suffisamment grand pour que l'hypothèse de champ lointain soit valable aux fréquences considérées. Le calcul de pression efficace est effectué en moyennant sur 10 périodes, soit $T = 10/f$, et cette moyenne est calculée dès que 100 périodes se sont écoulées, soit $t_0 = 100/f$.

- Le rayonnement du son est fortement dépendant de la fréquence.
- Le rayonnement des deux premiers modes de la guitare est relativement omnidirectionnel, ce qui est conforme à ce qu'on peut trouver dans la littérature.
- Néanmoins, cette guitare rayonne essentiellement "vers le haut" (ce qui correspond à $\theta = 90^o$ sur les diagrammes). Cela est tout simplement dû au fait que les vibrations du fond ne sont pas prises en considérations dans le modèle actuel.

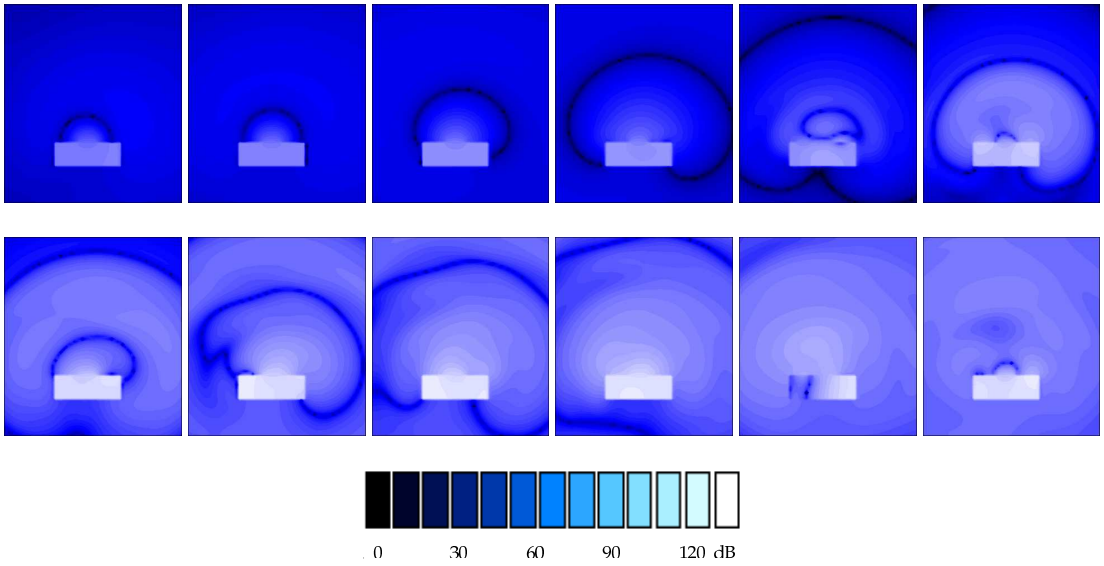


FIG. 2.11: *Directivité instantanée de la guitare pincée sur sa sixième corde : coupe de pression dans le plan $x = 25cm$, en décibels, immédiatement après le pincer de corde. Les clichés sont espacés de 0,75 ms.*

2.6.3 Diagrammes de directivité instantanée

Les diagrammes de directivité présentés à la section précédente sont réalisés dans des conditions très particulières, qui n'ont rien à voir avec une situation de jeu normal, puisqu'ils représentent une valeur *moyenne* de la pression rayonnée à une *fréquence fixée*.

Puisque la pression dans tout l'espace environnant la guitare est calculée à chaque instant, le modèle numérique de guitare permet de visualiser *la pression instantanée* en tout point de l'espace, et ce pour n'importe quel type d'excitation de l'instrument.

Par exemple, on pince la sixième corde de la guitare (Mi grave). La figure (2.11) représente une coupe de la pression acoustique dans le plan d'équation $x = 25cm$, c'est à dire dans le

même plan que celui des mesures de directivité de la section précédente. Les clichés commencent juste au moment où le doigt n'interagit plus avec la corde. L'intervalle de temps entre deux clichés est de seulement 0,75 ms.

La pression acoustique est représentée en décibels soit :

$$p = 20log_{10} \left| \frac{p}{p_e} \right|,$$

où $p_e = 210^{-5} Pa$ est le seuil d'audibilité humaine.

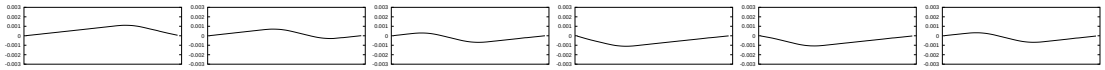
2.7 Visualisation des vibrations mises en jeu par la guitare

On montre dans cette section les représentions graphiques des diverses grandeurs calculées par la méthode :

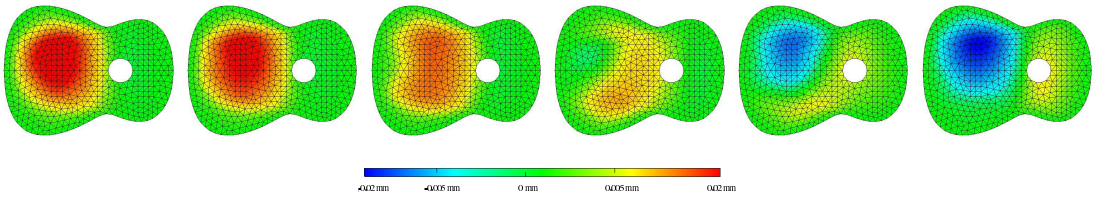
- le déplacement u_c de la corde (calculé par intégration en temps sur la variable v_{c_h}),
- le déplacement u_p de la table (calculé par intégration en temps sur la variable v_{p_h}),
- le saut de pression λ à la surface de la guitare,
- la pression p dans l'air environnant la guitare (coupe dans le plan d'équation (y = 0), c'est à dire le plan, vertical, de symétrie de la guitare).

La figure (2.12) montre les valeurs de ces grandeurs immédiatement après le pincer de la corde, c'est à dire au début du régime libre. La corde pincée dans cette expérience numérique est la première corde de la guitare (Mi aigu). L'intervalle de temps entre deux clichés est de 0,36 ms.

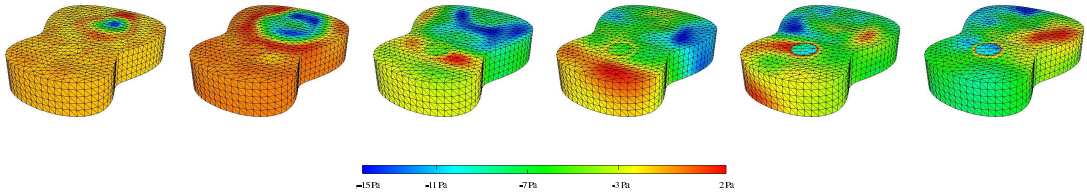
On notera que l'amplitude du déplacement de la corde n'est que de 3 mm et celle de la table d'harmonie est seulement de 30 μm. La pression à l'intérieur de la cavité est nettement supérieure à la pression à l'extérieur.



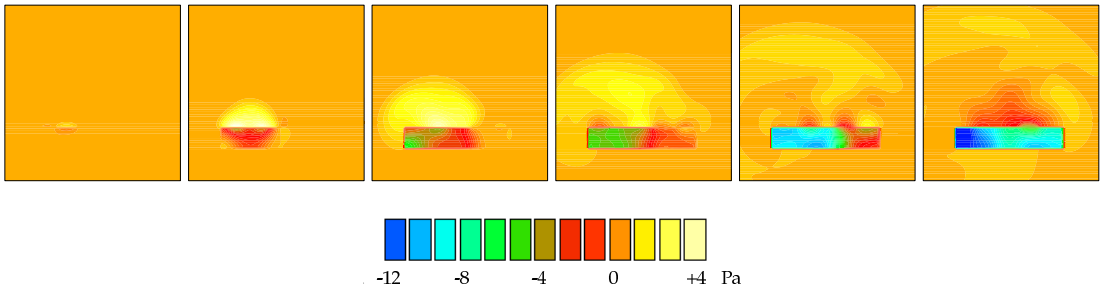
Déplacement de la corde (en m)



Déplacement de la table d'harmonie (en m)



Saut de pression à la surface de la guitare (en Pa)



Coupe de pression dans le plan d'équation (y = 0) (en Pa)

FIG. 2.12: *Instantanés des différentes grandeurs intervenant dans le modèle, immédiatement après le pincer de la première corde de la guitare (Mi aigu). Les clichés sont séparés de 0,36 ms.*

Bilan et perspectives

Les capacités toujours croissantes des moyens de calcul à notre disposition permettent aujourd'hui d'envisager la réalisation de modèles de plus en plus pertinents et réalistes de phénomènes physiques complexes. La méthode mise au point dans ce travail a largement bénéficié de ces possibilités de calculs importantes ainsi que de nombreuses recherches récentes développées tant dans le domaine de l'acoustique musicale que dans le domaine du calcul scientifique :

- L'élaboration d'un modèle complet de guitare incluant le rayonnement du champ sonore dans tout l'espace et un modèle de pertes intrinsèques au sein des matériaux.
- La réduction de notre problème à un domaine borné grâce à l'utilisation de conditions aux limites absorbantes.
- La prise en compte de particularité géométriques complexes dans un problème d'interaction fluide-structure par la méthode des domaines fictifs.
- L'utilisation de techniques fiables basée sur des estimations d'énergie assurant la stabilité des schémas proposés.
- L'utilisation de bibliothèques de routines performantes dans le domaine du calcul matriciel (*lapack* et *blas*), sans lesquelles l'implémentation d'un tel code serait à la fois beaucoup plus difficile et beaucoup moins efficace.

La richesse et la pertinence des résultats obtenus à l'aide du modèle numérique de guitare présenté dans ce document laisse augurer un avenir prometteur à ce type d'approche pour la compréhension du comportement vibroacoustique des instruments de musique et plus généralement des phénomènes physiques complexes mis en jeu dans la production d'ondes sonores.

Toutefois, il conviendrait de compléter cette étude par une analyse plus approfondie des capacités prédictives du modèle en comparant systématiquement et dans la mesure du possible *quantitativement* les résultats qu'il fournit à des mesures effectuées sur un instrument donné.

Il faudrait également s'intéresser à l'influence sur la sonorité de l'instrument des nombreux paramètres qui interviennent dans ce modèle, tant physiques que géométriques.

Afin d'augmenter la pertinence de ce modèle, il conviendrait d'y inclure bon nombre d'améliorations. Par exemple :

- La modélisation de la table d'harmonie proposée actuellement ne permet pas de dis-

poser à notre guise les raidisseurs sur la table de la guitare. On est très limité par les contraintes imposées sur le pas d'espace du maillage surfacique de la guitare pour le calcul du saut de pression et sur celui du maillage cubique pour l'équation des ondes acoustiques. Un premier moyen consisterait à choisir un maillage pour le saut de pression qui ne concorde pas avec celui de la table, ce qui permettrait de raffiner autant qu'on veut ce dernier. Mais le calcul de la matrice couplant ces deux grandeurs serait alors beaucoup plus délicat et long.

Un autre moyen, certainement plus réaliste, consisterait à modéliser les raidisseurs comme ce qu'ils sont plus vraisemblablement, c'est à dire des barres collées à la table. L'un des intérêts de la méthode modale proposée ici est que l'on peut envisager de réaliser le calcul en deux étapes. D'abord la réalisation d'un modèle de table d'harmonie aussi sophistiqué qu'on veut, dont on extrait les 50 premières déformées modales et les fréquences propres associées. Puis on insert ce résultat dans le code existant, moyennant le calcul des matrices couplant la table d'harmonie à l'air et à la corde dans le cas de ces modes particuliers.

- La prise en compte de la double polarisation de la corde est nécessaire si l'on veut rendre compte du phénomène de double décroissance du son observé dans de nombreux cas. L'introduction d'un effort dans le plan de la table conduirait alors à modéliser le déplacement membranaire de la table d'harmonie, ce qui ne peut que compliquer la méthode de résolution de ce nouveau modèle,

- On a supposé ici que ni le fond ni les éclisses ne vibraient. Il est très aisé d'introduire les vibrations du fond dans le modèle actuel, avec un surcoût qui est essentiellement celui du calcul des modes du fond. La vibrations des éclisses demanderait l'utilisation d'un modèle de coque, plus sophistiqué que le modèle de plaque de Kirchhoff-Love. L'une des conclusions de ce travail est qu'il faudrait mettre au point une technique similaire de calcul des modes des éclisses pour la résolution en temps de cette nouvelle équation.

- Dans le but d'obtenir des sons de cordes plus réalistes, il faudrait proposer une modèle de pincer non linéaire faisant intervenir le doigt (voire le bras!) de l'instrumentiste.

- Il est également nécessaire d'introduire un modèle d'amortissement dans l'air, pour rendre compte de l'amortissement de la fréquence de Helmholtz, qui est très peu, voire pas du tout amorti, comme on a pu le constater sur les signaux temps-fréquence ou encore sur les courbes d'admittance.

Du point de vue mathématiques, la nécessité de mener à bien l'élaboration du modèle numérique complet nous a conduit a laisser de côté certains aspects plus théoriques qu'il pourrait être intéressant d'approfondir. Par exemple :

⋆ Généraliser au cas d'une plaque orthotrope l'analyse d'erreur de l'approximation spatiale de l'équation de plaque présentée à la section 2.6.

⋆ Déterminer les raisons de la non consistance du schéma $P_1 - \tilde{R}_1$.

⋆ Réussir à montrer *théoriquement* la stabilité du schéma S_g lorsque le terme d'amortissement fluide R_c est non nul.

Annexes

Annexe A

Le modèle de plaque mince de Kirchhoff-Love

Une plaque est intuitivement un matériau élastique dont l'épaisseur est petite par rapport à ses autres dimensions. Son déplacement est régi en toute généralité par les équation de l'élastodynamique tridimensionnelle. Compte tenu de la géométrie particulière d'un tel objet, il est naturel de chercher à restreindre le problème à une équation bidimensionnelle écrite dans le plan médian de la plaque.

L'objectif de cette annexe est de montrer comment on peut obtenir un tel modèle en effectuant un petit nombre d'hypothèses portant sur la forme du champ de déplacement autorisé ainsi que sur la loi de comportement.

De nombreuses théories existent pour élaborer de telles équations dont les plus connues sont celles de Kirchhoff-Love qualifié de modèle de *plaque mince* et celle de Reissner-Mindlin qualifié de modèle de *plaque épaisse*. Nous avons choisi ici le modèle de Kirchhoff-Love, car il sera suffisant pour la gamme de fréquences envisagée dans ce travail (inférieur à quelques kHz).

A.1 Le modèle élastique tridimensionnel

Notation A.1 *On se donne ici, pour rester conforme à des notations couramment utilisées en théorie des plaques, un repère* (O, x_1, x_2, x_3).

Les variables ou champ de vecteurs tridimensionnels sont représentés par des majuscules ($\underline{U}$*), tandis que les variables ou champ bidimensionnels sont représentés par des minuscules (*$\underline{u_p}$*).*

Dans toute cette annexe, on utilisera la convention sur les indices répétés, usuelle en mécanique des milieux continus. D'autre part, les indices latins $(i, j, k, l \dots)$ *décrivent les champs tridimensionnels, c'est à dire qu'ils évoluent dans* $\{1, 2, 3\}$*, tandis que les indices grecs* $(\alpha, \beta, \lambda, \mu \dots)$ *désignent les*

champs bidimensionnels, c'est à dire qu'ils évoluent dans $\{1,2\}$. *Ainsi, par exemple :*

$$U_iU_i^* = \sum_{i=1}^{3} U_iU_i^* \qquad et \qquad u_\alpha u_\alpha^* = \sum_{\alpha=1}^{2} u_\alpha u_\alpha^*$$

A.1.1 Description géométrique

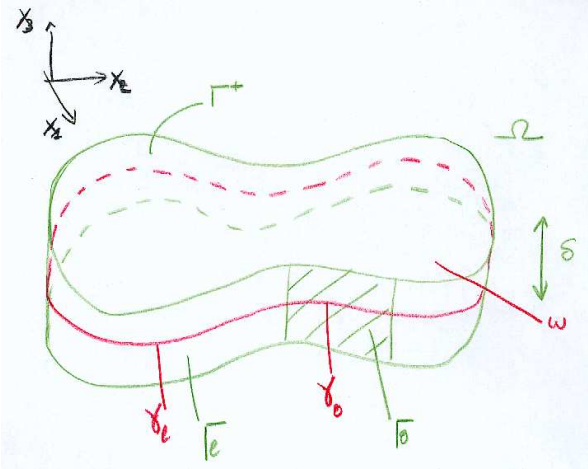


FIG. A.1: *Description géométrique de la plaque 3d*

On considère un solide élastique tridimensionnel non homogène, de densité $\rho_p(x_1,x_2,x_3)$ occupant dans sa configuration de référence un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$. On suppose que Ω est un cylindre dont la surface médiane est un ouvert *régulier* de $\mathbb{R}^2$ noté ω et est située au repos dans le plan x_1Ox_2. Sa hauteur, supposée petite devant les dimensions de ω, peut être variable, mais on suppose néanmoins, pour simplifier, que Ω est symétrique par rapport à ω, de sorte que si on note $\delta(x_1,x_2)$ la hauteur de la plaque en un point de la surface médiane, on peut écrire :

$$\Omega = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \omega \times \mathbb{R} \,;\; x_3 \in \left]-\frac{\delta(x_1,x_2)}{2}, \frac{\delta(x_1,x_2)}{2}\right[\right\} \tag{A.1}$$

Un point courant de Ω sera noté indifféremment (x_1,x_2,x_3) ou $\underline{X}$. Dans la suite, de manière à simplifier cette présentation, mais sans aucune perte de généralité, on ne fera plus apparaître la variation de l'épaisseur, qui sera donc noté δ.

Le bord de Ω, noté $\delta\Omega$, est décomposé en trois parties, $\delta\Omega = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma$:

- la face supérieure, $\Gamma^+ = \omega \times \{\delta/2\}$;
- la face inférieure, $\Gamma^- = \omega \times \{-\delta/2\}$;

- la face latérale, $\Gamma = \delta\omega \times]-\delta/2, \delta/2[$, elle même décomposée en deux parties permettant de décrire deux types de conditions aux limites idéales : $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_l$. On écrit une partition du bord γ de ω : $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_l$. On suppose que γ_0 est de mesure non nulle. On distingue alors :
  - ⋆ $\Gamma_0 = \gamma_0 \times]-\delta/2, \delta/2[$ correspondant à un bord *encastré*. Le déplacement le long de ce bord est alors nul.
  - ⋆ $\Gamma_l = \gamma_l \times]-\delta/2, \delta/2[$ correspondant à un bord *libre* le long duquel il n'y aucune restriction sur le déplacement.

On note $\underline{N}$ la normale extérieure à Ω définie en tout point de son bord $\delta\Omega$. D'autre part, la normale extérieure à ω définie en tout point de γ est notée $\underline{n} = (n_x, n_y)$, vecteur à deux dimensions, et la tangente au bord est notée $\underline{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$. On la choisit de manière à ce que le trièdre $(\underline{n}, \underline{\tau}, \underline{e}_z)$ soit orthonormé direct. Compte tenu de la géométrie particulière de Ω, on peut alors préciser :

$$\underline{N} = \begin{cases} \underline{e}_3 & \text{sur } \Gamma^+ \\ -\underline{e}_3 & \text{sur } \Gamma^- \\ (\underline{n}, 0) = (n_x, n_y, 0) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{A.2}$$

Cette plaque est soumise à des efforts volumiques de densité

$$\underline{F}(\underline{X}, t) = (F_i(x_1, x_2, x_3, t))_{i \in \{1...3\}}, \tag{A.3}$$

exercées en tout point $\underline{X}$ de Ω à chaque instant, et à des efforts surfaciques de densité

$$\underline{g}(x_1, x_2, \pm\delta/2, t) = (g_i(x_1, x_2, \pm\delta/2, t))_{i \in \{1...3\}}, (x_1, x_2) \in \omega, \tag{A.4}$$

appliquées sur les faces supérieures et inférieures (Γ^+ et Γ^-). On suppose que les efforts exercés sur la face latérale Γ sont nuls.

On a ainsi totalement définis les conditions aux bord du domaine Ω, soit par des contraintes cinématiques sur le bord latéral, soit par des contraintes dynamiques sur les faces supérieures et inférieures.

A.1.2 Le champ de déplacement

Sous l'action de ces efforts extérieurs, la plaque se déforme. Les mouvements de la plaque sont décrits à l'aide d'un champ de déplacement vectoriel

$$\underline{U}(x_1, x_2, x_3, t) = (U_i(x_1, x_2, x_3, t))_{i \in \{1...3\}}, \tag{A.5}$$

défini en chaque point du domaine Ω. Cela signifie qu'un point M_0 situé initialement en $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ dans la configuration de référence se déplace à l'instant t en un point M tel que $\underline{M_0 M} = \underline{U}(x_1, x_2, x_3)$.

On suppose que ces déplacements sont suffisamment petits pour rester dans le cadre de l'élastodynamique linéaire. La déformation de cette plaque est alors caractérisée par le tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U})$ défini par :

$$\varepsilon_{ij}(\underline{U}) = \frac{1}{2}(\partial_j U_i + \partial_i U_j), \text{ pour } i,j \in \{1 \dots 3\}, \tag{A.6}$$

où la notation ∂_i représente la dérivée partielle par rapport à la coordonnée x_i.

A.1.3 Équations du mouvement

Le champ de déplacement $\underline{U}(\underline{X}, t)$ est ainsi régi par les équations de l'élastodynamique linéaire :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \rho_p \dfrac{\partial^2 \underline{U}}{\partial t^2} - \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\sigma}} &=& \underline{F}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \underline{U} &=& 0, \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{N} &=& \begin{cases} \underline{g} & \text{sur } \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \\ 0 & \text{sur } \Gamma_l. \end{cases} \end{array}\right.} \tag{A.7}$$

où $\underline{\mathrm{Div}}$ désigne l'opérateur de divergence pour les tenseurs d'ordre 2. $\underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\sigma}}$ est le vecteur dont les 3 composantes sont données par la divergence usuelle des vecteurs lignes du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$. Ainsi,

$$(\underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\sigma}})_i = \partial_j \sigma_{ij}$$

Remarque A.1 *Le problème aux limites (A.7) peut également s'écrire composante par composante sous la forme suivante, ou les divers produits tensoriels et les divers opérateurs sont explicités (rappelons qu'on utilise la convention sur les indices répétés) :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho_p \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} - \partial_j \sigma_{ij} &=& F_i, \quad \textit{dans } \Omega, \\ U_i &=& 0, \quad \textit{sur } \Gamma_0, \\ \sigma_{ij} N_j &=& \begin{cases} g_i & \textit{sur } \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \\ 0 & \textit{sur } \Gamma_0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{A.8}$$

Ce problème peut enfin être écrit sous sa forme variationnelle qui correspond en fait au principe des puissances virtuelles :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{On cherche } \underline{U} : [0,T] \longrightarrow V^{3D}, \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \rho_p \ddot{U}_i U_i^* d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij}(\underline{U}) \varepsilon_{ij}(\underline{U}^*) d\Omega + \int_\Omega F_i U_i^* + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g_i U_i^*, \quad \forall \underline{U}^* \in V^{3D}, \end{array}} \tag{A.9}$$

où V^{3D} désigne l'espace des déplacements virtuels autorisés. Celui ci doit prendre en compte les conditions imposées sur le bord de la plaque :

$$V^{3D} = \left\{ \underline{U}^* = (U_i^*) \in \underline{H}^1(\Omega) \; ; \; \underline{U}^* = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}. \tag{A.10}$$

Remarque A.2 *Le principe des puissances virtuelles exprime en fait tout simplement que la puissance des quantités d'accélération est égale à la somme de la puissance des efforts intérieures et de la puissance des efforts extérieures, soit :*

$$\mathcal{P}_{acc}(\underline{U}^*) = \mathcal{P}_{int}(\underline{U}^*) + \mathcal{P}_{ext}(\underline{U}^*), \quad \forall \underline{U}^* \in V^{3D}, \tag{A.11}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_{acc}(\underline{U}^*) & = & \displaystyle\int_\Omega \rho_p \ddot{U}_i U_i^* d\Omega \\ \mathcal{P}_{int}(\underline{U}^*) & = & \displaystyle\int_\Omega \sigma_{ij}(\underline{U}) \varepsilon_{ij}(\underline{U}^*) d\Omega \\ \mathcal{P}_{ext}(\underline{U}^*) & = & \displaystyle\int_\Omega F_i U_i^* + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g_i U_i^* \end{array} \right. \tag{A.12}$$

A.1.4 Loi de comportement

On se limite à des *transformations isothermes* et on suppose que ce matériau est un solide élastique *orthotrope*, ce qui nous permet de caractériser la relation liant le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ au tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U})$ à l'aide d'une loi de comportement linéaire. On note $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ le tenseur de rigidité de ce matériau en un point (x_1, x_2, x_3) de Ω ($\mathbf{R}$ est un tenseur du quatrième ordre). La loi de comportement s'écrit alors, en utilisant la convention sur les indices répétés :

$$\sigma_{ij}(\underline{U}(\underline{X})) = \mathcal{R}_{ijkl}(\underline{X}) \varepsilon_{kl}(\underline{U}(\underline{X})). \tag{A.13}$$

Le matériau est supposé orthotrope, ce qui veut dire qu'il possède trois plans de symétrie orthogonaux entre eux. On s'arrange bien entendu pour que ces trois plans coïncident avec les trois plans de référence donnés par le repère $(Ox_1x_2x_3)$. L'hypothèse d'orthotropie du matériau ainsi que les propriétés générales de symétrie du tenseur de rigidité réduisent le nombre de coefficients indépendants définissant le tenseur de rigidité à 9. Un tenseur symétrique d'ordre 2 possède quand à lui 6 composantes indépendantes. On effectue la correspondance suivante entre une représentation tensorielle et une représentation vectorielle d'un tenseur symétrique d'ordre 2 :

$$\begin{array}{ccc} (\varepsilon_{11} \leftrightarrow \varepsilon_1) & (\varepsilon_{22} \leftrightarrow \varepsilon_2) & (\varepsilon_{33} \leftrightarrow \varepsilon_3) \\ (\varepsilon_{12} \leftrightarrow \varepsilon_4) & (\varepsilon_{13} \leftrightarrow \varepsilon_5) & (\varepsilon_{23} \leftrightarrow \varepsilon_6) \end{array} \tag{A.14}$$

Cette notation nous permet alors d'écrire la loi de comportement sous une forme matricielle plus commune, dans laquelle le tenseur de rigidité apparaît comme une matrice symétrique

de taille 6 et les tenseurs de contrainte et de déformation apparaissent comme des vecteurs de taille 6 :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} & \mathcal{R}_{13} & 0 & 0 & 0\\ \mathcal{R}_{12} & \mathcal{R}_{22} & \mathcal{R}_{23} & 0 & 0 & 0\\ \mathcal{R}_{13} & \mathcal{R}_{23} & \mathcal{R}_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{66}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{23}\end{bmatrix} \tag{A.15}$$

On représente usuellement cette loi de comportement sous une autre forme (en fait, son inverse), en introduisant les modules de Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement du matériau (qui sont en fait les quantités physiques directement accessibles aux mesures) :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{23}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{bmatrix} \tag{A.16}$$

Remarque A.3 *Il faut prendre garde au fait que c'est le tenseur qui est symétrique; les coefficients de Poisson, eux, ne le sont pas nécessairement. On a au contraire :*

$$\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_2 \qquad \nu_{13}E_3 = \nu_{31}E_1 \qquad \nu_{23}E_3 = \nu_{32}E_2$$

et les modules de Young d'un matériau orthotrope sont justement différents suivant la direction.

A.2 Les hypothèses de Kirchhoff-Love

Le modèle de Kirchhoff-Love repose sur un certain nombre d'**hypothèses qui portent sur la forme des champs de déplacement autorisés mais aussi sur la forme du tenseur des**

contraintes de Cauchy, ce qui aura une incidence directe sur la loi de comportement du matériau (A.16). **Ces hypothèses vont nous permettre de réinterpréter le principe des puissances virtuels afin d'obtenir un jeu d'équations qui porte uniquement sur des variables définies dans la surface médiane ω.**

A.2.1 Le champ de déplacement de Kirchhoff-Love

Définition A.1 *On appelle* section droite *tout segment vertical, de longueur δ, dans la configuration de référence. Une section droite est donc perpendiculaire à la surface médiane. Pour un point (x_1, x_2) de ω donné, le segment droit associé est ainsi :*

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega; x_3 \in]-\delta/2, \delta/2[\} \tag{A.17}$$

On fait alors les hypothèses suivantes :

Hypothèse A.1 (des sections droites) *Toute section droite avant déformation* reste droite *après déformation.*

L'épaisseur de la plaque étant négligeable devant les autres dimensions de la plaque, on peut négliger la courbure du déplacement effectuée par une section droite. Cela revient, en quelque sorte, à linéariser le déplacement d'une section droite par rapport à l'épaisseur. Cette hypothèse est usuellement attribuée à Reissner ou à Mindlin. Tout segment droit possède alors un mouvement de solide rigide.

Notation A.2 *On note :*

$$\underline{u_p}(x_1, x_2) = (u_i(x_1, x_2))_{i\in[1...3]}$$

le déplacement effectué par le centre de tout segment. $\underline{u_p}$ ***est le déplacement effectué par la surface médiane.***

$\underline{u_m}(x_1, x_2) = (u_\alpha(x_1, x_2))_{\alpha\in\{1,2\}}$ *est appelé le* déplacement membranaire *(dans le plan de la membrane),*

$u_3(x_1, x_2)$ *est appelé le* déplacement de flexion *ou* flèche.

La rotation du segment est notée $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$.

Hypothèse A.2 *Il n'y a pas de déformation transversale, soit :*

$$\varepsilon_{33} = 0. \tag{A.18}$$

On aura donc $\partial_3 U_3 = 0$ ce qui implique $U_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2)$.

Ces deux hypothèse (A.1, A.2) nous permettent alors de restreindre l'ensemble des déplacements autorisés à des déplacements de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} U_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2), \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1, x_2). \end{cases}} \tag{A.19}$$

Une dernière hypothèse va nous permettre de restreindre un peu plus encore le champ de déplacement autorisé en proposant une relation entre le déplacement de flexion u_3 et la rotation $\underline{\theta}$.

Hypothèse A.3 (de Kirchhoff-Love) *Toute section droite* reste normale *à la médiane au cours du déplacement.*

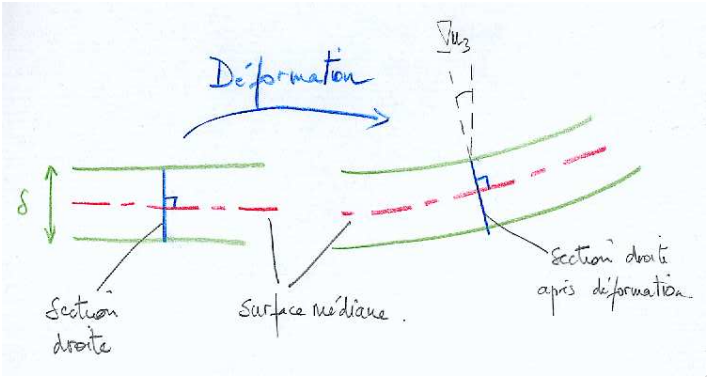


FIG. A.2: *Illustration de l'hypothèse de Kirchhoff-Love*

On aura alors :

$$\underline{\theta} = \underline{\nabla} u_3. \tag{A.20}$$

On néglige ainsi les phénomènes de cisaillement transverse.

L'intérêt d'un tel choix de champ de déplacement autorisé est qu'**on a totalement explicité la dépendance en x_3 des trois composantes du champ $\underline{U}$. L'inconnu est maintenant le déplacement de la surface médiane $\underline{u_p}$ défini dans ω qui ne dépend que des seules variables x_1 et x_2. On a donc ramené un problème posé dans le domaine tridimensionnel Ω à un problème posé dans le domaine bidimensionnel ω.**

A.2.2 Les conditions au bord

On note $\underline{U}^{KL}$ un champ de déplacement de Kirchhoff-Love, *ie.* qui vérifie A.19 et A.20. Ce champ de déplacement doit être un sous ensemble des champs de déplacement autorisés. Nous devons donc préciser dans quel espace doivent vivre les inconnues $(u_i)_{i\in[1...3]}$ pour qu'un déplacement $\underline{U}^{KL}$ défini par (A.22) soit dans V^{3D}, défini en (A.10). .

Tout d'abord $\underline{U}^{KL}$ doit être dans $\underline{H}^1(\Omega)$. On en déduit que $u_i \in H^1(\omega)$, pour $i \in [1\dots3]$ et également que $\partial_\alpha u_3 \in H^1(\omega)$. Par conséquent, la flèche u_3 doit appartenir à l'espace $H^2(\omega)$. D'autre part, la condition d'encastrement sur Γ_0 impose :

$$U_i^{KL}(x_1,x_2,x_3) = 0, \text{ pour tout } (x_1,x_2) \in \gamma_0 \text{ et pour tout } x_3 \in]-\delta/2,\delta/2[.$$

On en déduit, en choisissant successivement $x_3 = 0$ puis $x_3 \neq 0$, que :

$$u_i = 0 \text{ sur } \gamma_0 \text{ et } \partial_\alpha u_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0. \tag{A.21}$$

Il est usuel d'utiliser le repère local de Frechet $(\underline{n},\underline{\tau})$ sur le bord d'un ouvert. Dans ce repère, la deuxième condition (A.21) s'écrit $\partial_n u_3 = 0$ et $\partial_\tau u_3 = 0$. Mais puisque u_3 est nul sur γ_0, on sait déjà que la dérivée tangentielle est nulle. On peut donc se contenter d'écrire $\partial_n u_3 = 0$.

Finalement, **un champ de déplacement de Kirchhoff-Love $\underline{U}^{KL}$ est de la forme :**

$$\left|\begin{array}{lcll} U_\alpha^{KL}(x_1,x_2,x_3) & = & u_\alpha(x_1,x_2) - x_3\partial_\alpha u_3(x_1,x_2), & \forall\alpha\in\{1,2\} \\ U_3^{KL}(x_1,x_2,x_3) & = & u_3(x_1,x_2) & \end{array}\right. \tag{A.22}$$

où $(u_i)_{i\in[1...3]} \in V^{\mathrm{KL}}$ avec :

$$V^{\mathrm{KL}} = \left\{(u_1,u_2,u_3) \in H^1(\omega)\times H^1(\omega)\times H^2(\omega); u_i = 0 \text{ sur } \gamma_0 \text{ et } \partial_n u_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\} \tag{A.23}$$

A.2.3 Loi de comportement de Kirchhoff-Love

Il reste à donner la loi de comportement. Il s'avère que pour un déplacement de Kirchhoff--Love, les déformations selon la direction 3 sont nulles (*ie.* $\varepsilon_{i3} = 0$.) Il est alors assez cohérent de supposer que les contraintes dans cette même direction sont elles mêmes négligeables. Soit donc, l'hypothèse suivante :

Hypothèse A.4 (des contraintes planes, dite de Koiter) *La composante normale du vecteur contrainte est toujours nulle, soit :*

$$\sigma_{i3}(\underline{U}) = 0, \forall i \in [1\dots3].$$

La loi de comportement tridimensionnel pour un matériau orthotrope donnée en (A.16) ne porte alors que sur les composantes tangentielles du tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et du tenseur

de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$. Cette loi de comportement peut donc s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1} & -\dfrac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\dfrac{\nu_{21}}{E_2} & \dfrac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12}, \end{bmatrix} \tag{A.24}$$

Ce qui nous permet, en inversant, d'obtenir la relation définissant les contraintes planes en fonction des déformations planes : [1]

$$\boxed{\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & -\dfrac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ -\dfrac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \dfrac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12}, \end{bmatrix}} \tag{A.25}$$

que nous noterons plus généralement :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}, \tag{A.26}$$

ou $\bar{\mathbf{R}}$ est le tenseur de rigidité de Kirchhoff-Love.

Remarque A.4 *Il est important de noter que cette loi de comportement n'est pas la restriction plane de la loi de comportement d'un solide tridimensionnelle donnée en (A.16). L'hypothèse (A.4) a donc un effet non négligeable sur la loi de comportement.*

Regardons plus précisément quelles différences interviennent dans le cas d'un matériau isotrope. *Dans ce cas, la loi de comportement d'un solide tridimensionnel ne dépend que de deux modules de rigidité, son module de Young E et son coefficient de Poisson ν, et sa restriction plane est donnée par :*

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\nu}{1-2\nu} & \dfrac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \dfrac{\nu}{1-2\nu} & 1+\dfrac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12}. \end{bmatrix} \tag{A.27}$$

Tandis que la loi de comportement de Kirchhoff-Love dans le cas particulier d'un matériau isotrope *est alors :*

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\nu} & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \dfrac{\nu}{1-\nu} & \dfrac{1}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12}. \end{bmatrix} \tag{A.28}$$

1. on notera que ce tenseur est bien symétrique, puisque $E_2\nu_{12} = E_1\nu_{21}$ (*cf.* remarque (A.3))

A.3 Le modèle de plaque mince de Kirchhoff-Love

A.3.1 Application du principe des puissances virtuelles

Il nous faut maintenant déterminer les équations qui régissent le déplacement $\underline{u_p}$. Pour cela nous allons écrire le principe des puissances virtuelles (A.9) en se limitant à des champs de déplacement de Kirchhoff-Love et en utilisant la loi de comportement de Kirchhoff-Love. **La géométrie de Ω, qui est un cylindre, ainsi que la forme de ce champ de déplacement permettent d'expliciter l'intégration sur l'épaisseur.** On obtient alors une formulation variationnelle écrite sur le domaine ω.

Notation A.3 *Pour alléger les écritures, un champ de Kirchhoff-Love sera dorénavant noté $\underline{U}$ plutôt que $\underline{U}^{KL}$.*

Ajoutons une dernière hypothèse qui aura pour conséquence de simplifier considérablement les équations obtenues, et en particulier permettra de **découpler le mouvement membranaire (u_α) du mouvement de flexion u_3.**

Hypothèse A.5 (plaque équilibrée) *On suppose que la plaque est* équilibrée, *c'est à dire que ses propriétés sont invariantes dans l'épaisseur, ou encore que ses paramètres physiques sont indépendants de x_3.*

La densité de la plaque ρ_p et le tenseur de rigidité $\mathbf{R}$ sont alors des fonctions des seules variables x_1 et x_2. Notons que si $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)$ est une fonction indépendante de la variable x_3, alors on aura :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\delta/2}^{\delta/2} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 = \delta f(x_1, x_2), \\
&\int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3 f(x_1, x_2, x_3) dx_3 = 0, \\
&\int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3^2 f(x_1, x_2, x_3) dx_3 = \frac{\delta^3}{12} f(x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Remarque A.5 *Plus généralement, on dira qu'une plaque est équilibrée si ses propriétés sont* symétriques *par rapport à la surface médiane, c'est à dire que ses paramètres physiques sont des fonctions* paires *de la variables x_3. Pour une fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ paire par rapport à x_3, on a toujours $\int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3 f(x_1, x_2, x_3) dx_3 = 0$. Mais on ne peut plus dans ce cas expliciter les moments paires de f. Il faut se contenter de noter*

$$f_0 = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \text{ et } f_2 = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3^2 f(x_1, x_2, x_3) dx_3.$$

L'intérêt de supposer que f est indépendante de x_3 est de faire apparaître explicitement l'ordre de grandeur, en fonction de l'épaisseur δ, des différents termes dans l'équation du mouvement.

Remarque A.6 *L'hypothèse de plaque équilibrée porte uniquement sur les propriétés de la plaque elle même. Par contre le chargement n'est pas nécessairement symétrique.*

On calcule séparément les trois composantes (accélération, efforts intérieurs et extérieurs) intervenant dans la formulation des puissances virtuelles.

A.3.1.a Calcul de la puissance virtuelle des quantités d'accélération

On a :

$$\begin{aligned}&\forall \underline{U}^* \in V^{\mathrm{KL}},\\ &\mathcal{P}_{\mathrm{acc}}(\underline{U}^*) = \int_\Omega \rho_p \ddot{U}_i U_i^* = \int_{-\delta/2}^{\delta/2}\int_\omega \rho_p \left[(\ddot{u}_\alpha - x_3\partial_\alpha \ddot{u}_3)(u_\alpha^* - x_3\partial_\alpha u_3^*) + \ddot{u}_3 u_3^*\right] d\omega dx_3\end{aligned} \tag{A.30}$$

Et donc, compte tenu de l'hypothèse (A.5), on obtient :

$$\forall \underline{U}^* \in V^{\mathrm{KL}}, \mathcal{P}_{\mathrm{acc}}(\underline{U}^*) = \int_\omega \rho_p \delta \ddot{u}_i u_i^* d\omega + \int_\omega \rho_p \frac{\delta^3}{12}\partial_\alpha \ddot{u}_3 \partial_\alpha u_3^* d\omega \tag{A.31}$$

La puissance virtuelle des quantités d'accélération est donc la somme de deux termes :

- Un terme d'inertie de translation : $\displaystyle\int_\omega \rho_p \delta \ddot{u}_i u_i^* d\omega$
- Un terme d'inertie de rotation : $\displaystyle\int_\omega \rho_p \frac{\delta^3}{12}\partial_\alpha \ddot{u}_3 \partial_\alpha u_3^* d\omega$.

(A.32)

C'est à ce stade que l'on peut faire la dernière hypothèse du modèle de Kirchhoff-Love :

Hypothèse A.6 *L'épaisseur de la plaque δ étant supposée petite, on néglige le terme d'inertie de rotation devant le terme d'inertie de translation.*

Ainsi, on aura seulement :

$$\boxed{\forall \underline{U}^* \in V^{\mathrm{KL}}, \mathcal{P}_{\mathrm{acc}}(\underline{U}^*) = \int_\omega \rho_p \delta \ddot{u}_i u_i^* d\omega} \tag{A.33}$$

Remarque A.7 *Cette hypothèse aura pour fâcheuse conséquence de voir la célérité des ondes harmoniques de pression tendre vers l'infini avec le nombre d'onde. On vérifiera néanmoins qu'elle reste justifiée pour une gamme de fréquence suffisamment faible.*

A.3.1.b Calcul de la puissance des efforts extérieurs

On a :

$\forall \underline{U}^* \in V^{\mathrm{KL}}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{ext}}(\underline{U}^*) &= \int_\Omega F_i U_i^* + \int_{\Gamma^+\cup\Gamma^-} g_i U_i^* \\ &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2}\int_\omega F_\alpha(u_\alpha^* - x_3\partial_\alpha u_3^*) + \int_{-\delta/2}^{\delta/2}\int_\omega F_3 u_3^* + \int_\omega g_\alpha^{\pm}(u_\alpha^* \mp \delta/2\partial_\alpha u_3^*) + \int_\omega g_3^{\pm} u_3^*.\end{aligned} \tag{A.34}$$

On introduit :

- la résultante des efforts sur l'épaisseur : $f_i = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} F_i dx_3 + g_i^+ + g_i^-$
- le moment résultant sur l'épaisseur : $\mu_\alpha = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3 F_\alpha dx_3 + \delta/2 g_\alpha^+ - \delta/2 g_\alpha^-$

Alors :

$$\boxed{\forall \underline{U}^* \in V^{\mathrm{KL}}, \mathcal{P}_{\text{ext}}(\underline{U}^*) = \int_\omega f_i u_i^* - \int_\omega \mu_\alpha \partial_\alpha u_3^*} \tag{A.35}$$

A.3.1.c Calcul de la puissance des efforts intérieurs

On a :

$$\forall \underline{U}^* \in V^{\mathrm{KL}}, \mathcal{P}_{\text{int}}(\underline{U}^*) = \int_\Omega \sigma_{ij}(\underline{U})\varepsilon_{ij}(\underline{U}^*) \tag{A.36}$$

Or, on vérifie, pour un champ de déplacement de Kirchhoff-Love, que :

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{U}^*) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{u}_m^*) - x_3\partial_{\alpha\beta}u_3^*, \quad \forall \alpha,\beta \in \{1,2\} \\ &\text{et } \varepsilon_{i3} = 0, \quad \forall i \in [1\dots 3].\end{aligned} \tag{A.37}$$

Donc :

$$\forall \underline{U}^* \in V^{\mathrm{KL}}, \mathcal{P}_{\text{int}}(\underline{U}^*) = \int_{-\delta/2}^{\delta/2}\int_\omega [\sigma_{\alpha\beta}(\underline{U})\varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{u}_m^*) - x_3\sigma_{\alpha\beta}(\underline{U})\partial_{\alpha\beta}u_3^*]\, d\omega dx_3. \tag{A.38}$$

On introduit :

- le tenseur des efforts de membrane : $\mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{U}) = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{\alpha\beta}(\underline{U}) dx_3,$
- le tenseur des moments de flexion : $\mathcal{M}_{\alpha\beta}(\underline{U}) = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3\sigma_{\alpha\beta}(\underline{U}) dx_3.$

(A.39)

Alors :

$$\boxed{\forall \underline{U}^* \in V^{\mathrm{KL}}, \mathcal{P}_{\mathrm{int}}(\underline{U}^*) = \int_\omega \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{U})\varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{u}^*_m)d\omega - \int_\omega \mathcal{M}_{\alpha\beta}(\underline{U})\partial_{\alpha\beta}u^*_3 d\omega.} \tag{A.40}$$

A.3.2 Equations variationnelles du modèle de Kirchhoff-Love

Le principe des puissances virtuelles s'écrit donc dans le cadre des hypothèses de Kirchhoff-Love :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \text{On cherche } \underline{U} : [0,T] \longrightarrow V^{\mathrm{KL}}, \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\omega \rho_p \delta \ddot{u}_i u^*_i d\omega + \int_\omega \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{U})\varepsilon_{ab}(\underline{u}^*_m)d\omega - \int_\omega \mathcal{M}_{\alpha\beta}(\underline{U})\partial_{\alpha\beta}u^*_3 d\omega \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_\omega f_i u^*_i - \int_\omega \mu_\alpha \partial_\alpha u^*_3, \quad \forall \underline{U}^* \in V^{\mathrm{KL}}. \end{array}\right.} \tag{A.41}$$

La loi de comportement de Kirchhoff-Love (A.26) nous permet d'exprimer le tenseur des efforts de membrane ($\mathcal{N}_{\alpha\beta}$) et le tenseur des moments de flexion ($\mathcal{M}_{\alpha\beta}$) en fonction du champ de déplacement $\underline{u}_p$, défini sur ω. On a en effet, compte tenu de l'hypothèse de plaque équilibrée (A.5) :

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{U}) = \delta \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}(\underline{u}_m) \tag{A.42}$$

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}(\underline{U}) = -\frac{\delta^3}{12}\bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}u_3 \tag{A.43}$$

On constate alors que $\mathbb{N}$ ne dépend que des déplacements de membranes (u_1, u_2) tandis que $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ ne dépend que de la flèche u_3.

Remarque A.8 *Cette propriété très importante est due à l'hypothèse de plaque équilibrée. Supposons un instant que cette hypothèse n'est pas vérifiée. Alors on aura, en toute généralité :*

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{U}) = H^m_{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}(\underline{u}_m) - H^{mf}_{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}(\underline{u}_m) \tag{A.44}$$

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}(\underline{U}) = H^{mf}_{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}(\underline{u}_m) - H^f_{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}(\underline{u}_m) \tag{A.45}$$

avec :

$$H^m_{\alpha\beta\lambda\mu}(x_1,x_2) = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}(x_1,x_2,x_3)dx_3, \tag{A.46}$$

$$H^{mf}_{\alpha\beta\lambda\mu}(x_1,x_2) = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3\bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}(x_1,x_2,x_3)dx_3, \tag{A.47}$$

$$H^f_{\alpha\beta\lambda\mu}(x_1,x_2) = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3^2\bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}(x_1,x_2,x_3)dx_3. \tag{A.48}$$

Et on constate donc que si $H^{mf}_{\alpha\beta\lambda\mu}$ n'est pas nul, les mouvements de membranes et de flexion sont couplés.

Dans le cas d'une plaque équilibrée, les équations régissant les déplacements de membrane et les déplacements de flexion sont donc découplées.

Pour s'en persuader, il suffit de choisir successivement dans l'équation (A.41) des champs de déplacement virtuels $\underline{U}^*$ tels que $u_3^* = 0$ puis des champs de déplacement virtuels $\underline{U}^*$ tels que tels que $u_1^* = u_2^* = 0$ et de remplacer les tenseurs $(\mathcal{N}_{\alpha\beta})$ et $(\mathcal{M}_{\alpha\beta})$ selon la loi donnée en (A.42, A.43).

On obtient finalement les équations variationnelles du modèle de Kirchhoff-Love :

Problème membranaire :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{On cherche } \underline{u}_m = (u_\alpha) \ : [0,T] \longrightarrow \in V_m^{\mathrm{KL}} \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\omega \rho_p \delta \ddot{u}_\alpha u_\alpha^* + \int_\omega \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{u}_m)\varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{u}_m^*) = \int_\omega f_\alpha u_\alpha^*, \quad \forall \underline{u}_m^* = (u_\alpha^*)_\alpha \in V_m^{\mathrm{KL}} \\ \text{où } \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{u}_p) = \delta \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}(\underline{u}_m). \end{array}\right. \tag{A.49}$$

Problème en flexion :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{On cherche } u_3 \ : [0,T] \longrightarrow V_f^{\mathrm{KL}} \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\omega \rho_p \delta \ddot{u}_3 u_3^* - \int_\omega \mathcal{M}_{\alpha\beta}(u_3)\partial_{\alpha\beta} u_3^* = \int_\omega f_3 u_3^* - \int_\omega \mu_\alpha \partial_\alpha u_3^*, \quad \forall u_3^* \in V_f^{\mathrm{KL}} \\ \text{où } \mathcal{M}_{\alpha\beta}(u_3) = \dfrac{\delta^3}{12}\bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu} u_3. \end{array}\right. \tag{A.50}$$

Les espaces V_m^{KL} et V_f^{KL} étant définis par :

$$V_m^{\mathrm{KL}} = \left\{(u_1,u_2) \in \left(H^1(\omega)\right)^2 ; u_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\} \tag{A.51}$$

$$V_f^{\mathrm{KL}} = \left\{u_3 \in H^2(\omega); u_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0 \text{ et } \partial_n u_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0\right\} \tag{A.52}$$

On notera bien sûr que $V^{\mathrm{KL}} = V_m^{\mathrm{KL}} \times V_f^{\mathrm{KL}}$.

Remarque A.9 *Ainsi, en fonction du chargement, la plaque peut avoir un* comportement purement membranaire ou un comportement purement fléchissant*. Notons toutefois qu'il ne suffit pas que le chargement soit purement membranaire (*ie. $F_3 = 0$ *et* $g_3 = 0$*) pour obtenir un mouvement de membrane pure. En effet, si ce chargement est dissymétrique, alors le moment résultant* $\mu_\alpha = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} x_3 F_\alpha dx_3 + \delta/2 g_\alpha^+ - \delta/2 g_\alpha^-$ *est on nul et il y a un mouvement de flexion. En revanche, si on exerce un effort de flexion pure (*ie. $F_\alpha = 0$ *et* $g_\alpha = 0$*) alors on aura un mouvement de flexion pure.*

A.4 Equations locales du modèle de Kirchhoff-Love

On peut donner une interprêtation de ces deux problèmes variationnels sous la forme de deux problèmes aux limites. Pour cela, on supposera la solution suffisament régulière pour pouvoir effectuer les intégrations par parties requises.

A.4.1 Modèle de membrane

La symétrie des tenseurs $(\mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{u}_m))$ et $(\varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{u}_m))$ permet de reécrire l'équation (A.49) sous la forme suivante :

$$\int_\omega \rho_p \delta \ddot{u}_\alpha u^*_\alpha + \int_\omega \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{u}_m)\partial_\beta u^*_\alpha = \int_\omega f_\alpha u^*_\alpha, \tag{A.53}$$

de sorte qu'une simple intégration par partie effectuée sur le second terme aboutit à l'équation :

$$\int_\omega \delta\rho_p \ddot{u}_\beta u^*_\beta - \int_\omega \partial_\alpha \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{u}_m)u^*_\beta + \int_\gamma \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{u}_m)n_\alpha u^*_\beta = \int_\omega f_\beta u^*_\beta, \tag{A.54}$$

où, rappelons le, $\underline{n}$ est la normale extérieure à ω définie sur son bord γ. On choisit tout d'abord des déplacements membranaires (u^*_α) nuls sur tout le bord γ de ω, puis des déplacements membranaires non nuls sur le bord libre γ_l.

On obtient ainsi, par identification, les équations locales de membrane :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \text{Pour } \beta \in \{1,2\}, & & & \\ \delta\rho_p\ddot{u}_\beta - \partial_\alpha \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{u}_m) &=& f_\beta, & \text{dans } \omega, \\ \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\underline{u}_m) &=& \delta \bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{u}_m) & \text{dans } \omega, \\ u_\alpha &=& 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \mathcal{N}_{\alpha\beta}n_\alpha &=& 0, & \text{sur } \gamma_l. \end{array}\right. \tag{A.55}$$

On peut à ce stade abandonner la convention sur les indices répétés et écrire le problème aux limites portant sur le déplacement membranaire à l'aide d'opérateurs :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \delta\rho_p \ddot{\underline{u}_m} - \underline{\mathrm{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{N}}} &=& \underline{f}, & \text{dans } \omega, \\ \underline{\underline{\mathcal{N}}} &=& \delta\bar{\mathbf{R}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_m) & \text{dans } \omega, \\ \underline{u}_m &=& 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \underline{\underline{\mathcal{N}}}.\underline{n} &=& 0, & \text{sur } \gamma_l, \end{array}\right. \tag{A.56}$$

où $\underline{\mathrm{Div}}$ représente la divergence pour les tenseurs d'ordre 2.

Le mouvement membranaire est en fait régi par une équation de l'élastodynamique plane, pour laquelle on utilise une loi de comportement particulière.

A.4.2 Modèle de flexion

A.4.2.a Double formule de Stokes

Il va falloir effectuer une double intégration par partie afin de faire disparaître les dérivées secondes portant sur u_3^* dans l'équation variationnelle (A.50). On calcule ainsi :

$$\begin{aligned} -\int_\omega \mathcal{M}_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}u_3^* &= \int_\omega \partial_\alpha \mathcal{M}_{\alpha\beta}\partial_\beta u_3^* - \int_\gamma \mathcal{M}_{\alpha\beta}n_\alpha\partial_\beta u_3^* \\ &= -\int_\omega \partial_{\alpha\beta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}u_3^* + \int_\gamma(\partial_\alpha\mathcal{M}_{\alpha\beta})n_\beta u_3^* - \int_\gamma \mathcal{M}_{\alpha\beta}n_\alpha\partial_\beta u_3^*. \end{aligned} \tag{A.57}$$

Comme on ne peut pas choisir $\partial_\beta u_3^*$ indépendamment de u_3^* sur le bord γ, il nous faut écrire ces dérivées dans le repère de Frechet, soit :

$$\partial_\beta u_3^* = \partial_n u_3^* n_\beta + \partial_\tau u_3^* t_\beta \tag{A.58}$$

Injectant ce résultat dans l'équation (A.57), on est maintenant gêné par la dérivée tangentielle de u_3^* sur γ. Il nous faut effectuer une nouvelle intégration par partie sur le bord γpour faire apparaître u_3^*. Rappelons tout d'abord la formule d'intégration par partie valable pour toute courbe régulière γ d'extrémités notées A et B, orientée de A vers B. Si f et g sont deux fonctions suffisamment régulières définies sur γ, on a :

$$\int_\gamma \partial_{t\tau} f g = -\int_\gamma f\partial_\tau g + f(B)g(B) - f(A)g(A) \tag{A.59}$$

Or on a supposé que γ est une courbe régulière fermée, pour laquelle on a donc $A = B$. Les termes de bord dans l'intégration par partie précédente sont donc nulles dans notre cas.

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} -\int_\omega \mathcal{M}_{\alpha\beta}(u_3)\partial_{\lambda\mu}u_3^* &= -\int_\omega \partial_{\alpha\beta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}(u_3)u_3^* \\ &\quad + \int_\gamma [(\partial_\alpha\mathcal{M}_{\alpha\beta}(u_3))n_\beta + \partial_\tau\mathcal{M}_{\alpha\beta}(u_3)n_\alpha\tau_\beta]u_3^* \\ &\quad - \int_\gamma \mathcal{M}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\partial_n u_3^*. \end{aligned}} \tag{A.60}$$

On peut écrire cette dernière égalité à l'aide d'opérateurs de dérivation spatiales :

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\omega \operatorname{div}\underline{\operatorname{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,u_3^* &= \int_\omega \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla}u_3^*) \\ &\quad + \int_{\delta\omega} \left(\underline{\operatorname{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,.\underline{n} + \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}]\right) u_3^* \\ &\quad - \int_{\delta\omega} (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{n}\frac{\partial u_3^*}{\partial n}. \end{aligned}} \tag{A.61}$$

On vérifie a posteriori que cette double formule d'intégration par partie est valable pour toutes fonctions $\underline{\underline{\mathcal{M}}} \in (H^2(\omega))^4$ et $\underline{u}_p \in H^2(\omega)$

A.4.2.b Equations locales du modèle de flexion

On effectue une intégration par partie portant sur le deuxième terme du second membre de (A.50) :

$$-\int_\omega \mu_\alpha \partial_\alpha u_3^* = \int_\omega \partial_\alpha \mu_\alpha u_3^* - \int_\gamma \mu_\alpha n_\alpha u_3^*. \tag{A.62}$$

Sur γ_0, u_3^* est nul, et sur γ_l μ_α est nul, car on a supposé qu'aucun effort n'est exercé sur le bord libre. Le second terme de cette dernière équation est donc nul.

Nous sommes maintenant en mesure d'interprêter la formulation variationnelle (A.50). On choisit tout d'abord des déplacements virtuels u_3^* nuls et a dérivée normale nulle sur le bord de γ_0, puis des déplacements à dérivée normale nulle sur le bord γ_l (mais non nécessairement nuls sur le bord libre) et enfin des déplacement nuls sur le bord γ_l (mais dont la dérivée normale n'est pas nécessairement nulle sur le bord libre).

On obtient alors, par identification, les équations locales du mouvement de flexion :

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \delta\rho_p \ddot{u}_3 - \partial_{\alpha\beta}\mathcal{M}_{\alpha\beta} &=& f_3 + \partial_\alpha \mu_\alpha & \text{dans } \omega \\ \mathcal{M}_{\alpha\beta} &=& -\dfrac{\delta^3}{12}\bar{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}\partial_{\alpha\beta}u_3 & \text{dans } \omega \\ u_3 &=& 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \partial_n u_3 &=& 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \mathcal{M}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta &=& 0 & \text{sur } \gamma_l, \\ (\partial_\alpha \mathcal{M}_{\alpha\beta})n_\beta + \partial_\tau \mathcal{M}_{\alpha\beta}n_\alpha\tau_\beta &=& 0, & \text{sur } \gamma_l. \end{array}} \tag{A.63}$$

Remarque A.10 *Notons que cette identification est possible grâce au théorème de trace sur $H^2(\omega)$. En effet, c'est la surjectivité de l'application :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} H^2(\omega) & \longrightarrow & H^{\frac{3}{2}}(\gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\gamma) \\ u & \mapsto & (u_{|\gamma}, \partial_n u_{|\gamma}) \end{array}\right. \tag{A.64}$$

qui nous permet de conclure.

Comme dans le cas de l'équation de membrane, on peut préférer une notation sous forme

d'opérateurs :

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \delta\rho_p\ddot{u}_3 - \operatorname{div}\underline{\operatorname{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}} & = & f_3 + \operatorname{div}\underline{\mu} & \text{dans } \omega \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} & = & \dfrac{\delta^3}{12}\bar{\mathbf{R}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{\nabla} u_3) & \text{dans } \omega \\ u_3 & = & 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ \partial_n u_3 & = & 0, & \text{sur } \gamma_0, \\ (\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{n} & = & 0 & \text{sur } \gamma_l, \\ (\underline{\operatorname{Div}}\,\underline{\underline{\mathcal{M}}}).\underline{n} + \partial_\tau[(\underline{\underline{\mathcal{M}}}\,\underline{n}).\underline{\tau}] & = & 0, & \text{sur } \gamma_l. \end{array}} \tag{A.65}$$

Remarque A.11 *Dans le cas particulier d'un matériau homogène isotrope, l'équation intérieure s'écrit tout simplement :*

$$\delta\rho_p\ddot{u}_3 + \frac{\delta^3}{12}D\Delta^2 u_3 = f_3 + \operatorname{div}\underline{\mu} \text{ dans } \omega, \tag{A.66}$$

où on a introduit le module de flexion :

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}. \tag{A.67}$$

Dans ce cas, l'opérateur de plaque est donc un bilaplacien, qui correspond à la forme la plus fréquente sous laquelle on rencontre le modèle de Kirchhoff-Love.

Annexe B

La problématique de la condensation de masse

Pour comprendre le procédé de condensation de masse, regardons tout d'abord comment celle ci est obtenue lors de l'utilisation d'éléments finis de type P_1-Lagrange pour l'approximation de $H_0^1(]0,1[)$, par exemple pour la résolution de l'équation des ondes monodimensionnelle.

On s'est également penché sur la question de la condensation de masse pour des éléments finis H^2 conformes. Cette recherche s'est soldée par un échec dés la dimension 1.

B.1 Un exemple : l'équation des ondes

Formulation variationnelle

On considère ici le problème de l'équation des ondes monodimensionnelle posée dans l'intervalle $]0,1[$ avec conditions aux bords de type Dirichlet :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, & \text{dans}]0,1[, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & \forall t. \end{cases} \tag{B.1}$$

La formulation variationnelle de ce problème est :

$$\boxed{\begin{cases} \text{Trouver } v : [0,T] \to \mathcal{V} \text{ tel que :} \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_0^1 v v^* + \int_0^1 \partial_x v \partial_x v^* = 0, \forall v^* \in \mathcal{V}, \end{cases}} \tag{B.2}$$

où :

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(]0,1[) \ ; \ v(0) = v(1) = 0\}.$$

Approximation spatiale

On considère un maillage uniforme de l'intervalle $]0,1[$ de pas

$$\Delta x = \frac{1}{N+1}, \quad N \in \mathbb{N},$$

formé des nœuds $x_i = i\Delta x$. On approche $\mathcal{V}$ à l'aide de l'espace d'éléments finis de Lagrange d'ordre 1 défini par :

$$\boxed{\mathcal{V}_h = \left\{ v \in C^0([0,1]) \ ; \ v_{|[x_i,x_{i+1}]} \in P_1, v(0) = v(1) = 0 \right\},} \tag{B.3}$$

où P_1 désigne les polynômes de degrés inférieurs à 1.

Notation B.1 *Il nous faut contrôler les valeurs de $v \in V_h^0$ aux nœuds x_i du maillage pour s'assurer de sa continuité. On désigne par $(\sigma_i)_{1\leq i\leq N}$ les degrés de liberté de l'espace V_h^0, définis par :*

$$\langle \sigma_i, v_h) \rangle = v_h(x_i), \quad \forall v_h \in V_h^0, \tag{B.4}$$

et on note $(\lambda_i)_{1\leq i\leq N}$ la base duale associée, qui est la base de Lagrange de V_h^0. On a ainsi les relations :

$$\langle \sigma_i, \lambda_j \rangle = \lambda_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad \forall i,j \in \{1 \dots N\}, \tag{B.5}$$

et :

$$v_h = \sum_{i=1}^{N} v_h(x_i)\lambda_i, \quad \forall v_h \in V_h^0. \tag{B.6}$$

La semi-discrétisation en espace du problème variationnel (B.2) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v_h : [0,T] \to \mathcal{V}_h \text{ tel que :} \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_0^1 v_h v_h^* + \int_0^1 \partial_x v_h \partial_x v_h^* = 0, \forall v_h^* \in \mathcal{V}_h, \end{array} \right. \tag{B.7}$$

ce qui s'écrit encore, dans la base $(\lambda_i)_{1\leq i\leq N}$:

$$\boxed{\mathbb{M}_h \frac{d^2 v_h}{dt^2} + \mathbb{K}_h v_h = 0.} \tag{B.8}$$

où $\mathbb{M}_h$ est la matrice de masse, d'ordre N, définie par :

$$\mathbb{M}_h^{pq} = \int_0^1 \lambda_p \lambda_q, \tag{B.9}$$

et $\mathbb{K}_h$ est la matrice de rigidité, d'ordre N, définie par :

$$\mathbb{K}_h^{pq} = \int_0^1 \partial_x \lambda_p \partial_x \lambda_q \tag{B.10}$$

On constate ici que **la résolution de cette équation passe nécessairement par l'inversion de la matrice de masse** $\mathbb{M}_h$. Bien que celle ci soit définie positive le coût engendré par une telle inversion peut rapidement devenir prohibitif.

Un moyen de remédier à ce problème est de réduire la matrice de masse à une matrice diagonale en calculant l'intégrale intervenant dans (B.9) à l'aide d'une formule d'intégration numérique adéquate, sans nuire à la précision du résultat. Cette technique appelée *condensation de masse* est couramment utilisée pour l'approximation de H^1 par des éléments finis de Lagrange par exemple (*cf.* [62]).

Condensation de masse

Notation B.2 *Nous désignerons une formule de d'intégration numérique sur le segment* $[x_i, x_{i+1}]$ *par :*

$$\oint_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx,$$

Dans le cas des éléments finis P_1, on choisit tout simplement la formule des trapèzes :

$$\oint_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = (x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = \Delta x \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}. \tag{B.11}$$

On calcule alors :

$$\mathbb{M}_h^{pq} = \int_0^1 \lambda_p \lambda_q \approx \sum_{i=0}^{N} \oint_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda_p \lambda_q = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=0}^{N} [\lambda_p(x_i)\lambda_q(x_i) + \lambda_p(x_{i+1})\lambda_q(x_{i+1}),] \tag{B.12}$$

et on obtient donc la condensation de masse, puisqu'on a, grâce à (B.5) :

$$\boxed{\mathbb{M}_h \approx \Delta x I.} \tag{B.13}$$

Notons que **ce qui conduit à une matrice de masse diagonale, c'est donc l'utilisation d'une formule de quadrature définie à l'aide des degrés de liberté de l'espace d'approximation.** La réduction à une matrice diagonale est alors une simple conséquence de la relation de dualité (B.5).

Pour ne pas altérer la précision des schémas, on doit utiliser une formule de quadrature suffisamment précise, ainsi qu'il est démontré dans ([15] ou [28]).

Remarque B.1 . *En fait, la matrice* $\mathbb{M}_h$ *n'est autre que la matrice de la forme bilinéaire définie sur* V_h^0 *par* $(u, v) \mapsto \int_0^1 uv$ *dans la base* (λ_i).

La technique que l'on vient de décrire consiste donc à approcher cette forme bilinéaire (qui n'est autre que le produit scalaire dans $L^2(]0, 1[)$ *à l'aide le la forme bilinéaire* φ_h *définie sur l'espace* V_h^0 *par :*

$$\varphi_h(u, v) = \sum_{i=0}^{N} \oint_{x_i}^{x_{i+1}} uv, \tag{B.14}$$

de manière à ce que la base (λ_i) soit φ_h orthogonale.

Il se trouve qu'on est ici dans un cas très favorable où on réussit effectivement à trouver une forme bilinéaire pour laquelle la base de Legendre est orthogonale. Cela ne sera pas toujours le cas.

On pourra être amené à redéfinir une base de l'espace d'approximation à l'aide de nouveaux degrés de liberté pour que ceux ci concordent avec la formule de quadrature candidate. Ce sera par exemple le cas pour obtenir la condensation de masse pour les éléments de Lagrange d'ordre $k \geq 3$ en dimension 1.

Mais il pourra aussi arriver que malgré un tel remaniement des degrés de liberté, la condensation de masse échoue. Plusieurs cas peuvent se produire. Citons par exemple :

- *la matrice de masse obtenue n'est pas inversible (c'est le cas pour les éléments de Lagrange d'ordre 2 en dimension 2).*
- *la matrice de masse obtenue n'est pas positive, ce qui conduit à des schémas en temps forcément instables (c'est le cas pour les éléments de Lagrange d'ordre 3 en dimension 2).*
- *la matrice de masse obtenue n'est pas diagonale (c'est le cas des éléments de Raviart-Thomas pour l'approximation de $H(\mathrm{div}, \omega)$).*

Une technique permettant de réussir à obtenir tout de même la condensation de masse consiste alors à enrichir l'espace d'approximation, ce qui permet de définir une nouvelle base ainsi qu'une nouvelle formule de quadrature. C'est de cette manière que sont résolus les trois échecs suscités (cf. *[62]) et la section 2.5).*

B.2 Echec de la condensation de masse dans $H^2(]0,1[)$

Au tout début de ce travail, on s'apprêtait tout bonnement à mettre en œuvre un schéma explicite pour la résolution de l'équation de plaque, selon le même procédé qu'est résolue usuellement l'équation des ondes. Entre autres éventualités, on s'est interrogé sur la possibilité d'obtenir la condensation de masse lors de l'approximation spatiale de la formulation variationnelle naturelle, qui nécessite l'utilisation d'éléments finis H^2 conformes.

Cette idée s'est soldée par un échec dans le cas d'un problème plus simple : l'équation de plaque en dimension 1, qui est en fait une équation de poutre. Nous n'avons donc pas continué sur cette voie, d'autant plus que les raisons de ne pas chercher à utiliser une approximation conforme de $H^2(\omega)$, indépendamment de ce soucis de condensation de masse, sont largement suffisantes...

Formulation variationnelle

On considère donc à présent le problème de l'équation de poutre encastrée posée dans l'intervalle $]0,1[$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0, & \text{dans}]0,1[, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & \forall t, \\ \partial_x v(0,t) = \partial_x v(1,t) = 0, & \forall t. \end{cases} \tag{B.15}$$

La formulation variationnelle de ce problème est :

$$\boxed{\begin{cases} \text{Trouver } v : [0,T] \to \mathcal{V} \text{ tel que :} \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_0^1 v v^* + \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} = 0, \forall v^* \in \mathcal{V}, \end{cases}} \tag{B.16}$$

où :

$$\mathcal{V} = \{v \in H^2(]0,1[) \ ; \ v(0) = v(1) = 0, \text{ et } v'(0) = v'(1) = 0\}.$$

Approximation spatiale

On utilise l'espace d'approximation $\mathcal{V}_h^1 \subset \mathcal{V}$ de classe C^1 suivant :

$$\boxed{\mathcal{V}_h^1 = \left\{v \in C^1([0,1]) \ ; \ v_{|[x_i,x_{i+1}]} \in P_3, v(0) = v(1) = 0, \text{ et } v'(0) = v'(1) = 0\right\},} \tag{B.17}$$

où P_3 désigne les polynômes de degrés inférieurs à 3.

Notation B.3 *Il nous faut cette fois ci contrôler non seulement les valeurs de $v \in V_h^1$ aux nœuds x_i du maillage mais également les dérivées en ces mêmes points pour s'assurer que v est bien C^1.*

On désigne par $(\sigma_i^\alpha)_{1\le i\le N, \alpha\in\{0,1\}}$ les degrés de liberté de l'espace V_h^1, définis par :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i^0, v_h)\rangle &= v_h(x_i), \quad \forall v_h \in V_h^1, \\ \langle \sigma_i^1, v_h)\rangle &= v_h'(x_i), \quad \forall v_h \in V_h^1, \end{aligned} \tag{B.18}$$

et on note (λ_i^α) la base duale associée, qui est la base de Hermitte de V_h^1. On a ainsi les relations :

$$\langle \sigma_i^\alpha, \lambda_j^\beta\rangle = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}, \quad \forall 1 \le i,j \le N, \forall \alpha,\beta \in \{0,1\}, \tag{B.19}$$

soit :

$$\begin{aligned} \lambda_j^0(x_i) = \delta_{ij} \ ; \ (\lambda_j^0)'(x_i) = 0, \\ \lambda_j^1(x_i) = 0 \ ; \ (\lambda_j^1)'(x_i) = \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{B.20}$$

et donc :

$$v_h = \sum_{i=1}^N v_h(x_i)\lambda_i^0 \ + \ \sum_{i=1}^N v_h'(x_i)\lambda_i^1, \quad \forall v_h \in V_h^1. \tag{B.21}$$

La semi-discrétisation en espace du problème variationnel (B.16) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v_h : [0,T] \to \mathcal{V}_h \text{ tel que :} \\ \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_0^1 v_h v_h^* + \int_0^1 \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_h^*}{\partial x^2} = 0, \forall v_h^* \in \mathcal{V}_h, \end{array} \right. \tag{B.22}$$

ce qui s'écrit encore, dans la base $(\lambda_i^\alpha)_{1 \leq i \leq N, \alpha \in \{0,1\}}$:

$$\boxed{\mathbb{M}_h \frac{d^2 v_h}{dt^2} + \mathbb{K}_h v_h = 0.} \tag{B.23}$$

où $\mathbb{M}_h$ est la matrice de masse, d'ordre $2N$, définie par :

$$\mathbb{M}_h^{pq,\alpha\beta} = \int_0^1 \lambda_p^\alpha \lambda_q^\beta, \tag{B.24}$$

et $\mathbb{K}_h$ est la matrice de rigidité, d'ordre $2N$, définie par :

$$\mathbb{K}_h^{pq,\alpha\beta} = \int_0^1 \partial_x \lambda_p^\alpha \partial_x \lambda_q^\beta \tag{B.25}$$

On voudrait donc réduire $\mathbb{M}_h$ à ne matrice diagonale (ou au moins diagonale par bloc) en utilisant une formule d'intégration numérique.

Recherche de condensation de masse

Suivant la même démarche que précédemment, il nous faut définir une formule d'intégration numérique sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ l'aide des degrés de liberté $\sigma_i^0, \sigma_i^1, \sigma_{i+1}^0$ et σ_{i+1}^1,, soit une formule s'écrivant :

$$\begin{aligned} \oint_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \quad &: = \Delta x \sum_{\alpha \in \{0,1\}} \omega_i^\alpha \langle \sigma_i^\alpha, f \rangle + \omega_{i+1}^\alpha \langle \sigma_{i+1}^\alpha, f \rangle \\ &= \Delta x \omega_i^0 f(x_i) + \omega_{i+1}^0 f(x_{i+1}) + \omega_i^1 f'(x_i) + \omega_{i+1}^1 f'(x_{i+1}) \end{aligned} \tag{B.26}$$

La symétrie du problème impose en fait de choisir $\omega_i^0 = \omega_{i+1}^0$ et $\omega_i^1 = -\omega_{i+1}^1$, ce que l'on vérifie en effectuant le changement de variable $x' = x_{i+1} - x$.

Cherchant à obtenir une formule de quadrature exacte pour les polynômes de degré le plus élevé possible, on calcule :

$$\omega_i^0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \omega_i^1 = -\Delta x \frac{1}{12}, \tag{B.27}$$

et la formule de quadrature candidate pour obtenir la condensation de masse dans l'espace V_h^1 est donc :

$$\boxed{\oint_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}\Big(f(x_i) + f(x_{i+1})\Big) - \frac{\Delta x^2}{12}\Big(f'(x_i) + f'(x_{i+1})\Big)} \tag{B.28}$$

Elle intègre exactement les polynômes de degré 3.

On introduit alors la forme bilinéaire symétrique φ_h^1, définie sur V_h^1, destinée à approcher le produit scalaire L^2 :

$$\varphi_h^1(u,v) = \sum_{i=o}^{N} \oint_{x_i}^{x_{i+1}} uv. \tag{B.29}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
&\forall p,q \in \{1\dots N\}, \forall \alpha,\beta \in \{0,1\},\\
&\varphi_h^1(\lambda_p^\alpha,\lambda_q^\beta) = \sum_{i=0}^{N} \quad \frac{\Delta x}{2}\left(\lambda_p^\alpha(x_i)\lambda_q^\beta(x_i) + \lambda_p^\alpha(x_{i+1})\lambda_q^\beta(x_{i+1})\right)\\
&\qquad\qquad -\frac{\Delta x^2}{12}\Big((\lambda_p^\alpha)'(x_{i+1})\lambda_q^\beta(x_{i+1}) + \lambda_p^\alpha(x_{i+1})(\lambda_q^\beta)'(x_{i+1})\\
&\qquad\qquad -(\lambda_p^\alpha)'(x_i)\lambda_q^\beta(x_i) - \lambda_p^\alpha(x_i)(\lambda_q^\beta)'(x_i)\Big)
\end{aligned} \tag{B.30}$$

On vérifie immédiatement grâce à (B.20) que :

$$\text{si } p \neq q, \varphi_h^1(\lambda_p^\alpha,\lambda_q^\beta) = 0, \forall \alpha,\beta \in \{0,1\}. \tag{B.31}$$

Par conséquent, si on ordonne judicieusement la base (λ_i^α) de manière à ce que les deux degrés de liberté associés à un même nœud se suivent, soit, si on choisit la base :

$$\mathcal{B} = \left\{\lambda_1^0, \lambda_1^1, \lambda_2^0, \lambda_2^1, \dots, \lambda_N^0, \lambda_N^1\right\}, \tag{B.32}$$

alors **la matrice de la forme bilinéaire φ_h^1 dans la base (λ_i^α) est diagonale par bloc 2x2**. On n'obtient donc pas une matrice diagonale, mais celle ci reste tout de même très simple à inverser, puisque cette inversion se ramène à l'inversion très facile de N matrices 2x2. Il s'agit dans ce cas de *quasi condensation de masse*.

Mais φ_h^1 **n'est malheureusement pas définie positive**. En effet, on vérifie que chaque bloc de cette matrice est donné par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.33}$$

Donc la matrice de masse approchée n'est pas inversible, ce qui conduit à un problème discret mal posé.

On voit ici que la difficulté qu'on rencontre pour obtenir la condensation de masse dans V_h^1 est liée à la nécessité d'introduire des dérivées dans la formule de quadrature choisie pour approcher le calcul de la matrice, ce qui conduit à une forme bilinéaire approchant L^2 qui n'est pas un produit scalaire. En effet, la symétrie du problème de la recherche d'une formule de quadrature implique d'avoir des degrés de liberté négatifs. On aboutit donc à un problème discret mal posé. On imagine bien que de telles difficultés ne peuvent qu'empirer en dimension 2, d'autant plus que le triangle d'Argyris invoque des dérivées du deuxième ordre.

Remarque B.2 *On pourrait aborder le problème un peu plus généralement, sous un angle légèrement différent, suivant la démarche de Haugazeau et Lacoste ([29]) proposée pour la condensation de masse dans l'espace $H(\mathrm{div}, \omega)$. Il s'agit de chercher une approximation de $\int uv$ à l'aide d'une forme bilinéaire symétrique φ_h dans laquelle la base (λ_i^α) est automatiquement orthogonale, soit :*

$$\varphi_h(u,v) = \sum_{i,\alpha} \left(\omega_i^0 u(x_i) v(x_i) + \omega_i^1 u'(x_i) v'(x_i) \right)$$

et on détermine les coefficients ω_i^0 et ω_i^1 de manière à ce que cette approximation soit exacte au moins pour u et v constantes, pour espérer la consistance de la méthode. Malheureusement, cette procédure aboutit également à des problèmes discret mal, puisqu'on obtient des coefficients diagonaux nuls ou négatifs.

Annexe C

Solutions stationnaires de l'équation de corde amortie

L'équation de corde vibrante avec deux termes d'amortissement l'un fluide et l'autre viscoélastique est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x,t) - c_c^2 \left(1 + \beta \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + R_c \partial_t u_c = 0, \forall x \in]0, l_c[, \forall t, \tag{C.1}$$

Cherchant des solutions de (C.1) de la forme $u_c(x,t) = \alpha(t)\xi_n(x)$, où $(\xi_n(x))$ est la base des modes propres du laplacien monodimensionnel avec conditions de Dirichlet (voir section 1.2.1.c), on est amené à résoudre l'équation différentielle ordinaire suivante, qui n'est autre que l'équation de l'oscillateur amorti :

$$\boxed{\ddot{\alpha}(t) + (R_c + \beta\omega_n^2)\dot{\alpha}(t) + \omega_n^2 \alpha(t) = 0.} \tag{C.2}$$

La résolution de cette équation est ultra classique. Il nous faut chercher les racines du polynôme caractéristique :

$$r^2 + (R_c + \beta\omega_n^2)r + \omega_n^2 = 0. \tag{C.3}$$

On note $C_n = \dfrac{R_c + \beta\omega_n^2}{2}$ le facteur d'amortissement du mode n. On distingue trois cas suivant le signe du discriminant :

$$\Delta = (R_c + \beta\omega_n^2)^2 - 4\omega_n^2 = \beta^2\omega_n^4 + (2\beta R_c - 4)\omega_n^2 + R_c^2$$

- Si $\Delta < 0$, alors la solution est une sinusoïde amortie :

  $$\alpha(t) = e^{-C_n t}(A\cos(\tilde{\omega}_n t) + B\sin(\tilde{\omega}_n t)), A, B \in \mathbb{R},$$

  où

  $$\tilde{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1 - \frac{C_n^2}{\omega_n^2}}.$$

Dans ce cas le coefficient d'amortissement C_n est suffisamment faible pour que le mode n oscille encore. On parle d'oscillation faiblement amortie de pseudo pulsation $\tilde{\omega}$ et de facteur d'amortissement C_n.

- Si $\Delta = 0$, alors on parle d'amortissement critique. Ce cas correspond au retour à la position d'équilibre à vitesse maximale. La solution est donnée par :

$$\alpha(t) = e^{-C_n t}(At + B), A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta > 0$, alors on parle de solution fortement amortie, il n'y a plus du tout d'oscillations.

$$\alpha(t) = Ae^{-C_n(1+\sqrt{1-\omega_n^2/C_n^2}t} + Be^{-C_n(1-\sqrt{1-\omega_n^2/C_n^2}t}, A, B \in \mathbb{R}.$$

Remarque C.1 *Notons que dans tous les cas, il s'agit effectivement d'amortissement. En effet, puisque* $C_n > 0$, *on vérifie dans les trois cas ci dessus que :*

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = 0$$

Il nous faut alors analyser le signe de Δ. On peut écrire $\Delta = \psi(\omega_n^2)$ avec

$$\psi(x) = \beta^2 x^2 + (2\beta R_c - 4)x + R_c^2.$$

L'étude du signe de ψ pour $x \geq 0$ nous conduit à calculer son discriminant réduit :

$$\delta = (\beta R_c - 2)^2 - \beta^2 R_c^2 = 4(1 - \beta R_c).$$

On distingue donc deux situations :

- $\beta R_c \geq 1$

  Alors $\delta \leq 0$ et ψ est toujours positive. Tous les modes sont fortement amortis.

- $\beta R_c < 1$

  Alors ψ possède deux racines réelles distinctes positives . On en déduit qu'il existe des modes faiblement amortis pour

$$\frac{2 - \beta R_c - 2\sqrt{1 - \beta R_c}}{\beta^2} < \omega_n^2 < \frac{2 - \beta R_c + 2\sqrt{1 - \beta R_c}}{\beta^2}.$$

Pour y voir un peu plus clair, contentons nous de regarder une situation réelle. En pratique le coefficient d'amortissement visqueux β est très faible (typiquement pour une corde de Mi grave, il est de l'ordre de $10^{-7}s$), et le coefficient d'amortissement fluide est de l'ordre de $1s^{-1}$. On est très largement dans le second cas ($\beta R_c < 1$). En outre, puisqu'on a même $R_c\beta \ll 1$, l'expression précédente se simplifie : le n$^{\text{ème}}$ mode est faiblement amorti pour

$$\frac{R_c^2}{4} < \omega_n^2 < \frac{4}{\beta^2},$$

soit ici pour $0.5 < \omega_n < 2.10^7$. Dans ce cas, en se restreignant aux fréquences audibles, il ne reste que des modes faiblement amortis.

Bibliographie

[1] S. Berge et A. Chaigne A. Le Pichon. Comparison between experimental and predicted radiation of a guitar. *Acustica united with acta acustica*, 84:136–145, 1998.

[2] Douglas N. Arnold, Franco Brezzi, and Jim Douglas. PEERS: A new mixed finite element for plane elasticity. *Japan J. Appl. Math.*, 1:347–367, 1984.

[3] A. Bamberger, G. Chavent, and P. Lailly. Etude de schémas numériques pour les équations de l' élastodynamique linéaire. Technical Report 41, INRIA, 1980. Rapport Interne.

[4] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Comp. Physics.*, 114:185–200, 1994.

[5] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications.

[6] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springen–Verlag, 1991.

[7] F. Brezzi and P.-A. Raviart. Mixed finite element methods for 4th order elliptic equations. In *Topics in numerical analysis, III (Proc. Roy. Irish Acad. Conf., Trinity Coll., Dublin, 1976)*, pages 33–56. Academic Press, London, 1977.

[8] Antoine Chaigne. On the use of finite differences for musical synthesis. Applications to plucked stringed instruments. *Journal d'Acoustique*, 5:181–211, 1992.

[9] Antoine Chaigne. *Ondes acoustiques*. Editions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001.

[10] Antoine Chaigne. Où en sont les recherches sur la guitare en 2001 ? . *Les Cahiers de la Guitare*, 25, 2002. à paraître.

[11] D. Chapelle. Une formulation mixte de plaque ou l'effort tranchant est approché dans son espace naturel. Technical report, INRIA, 1993.

[12] Françoise Chatelin. *Valeurs propres de matrices*. Masson, Paris, 1988.

[13] O. Christensen and R.B. Vistisen. A simple model for low-frequency guitare function. *J. Acoust. Soc. Am.*, 68:758–766, 1980.

[14] P. G. Ciarlet and P.-A. Raviart. A mixed finite element method for the biharmonic equation. In *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1974)*, pages 125–145. Publication No. 33. Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin-Madison, Academic Press, New York, 1974.

[15] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, eds, 1978.

[16] Philippe G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. II*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1997. Theory of plates.

[17] F. Collino. Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'onde dans des domaines rectangulaires. Technical Report 1790, INRIA, Novembre 1992.

[18] F. Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems: Application to electromagnetic scattering. *J.C.P*, 138(2):907–938, December 1997.

[19] B. David. *Caractérisations acoustiques de structures vibrantes en atmosphère raréfiée*. PhD thesis, Université du Paris 6, 1999.

[20] Vincent Doutaud. *Étude expérimentale et simulations numériques d'instruments de percussion à clavier*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Télécommunications, 1996.

[21] T. Dupont. l^2-estimates for galerkin methods for second order hyperbolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10(5):880–889, 1973.

[22] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21.

[23] A. Elmkies and P. Joly. Éléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell: le cas 2D. *C. R. Acad. Sci.*, 324(11):1287–1293, Novembre 1997.

[24] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139):629–651, Jully 1977.

[25] C. Lambourg et A. Chaigne. Measurements and modeling of the admittance matrix at the bridge in guitars. In *Proc. SMAC 93*, pages 448–453, Juillet.

[26] G. Cohen et al. *Méthodes numériques d'ordre élevé pour les ondes en régime transitoire*. Ecole des ondes INRIA, 1994.

[27] D.N. Arnold et F. Brezzi. Some new elements for the reissner-mindlin plate model. In J.L. Lions and C. Baiocchi, editors, *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications*, pages 287–292. Masson, 1993.

[28] P.A. Raviart et J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1998.

[29] Y. Haugazeau et P. Lacoste. Condensation de la matrice pour les éléments finis de $h(\underline{\mathrm{rot}})$. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 316, Série I, 1993.

[30] P.G. Ciarlet et P.A. Raviart. A mixed finite element method for the biharmonic equation. In C. de Boor, editor, *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, pages 125–145. Academic Press, 1974.

[31] M. Fortin et R. Sternberg F. Brezzi. Error analysis of mixed-interpolated elements for reissner-mindlin plates. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1(2), 1991.

[32] Neville H. Fletcher and Thomas D. Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[33] Thierry Fouquet. *Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell*. PhD thesis, Université Paris Dauphine - Paris IX, 2000.

[34] Sylvain Garcès. *Application des méthodes de domaines fictifs à la modélisation des structures rayonnantes tridimensionnelles*. PhD thesis, ENSAE, 1998.

[35] V. Girault and R. Glowinski. Error analysis of a fictitious domain method applied to a dirichlet problem. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 12(3):487–514, 1995.

[36] R. Glowinski. Approximations externes,par éléments finis de lagrange d'ordre un et deux, du problème de dirichlet pour l'opérateur biharmonique. méthodes itératives de résolution des problèmes approchés. In J.J.H. Miller, editor, *Topics in Numerical Analysis*, pages 123–171. Academic Press, 1973.

[37] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Periaux. A fictitious domain method for dirichlet problem and applications. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin.*, 111(3–4):283–304, 1994.

[38] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, third edition, 1996.

[39] Sorensen Hibbit, Karlson. Abaqus, version 5.6., 1998.

[40] L. Hiller and P. Ruiz. Synthesizing musical sounds by solving the wave equation for vibrating objects. Part I . *Journal of the audio Engineering Society*, 19(6):462–470, 1971.

[41] T.J.R. Hughes. *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, 1987.

[42] E.V. Jannson. A study of acoustical and hologram interferometric measurements on the top plate vibrations of of a guitar . *Acustica*, 25, 1971.

[43] P. Joly and L. Rhaouti. Domaines fictifs, éléments finis $h(div)$ et condition de neumann: le problème de la condition inf-sup. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Série I:1255–1230, 1999.

[44] Patrick Joly. *Analyse et approximation de modèles de propagation d'ondes*. Ecole Polytechnique, 2001.

[45] F. Brezzi et M. Fortin K.J. Bathe. Mixed-interpolated elements for reissner-mindlin plates. *International Journal for Numerical Methods in Enginerering*, 28, 1989.

[46] C. Lambourg. *Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes — Application à la synthèse sonore.* PhD thesis, Académie de Nantes, Université du Maine, 1997.

[47] A.W. Leissa. Vibrations of Plates. *NASA SP-160, NASA*, 1969. reprinted by Acoustical Society of America, Woodbury NY, 1993.

[48] C. Santamaria M.J. Elejabarrieta, A. Ezcurra. Vibrations behaviour of the guitar soundboard analysed by the Finite Element Method. *acta acustica*, 87:128–136, September 2000.

[49] Jindřich Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.

[50] J.C. Nédélec. Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$. *Numer. Math.*, 35:315–341, 1980.

[51] J.C. Nedelec. *Notions sur les techniques d'éléments finis*. Ellipses, 1991.

[52] Serge Piperno. Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2D inviscid aeroelastic simulations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 25(10):1207–1226, 1997.

[53] P.A. Raviart and J.M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. In *Lecture Notes in Mathematics*, number 606 in 1, pages 292–315. Proc. of math. aspects on the finite element method, Berlin Heidelberg New York: Springer, 1977.

[54] Leila Rhaouti. *Domaines fictifs pour la modélisation d'un probème d' interaction fluide-structure: simulation de la timbale*. PhD thesis, Paris IX, 1999.

[55] B. E. Richardson and G. W. Roberts. . In Royal Swedish Academy of Music., editor, *Proc. SMAC 83*, pages 311–332, 1985.

[56] Bernard E. Richardson. The acoustical development of the guitar . *Catgut Acoust. Soc. J.*, 2(5 (Series II)):181–211, May 1994.

[57] T. Sakata and K. Hosokawa. Vibrations of clamped orthotropic rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 125(3):429–439, January 1988.

[58] I. Sloane. *Classical guitar construction* . Dutton and Co. Ltd., Inc., New York, 1966.

[59] Patrick Le Tallec. *Dynamique des structures*. Ecole Polytechnique, 1995.

[60] J. Popp T.D. Rossing and D Polstein. The adjustement of mode frequencies in guitars : a stydy by means of holographic interferometry and finite element analysis. In Royal Swedish Academy of Music., editor, *Proc. SMAC 83*, pages 285–302, 1985.

[61] J. M. Thomas. *Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes*. PhD thesis, Paris 6, 1977.

[62] N. Tordjman. *Eléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*. PhD thesis, Univ. Paris IX, 1995.

[63] Chrysoula Tsogka. *Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans des milieux fissurés*. PhD thesis, Paris IX, 1999.

Résumé

Le propos de cette étude est la modélisation numérique de la guitare acoustique dans le domaine temporel. La méthode consiste en l'élaboration d'un modèle qui s'attache à décrire les phénomènes vibratoires et acoustiques mis en jeu depuis le pincer de corde jusqu'au rayonnement 3D du son. La corde est modélisée par une équation des ondes amortie 1D. Elle est couplée à la table d'harmonie via le chevalet. Le mouvement de la table est régi par le modèle de plaque mince amortie de Kirchhoff--Love pour un matériau orthotrope et hétérogène, percée d'un trou et encastrée sur son bord externe. Le reste du corps de la guitare (fond, bords, manche...) est supposé rigide. La table rayonne à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité. *La modélisation complète du champ acoustique rayonné est une approche originale comparativement aux études antérieures portant sur la guitare*.

On obtient un système d'équations aux dérivées partielles que l'on résout numériquement dans le domaine temporel. *On utilise une méthode spectrale spécifique pour la résolution de l'équation de plaque dynamique de Kirchhoff-Love*. Pour l'équation de corde et l'équation des ondes acoustiques, on utilise une méthode mixte standard pour l'approximation spatiale et des différences finies centrées en temps. *Le problème d'interaction fluide-structure est résolu par une méthode de domaines fictifs* qui permet d'approcher finement la géométrie de la guitare tout en utilisant un maillage cubique régulier pour le calcul du champ sonore 3D. *L'originalité du schéma de résolution du modèle est un couplage stable entre une méthode de résolution exacte en temps et une méthode discrète.* Un nombre important de simulations numériques est réalisées, montrant la validité de la méthode et les très riches potentialités d'une telle approche.

MOTS CLEFS : *modèle de Kirchhoff-Love, interaction fluide-structure, phénomènes d'amortissement, éléments finis mixtes, condensation de masse, dispersion numérique, méthode de domaines fictifs, méthode spectrale, méthodes énergétiques, stabilité.*

Abstract

The purpose of this study is the time-domain numerical modelisation of the acoustic guitar. The method consists in the modeling of the vibratory and acoustical phenomena from the initial pluck to the 3-D radiation. An idealized plucking force is acting on a 1-D damped string model. The string is coupled to the soundboard via the bridge. The soundboard is modeled as an orthotropic heterogeneous damped Kirchhoff-Love plate, with a soundhole, clamped at its boundaries. The other parts of the body (back, neck, sides...) are assumed to be perfectly rigid. The plate radiates both inside the cavity and in the external free field. *The modeling of the complete 3D sound field is a new approach comparing to almost all previous works on the guitar*, where the cavity is taken into account as a simple oscillator.

We obtain a system of partial differential equations which are solved numerically in the time-domain. We use *a specific spectral method for solving the Kirchhoff-Love's dynamic plate model*. For the string equation and the sound radiation, we use a standard mixed method for the space discretization and centered finite differences in time. *The fluid-structure interaction is solved by the use of the fictitious domain method* which permits us to take into account the geometry of the guitar inside a uniform cubic mesh for the calculation of the 3D sound radiation. *The originality of the proposed scheme is a stable coupling method between a continuous time resolution and a discrete one*. A great number of numerical simulations are realized, which show the validity of the method and the very large possibilities of this approach.

KEYWORDS : *Kirchhoff-Love's plate model, fluid-structure interaction, damping mechanisms, mixed finite elements, mass lumping, numerical dispersion , fictitious domain method, spectral method, energy method, stability.*