Vibrations non linéaires et rayonnement acoustique de structures minces de type haut-parleur

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 25 Octobre 2007

pour l'obtention du

Doctorat de l'École Polytechnique

par

Nicolas Quaegebeur

Composition du jury

Directeur de thèse :	Antoine Chaigne
Président :	Jean-Louis Guyader
Rapporteurs :	Alexandre Garcia Philippe Herzog
Examinateurs :	Toufic Abboud Guy Lemarquand

École Nationale Supérieure de Techniques Avancées - Unité de Mécanique

Mis en page avec la classe thloria.

Vibrations non linéaires et rayonnement acoustique de structures minces de type haut-parleur

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 25 Octobre 2007

pour l'obtention du

Doctorat de l'École Polytechnique

par

Nicolas Quaegebeur

Composition du jury

Directeur de thèse :	Antoine Chaigne
Président :	Jean-Louis Guyader
Rapporteurs :	Alexandre Garcia Philippe Herzog
Examinateurs :	Toufic Abboud Guy Lemarquand

École Nationale Supérieure de Techniques Avancées - Unité de Mécanique

Mis en page avec la classe thloria.

"Comment pouvez-vous savoir
quelle part vous aurez
dans la future solution
des destins de l'humanité ?"

Fiodor Dostoïevski, L'Idiot, 1868.

Remerciements

"Il faut se jeter dans la création comme Curtius dans le gouffre" disait Balzac. A présent je comprends mieux pourquoi l'on peut sans hésitations comparer la labeur d'une thèse à un gouffre... Un gouffre de temps et d'énergie mais ne l'oublions pas de plaisir avant tout. Un gouffre ouvert il y a maintenant trois ans sous la direction d'Antoine Chaigne que je ne saurais assez remercier pour sa confiance, son intêret scientifique et sa patience vis à vis de mes questionnements divers et variés. Ce fut un plaisir de recevoir ses conseils et ses enseignements tout au long de cette formation.

Je ne pourrais continuer ces remerciements sans mentionner le travail d'Alexandre Garcia et de Philippe Herzog qui ont accepté de juger ce manuscrit de thèse. Sans leurs précieux conseils, celui-ci n'aurait pas vu le jour sous cette forme. De même je tiens à remercier Jean-Louis Guyader et Toufic Abboud d'accepter de consacrer de leur temps (et je sais combien il est précieux) afin de faire partie du jury de thèse. Enfin, pour clore le registre des remerciements officiels, je tiens à souligner la confiance de Guy Lemarquand sans qui toute la partie expérimentale n'aurait été possible. Un grand merci à tous !

Et maintenant, mettons au grand jour tous ceux dont les noms n'apparaissent pas sur la couverture mais que ce travail a touché, de près comme de loin. En premier lieu, ma reconnaissance se tournera vers Cyril Touzé et Olivier Thomas qui ont accepté, sans même avoir recours à la torture, de relire articles et manuscrit et d'apporter les corrections plus que nécessaires à ma maladresse. Une pensée bien chaleureuse envers les compagnons de galère, Kevin en premier lieu, qui a supporté (et c'est peu dire) pendant deux ans ma compagnie et ma musique de sauvage dans le bureau, Samuel (Maurice pour les intimes) pour sa jovialité et le dernier en date Cédric pour son sens du rythme et de la fête hors paires !

Ensuite une pensée particulière pour tous les membres de l'Unité de Mécanique de l'ENSTA, Régine, Karine et Mireille (un peu de galanterie tout de même), Olivier et Olivier, Nicolas, Thierry (à charge de revanche au badminton) et Alain pour leur présence et leur accueil, tout simplement.

Bien entendu, je ne peux refermer cette page de remerciements sans adresser toute ma gratitude à mes parents, mes soeurs et toute ma famille qui m'ont soutenu tout au long de cette aventure. Puis n'oublions pas tous ceux qui ont fait ce que je suis aujourd'hui, à savoir les amis de toujours (Tito, Bibi cette thèse c'est un peu la votre aussi), mes chers collocataires (Julie, Sylvain, Fabien merci d'avoir supporté mes sifflements dans la colloc pendant tout ce temps), et tous ceux qui m'ont fait partagé de bons moments durant ces trois ans (pas de jaloux, vous êtes classés par ordre alphabétique Agathe, Albert, Bastien, Claire, Elodie, Estelle, Julien, Manu, Maria, Marianne, Marion, Mathieu, Maud, Nico, Olivier(s), Pat, Phanette, les Gratkipoils et associés, les Molutronics au complet, "It's a miracle" , le Yourte Club), et encore désolé pour ceux que j'ai oublié mais ils se reconnaitront et j'espère qu'ils ne m'en voudront pas trop ! ! !

S'il fallait réouvrir ce gouffre aujourd'hui, j'y réfléchirais à deux fois mais je pense bien que je le referais ! !

Résumé

Si la forme et les matériaux utilisés dans la facture des membranes de haut-parleurs ont une influence notoire sur la qualité de restitution, leur étude reste majoritairement empirique. Cette thèse propose une modélisation du comportement vibratoire et acoustique de haut-parleurs en incluant les phénomènes non linéaires apparaissant en régime de grandes amplitudes.

Dans la première partie, l'influence de la forme et des matériaux sur le comportement vibratoire d'une structure de haut-parleur idéalisée est étudiée de manière théorique en utilisant les analogues dynamiques des équations de Von-Kármán et une approche modale.
La seconde partie propose une méthode de résolution du problème électromécanique incluant tous les types de non-linéarités connus. La formulation sous forme d'espace d'état est exprimée lorsque l'on prend en compte les modes de résonance de la structure.
Dans la troisième partie, le calcul du champ de pression rayonné par une structure axisymétrique est approché par l'intégrale de Rayleigh. La résolution temporelle se fonde sur la technique de Réponses Impulsionnelles Spatiales qui permet un gain de temps de calcul important.
Enfin la quatrième partie propose une analyse expérimentale sur un prototype de haut-parleur sans suspension développé au LAUM par Guy Lemarquand. Mesures et prédictions en régime linéaire et non linéaire sont comparées et l'influence des non-linéarités géométriques est discutée.

Mots-clés: haut-parleur, électroacoustique, reproduction sonore, vibrations non linéaires, rayonnement temporel, non-linéarités géométriques

Abstract

It has been experimentally shown that the shape and the materials of loudspeaker membranes have an influence on sound reproduction. From those observations the present thesis aims at modeling the nonlinear behavior of loudspeakers subjected to large amplitude motions over the audible bandwidth (including electrical and geometrical nonlinearities).

The first part describes a theoretical approach of the influence of materials and shape on the vibration pattern of an idealized loudspeaker. The dynamic analog of the Von-Kármán equations is used and the solutions are projected over the linear modes of the structure.
The second part proposes a resolution scheme of the electromechanical couplings using the state space formalism. The problem is first developed in the case of an unique mode of vibration and then extended including resonance modes and geometrical nonlinearities of the structure.
In the third part, a time-domain approach of the radiation problem based on the Rayleigh integral is proposed. The method uses the Spatial Impulse Response technique which allow to reduce calculation costs directly in the time-domain.
Finally, the present approach is applied in the case of a prototype developed at the LAUM by Guy Lemarquand. A good agreement between measurements and predictions using the present model can be achieved and the influence of geometrical nonlinearities on sound radiation is discussed.

Keywords: loudspeaker, electroacoustics, sound reproduction, nonlinear vibrations, time-domain radiation, geometrical nonlinearities

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 La transduction électroacoustique . . . 2

1.1.1 But de la transduction électroacoustique . . . 2

1.1.2 Technologies de restitution . . . 3

1.2 Le haut-parleur électrodynamique . . . 5

1.2.1 Description et historique . . . 5

1.2.2 Ordres de grandeur . . . 6

1.2.3 Limitations et distorsions . . . 7

1.3 Modèles existants . . . 11

1.3.1 Variables localisées : modèle de Thiele et Small . . . 11

1.3.2 Autres modèles mécaniques et acoustique . . . 13

1.4 Vers un modèle étendu . . . 14

1.4.1 Cadre de l'étude . . . 14

1.4.2 Organisation du manuscrit . . . 14

I Vibrations non linéaires de structures de type haut-parleur

2 Modélisation de la structure plane **21**

2.1 Introduction . . . 22

2.2 Description géométrique et hypothèses . . . 22

2.2.1 Géométrie du problème . . . 22

2.2.2 Hypothèses . . . 23

2.3 Formulation du problème . . . 24

2.3.1 Equations locales du déplacement 24
2.3.2 Conditions aux limites 25
2.3.3 Adimensionnement des équations locales 25
2.3.4 Décomposition modale et projection 28
2.4 Validation du modèle 31
2.4.1 Cas limites 31
2.4.2 Cas de la plaque plane encastrée 31
2.4.3 Cas d'une structure centrale infiniment rigide 31
2.5 Influence des propriétés géométriques et mécaniques 33
2.5.1 Matériaux et variables adimensionnées 33
2.5.2 Influence des paramètres matériaux 34
2.5.3 Influence du paramètre géométrique 39
2.6 Conclusion 42

3 Modélisation de la structure non plane 43
3.1 Formulation du problème mécanique dans le cas de structures non planes . . 44
3.1.1 Description du problème 44
3.1.2 Hypothèses et validité 44
3.1.3 Equations du mouvement dans l'ancienne base 46
3.1.4 Changement de base 46
3.2 Influence de la forme au niveau mécanique 47
3.2.1 Forme de la suspension 48
3.2.2 Forme de la partie centrale 51
3.3 Conclusion 55

4 Bilan vibroacoustique : Influence relative de la forme et du matériau au niveau mécanique 57
4.1 Introduction 58
4.2 Sur le comportement vibratoire des structures de type haut-parleur 59
4.2.1 Au niveau linéaire 59
4.2.2 En régime de grandes amplitudes 61
4.3 Sur l'efficacité de rayonnement des structures de type haut-parleur 62
4.3.1 Définition 62
4.3.2 Influence de la forme et des matériaux 63
4.4 Tableau récapitulatif 67

II Résolution du problème électromécanique avec non-linéarités géométriques

5 Résolution dans le cas d'un unique mode de vibration **73**

5.1 Introduction . . . 74

5.2 Modèle de Thiele et Small . . . 74

5.3 Non-linéarités dans les haut-parleurs . . . 75

5.3.1 Non-linéarités électriques . . . 75

5.3.2 Non-linéarités mécaniques . . . 77

5.3.3 Non-linéarités acoustiques . . . 78

5.4 Formulation en variables d'état . . . 78

5.4.1 Régime linéaire . . . 78

5.4.2 Régime de grandes amplitudes . . . 79

5.5 Validation et cas test . . . 81

5.5.1 Présentation . . . 81

5.5.2 Résultats . . . 83

5.6 Conclusion : modélisation basses fréquences d'un haut-parleur en régime de grandes amplitudes . . . 84

6 Résolution dans le cas de multiples modes de vibration **85**

6.1 Introduction . . . 86

6.2 Excitation de la structure . . . 87

6.3 Formulation en variables d'état avec inclusion des non-linéarités géométriques 88

6.4 Application : étude d'un haut-parleur classique en basses et moyennes fréquences 91

6.4.1 Présentation du cas test . . . 91

6.4.2 Paramètres du haut-parleur . . . 91

6.4.3 Comparaison entre mesure et simulation . . . 96

6.5 Conclusion : modélisation en régime de grandes amplitudes dans la bande audible . . . 98

III Rayonnement acoustique de structures circulaires minces soumises à de grandes amplitudes de vibration

7 Formulation du problème **103**

7.1 Introduction . . . 104

7.1.1 Rayonnement temporel de sources de révolution . . . 104

7.1.2 Géométrie du problème . . . 105

7.2 Formulation temporelle du problème de rayonnement . . . 107

7.2.1 Formulation générale . . . 107

7.2.2 Hypothèses de calcul . . . 110

7.3 Calcul de l'intégrale de Rayleigh dans le domaine temporel . . . 112

7.3.1 Méthodes existantes . . . 112

7.3.2 Définition de la nouvelle base . . . 113

7.3.3 Changement de variable . . . 116

7.4 Conclusions et intérêt de la formulation temporelle . . . 118

8 Application : rayonnement de sources sphériques et coniques, convexes et concaves **119**

8.1 Introduction . . . 120

8.2 Source plane circulaire . . . 120

8.3 Coques sphériques concaves et convexes . . . 122

8.3.1 Pression dans l'axe . . . 122

8.3.2 Pression hors axe . . . 127

8.4 Sources coniques, concaves et convexes . . . 131

8.4.1 Pression dans l'axe . . . 131

8.4.2 Pression hors axe . . . 133

8.5 Sources de forme complexe de type haut-parleur . . . 134

8.5.1 Formulation dans le cas de profils non monotones . . . 134

8.5.2 Résultats pour une géométrie de type haut-parleur . . . 134

8.6 Conclusion . . . 138

8.6.1 Rayonnement transitoire de structures circulaires de forme quelconque 138

8.6.2 Sur la forme des haut-parleurs . . . 139

IV Analyse expérimentale

9 Analyse expérimentale : influence de la forme et du matériau 145
9.1 Présentation des prototypes étudiés . . . 146
9.1.1 Principe de fonctionnement et avantages . . . 147
9.1.2 Profils étudiés . . . 147
9.1.3 Protocole expérimental et matériel utilisé . . . 148
9.2 Mesures et modéle en régime linéaire . . . 149
9.2.1 Etude mécanique . . . 151
9.2.2 Etude acoustique . . . 152
9.3 Mesures et modéle en régime de grande amplitude . . . 157
9.4 Conclusion . . . 158

10 Conclusions générales et perspectives 159
10.1 Rayonnement de structure minces pour de grandes amplitudes de vibration . 160
10.2 Influence de la forme et du matériau . . . 161
10.3 Domaines d'application et perspectives . . . 166

Bibliographie 167

Annexes

A Calcul des déformées modales et des pulsation propres 177

B Equilibrage harmonique pour l'estimation des paramètres mécaniques non linéaires 179

C Calcul de l'intégrale de Rayleigh 183

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 La transduction électroacoustique 2
1.1.1 But de la transduction électroacoustique 2
1.1.2 Technologies de restitution 3
Le haut-parleur à plasma 3
Le haut-parleur électrostatique 3
Le haut-parleur à ruban 4
Le haut-parleur électrodynamique 4
1.2 Le haut-parleur électrodynamique 5
1.2.1 Description et historique 5
1.2.2 Ordres de grandeur 6
1.2.3 Limitations et distorsions 7
Distortions au niveau linéaire 7
Distortions en régime de grandes amplitudes 8
1.3 Modèles existants 11
1.3.1 Variables localisées : modèle de Thiele et Small 11
1.3.2 Autres modèles mécaniques et acoustique 13
En régime linéaire 13
En régime de grandes amplitudes 13
1.4 Vers un modèle étendu 14
1.4.1 Cadre de l'étude 14
1.4.2 Organisation du manuscrit 14

1.1 La transduction électroacoustique

1.1.1 But de la transduction électroacoustique

Par transduction acoustique, on sous-entend la transformation d'un signal électrique $U_e(t)$ délivré par un amplificateur de puissance en un signal de pression acoustique $P(\mathbf{x}, t)$ dépendant de la position de l'auditeur $\mathbf{x}$. Dans le cadre de la reproduction de signaux acoustiques (et spécifiquement de signaux musicaux), cette transduction doit est assurée au moins sur la bande passante de l'oreille, à savoir de 20 Hz à 20 kHz.

De plus, dans une optique de fidélité de restitution, on s'attend à ce que la réponse du système soit indépendante de la fréquence et de l'amplitude du signal, c'est-à-dire que toutes les fréquences (comprises dans la bande passante audible) soient amplifiées d'un même gain G indépendant de la fréquence et du niveau d'excitation. Ceci se traduit, sous forme spectrale par une réponse en fréquence du système plate et indépendante du niveau d'excitation, comme représenté figure 1.1.

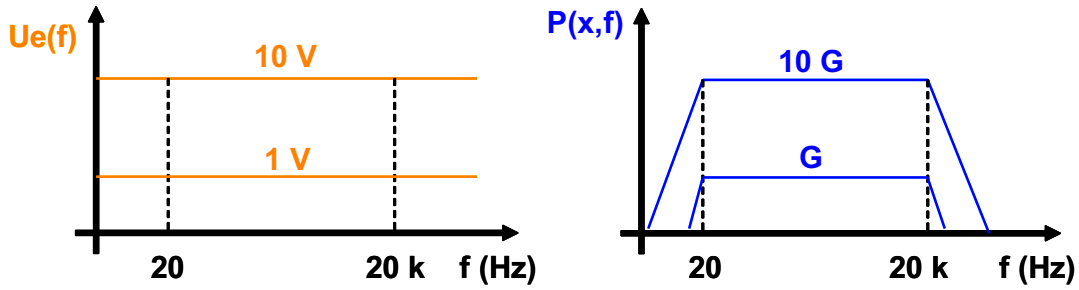


FIG. 1.1 – Réponse en fréquence idéale d'un transducteur électroacoustique. Le gain de transduction est noté G et supposé indépendant de la fréquence (entre 20Hz et 20kHz) et de l'amplitude du signal d'entrée.

Concernant la réponse en phase, il est communément admis que la réponse en phase idéale d'un haut-parleur doit être linéaire par rapport à la fréquence. Cependant, des études perceptives menées sur différents haut-parleurs [46, 47, 75, 125, 126] ont montré que cette idée reçue est à prendre avec précaution du fait que :

• les distorsions de phase (évolutions non linéaire de la phase avec la fréquence) sont audibles de manière très subtile et seulement sous certaines conditions d'écoute [75],

• le degré de subtilité dépend de la nature du signal, de son volume, des conditions d'enregistrement et d'écoute. Certaines combinaisons de ces conditions peuvent rendre ces distorsions inaudibles [46, 47],

• Dans le cas d'une écoute dans une salle, l'acoustique de celle-ci masque les effets dus à la source, de telle sorte que les distorsions de phase sont généralement inaudibles [125, 126].

Aussi, par la suite, aucune spécification particulière n'est requise sur la dépendance de la phase avec la fréquence ou l'amplitude.

1.1.2 Technologies de restitution

Cette partie se veut un inventaire (non exhaustif) des différentes technologies de restitution audio qui ont vu le jour depuis environ un siècle. Pour plus de détails, on se référera à [34, 57]. Le but étant de restituer un signal de pression sonore, différentes techniques ont été développées en proposant de mettre directement l'air en vibration (haut-parleur à plasma), en faisant vibrer une membrane fine (haut-parleur électrostatique) ou en faisant vibrer une structure fine de type plaque (haut-parleur électrodynamique classique ou à ruban). Dans les exemples présentés, on ne retient que les exemples de transducteurs analogiques (les haut-parleurs numériques [50] sont laissés de coté).

Le haut-parleur à plasma

Le principe du haut-parleur à plasma est de faire directement varier la pression de l'air par l'intermédiaire d'une décharge électrique. Le principe est dérivé des expériences de W. Duddell en 1900. Ce type de haut-parleur est très peu utilisé en pratique car il possède de nombreux inconvénients qui le rendent inutilisables dans une utilisation grand public, à savoir, une inefficacité en basses fréquences (due à des mouvements très faibles d'air autour de l'arc électrique), la nécessité d'une alimentation continue afin d'ioniser un gaz (de l'hélium en général) et la mise à disposition de recharges de gaz à ioniser. Tous ces inconvénients ont fait de ce produit un objet de recherche inutilisé dans l'industrie du haut-parleur.

Le haut-parleur électrostatique

Le haut-parleur électrostatique (dont le premier brevet a été déposé en 1953 par A. Janszen) est constitué d'une fine membrane (classiquement en mylar) qui reçoit un revêtement semi-conducteur de grande résistance électrique (de l'ordre de $10^9\Omega$/cm). Ce diaphragme très mince est placé entre deux électrodes perforées (pour laisser passer l'onde sonore) attaquées respectivement par le secondaire d'un transformateur qui reçoit à son primaire la modulation en provenance de l'amplificateur. Ainsi, quand un signal audio alternatif est appliqué au primaire du transformateur, il apparaît au secondaire une tension polarisée de plusieurs centaines de volts qui est appliquée à la membrane qui quitte sa position de repos pour être attirée vers l'une ou l'autre des armatures qui reçoit le signal déphasé. Le déséquilibre de potentiel provoque le déplacement de la membrane, suivant la polarisation du signal audio. Un schéma de fonctionnement est présenté figure 1.2.

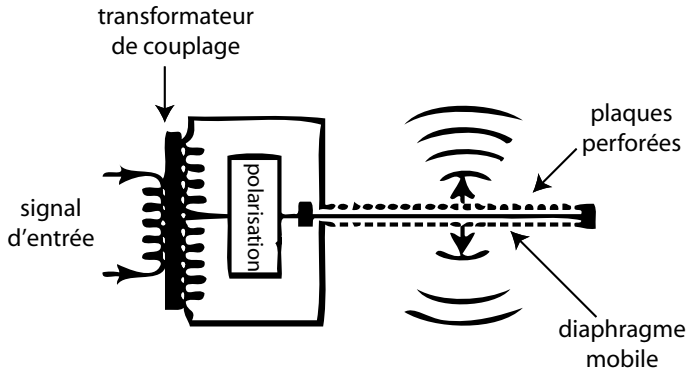


FIG. 1.2 – Principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrostatique.

Les avantages du principe résident dans une masse mobile négligeable de grande surface avec une réponse transitoire ultra rapide et un fonctionnement en piston sur une large gamme de fréquences. En revanche, le rendement est faible, et nécessite des amplis à la fois stables (charge capacitive) et capables de fournir du courant (impédance qui chute dans l'aigu souvent inférieure à 1 Ohm).

Le haut-parleur à ruban

Inventé à la fin des années 20, il ne devient réellement au point que dans les années 70 (brevet déposé par O. Heil en 1973). Son principe est assez similaire au haut-parleur électrodynamique : le ruban (plaque mince en aluminium plissé) reçoit, via un transformateur adaptateur d'impédance, la modulation en provenance de l'amplificateur. Celui-ci est placé dans le champ de fuite (entrefer large) de deux puissants aimants, ce qui a pour conséquence un mouvement avant-arrière du ruban qui produit ainsi l'onde sonore désirée. Un schéma type de constitution d'un haut-parleur à ruban est présenté figure 1.3. En raison des faibles dimensions du ruban, ce type de haut-parleurs a de très faibles rendements en basses fréquences mais le principe a été de nombreuses fois utilisé dans la fabrication de tweeters dans les années 70.

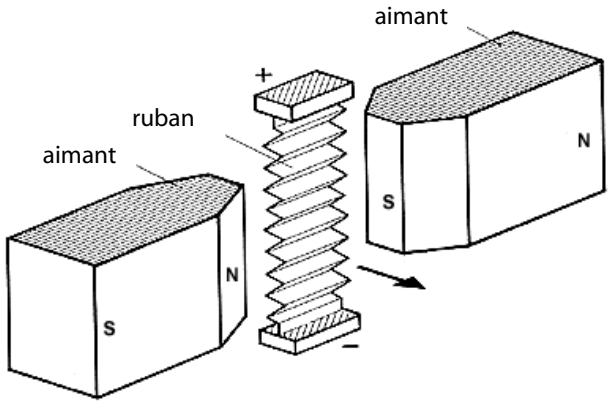


FIG. 1.3 – Principe de fonctionnement d'un haut-parleur à ruban.

Le haut-parleur électrodynamique

Ce type de haut-parleur représente 99 % du marché des transducteurs électroacoustiques. Son principe est de mettre en vibration une structure de type plaque (circulaire, ovale, de forme sphérique concave ou plus complexe) en faisant circuler un courant à travers une bobine placée dans l'entrefer d'un aimant permanent (se référer à la section suivante pour une description plus précise du haut-parleur électrodynamique). Ce principe a tout d'abord été exposé par G. Bell en 1876 puis de nombreuses améliorations ont été apportées jusqu'au brevet déposé par C.W. Rice et E.W. Kellogg en 1924. Un descriptif précis ainsi qu'un bref historique des évolutions apportées au haut-parleur électrodynamique sont détaillés dans la partie suivante. L'avantage de ce type de haut-parleur est qu'il possède une large surface emissive et qu'il est ainsi possible de reproduire les fréquences de la gamme audible sans fournir au système d'énergie supplémentaire. Son poids, sa taille, sa robustesse et son faible coût en ont ainsi fait le moyen le plus couramment utilisé pour transformer un signal électrique en un signal de pression sonore.

1.2 Le haut-parleur électrodynamique

1.2.1 Description et historique

Comme mentionné plus haut, le premier brevet de haut-parleur fut déposé en 1924 par C.W. Rice et E.W. Kellogg. Le schéma en coupe de ce prototype est représenté figure 1.4. Ce premier essai était composé d'une membrane en papier à laquelle est jointe une suspension externe en caoutchouc. Toute la nouveauté de leur prototype est qu'il possédait une bobine mobile placée dans l'entrefer d'un aimant permanent alors que tous les autres modèles proposaient un système à bobine fixe et aimant mobile.

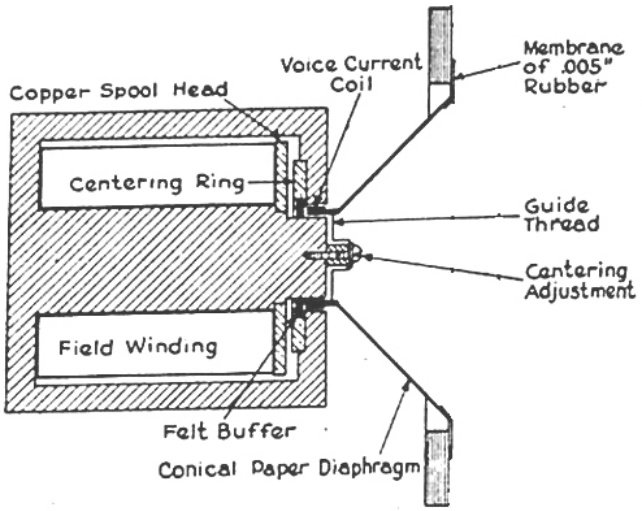


FIG. 1.4 – Schéma en coupe du premier brevet de haut-parleur électrodynamique à bobine mobile déposé par C.W. Rice et E.W. Kellogg en 1924.

Depuis ce prototype, de nombreuses améliorations ont été réalisées, que ce soit du point de vue électrique (utilisations d'aimants permanents toujours plus puissants) ou du point de vue mécanique (utilisation de nouveaux matériaux et de formes toujours plus complexes) mais le principe de base demeure identique. Un schéma type de haut-parleur moderne est représenté figure 1.5.

Les seuls ajouts depuis le brevet original de 1924 sont :

• l'apparition d'une coque sphérique en vue de protéger le moteur des poussières et afin d'éviter que l'air circule de la face avant à la face arrière (phénomène de court-circuit),

• l'ajout d'une seconde suspension (nommée le spider) qui permet de conserver l'alignement de la bobine avec l'entrefer, et ce même pour des grandes excursions de la bobine,

• l'ajout de plaques de fer (nommées plaques de champ) tout autour de l'aimant permanent afin de permettre une bonne orientation du champ magnétique.

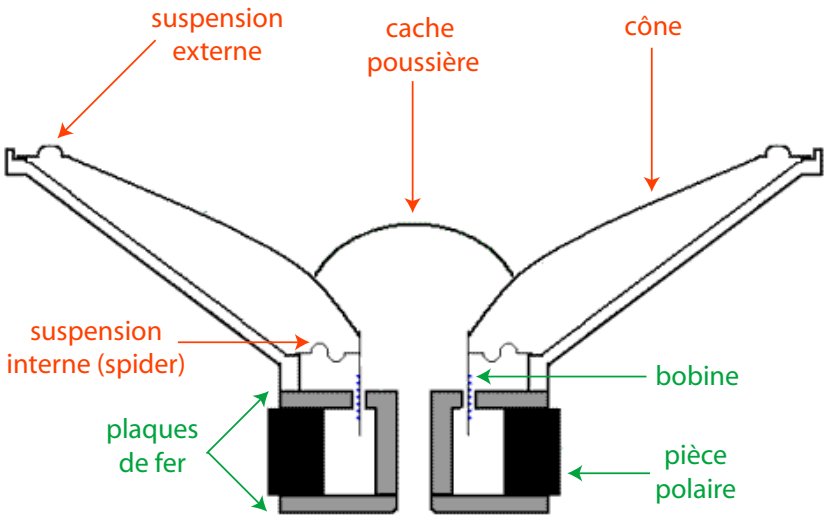


FIG. 1.5 – Principe de construction d'un haut-parleur électrodynamique.

Dans un souci de reproduction de signaux musicaux, l'environnement du haut-parleur a lui aussi reçu de nombreuses attentions. Au départ, les premiers haut-parleurs étaient utilisés en champ libre puis encastrés dans un baffle plan. Afin d'éviter les phénomènes de court-circuit acoustique (interaction de l'onde arrière avec l'onde avant), responsable de chute de pression en basses fréquences [66], l'idée a été de placer le haut-parleur dans une enceinte close. Par la suite, des techniques passives (haut-parleur dans un tube, système bass-reflex) ou actives (filtrage) ont permis de gagner en rendement acoustique en basses fréquences mais la qualité de restitution d'une enceinte est toujours dépendante de la qualité de restitution du haut-parleur.

1.2.2 Ordres de grandeur

Parmi les types de haut-parleurs électrodynamiques existant sur le marché et suivant leur utilisation, différentes grandes familles se détachent [25], comme representé figure 1.6 :



FIG. 1.6 – Exemples de haut-parleurs du commerce. De gauche à droite : un boomer de 38cm, un haut-parleur large-bande de 13cm et un tweeter à dôme de 1.8 cm de diamètre.

• Les "boomer" servant à reproduire les basses fréquences (de 20 Hz jusqu'à environ 200 Hz) dont les diamètres s'étendent de 16cm à 38cm. La structure vibrante est généralement composée d'une suspension en mousse (plus rarement en caoutchouc) collée à d'un tronc de cône (en composite ou plus rarement en aluminium) joint à une coque sphérique en son centre, comme représenté figure 1.6. L'épaisseur globale varie entre 100 et 300 μm et sa profondeur est de l'ordre de grandeur du rayon de la structure (pour un haut-parleur de 28cm de diamètre, la profondeur moyenne est de 12cm).

• Les "medium" servant à reproduire les moyennes fréquences (de 200 Hz jusqu'à environ 4 kHz) qui sont de même facture que les "woofers" classiques mais dont les diamètres s'étendent généralement de 10 à 13 cm. Parmi ce type de haut-parleur, on trouve néanmoins quelques modèles plus originaux (tels que le Monacor DM-135) qui présentent une structure mécanique en forme de coque sphérique convexe faite de composite.

• Les "tweeters" servant à reproduire les hautes fréquences (de 6 kHz jusq'à 20 kHz) dont les diamètres varient de 1 à 3 cm. La plupart des modèles commercialisés sont composés d'une coque sphérique faite de soie (ou plus rarement de papier) d'environ 100 μm d'épaisseur.

• Les "large bande" servant à reproduire sur toute la bande passante audible (de 20 Hz à 20 kHz). Ce type est de plus en plus utilisé car il évite l'utilisation de filtrage passif comme dans le cas d'une enceinte comportant plusieurs haut-parleurs. Ceux-ci ont des surfaces vibrantes de l'ordre de 10 à 16 cm de diamètre et les matériaux sont souvent des composites. C'est ce type de transducteurs qui reçoit le plus d'attention de la part des constructeurs, aussi une grande disparité de formes (forme classique, coques sphériques convexes et concaves, troncs de cône) et de matériaux (verre, aluminium, papier, kevlar, composite) utilisés dans leur conception est observable en pratique.

Cela dit, dans l'optique de considérations générales sur l'influence de la forme et des matériaux, aucun type particulier de haut-parleur ne sera étudié mais nous formulerons notre problème de telle sorte à ce que celui-ci soit valable indépendamment des dimensions considérées.

1.2.3 Limitations et distorsions

Distortions au niveau linéaire

Le haut-parleur seul n'est pas un système de reproduction idéal mais introduit des distortions dans le signal original. Celles-ci interviennent au niveau linéaire (pour des faibles amplitudes de vibration) et au niveau non-linéaire (décrit par la suite). Afin d'illustrer les différentes limitations induites par un haut-parleur classique en régime linéaire, regardons en détail la réponse acoustique d'un haut-parleur placé dans une enceinte close à un bruit-blanc. Ceci a été réalisé sur un haut-parleur de medium présenté au chapitre 5 et dont la réponse acoustique dans l'axe est représentée figure 1.7. Le même type de réponse est obtenu dans le cas d'un haut-parleur de grave ou d'aigu (seuls les plages de fréquence diffèrent dans ce cas).

Sur ce relevé, il apparaît que la bande passante du haut-parleur considéré est de taille finie puisqu'en basses fréquences on observe une chute du niveau sonore en dessous de 100Hz et en hautes fréquences, le niveau sonore décroît dès 6 kHz. Cette première limitation définit ainsi de manière expérimentale une gamme fréquentielle utilisable pour le haut-parleur considéré.

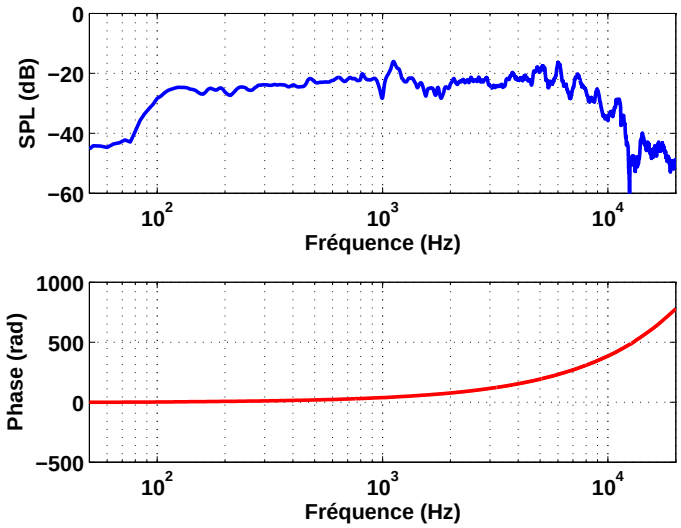


FIG. 1.7 – Réponse acoustique d'un haut-parleur classique (décrit au chapitre 5) sur la gamme audible. Sont représentées les évolutions du niveau sonore en dB dans l'axe à 1m (haut) et de la phase en radian (bas) en fonction de la fréquence (en échelle logarithmique).

De plus, sur cette figure, il apparaît que la réponse en fréquence n'est clairement pas homogène : certaines fréquences particulières sont plus amplifiées que d'autres (ces accidents se répercutent également sur la courbe de réponse en phase). Comme décrit par la suite, ces phénomènes sont dus à des résonances mécaniques de la structure et vont apporter une certaine coloration au signal transmis. Des études expérimentales [76, 77, 89, 105] ont montré une forte dépendance de ces phénomènes vis à vis de la facture de la membrane du haut-parleur.

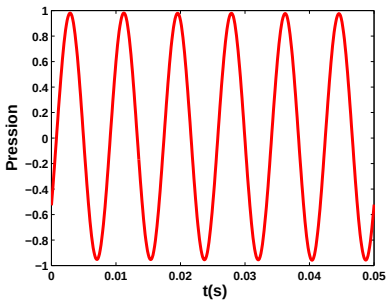
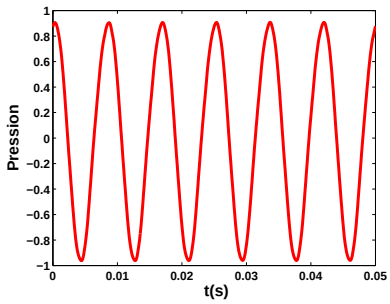
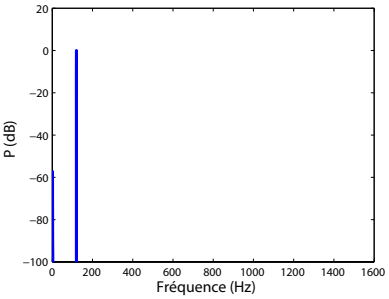
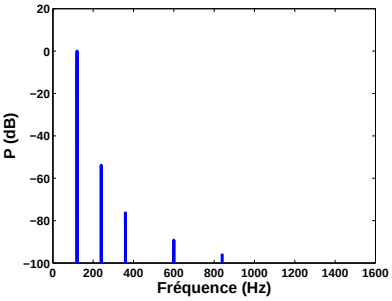
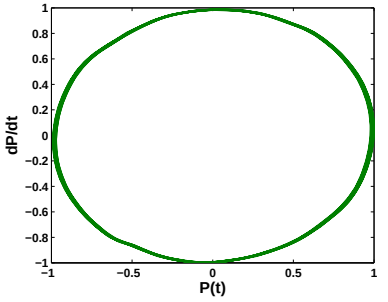
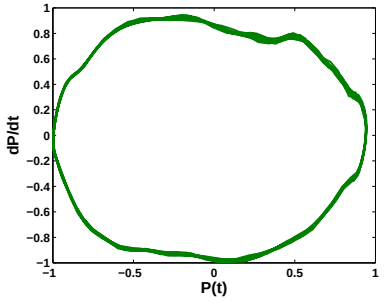
Enfin, il apparaît de ces relevés que la phase n'est pas une fonction linéaire de la fréquence. Cela dit, des études perceptives à ce sujet [46, 47, 75, 125, 126] ont montré que la non-linéarité de la phase en fonction de la fréquence est peu perceptible dans les conditions d'écoute de sons musicaux dans une salle (ces effets deviennent perceptibles pour des sons périodiques en conditions d'écoute anéchoïque).

Distortions en régime de grandes amplitudes

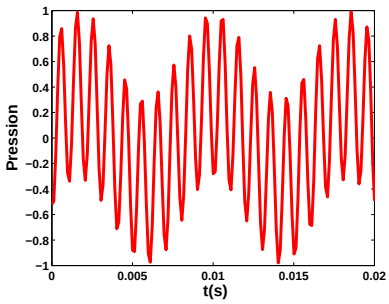
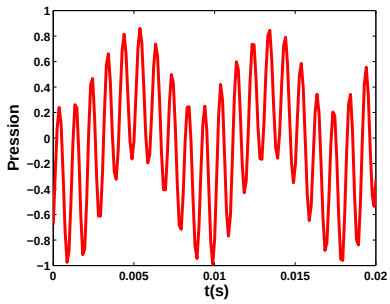
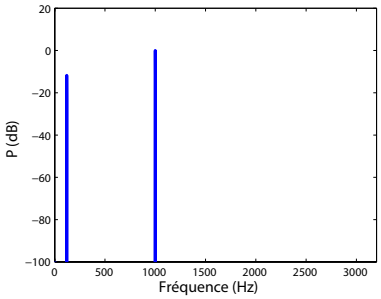
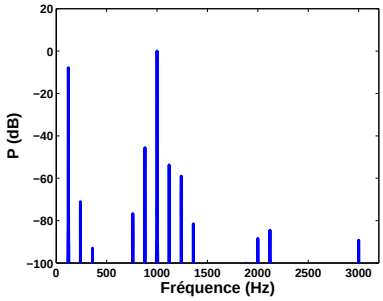
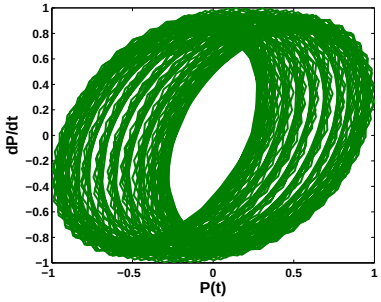
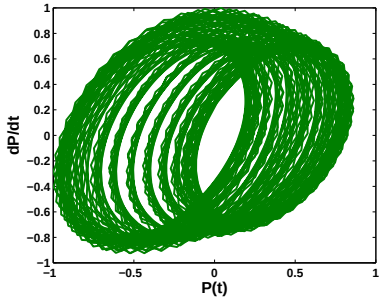
Pour des grandes amplitudes de vibration, il apparaît que la transduction n'est plus linéaire et ainsi la réponse du système dépend du niveau d'excitation. Ceci se traduit par :

• des phénomènes de distortion harmonique : si l'on injecte une fréquence f_1 au système, la réponse acoustique comporte alors l'ensemble des fréquences $n.f_1$ avec n entier (ce phénomène est illustré tableau 1.1),

• des phénomènes d'intermodulation : si l'on injecte deux fréquences f_1 et f_2 au système, la réponse acoustique comporte alors l'ensemble des fréquences $n.f_1 + p.f_2$ avec n et p entiers (ce phénomène est illustré tableau 1.2).

	$U_e(t) = \|U_e\|cos(2\pi f_1 t)$	
	$\|U_e\| = 1V$	$\|U_e\| = 10V$
Signal temporel		
Spectre		
Portrait de phase		

TAB. 1.1 – Signaux temporels (haut), spectres (milieu) et portraits de phase (bas) de la réponse acoustique mesurée dans l'axe d'un haut-parleur dans le cas d'une excitation sinusoïdale à 120Hz. Les figures de gauche expriment le cas linéaire (pas de distortion harmonique) et les figures de droite le cas avec distortions harmoniques : le spectre fait apparaître la présence de fréquences multiples de la fréquence d'excitation $f = n.f_1$ avec n entier.

	$U_e(t) = \|U_e\|\,(cos(2\pi f_1 t) + cos(2\pi f_2 t))$	
	$\|U_e\| = 1V$	$\|U_e\| = 10V$
Signal temporel		
Spectre		
Portrait de phase		

TAB. 1.2 – Signaux temporels (haut), spectres (milieu) et portraits de phase (bas) de la réponse acoustique mesurée dans l'axe d'un haut-parleur dans le cas d'une excitation composée de 2 sinusoïdes à $f_1 = 120Hz$ et $f_2 = 1kHz$. Les figures de gauche expriment le cas linéaire (pas ou peu d'intermodulation) et les figures de droite le cas avec intermodulation : le spectre fait apparaître la présence de fréquences telles que $f = n.f_1 + p.f_2$ avec n et p entiers.

Ces phénomènes sont fortement audibles et viennent perturber l'écoute à fort niveau. Toutes ces limitations (linéaires et non linéaires) ont conduit les constructeurs à utiliser non plus un haut-parleur unique mais une combinaison de différents haut-parleurs de caractéristiques différentes (tweeter pour les aigus, medium pour le milieu de bande et boomer pour les graves) qui placés de manière adéquate permettent une restitution fidèle d'un signal musical. Cependant, l'utilisation conjointe de plusieurs haut-parleurs induit des effets de directivité, de phase et de localisation spatiale qui peuvent gêner la reproduction sonore. C'est pourquoi la tendance actuelle est de revenir à un système de diffusion unique (appelé haut-parleur large bande) qui permettrait de diffuser un signal musical de manière "fidèle". Afin de pouvoir réaliser ce haut-parleur, il est nécessaire de comprendre tous les mécanismes générateur de distortions au sein des haut-parleurs (et les modéliser) afin de bien dimensionner celui-ci.

1.3 Modèles existants

1.3.1 Variables localisées : modèle de Thiele et Small

Le premier modèle du haut-parleur électrodynamique a été proposé par L.L. Beranek en 1954 dans le cas d'une structure baffl\'ee. Sa description a ensuite été réutilisée et formulée à l'aide de variables localisées par A. Thiele et R.W. Small en 1971 [107, 108]. Leur formulation (décrite plus en détail section 5) est fondée sur l'utilisation de 6 paramètres directement mesurables sur le haut-parleur qui sont :

- la résistance électrique du système Re,
- l'inductance de la bobine mobile L,
- le facteur de force Bl,
- la raideur mécanique globale K_m,
- la résistance mécanique globale R_m,
- la masse de la partie mobile M_m,

Ces paramètres, ajoutés à l'hypothèse de rayonnement de type piston plan de la membrane (mouvement de corps rigide) permettent de décrire le comportement vibratoire et acoustique linéaire de la structure en basses fréquences comme un filtre passe-haut. Un exemple de résultats obtenus dans le cas du haut-parleur considéré plus haut est représenté figure 1.8. On remarque sur cette figure un bon accord entre prédictions et mesures pour des fréquences inférieures à 200Hz mais le modèle classique ne permet pas de décrire le comportement au delà de cette fréquence.

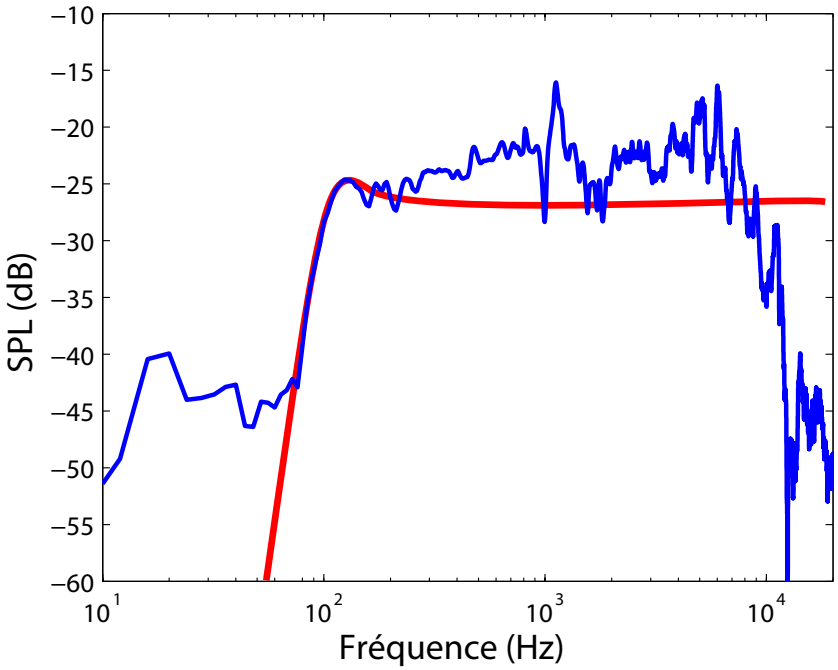


FIG. 1.8 – Réponse expérimentale (bleue) d'un haut-parleur classique (décrit section 5) sur la gamme audible et sa prédiction par la théorie de Thiele et Small (rouge).

Ce modèle s'avère très efficace pour prédire le comportement de la structure en basses fréquences (et par la suite développer des méthodes de contrôle actif basses fréquences [2, 132]) mais ne prend pas en compte :

- le comportement vibratoire en moyennes et hautes fréquences de la structure (résonances mécaniques),
- la chute du niveau de pression en hautes fréquences (phénomène d'interférences),
- le comportement non linéaire du système.

Des études mécaniques et acoustiques [10, 76, 77, 94, 95] et psychoacoustiques [68, 124, 125, 126] ont montré que la qualité de restitution était en grande partie déterminée par le comportement vibratoire et acoustique en moyennes et hautes fréquences, et ce surtout en ce qui concerne la reproduction des transitoires. C'est pourquoi afin de pouvoir différencier deux haut-parleurs, il est nécessaire de s'intéresser à d'autres critères que les 6 paramètres de Thiele et Small et une modélisation plus fine du comportement vibratoire, en régime linéaire et pour des grandes amplitudes de vibration est requise.

1.3.2 Autres modèles mécaniques et acoustique

En régime linéaire

Afin de rendre compte des phénomènes non inclus dans le modèle de Thiele et Small, il est nécessaire de procéder à une modélisation plus fine du comportement mécanique et acoustique de la membrane du haut-parleur. Pour ce faire, différentes écoles se sont penchées sur ce problème. D'un coté, des analyses numériques, par éléments finis et éléments de frontière [35, 86, 87] ou par différences finies [90] permettent de décrire le comportement vibratoire et acoustique de structures de type haut-parleur pour une configuration donnée mais se heurtent à des coûts de calcul très important dès lors que l'on monte en fréquences. De l'autre coté, des méthodes analytiques [19, 106] ou utilisant des constantes localisées [81] ont été développées et permettent de prédire le comportement vibratoire et acoustique en moyennes fréquences mais se limitent également au régime linéaire.

En régime de grandes amplitudes

Ce domaine d'étude est encore très récent et fait l'objet de nombreux modèles depuis les années 90. La plupart des modélisations s'appuient sur le modèle de Thiele et Small auquel ont été ajoutées des dépendances vis à vis de l'excursion de la partie mobile. Plus de détails peuvent être trouvés dans [32, 61, 62, 63, 64, 93] et le principe de ce modèle est décrit au chapitre 5. Bien que ces modèles donnent de bons résultats en très basses fréquences (autour de la première résonance mécanique), le comportement non linéaire en moyennes et hautes fréquences ne sont pas décrits.

En résumé, sont représentéssur le tableau 1.3 les différents domaines de validité des modélisations présentes dans la littérature. On remarque ainsi qu'il n'existe pas de modèle global permettant d'inclure toutes les plages de fréquences et d'excitation, et c'est ce que nous proposons de réaliser au cours de cet exposé.

	linéaire			non linéaire		
	B.F.	M.F.	H.F.	B.F.	M.F.	H.F.
Thiele et Small	+	−	−	−	−	−
Elements finis et frontière	++	++	+	−	−	−
Modèle analytique de cône	++	++	++	−	−	−
Thiele et Small non linéaire	+	−	−	+	−	−

TAB. 1.3 – Domaines de validité des différentes modélisations existantes, en régime linéaire et non linéaire pour les basses fréquences (B.F.), moyennes fréquences (M.F.) et hautes fréquences (H.F.).

1.4 Vers un modèle étendu

1.4.1 Cadre de l'étude

Compte tenu des modélisations existant dans la littérature, nous proposons dans le cadre de notre étude une modélisation du haut-parleur électrodynamique sur la bande passante audible valable en régime linéaire d'une part, et de grandes amplitudes d'autre part.

Pour les régimes de grandes amplitudes de vibration, nous devons inclure les différents types de non-linéarités qui apparaissent au sein des haut-parleurs. Nous allons ainsi utiliser les précédentes études menées en basses fréquences en utilisant la formulation de Thiele et Small en régime non linéaire [61] à laquelle nous ajoutons une description fine de la structure mécanique afin de rendre compte du comportement vibratoire et acoustique en régime de grandes amplitudes. Il apparaît ainsi obligatoire de considérer le haut-parleur comme un milieu continu possédant une forme non plane et non plus comme un piston plan vibrant dans l'air.

La formulation du problème non linéaire nous incite à développer une modélisation temporelle du problème. Le problème électrique s'appuie sur la formulation de Thiele et Small en régime de grandes amplitudes qui permet de rendre compte des phénomènes non linéaires intervenant pour les basses fréquences. La modélisation mécanique repose sur les équations de Von-Kármán de vibration des structures minces avec prise en compte des non-linéarités géométriques, qui rend compte des distortions en moyennes et hautes fréquences. Enfin, il est nécessaire de déterminer une méthode de résolution du problème de rayonnement qui soit compatible avec la formulation mécanique. Ceci est réalisé par la méthode de Réponse Impulsionnelle Spatiale qui suppose une transduction mécano-acoustique linéaire. Ce travail a été réalisé dans la littérature [116, 60] dans le cas de structures circulaires planes et sphériques et a été étendu dans la présente étude au cas d'une structure de forme quelconque.

1.4.2 Organisation du manuscrit

Le but de cette étude est d'étendre la modélisation des haut-parleurs électrodynamiques vers les hautes fréquences et les régimes de grandes amplitudes. Pour ce faire, il est nécessaire de prendre en compte le comportement vibratoire de la structure et donc de considérer la structure comme un milieu continu possédant une forme non plane. Ainsi, nous proposons au fil de ce manuscrit, organisé en 4 étapes, une modélisation du comportement vibratoire et du rayonnement acoustique d'une structure mince de forme quelconque en régime de grandes amplitudes, comme proposé figure 1.9.

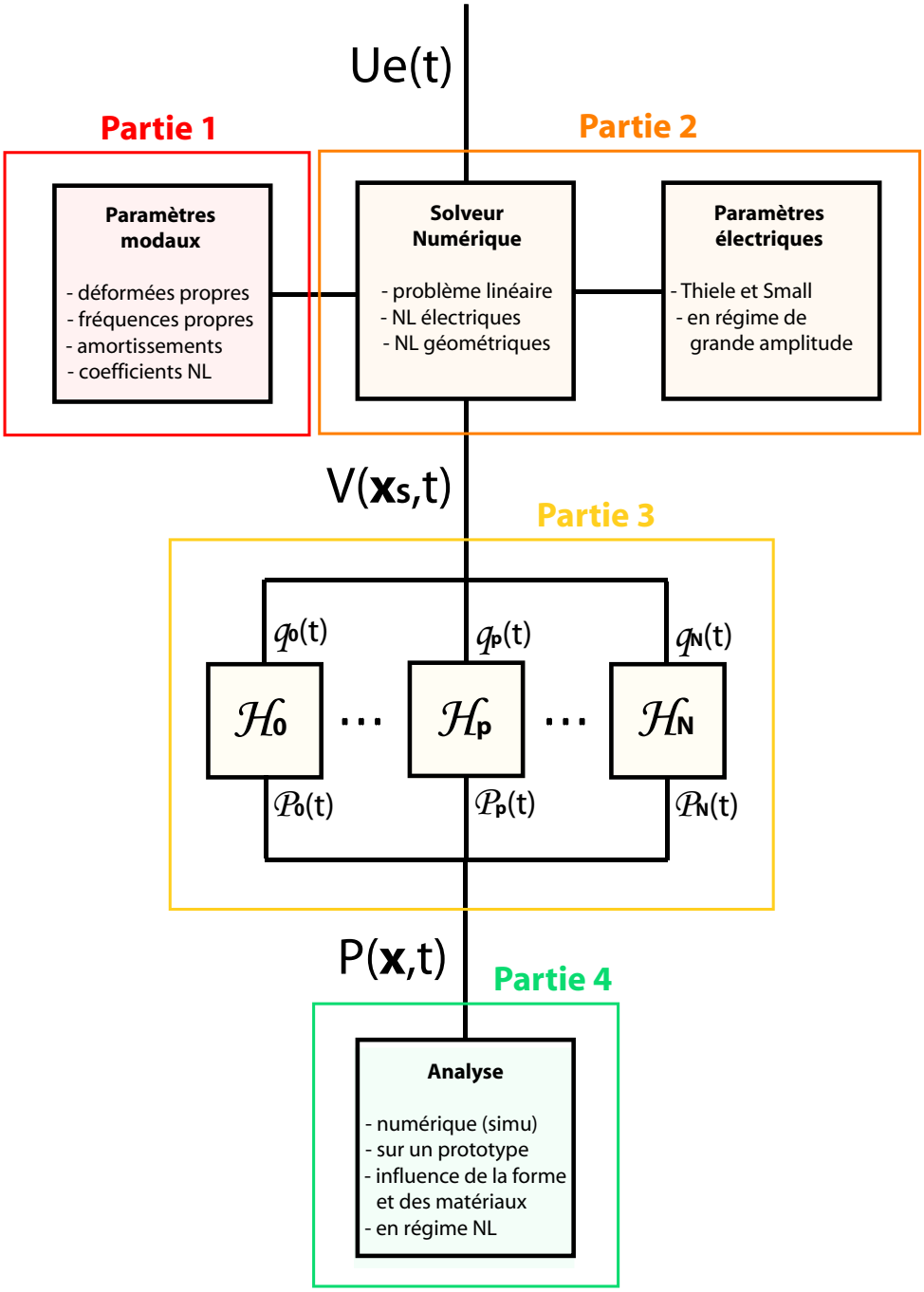


FIG. 1.9 – Schéma récapitulatif de la démarche adoptée afin de calculer le champ de pression rayonné par une structure soumise à de grandes amplitudes de vibration. $U(t)$, $V(\mathbf{x}_S, t)$ et $P(\mathbf{x}, t)$ désignent respectivement la tension aux bornes du haut-parleur, le champ de vitesse de la membrane et le champ de pression sonore au point d'observation $\mathbf{x}$. La décomposition modale fait apparaître les fonctions temporelle $q_p(t)$ régissant la dynamique de chaque oscillateur, les réponses impulsionnelles spatiales $\mathcal{H}_p$ ainsi que les contributions de chaque mode au rayonnement $\mathcal{P}_p$.

La première partie propose une modélisation mécanique fine de la structure valable pour des régimes de grandes amplitudes (avec inclusion des non-linéarités géométriques). Dans un premier temps, la structure est représentée comme la jonction d'une plaque annulaire (suspension externe) avec une plaque plane circulaire et l'influence des paramètres géométriques et des matériaux sur le comportement vibratoire est décrite à l'aide de variables adimensionnées. Dans un second temps, on déterminera l'influence de la forme sur le comportement vibratoire (linéaire et non linéaire) de la structure. Ceci est réalisé par addition d'une fonction de forme dans les équations locales de vibration.

La deuxième partie propose un schéma de résolution du problème électro-mécanique (transformation d'un signal électrique $Ue(t)$ en un signal vibratoire $V(\mathbf{x_S}, t)$ dépendant de l'espace) en prenant en compte les non-linéarités classiques du modèle de Thiele et Small en régime de grandes amplitudes, auquel on ajoute le comportement vibratoire non linéaire décliné plus haut. La formulation finale est exprimée sous forme d'espace d'état, qui permet de résoudre numériquement le problème global non linéaire par le biais d'un solveur commercial. Un exemple d'application sur un haut-parleur classique est proposé à la fin de cette partie.

La troisième partie expose la modélisation acoustique adoptée qui permet d'inclure l'effet de la forme au niveau acoustique. La technique utilisée repose sur le calcul de la réponses impulsionnelle spatiale $\mathcal{H}_p$ associée à chaque mode p en supposant que le champ acoustique peut être décrit par une intégrale de Rayleigh. L'influence de la forme sur le rayonnement global de la structure est exposé et permet de comprendre et de prédire les phénomènes d'interférences qui apparaissent en hautes fréquences.

Enfin, la quatrième partie est consacrée à une étude expérimentale sur un prototype développé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) par Guy Lemarquand. Ce prototype offre l'avantage de modifier simplement la structure mécanique mise en vibration. On procède alors à une comparaison entre modèle et expériences afin de dégager l'influence de la forme et du matériau sur le comportement vibratoire et le champ de pression émis.

Première partie

Vibrations non linéaires de structures de type haut-parleur

Le but de cette partie est de modéliser le comportement vibratoire de structures de type haut-parleur sur la bande passante audible, à savoir pour des fréquences inférieures à 20 kHz. La formulation choisie devra permettre de rendre compte des phénomènes non linéaires intervenant pour des amplitudes de vibration allant jusqu'à l'épaisseur de la structure.

Dans le premier chapitre, la structure est vue comme l'assemblage d'une plaque plane circulaire avec une plaque annulaire encastrée à sa périphérie et on s'intéresse à l'importance des paramètres matériau sur le comportement vibratoire, en régime linéaire et non linéaire. Dans un second temps, on ajoutera une courbure locale dans les équations de vibrations afin de rendre compte des premiers effets de la forme au niveau mécanique, tant au niveau linéaire que non linéaire.

Nomenclature

a	rayon extérieur
b	rayon intérieur
D	rigidité en flexion
E	module d'Young
F	fonction de force
h	épaisseur
s	rapport entre le rayon intérieur et extérieur
T_p	forces extérieures projetées sur le mode p
$u(r,t)$	déplacement longitudinal
$w(r,t)$	déplacement transverse
γ	rapport des rigidités longitudinales
δ	rapport des rigidités en flexion
ε	paramètre non linéaire adimensionné
μ_p	amortissement modal adimensionné pour le mode p
ν	coefficient de Poisson
ω_p	pulsation propre adimensionnée pour le mode p
Φ_p	$p^{ième}$ mode propre en flexion
Ψ_p	$p^{ième}$ mode propre pour la fonction de force
ρ	masse volumique
σ	rapport des masses surfaciques
$\mathcal{M}$	moment en flexion
$\mathcal{N}$	forces de membrane
$\mathcal{Q}$	efforts tranchants

Chapitre 2

Modélisation de la structure plane

Sommaire

2.1 Introduction 22
2.2 Description géométrique et hypothèses 22
2.2.1 Géométrie du problème 22
2.2.2 Hypothèses 23
2.3 Formulation du problème 24
2.3.1 Equations locales du déplacement 24
2.3.2 Conditions aux limites 25
2.3.3 Adimensionnement des équations locales 25
2.3.4 Décomposition modale et projection 28
Déplacement transverse $w(r,t)$ 28
Fonction de force $F(r,t)$ 28
Equations modales associées 29
2.4 Validation du modèle 31
2.4.1 Cas limites 31
2.4.2 Cas de la plaque plane encastrée 31
2.4.3 Cas d'une structure centrale infiniment rigide 31
2.5 Influence des propriétés géométriques et mécaniques 33
2.5.1 Matériaux et variables adimensionnées 33
2.5.2 Influence des paramètres matériaux 34
Comportement linéaire 34
Comportement non linéaire 37
2.5.3 Influence du paramètre géométrique 39
2.6 Conclusion 42

2.1 Introduction

Dans cette partie, le haut-parleur est vu comme l'assemblage d'une plaque annulaire (suspension en caoutchouc dans le cas de haut-parleurs classiques) avec une plaque circulaire, comme représenté figure 2.1. Les effets dus à la courbure présents dans les structures de type haut-parleur classiques sont pour l'instant laissés de coté et seront développés dans le chapitre 3.

Les vibrations linéaires et non linéaires de structures annulaires et circulaires ont été largement étudiées dans le passé. Notons par exemple les travaux de [4, 8, 67, 70, 97, 130] dans le domaine linéaire et de [44, 82, 111, 123, 128] pour des modélisations des phénomènes non linéaires qui apparaissent pour des grandes amplitudes de vibration. De ces études, il apparaît que des solutions analytiques peuvent être obtenues dans des cas particuliers de conditions aux limites. Cependant, l'assemblage d'une structure annulaire avec une plaque circulaire est bien moins étudié et le cas où la structure centrale est infiniment rigide a été uniquement traité dans le domaine linéaire [6, 33, 45, 54, 70, 74, 98].

Dans cette partie, l'équivalent dynamique des équations de Von-Kármán est utilisé en vue d'inclure les non-linéarités géométriques dans les équations locales du déplacement, en prenant en compte l'étirement du plan moyen. L'influence des propriétés matérielles et du dimensionnement géométrique sur le comportement linéaire et non linéaire est exprimé en termes de paramètres adimensionnés. Les solutions du problèmes sont projetées sur les modes linéaires de la structure, ce qui conduit à un système d'équations différentielles non linéaires couplées régissant la dynamique de la structure.

On étudier ainsi l'influence des paramètres adimensionnés sur les fréquences propres, les déformées modales et les coefficients de couplage non linéaires. Il est montré qu'afin de réduire les non-linéarités géométriques, le rapport entre le rayon extérieur et le rayon intérieur doit être choisi aussi petit que possible et qu'il est nécessaire de choisir le couple de matériau avec précaution.

2.2 Description géométrique et hypothèses

2.2.1 Géométrie du problème

La structure étudiée dans cette partie est composée d'une plaque circulaire B attachée à son bord à une plaque annulaire A. Le rayon total est noté a et la structure annulaire est encastrée à sa périphérie (en $r = a$). La jonction entre A et B est située en $r = b$. La géométrie du problème considéré est résumée figure 2.1.

Les deux structures ont des propriétés matérielles différentes : on note par E_A et E_B leurs modules d'Young respectifs, ν_A et ν_B leurs coefficients de Poisson, h_A et h_B leurs épaisseurs et ρ_A et ρ_B leurs masses volumiques respectives.

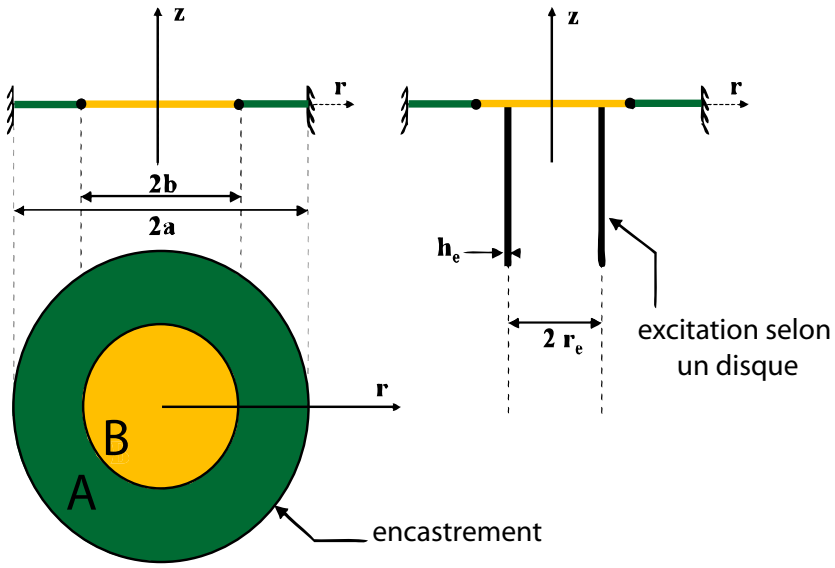


FIG. 2.1 – (Gauche) Géométrie du système plan étudié. (Droite) Exemple de chargement appliqué à la structure. Les deux structures A et B ont des propriétés matérielles différentes et la jonction est supposée sans pertes.

2.2.2 Hypothèses

La géométrie du problème est supposé invariant par rotation autour de l'axe z, ce qui nous pousse à ne nous intéresser qu'aux vibrations axisymétriques de la structure. Les observations expérimentales effectuées dans le passé [105] montrent que la participation des modes asymétriques n'est certes pas nulle mais peut généralement être négligée, pour une excitation idéalement axisymétrique de la structure. Pour des haut-parleurs bas de gamme, la bobine est souvent excentrée de la structure, ce qui provoque parfois une forte excitation des modes asymétriques que nous n'intégrons pas dans notre modèle.

La jonction entre les deux sous-structures est supposée sans pertes. On suppose ainsi qu'à la jonction (en $r = b$), il y a continuité des déplacements transverses, des déplacements longitudinaux, des forces transverses et des moments.

Le modèle adopté repose sur la théorie de Von-Kármán des vibrations de plaques minces. Comme cela a été mentionné dans les études précédentes [44, 111], cette formulation est vue comme une correction de la théorie linéaire de déflection des plaques. La validité mathématique de cette approche est limitée à des excursions de l'ordre de $w \propto h^2/a$ mais de bons accords expérimentaux sont observés pour des amplitudes de vibration allant jusqu'à l'épaisseur h de la structure [123]. Les hypothèses de ce modèle sont résumées ci-dessous [121] :

- La structure est mince, c'est-à-dire $h/a \ll 1$.

- Les hypothèses de Kirchhoff-Love sont vérifiées : le cisaillement transverse est négligé et ainsi tout segment normal et droit avant déformation reste normal et droit après déformation.

- Le déplacement transverse est de l'ordre de l'épaisseur.

• Le déplacement longitudinal est d'un ordre inférieur au déplacement transverse.

• Le comportement des matériaux est élastique linéaire.

• Seuls les termes non linéaires de plus faible ordre sont retenus dans l'expression des contraintes en fonction du déplacement.

• Les termes d'inertie de rotation et d'inertie longitudinale sont négligeables.

Dans la présente étude, les effets du fluide environnant sont négligés, de telle sorte que les efforts extérieurs se résument à l'excitation par la bobine mobile. Pour avoir un aperçu des effets du fluide sur les vibrations de la structure, on se référera au chapitre 4 ou aux travaux de [37, 39] en condition de fluide léger ou à [109, 110] en condition de fluide lourd.

2.3 Formulation du problème

2.3.1 Equations locales du déplacement

Notons $w(r,t)$ le déplacement transverse au point r et au temps t. L'équivalent dynamique des équations de Von-Kármán avec ajout d'un amortissement fluide et d'une excitation extérieure sur la structure intérieure B sont décrits dans [80, 121, 127, 128] :

Pour $0 < r < b$:

$$\begin{cases} D_B \Delta\Delta w + m_B \ddot{w} = L(w,F) - c_B \dot{w} + T(r,t), \\ \\ \Delta\Delta F = -\dfrac{E_B h_B}{2} L(w,w). \end{cases} \tag{2.1}$$

Et pour $b < r < a$:

$$\begin{cases} D_A \Delta\Delta w + m_A \ddot{w} = L(w,F) - c_A \dot{w}, \\ \\ \Delta\Delta F = -\dfrac{E_A h_A}{2} L(w,w), \end{cases} \tag{2.2}$$

où dans le cas d'un problème axisymétrique, nous exprimons :

$L(u,v) = v_{,rr}\dfrac{u_{,r}}{r} + u_{,rr}\dfrac{v_{,r}}{r}$,

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$: rigidité en flexion,

$m = \rho h$: masses surfaciques,

$T(r,t)$: forces extérieures appliquées à la structure intérieure.

$(\star)_{,r}$ et $(\dot{\star})$ représentent respectivement les dérivées par rapport à la coordonnée spatiale r et temporelle t. Le Laplacien en coordonnées cylindriques est exprimé par :

$$\Delta(\star) = (\star)_{,rr} + \frac{1}{r}(\star)_{,r}.$$

Dans les équations (2.1) et (2.2), l'approche linéaire du problème consiste à négliger la fonction de force, c'est-à-dire à supposer que $F = 0$ dans les équations locales. Les notations usuelles pour les moments (selon la direction radiale r) $\mathcal{M}$ et les forces transverses (selon la direction radiale r) $\mathcal{Q}$ sont introduites :

$$\mathcal{M} = -D(w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r}),$$
$$\mathcal{Q} = -D\left(\Delta w\right)_{,r},$$

et on définit enfin les forces de membrane $\mathcal{N}$ dans le cas axisymétrique ainsi que le déplacement longitudinal u comme suit :

$$\mathcal{N} = F_{,rr},$$
$$u = \frac{1}{Eh}(rF_{,rr} - \nu F_{,r}).$$

Les définitions respectives des termes introduits dans le cas où la symétrie axiale est rompue peuvent être trouvés dans [121].

2.3.2 Conditions aux limites

La structure extérieure A est supposée encastrée à sa périphérie en $r = a$, ce qui se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u(a,t) & = & 0, \\ w(a,t) & = & 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial r}(a,t) & = & 0. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

La condition de continuité des déplacements transverses et longitudinaux en $r = b$ entre les deux structures A et B est exprimée par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} w(b^+,t) & = & w(b^-,t), \\ u(b^+,t) & = & u(b^-,t), \\ \dfrac{\partial w}{\partial r}(b^+,t) & = & \dfrac{\partial w}{\partial r}(b^-,t). \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Enfin, la continuité des moments et des efforts transverses conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}(b^+,t) & = & \mathcal{M}(b^-,t), \\ (\mathcal{Q} + \mathcal{N} w_{,r})(b^+,t) & = & (\mathcal{Q} + \mathcal{N} w_{,r})(b^-,t). \end{array} \right. \tag{2.5}$$

2.3.3 Adimensionnement des équations locales

Les équations (2.1) et (2.2) sont adimensionnées par rapport à la structure extérieure A :

$$r = (a)\,\bar{r}, \qquad t = \left(a^2\sqrt{\frac{m_A}{D_A}}\right)\bar{t}, \qquad w = \left(\frac{h_A^2}{a}\right)\bar{w},$$
$$F = \left(\frac{E_A h_A^5}{a^2}\right)\bar{F}, \qquad c = 2\left(\frac{E_A h_A^5}{a^4}\sqrt{\frac{m_A}{D_A}}\right)\bar{\mu}, \qquad T = \left(\frac{E_A h_A^7}{a^7}\right)\bar{T}.$$

Ce qui conduit aux nouveaux systèmes, pour $0 < r < s$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\delta}{\sigma}\Delta\Delta w + \ddot{w} & = & \dfrac{\varepsilon}{\sigma}\left(L(w,F) - 2\sigma\mu_B\dot{w} + T\right), \\ \\ \Delta\Delta F & = & -\dfrac{\gamma}{2}L(w,w). \end{array} \right. \tag{2.6}$$

et pour $s < r < 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta\Delta w + \ddot{w} & = & \varepsilon \left(L(w,F) - 2\mu_A \dot{w} \right), \\ \\ \Delta\Delta F & = & -\dfrac{1}{2} L(w,w), \end{array} \right. \tag{2.7}$$

où l'on a introduit des nouvelles variables adimensionnées utiles pour l'analyse future de notre problème :

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \sigma & = & \dfrac{\rho_B h_B}{\rho_A h_A}, & \\ \\ \delta & = & \left(\dfrac{E_B h_B^3}{E_A h_A^3} \right) \left(\dfrac{1-\nu_A^2}{1-\nu_B^2} \right), & s = \dfrac{b}{a}, \\ \\ \gamma & = & \dfrac{E_B h_B}{E_A h_A}, & \varepsilon = 12(1-\nu_A^2)\dfrac{h_A^2}{a^2}. \end{array}} \tag{2.8}$$

Le paramètre σ représente le rapport des masses surfaciques entre les deux structures. Les paramètres δ et γ désignent respectivement les rapports des rigidités en flexion et des rigidités longitudinales entre les deux structures. Dans les équations (2.6) et (2.7), il apparaît que δ et σ interviennent dans le problème linéarisé (quand $F = 0$), alors que γ n'intervient que dans la fonction de force F. L'amplitude relative des termes non linéaires est déterminée par la valeur du coefficient ε et enfin s représente l'aspect géométrique de la structure (rapport des rayons des deux structures A et B). Par la suite, afin d'alléger les notations, on désigne par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \sigma & : & \text{paramètre de masse} \\ \\ \delta & : & \text{paramètre de flexion} \\ \\ \gamma & : & \text{paramètre de rigidité longitudinale} \\ \\ s & : & \text{paramètre géométrique} \end{array}} \tag{2.9}$$

Les nouvelles conditions aux limites adimensionnées deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad u(1,t) = 0, \qquad w(1,t) = 0, \qquad \dfrac{\partial w}{\partial r}(1,t) = 0, \\ \\ w(s^+,t) = w(s^-,t), \qquad u(s^+,t) = \gamma u(s^-,t), \qquad \dfrac{\partial w}{\partial r}(s^+,t) = \dfrac{\partial w}{\partial r}(s^-,t), \\ \\ \qquad \mathcal{M}(s^+,t) = \delta \mathcal{M}(s^-,t), \qquad (\mathcal{Q} + \mathcal{N} w_{,r})(s^+,t) = \delta (\mathcal{Q} + \mathcal{N} w_{,r})(s^-,t). \end{array} \right. \tag{2.10}$$

La dernière condition aux limites mêle une condition sur le déplacement à la jonction $w(s,t)$ avec la fonction de force à la jonction $F(s,t)$. Dans le domaine linéaire, la fonction de force disparaît et cette condition ne repose que sur le déplacement à la jonction (condition aux limites linéarisée). Dans le cas général, cette condition couple les déplacements transverses et longitudinaux. Cependant, l'ordre relatif des termes $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{N} w_{,r}$ peut être évalué d'après les équations

adimensionnées :

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{Q}+\mathcal{N}w_{,r})(s^+,t) = \delta(\mathcal{Q}+\mathcal{N}w_{,r})(s^-,t)\\
&\text{et}\\
&\left(w_{,rrr} - \frac{w_{,rr}}{r} + \frac{w_{,r}}{r^2}\left(1+\varepsilon r^2 F_{,rr}\right)\right)(s^+,t) =\\
&\delta\left(w_{,rrr} - \frac{w_{,rr}}{r} + \frac{w_{,r}}{r^2}\left(1+\varepsilon r^2 F_{,rr}\right)\right)(s^-,t)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

en supposant que $\varepsilon \ll 1$, le terme $\left(\varepsilon r^2 F_{,rr}\right)$ devient négligeable par rapport à 1, de telle sorte que l'équation (2.11) peut être linéarisée et se réduit alors à :

$$\mathcal{Q}(s^+,t) = \delta\mathcal{Q}(s^-,t). \tag{2.12}$$

En résumé, le problème final peut être décrit par deux équations adimensionnées couplées et définies pour $r \in [0:1]$:

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\delta}{\sigma}(r)\Delta\Delta w + \ddot{w} &= \varepsilon\left(\frac{1}{\sigma(r)}L(w,F) - 2\sigma(r)\mu(r)\dot{w} + T(r,t)\frac{1}{\sigma(r)}\right),\\
\Delta\Delta F &= -\frac{\gamma(r)}{2}L(w,w).
\end{aligned}} \tag{2.13}$$

où :

	$0<r<s$	$s<r<1$
$\sigma(r)$	σ	1
$\delta(r)$	δ	1
$\gamma(r)$	γ	1
$\mu(r)$	μ_B	μ_A

et avec les conditions aux limites suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned}
&u(1,t) = 0, && w(1,t) = 0, && \frac{\partial w}{\partial r}(1,t) = 0,\\
&u(s^+,t) = \gamma u(s^-,t), && w(s^+,t) = w(s^-,t), && \frac{\partial w}{\partial r}(s^+,t) = \frac{\partial w}{\partial r}(s^-,t),\\
&\mathcal{M}(s^+,t) = \delta\mathcal{M}(s^-,t), && && \mathcal{Q}(s^+,t) = \delta\mathcal{Q}(s^-,t).
\end{aligned}} \tag{2.14}$$

L'équation (2.13) est analogue à la théorie des plaques lorsque $\sigma = \delta = \gamma = 1$ et $\mu_A = \mu_B$ (dans ce cas limite, les deux structures ont des propriétés matérielles identiques). Afin de résoudre ces équations non linéaires aux dérivées partielles, les solutions sont projetées sur les modes linéaires de la structure, ce qui fait l'objet de la section suivante.

2.3.4 Décomposition modale et projection

Déplacement transverse $w(r,t)$

Le déplacement transverse $w(r,t)$ est développé sur les modes linéaires de la structure comme décrit ci-dessous :

$$w(r,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(r) q_p(t). \tag{2.15}$$

où les modes sont normés de la manière suivante :

$$\int_{\theta}\int_{r'} \Phi_a(r') r' dr' d\theta = 1 \tag{2.16}$$

Il apparaît dans l'équation (2.15) que les termes non linéaires sont contenus dans la partie temporelle de la solution $q_p(t)$. Les propriétés mathématiques des modes propres $\Phi_p(r)$ sont décrites en annexe A. Le calcul des modes propres Φ_p et des pulsations propres ω_p associées fait apparaître une dépendance par rapport au paramètre adimensionné :

$$\boxed{\mathcal{L} = \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^{1/4}.}$$

Ce paramètre représente le rapport masse / rigidité du système global.

Fonction de force $F(r,t)$

De même, la fonction de force $F(r,t)$ est développée sur les modes linéaires de la structure d'après [111, 121] :

$$F(r,t) = \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_l(r) \eta_l(t), \tag{2.17}$$

où les fonctions $\Psi_l(r)$ sont d'autres modes propres associés à la fonction de force. Il en ressort, d'après (2.13) que pour $0 < r < s$:

$$\Delta\Delta F(r,t) = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta\Delta\Psi_l(r)\eta_l(t) = -\frac{\gamma}{2} \sum_p \sum_q L(\Phi_p, \Phi_q) q_p q_q, \tag{2.18}$$

et pour $s < r < 1$:

$$\Delta\Delta F(r,t) = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta\Delta\Psi_l(r)\eta_l(t) = -\frac{1}{2} \sum_p \sum_q L(\Phi_p, \Phi_q) q_p q_q, \tag{2.19}$$

et les conditions aux limites exprimées pour les fonctions $\Psi_l(r)$ deviennent :

$$\begin{cases} \Psi_{p,rrr}(1) + \Psi_{p,rr}(1) - \Psi_{p,r}(1) = 0, & \Psi_p(1) = 0, & \Psi_{p,rr}(1) - \nu_S \Psi_{p,r}(1) = 0, \\ [\Psi_{p,rrr}(s) + \Psi_{p,rr}(s) - \Psi_{p,r}(s)]_{s^-}^{s^+} = 0, & & \Psi_p(s^+) = \Psi_p(s^-), \\ \Psi_{p,rr}(s^+) - \dfrac{\nu_B}{s}\Psi_{p,r}(s^+) = \gamma\left(\Psi_{p,rr}(s^-) - \dfrac{\nu_B}{s}\Psi_{p,r}(s^-)\right). & & \end{cases} \tag{2.20}$$

Pour $0 < r < s$, Ψ_p doit satisfaire :

$$\Delta\Delta\Psi_p = \gamma \xi_p^4 \Psi_p, \tag{2.21}$$

où l'on suppose que, pour $s < r < 1$:

$$\Delta\Delta\Psi_p = \xi_p^4 \Psi_p. \tag{2.22}$$

Les solutions pour $0 < r < s$ sont alors données par :

$$\Psi_p(r) = Q_{1p} J_0(\xi_p \mathcal{F} r) + Q_{2p} I_0(\xi_p \mathcal{F} r),$$

et pour $s < r < 1$:

$$\Psi_p(r) = Q_{3p} J_0(\xi_p r) + Q_{4p} Y_0(\xi_p r) + Q_{5p} I_0(\xi_p r) + Q_{6p} K_0(\xi_p r),$$

où (I_0, J_0, K_0 et Y_0) désignent les fonctions de Bessel de première et deuxième ordre (se référer à l'annexe A pour plus de détails). Le paramètre adimensionné $\mathcal{F}$ est défini par :

$$\boxed{\mathcal{F} = \gamma^{\frac{1}{4}}.} \tag{2.23}$$

Finalement, d'après l'équation (2.13), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F &= \sum_b \Delta\Delta\Psi_b(r)\eta_b(t), \\ &= \gamma \sum_b \xi_b^4 \Psi_b(r)\eta_b(t), \\ &= -\frac{\gamma(r)}{2} \sum_p \sum_q L(\Phi_p, \Phi_q) q_p(t) q_q(t). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Puis en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions Ψ_p, on obtient :

$$\xi_b^4 \eta_b(t) = -\frac{1}{2} \sum_p \sum_q \iint_S L(\Phi_p, \Phi_q) \Psi_b dS q_p(t) q_q(t),$$

et après normalisation des déformées modales, la fonction de force $F(r,t)$ s'écrit :

$$F = -\frac{1}{2} \sum_b \sum_p \sum_q \Psi_b \mathcal{G}_{pqb} q_p(t) q_q(t), \tag{2.25}$$

où :

$$\mathcal{G}_{pqb} = \frac{\iint_S \gamma L(\Phi_p, \Phi_q) \Psi_b dS}{\xi_b^4 \iint_S \Psi_b^2 dS}.$$

Equations modales associées

Le développement modal du déplacement transverse et de la fonction de force est maintenant introduit dans l'équation dynamique (2.13). Une fois de plus, en utilisant la propriété d'orthogonalité des déformées modales Φ_p et la normalisation des modes, on aboutit au système suivant d'équations non linéaires couplées :

$$\boxed{\omega_a^2 q_a + \ddot{q_a} = \varepsilon \left(\sum_p \sum_q \sum_u \Gamma_{pqau} q_p q_q q_u - 2\mu_a \dot{q_a} + T_a \right)} \tag{2.26}$$

$$\omega_a^2 = \frac{\iint_S \frac{\delta}{\sigma}(r)\Phi_a \Delta\Delta\Phi_a dS}{\iint_S \Phi_a^2 dS} = \frac{\delta}{\sigma}\int_0^s \Phi_a \Delta\Delta\Phi_a r dr + \int_s^1 \Phi_a \Delta\Delta\Phi_a r dr,$$

$$\mu_a = \frac{\iint_S \mu(r)\Phi_a^2 dS}{\iint_S \Phi_a^2 dS} = \mu_B \int_0^s \Phi_a^2 r dr + \mu_A \int_s^1 \Phi_a^2 r dr,$$

$$T_a = \frac{\iint_S \frac{\Phi_a T}{\sigma(r)} dS}{\iint_S \Phi_a^2 dS} = \frac{1}{\sigma}\int_0^s \Phi_a T\ r dr,$$

$$\Gamma_{pqau} = \frac{1}{2}\sum_b \frac{\iint_S \gamma(r) L(\Phi_p, \Phi_q)\Psi_b dS}{\xi_b^4 \iint_S \Psi_b^2 dS} \frac{\iint_S \frac{L(\Phi_u, \Psi_b)\Phi_a}{\sigma(r)} dS}{\iint_S \Phi_a^2 dS},$$

$$= \frac{1}{2\xi_b^4}\sum_b \iint_S \gamma(r) L(\Phi_p, \Phi_q)\Psi_b dS \iint_S \frac{L(\Phi_u, \Psi_b)\Phi_a}{\sigma(r)} dS.$$

Les pulsations propres ω_a sont décrites comme une somme de deux termes qui décrivent les influences respectives des deux parties A et B. Dans le cas d'un haut-parleur, la première pulsation propre (communément appelée fréquence du mode de piston plan par la communauté électroacoustique) est idéalement choisie la plus basse possible et l'on aimerait que les pulsations propres des modes d'ordre supérieur soient repoussées le plus haut possible, afin de favoriser un mode de vibration unique sur la bande passante audible, comme présente figure 2.2. Ceci permet d'assurer (en première approximation nous le verrons par la suite) que la directivité de la source n'est pas ou peu affectée par les modes de vibrations de l'équipage mobile.

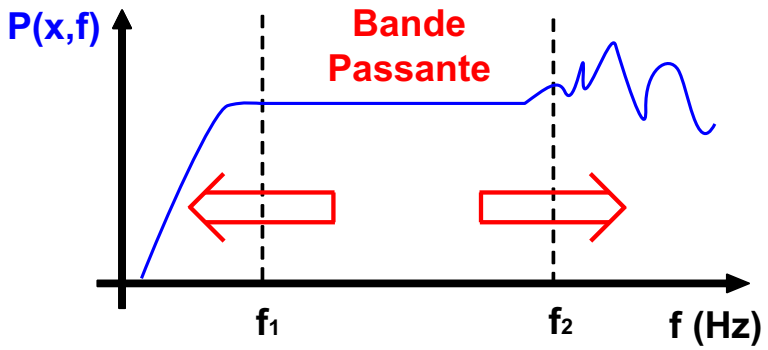


FIG. 2.2 – Amélioration de la bande passante d'un haut-parleur en diminuant la première fréquence propre f_1 et en choisissant les autres fréquences propres f_p le plus haut-possible.

Le facteur d'amortissement μ_a associé au mode a est dépendant des constantes d'amortissement des deux matériaux utilisés, ainsi que d'une pondération dépendant de la déformée modale. Dans le cas d'un haut-parleur, on aimerait que le premier mode soit peu amorti afin d'atteindre de grandes amplitudes de vibration alors que les autres modes devraient idéalement être le plus amorti possible, afin d'éviter la présence de résonances qui affecteraient le comportement vibratoire. Pour nos simulations, des valeurs de $\mu_A = 0.8$ (élastomère très amorti) et $\mu_B = 0.1$ (matériau peu amorti) ont été arbitrairement choisies en accord avec des valeurs typiques mesurées sur des haut-parleurs existants.

2.4 Validation du modèle

2.4.1 Cas limites

Dans cette section, on s'intéresse à l'influence des paramètres matériaux et géométriques de la structure. Les propriétés matérielles sont totalement déterminées par les 3 paramètres adimensionnés δ, γ et σ. Le paramètre s représente le paramètre géométrique de la structure (se référer à la section précédente pour les définitions de ces paramètres). On peut d'ores et déjà distinguer deux cas limites dépendant du rapport des rigidités en flexion :

- $\delta = 1$. Cette situation correspond au cas où les deux structures A et B ont des propriétés élastiques similaires. Les mêmes déformées modales sont obtenues indépendamment du rapport des densités σ et du paramètre géométrique s, mais les pulsations propres sont néanmoins dépendantes de σ. Dans ce cas, nos résultats sont comparables aux résultats publiés précédemment dans la littérature sur les plaques circulaires encastrées [70, 111].

- $\delta \gg 1$. Dans ce cas, la structure B est bien plus rigide que la structure annulaire A, et ainsi les déformations affectent majoritairement la structure extérieure A, ce qui correspond au comportement standard d'un haut-parleur en basses fréquences (piston plan). Des résultats numériques peuvent alors être trouvés dans la littérature dans le cas où la structure intérieure est infiniment rigide [45, 70].

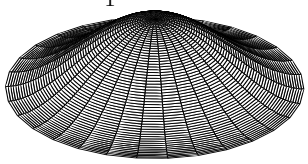
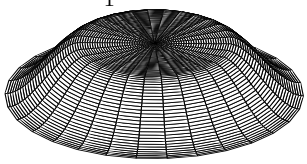
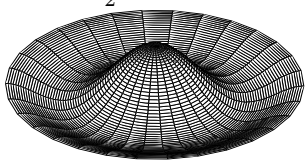
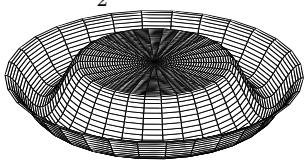
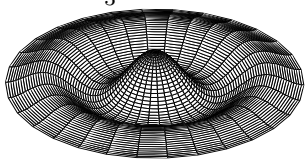
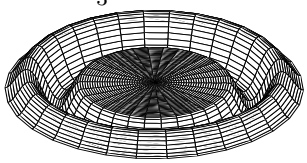
Les déformées modales obtenues par notre modèle pour les 3 premiers modes de vibration dans les deux cas limites sont représentés sur le tableau 2.1. Pour ce calcul, le paramètre géométrique a été fixé à $s = 0.5$ et le rapport des densités à $\sigma = 1$. Les facteurs d'amortissement sont définis par $\mu_A = 0.8$ (élastomère fortement amorti) et $\mu_B = 0.1$ (matériau peu amorti) et on ignore la dépendance de l'amortissement vis à vis de la fréquence [65].

2.4.2 Cas de la plaque plane encastrée

Lorsque les deux structures ont des propriétés mécaniques identiques, on se ramène au cas d'une plaque plane. La table 2.2 compare les résultats obtenus par notre modèle avec ceux publiés par Nayfeh [111]. Les résultats sont présentés sous la forme d'une comparaison des pulsations propres ω_a et des coefficients non linéaires $3\Gamma_{aaaa}$ (le facteur 3 permet de rejoindre la simulation de Nayfeh) calculés d'après l'équation (2.26) pour les 4 premiers modes de vibration. Les résultats concordent, et ce indépendamment du choix du paramètre géométrique s de notre modèle.

2.4.3 Cas d'une structure centrale infiniment rigide

D'autres études sur les vibrations de plaques annulaires avec ajout d'une structure centrale infiniment rigide ont été effectuées par Handelman et Leissa [45, 70]. Ces deux auteurs se sont penchés sur les vibrations en régime linéaire (plus particulièrement sur la première pulsation propre) de ce type de structure pour différentes valeurs de paramètre géométrique s. La comparaison des résultats obtenus pour la première pulsation propre entre leur modèle et le nôtre est présentée sur le tableau 2.3. Dans notre cas, afin de s'adapter aux conditions de Leissa, nous avons fixé un rapport de densités de 1 et un rapport de rigidités de 10^6 afin de modéliser une structure centrale infiniment rigide. Un excellent accord entre les deux méthodes est obtenu indépendamment de s.

	$\delta = 1$ (μ %)	$\delta = 10^6$ (μ %)
Mode 1	$\omega_1^2 = 10.21$ (0.23) 	$\omega_1^2 = 17.69$ (0.41) 
Mode 2	$\omega_2^2 = 39.77$ (0.49) 	$\omega_2^2 = 101.70$ (0.68) 
Mode 3	$\omega_3^2 = 89.10$ (0.41) 	$\omega_3^2 = 260.34$ (0.74) 

TAB. 2.1 – Déformées modales pour les 3 premiers modes de vibration dans les 2 cas limites explicités. Pour chaque mode a, la pulsation est notée par ω_a et le facteur d'amortissement correspondant par μ_a entre parenthèses. Les calculs ont été effectués pour un aspect géométrique de $s = 0.5$ et un rapport de densités valant $\sigma = 1$.

Mode a	ω_a^2 Simulation	ω_a^2 Nayfeh	$3\Gamma_{aaaa}$ Simulation	$3\Gamma_{aaaa}$ Nayfeh
1	10.2158	10.2158	162.21	162.22
2	39.7711	39.7710	5552.0	5552.1
3	89.1041	89.1040	34360	34401
4	158.1842	158.1830	130760	

TAB. 2.2 – Comparaison des 4 premières pulsations propres ω_a et des 4 premiers coefficients non linéaires $3\Gamma_{aaaa}$ obtenus d'après l'équation (2.26)avec les résultats de Nayfeh publiés dans [111] pour une plaque circulaire encastrée.

s	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
ω_1^2 Simulation	10.43	12.39	17.69	33.98	161.10
ω_1^2 Leissa	10.37	12.53	17.89	33.99	160.78

TAB. 2.3 – Comparaison de la première pulsation propre ω_1 obtenue en utilisant l'équation (2.26) en choisissant $\delta = 10^6$ avec les résultats de Leissa [70] dans le cas d'une structure centrale infiniment rigide pour différentes valeurs du paramètre géométrique s. Le taux d'erreur entre les deux modèles est inférieur à 1%.

2.5 Influence des propriétés géométriques et mécaniques

2.5.1 Matériaux et variables adimensionnées

Dans le cas d'un haut-parleur, le but est d'atteindre des amplitudes de vibration les plus élevées possibles pour une force donnée. Ceci requiert l'utilisation d'un matériau très flexible pour la réalisation de la suspension. Les matériaux généralement utilisés pour la partie externe appartiennent à la famille des élastomères et possèdent un module d'Young de l'ordre de 10^7 Pa. C'est le choix de ce matériau qui va déterminer les limites possibles des variables adimensionnées δ et σ. En se penchant sur les caractéristiques des matériaux existants d'après Ashby [7] représentées figure 2.3, il apparaît que l'on peut choisir des matériaux dont le module d'Young est compris entre 10^7 Pa et 10^{12} Pa et dont la densité est comprise entre 10^2 kg/m^3 et 10^4 kg/m^3. En supposant que la structure extérieure est composée d'un élastomère, cela revient à regarder l'influence des paramètres adimensionnés pour des valeurs telles que :

$$\boxed{\begin{aligned} 1 \leq \delta \leq 10^5 \\ 0.1 \leq \sigma \leq 10 \end{aligned}} \tag{2.27}$$

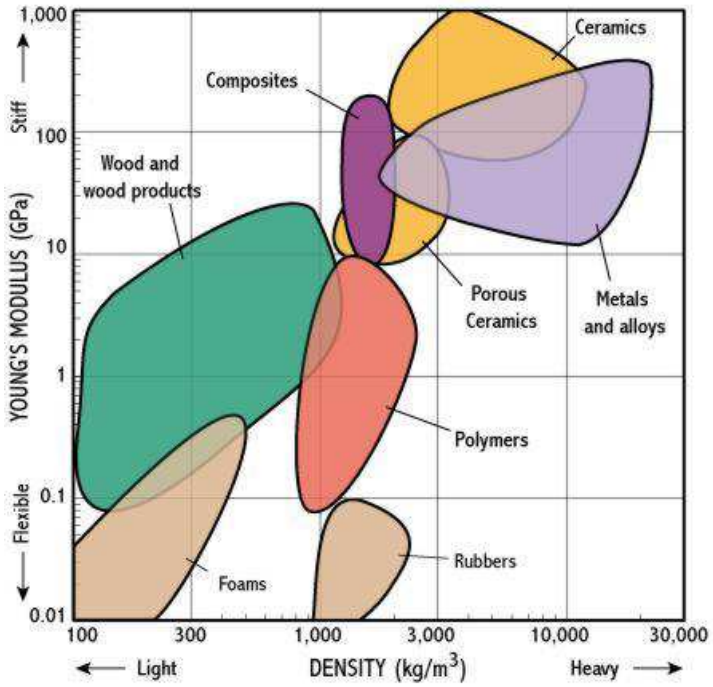


FIG. 2.3 – Représentation des matériaux existants en fonction de leur densité ρ et de leur module d'Young E d'après Ashby [7].

2.5.2 Influence des paramètres matériaux

Comportement linéaire

L'influence des paramètres adimensionnés δ et σ sur les valeurs des 3 premières pulsations propres adimensionnées est représentée sur les figures 2.4 et 2.5. Pour chaque figure, la pulsation propre est adimensionnée par la valeur de référence dans le cas d'une plaque plane (lorsque $\sigma = \delta = 1$). Les lignes continues représentent le cas $s = 0.5$, les lignes pointillées le cas $s = 0.9$; les lignes noires se ramènent au cas $\sigma = 0.1$, les lignes gris foncé lorsque $\sigma = 1$ et les lignes gris clair au cas $\sigma = 10$.

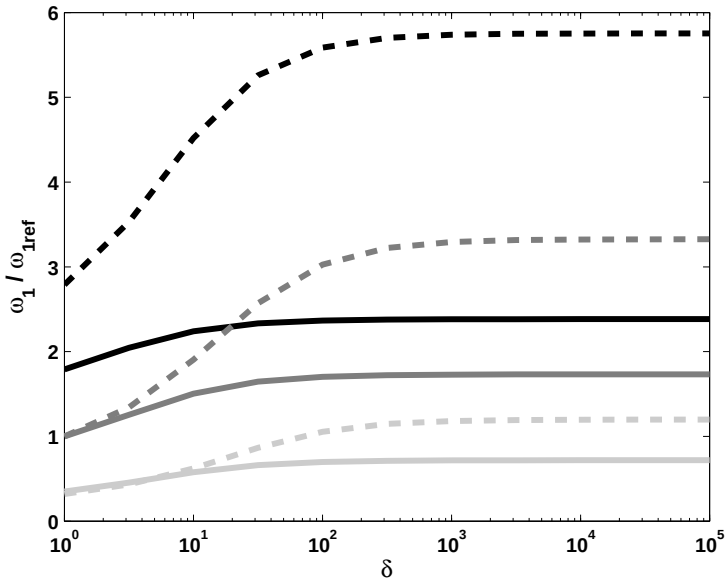


FIG. 2.4 – Evolution de la première pulsation propre ω_1 en fonction du rapport des rigidités en flexion δ entre les deux structures. Les résultats sont adimensionnés par ω_{1ref}, valeur limite obtenue dans le cas $\sigma = \delta = 1$. Les lignes pointillées $(- -)$ représentent la configuration géométrique $s = 0.9$, et les lignes continues le cas $s = 0.5$. Les lignes noires se ramènent au cas $\sigma = 0.1$, les lignes gris foncé lorsque $\sigma = 1$ et les lignes gris clair au cas $\sigma = 10$. Pour $\delta < 10^2$, ω_1 croit en fonction de δ alors que pour $\delta > 10^3$, ω_1 ne dépend plus que du rapport des masses surfaciques σ et du rapport d'aspect s. Des grandes valeurs du paramètre s permettent d'atteindre des fréquences propres plus élevées pour le premier mode.

Les interprétations différent selon le mode considéré. Pour le premier mode de vibration (figure 2.4), deux tendances peuvent être dégagées :

- pour $\delta < 100, \omega_1$ croit avec δ. Cet effet est amplifié dans le cas $s = 0.9$ (suspension très fine).

- pour $\delta > 100$, la valeur de ω_1 devient indépendante de δ et on se rapproche du cas piston exprimé au tableau 2.1. Ceci nous indique que pour de grands rapports de rigidité, seuls le rapport des masses surfaciques σ et le rapport géométrique s ont une influence sur la première pulsation propre.

Pour les modes de vibration d'ordre supérieur, il peut être montré (ceci n'est pas représentable sur les figures de 2.5) que les isovaleurs des pulsations propres sont définies par $\delta \propto \sigma$ pour $\delta < 100$. Ceci signifie qu'en dehors du comportement piston-plan, seul le rapport masse/rigidité joue un rôle dans l'estimation des fréquences propres.

Si l'on retourne maintenant au cas d'un haut-parleur, il a été mentionné précédemment que la configuration la plus favorable est obtenue lorsque le premier mode de vibration est bien séparé des autres modes de vibration. Idéalement, on aimerait se ramener au cas où les modes de vibration sont repoussés en dehors de la gamme audible (c'est-à-dire au dessus de 20 kHz). D'après les résultats présentés figures 2.4 et 2.5, on peut se rendre compte que cette configuration peut être approchée en choisissant avec soin les propriétés des matériaux : en effet, on atteint une configuration préférentielle lorsque $\sigma = 10$ (ω_1 augmente peu) et $\delta > 100$ (les autres pulsations propres augmentent largement).

Par exemple, lorsque $\delta = 10^5$ et $\sigma = 10$ et pour un paramètre géométrique de $s = 0.9$, la première pulsation propre n'augmente pas mais les autres pulsations propres sont augmentées d'un facteur plus grand que 6. Cette configuration serait atteinte par la combinaison d'un élastomère pour la partie extérieure avec un matériau tel que le nickel pour la partie centrale.

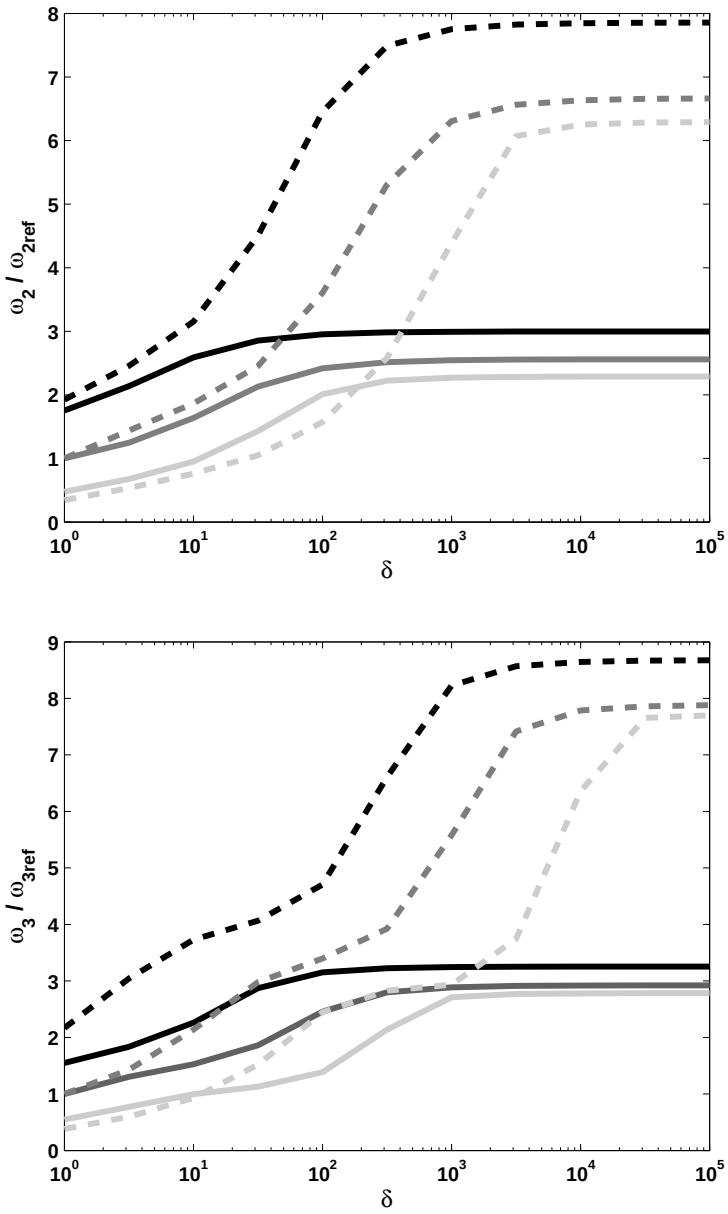


FIG. 2.5 – Evolution de la seconde (haut) et la troisième (bas) pulsation propre ω_2 et ω_3 en fonction du rapport des rigidités en flexion entre les deux structures δ. Les résultats sont adimensionnés par ω_{ref}, valeurs limites obtenues dans le cas $\sigma = \delta = 1$. Les lignes pointillées $(- -)$ représentent la configuration géométrique $s = 0.9$, et les lignes continues le cas $s = 0.5$. Les lignes noires se ramènent au cas $\sigma = 0.1$, les lignes gris foncé lorsque $\sigma = 1$ et les lignes gris clair au cas $\sigma = 10$. Pour $\delta > 10^3$, ω_2 est indépendant de δ et pour $\delta < 100$, on montre que les isovaleurs de ω_2 et ω_3 sont définies par $\delta \propto \sigma$. Des grandes valeurs du paramètre s permettent d'atteindre des fréquences propres plus élevées pour ces deux modes : pour $\delta > 1000$, $\omega_2 \simeq 8\omega_{2ref}$ et $\omega_3 \simeq 8\omega_{3ref}$ lorsque $s = 0.9$ alors que $\omega_2 \simeq 2\omega_{2ref}$ et $\omega_3 \simeq 3\omega_{3ref}$ lorsque $s = 0.5$.

Comportement non linéaire

Dans l'équation (2.26), il apparaît que le terme ε fixe l'ordre des non-linéarités. Pour des larges amplitudes de vibration, tous les modes sont couplés via les termes Γ_{pqau} de cette même équation. Cependant, des études expérimentales [61, 77] montrent que les non-linéarités dans les haut-parleurs standards ne se manifestent que par l'apparition d'harmoniques dans la réponse du système (distorsion harmonique). Des phénomènes de couplage interne, pour lesquels de l'énergie est transférée d'un mode vers un autre, n'ont jamais été observés expérimentalement. Ainsi, on peut conclure que le terme principal responsable de non-linéarités géométriques au sein d'un haut-parleur classique est le terme $\Gamma_{aaaa}q_a^3$ (qui a pour conséquence la production d'harmoniques impairs dans la réponse du mode a), et non les termes croisés Γ_{apqr} qui traduisent des couplages internes entre les oscillateurs a, p, q et r. Il est donc raisonnable de n'étudier l'influence des paramètres matériaux et géométrique que sur les coefficients Γ_{aaaa}.

Les figures 2.6 et 2.7 représentent l'évolution des coefficients Γ_{aaaa} pour les 3 premiers modes de vibration pour différentes valeurs de δ et σ. Tous les résultats sont adimensionnés par la valeur de Γ obtenue dans le cas d'une plaque plane (lorsque $\delta = \sigma = 1$). Le code de couleur est identique à celui utilisé pour les figures 2.4 et 2.5.

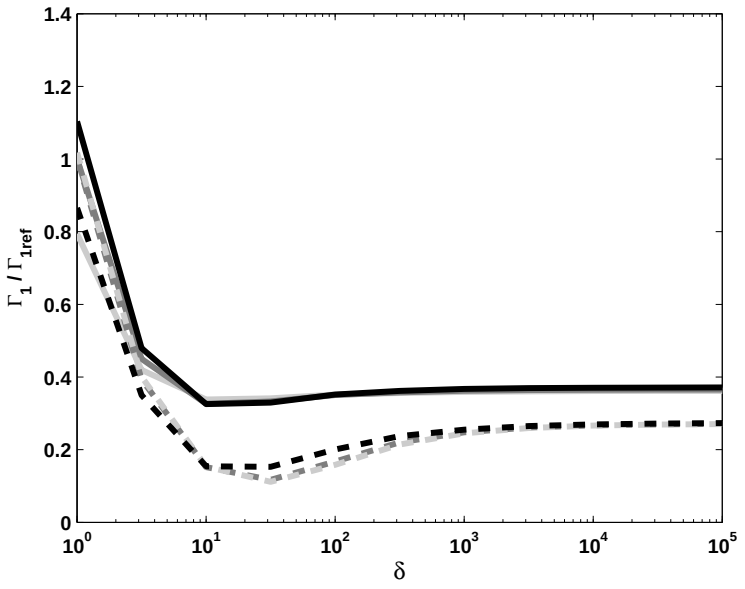


FIG. 2.6 – Evolution du premier coefficient non linéaire Γ_{1111} en fonction du rapport des rigidités en flexion entre les deux structures δ. Les résultats sont adimensionnés par Γ_{1ref}, valeur limite obtenue dans le cas $\sigma = \delta = 1$. Les lignes pointillées $(- -)$ représentent la configuration géométrique $s = 0.9$, et les lignes continues le cas $s = 0.5$. Les lignes noires se ramènent au cas $\sigma = 0.1$, les lignes gris foncé lorsque $\sigma = 1$ et les lignes gris clair au cas $\sigma = 10$. Le premier coefficient non linéaire est indépendant du rapport des densités σ et un minimum est atteint pour $\delta = 30$ indépendamment de la valeur du paramètre géométrique s.

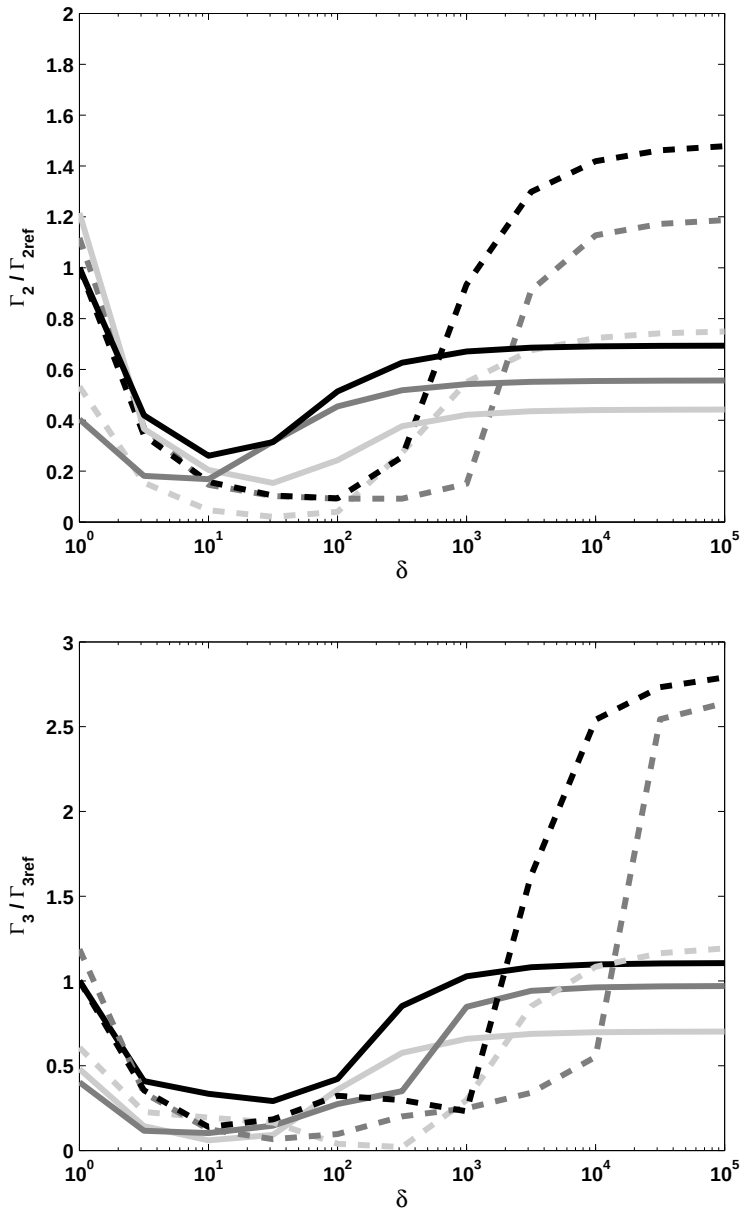


FIG. 2.7 – Evolution du second (haut) et du troisième (bas) coefficient non linéaire Γ_{2222} et Γ_{3333} en fonction du rapport des rigidités en flexion entre les deux structures δ. Les résultats sont adimensionnés par Γ_{ref}, valeur limite obtenue dans le cas $\sigma = \delta = 1$. Les lignes pointillées $(- -)$ représentent la configuration géométrique $s = 0.9$, et les lignes continues le cas $s = 0.5$. Les lignes noires se ramènent au cas $\sigma = 0.1$, les lignes gris foncé lorsque $\sigma = 1$ et les lignes gris clair au cas $\sigma = 10$. Un minimum est atteint dans la région $10 < \delta < 100$ en fonction du paramètre géométrique s.

Comme précédemment, le premier mode de vibration doit être traité séparément des autres modes de vibration, car pour ce mode, seul le rapport des rigidités δ a une influence sur Γ_{1111}. Sur la figure 2.6, il apparaît qu'un minimum de ce coefficient non linéaire est atteint lorsque $\delta \simeq 30$, et dans ce cas, la valeur atteinte est environ 4 fois inférieure à celle obtenue dans le cas du piston plan ($\delta \gg 1$). Pour les autres modes de vibration, deux tendances communes se dégagent :

- pour $\delta < 100$ les coefficients non linéaires décroissent avec δ et un minimum est atteint dans la région $10 < \delta < 100$ dépendant de la valeur du paramètre géométrique s.

- pour $\delta > 100$ (approximation piston plan), les coefficients non linéaires sont indépendants de la valeur de δ et seuls le rapport des densités σ et le paramètre géométrique s ont une influence sur le coefficient considéré.

Dans le contexte de dimensionnement de haut-parleurs, les figures 2.6 et 2.7 mettent en évidence des domaines en fonction de δ et σ pour lesquels les non-linéarités géométriques sont réduites, ce qui permet d'atteindre des plus grandes amplitudes de vibration sans altérer la reproduction sonore. La condition $\delta = 30$ permet par exemple de minimiser les non-linéarités pour tous les modes de vibration et constitue un bon candidat dans le choix de matériaux.

2.5.3 Influence du paramètre géométrique

Reste enfin à étudier l'influence du paramètre géométrique s. Dans toutes les simulations qui suivent, on se place dans le cas où les non-linéarités sont réduites, c'est-à-dire que l'on choisit un rapport de rigidités en flexion valant $\delta = 30$ (se référer à la section précédente pour le choix de cette variable).

L'influence du paramètre géométrique s sur les valeurs des 2 premières fréquences propres ω_1 et ω_2, ainsi que sur les 2 premiers coefficients non linéaires Γ est représentée sur les figures 2.8 et 2.9 pour 3 valeurs de rapport de densités σ.

Ces résultats mettent en évidence que le paramètre géométrique s a une grande influence sur le comportement linéaire et non linéaire de la structure. Par exemple, la figure 2.9 montre que le coefficient non linéaire peut être réduit d'un facteur 100 entre $s = 0.1$ et $s = 0.9$, ce qui signifie que dans la configuration $s = 0.9$, le système est quasiment linéaire et que de grandes amplitudes de vibration peuvent être atteintes sans distorsions. Des résultats similaires sont observés pour les autres modes de vibration, ce qui devrait permettre un meilleur dimensionnement de haut-parleurs acceptant de grandes amplitudes de vibration.

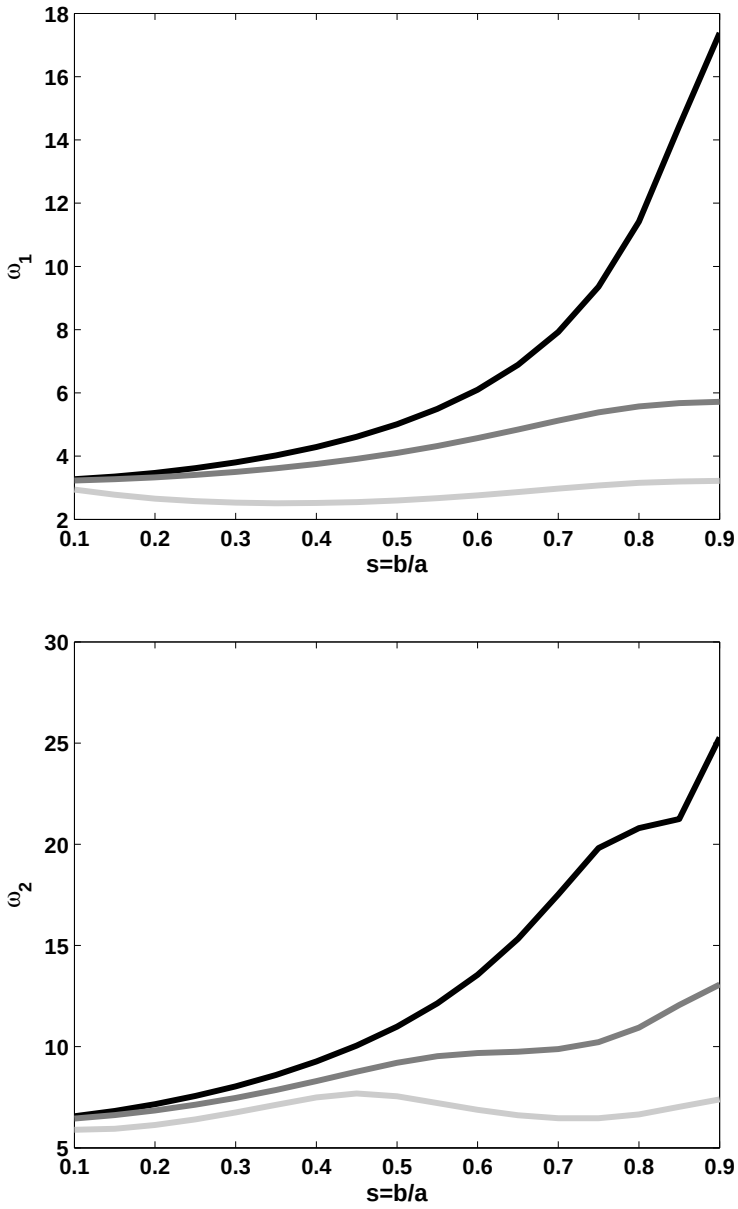


FIG. 2.8 – Evolution des deux premières pulsations propres ω_1 (haut) et ω_2 (bas) par rapport au paramètre géométrique s dans le cas $\delta = 30$. Les lignes noires se ramènent au cas $\sigma = 0.1$, les lignes gris foncé lorsque $\sigma = 1$ et les lignes gris clair au cas $\sigma = 10$. s a peu d'influence sur la première pulsation propre, si ce n'est dans le cas de faible rapport de rigidité $\sigma = 0.1$.

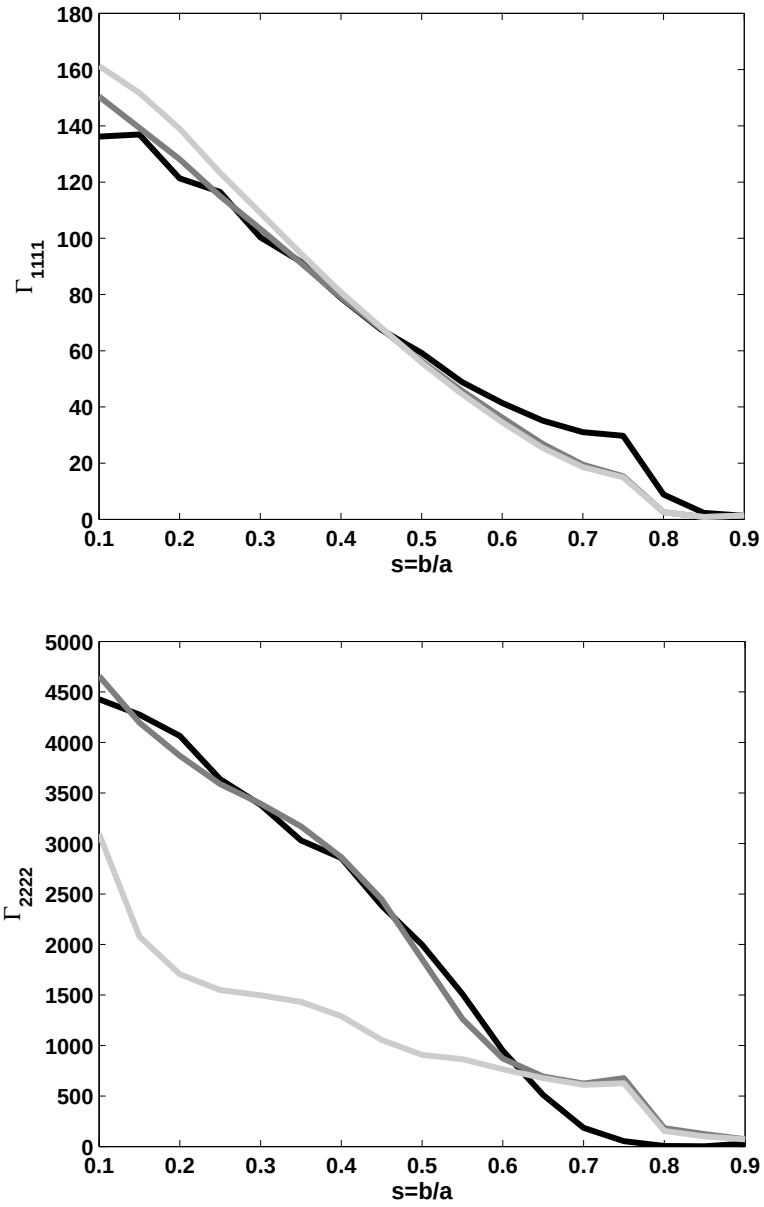


FIG. 2.9 – Evolution des deux premiers coefficients non linéaire Γ_{1111} (haut) et Γ_{2222} (bas) par rapport au paramètre géométrique s dans le cas $\delta = 30$. Les lignes noires se ramènent au cas $\sigma = 0.1$, les lignes gris foncé lorsque $\sigma = 1$ et les lignes gris clair au cas $\sigma = 10$. Indépendamment de σ, le premier coefficient non linéaire décroît avec s. Dans l'optique de réduire les non-linéarités géométriques, le rapport géométrique s doit être choisi aussi grand que possible.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est intéressé aux vibrations linéaires et non linéaires de structures de type haut-parleur. La structure a été modélisée comme l'assemblage d'une structure plane annulaire avec une plaque circulaire. Les solutions ont été projetées sur les modes propres linéaires de la structure et le problème a été adimensionné, faisant apparaître des paramètres matériau (rapport des rigidités en flexion δ et des densités σ) et géométriques (rapport s des rayons des deux structures).

L'évolution des pulsations propres et des coefficients non linéaires responsables des distorsions pour de grandes amplitudes de vibration en fonction de ces 3 paramètres a été présentée. Il est montré que dans le cas du dimensionnement de haut-parleurs, ces 3 paramètres doivent être choisis avec soin afin de réduire les non-linéarités et d'étendre le fonctionnement de la structure sur un mode de vibration unique.

La configuration la plus pertinente dans le cadre de haut-parleur classique serait telle que le rapport des rigidités soit de l'ordre de $\delta = 30$, le rapport des densités de l'ordre de $\sigma = 10$ et un rapport géométrique $s = 0.9$. En choisissant un élastomère comme constituant de la suspension externe, cela reviendrait à choisir une matériau n'existant pas d'après la figure 2.3. Cela dit, on peut s'en rapprocher en utilisant un métal pour la partie centrale.

Les conclusions de ce chapitre sont que la configuration "idéale" dans le cas d'une structure plane n'existe pas mais peut être approchée. Nous allons ainsi tenter de déterminer si une configuration semblable existe lorsque l'on ajoute une courbure locale à notre structure et si celle-ci est réalisable avec les matériaux existants. Aussi, le chapitre suivant va permettre de caractériser l'influence de la forme (de la suspension et de la partie centrale) sur le comportement vibratoire, en régime linéaire et pour des grandes amplitudes de vibration afin de savoir si une configuration optimale peut être atteinte dans le cas d'une structure non-plane. L'objectif final étant de comparer l'influence relative de la forme et du matériau sur le comportement vibratoire et acoustique d'un haut-parleur, les solutions obtenues dans ce chapitre serviront de références aux calculs avec addition d'une fonction de forme.

Chapitre 3

Modélisation de la structure non plane

Sommaire

3.1 Formulation du problème mécanique dans le cas de structures non planes 44
3.1.1 Description du problème 44
3.1.2 Hypothèses et validité 44
3.1.3 Equations du mouvement dans l'ancienne base 46
3.1.4 Changement de base 46
3.2 Influence de la forme au niveau mécanique 47
3.2.1 Forme de la suspension 48
Comportement linéaire : pulsations propres et déformées modales . 48
Comportement non linéaire : coefficients cubiques et quadratiques . 50
3.2.2 Forme de la partie centrale 51
Comportement linéaire : pulsations propres et déformées modales . 51
Comportement non linéaire : coefficients cubiques et quadratiques . 54
3.3 Conclusion 55

3.1 Formulation du problème mécanique dans le cas de structures non planes

3.1.1 Description du problème

Dans cette partie, on s'intéresse à l'effet de la forme au niveau mécanique. Le but est de pouvoir prédire l'effet de la forme d'une structure de type haut-parleur sur son comportement vibratoire. Ce type de modélisation, dans le cas de structures de type haut-parleurs, est assez peu documenté. On peut citer les travaux de [90] dans le domaine linéaire et de [135] dans le domaine non linéaire. La formulation du problème reste identique à celle employée au chapitre 2, à ceci près qu'un défaut dû à la non-planéité est introduit dans les équations locales de vibration, comme présenté dans les travaux de [3, 20]. L'idée est d'introduire une nouvelle décomposition du mouvement transverse $w(r,t)$ de la forme :

$$w(r,t) = h_0(r) + \tilde{w}(r,t), \tag{3.1}$$

où $\tilde{w}(r,t)$ désigne le déplacement vibratoire et $h_0(r)$ le déplacement de la structure au repos, à savoir la fonction de forme de la structure étudiée (se référer à la figure 3.1).

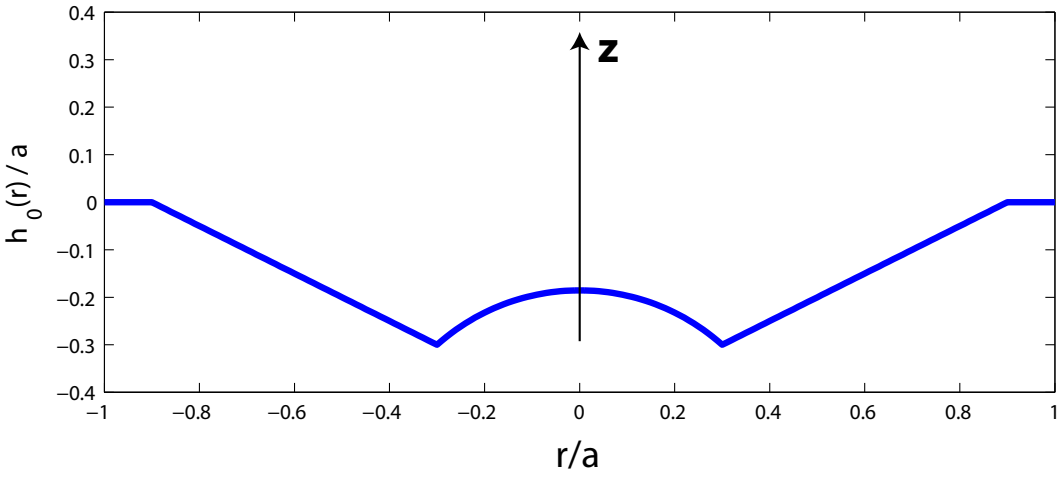


FIG. 3.1 – Description de la fonction de forme dans le cas d'un haut-parleur classique. La coordonnée spatiale r ainsi que le profil $h_0(r)$ sont adimensionnés par le rayon extérieur a. La structure est ici composée d'une suspension plane (pour $0.9 < r$), d'un tronc de cône (pour $0.3 < r < 0.9$) et d'une coque sphérique (pour $r < 0.3$).

3.1.2 Hypothèses et validité

Ce chapitre expose de manière synthétique la méthode de résolution adoptée. Plus de détails peuvent être trouvés dans [3] et la comparaison avec un modèle de coque sphérique de [122] et un modèle par éléments finis peut être trouvée dans [20]. Dans un second temps, cette modélisation est appliquée à deux types de défauts (suspension et membrane sphérique) afin d'en dégager l'influence. L'approche adoptée sera ensuite utilisée pour proposer au chapitre 6 un modèle directement applicable au cas de haut-parleurs réels.

L'hypothèse supplémentaire est que les angles de deformation restent faibles. Ceci impose que le défaut soit faible devant le rayon extérieur de la structure a. La condition théorique ci-dessous doit ainsi être respectée sur tout le profil :

$$\frac{h_0(r)}{a} \ll 1. \tag{3.2}$$

Cette condition ne s'avère plus valable dans le cas de structures de type haut-parleur pour lesquelles les profondeurs atteignent le rayon de la structure (surtout dans le cas de "boomer" [25]). Néanmoins, il a été montré [20] que la présente approche permet de prédire, sous l'hypothèse d'axisymétrie, avec précision les fréquences propres ainsi que les coefficients non linéaires pour des profondeurs de l'ordre de la moitié du rayon. En revanche, lorsque l'hypothèse d'axisymétrie est levée, les fréquences propres ne sont prédites correctement que pour des défauts de l'ordre de l'épaisseur de la structure.

A titre d'exemple, la figure 3.2 représente les fréquences propres des 3 premiers modes axisymétriques prédits en utilisant la présente approche et un modèle par éléments finis sous CAST3M pour différentes configurations géométriques. On observe ainsi que l'erreur est inférieure à 5% pour des défauts de l'ordre de la moitié du rayon, ce qui nous permet de dégager les premières tendances de la forme au niveau mécanique dans le cas de haut-parleurs. Dans toute la suite, on se cantonne au cas de structures dont la profondeur $h_{max} = max(h_0(r))$ n'excèdera pas la moitié du rayon extérieur (soit $h_{max} < 0.5a$).

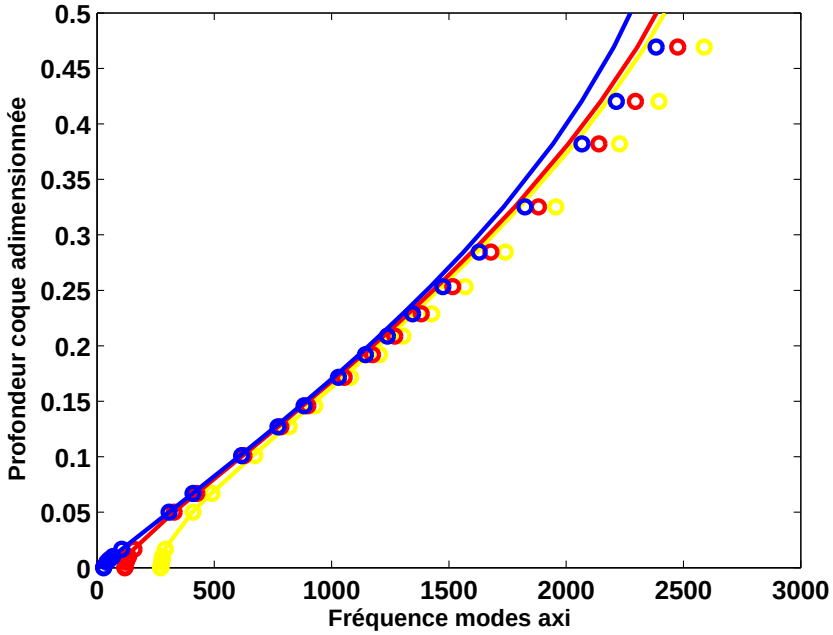


FIG. 3.2 – Comparaison des fréquences propres adimensionnées des 3 premiers modes axisymétriques (mode 1 : bleu, mode 2 : rouge et mode 3 : jaune) dans le cas de coques sphériques de différentes profondeurs. Pour chaque profil, la présente approche (points) est comparée à une approche par éléments finis sous CAST3M (traits pleins) et une erreur maximale de 5% est atteinte lorsque la profondeur h_{max} atteint la moitié du rayon de la structure.

3.1.3 Equations du mouvement dans l'ancienne base

On réinjecte l'expression dans les équations locales du déplacement (2.13) afin de se ramener à l'expression suivante après retrait des termes constants de l'équation (cf. [20] pour plus de détails) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\delta}{\sigma}(r)\Delta\Delta w + \ddot{w} & = & \varepsilon\left(\dfrac{1}{\sigma(r)}L(w,F) + L(h_0,F) - 2\sigma(r)\mu(r)\dot{w} + T(r,t)\dfrac{1}{\sigma(r)}\right), \\ \Delta\Delta F & = & -\dfrac{\gamma(r)}{2}\left(L(w,w) + 2L(w,h_0)\right). \end{array}\right. \tag{3.3}$$

On observe un nouveau terme $L(h_0, F)$ dans (3.3) qui peut être décomposé en deux parties : la première partie affecte le système linéaire (en modifiant les fréquences propres et les déformées propres) et la partie non linéaire est responsable de non-linéarités quadratiques supplémentaires qui n'existaient pas dans le cas d'une structure plane. Cette formulation a été validée pour un défaut sphérique dans le cas de coques à bords libres [20].

Le déplacement est décomposé suivant les modes propres linéaires de la structure plane comme au chapitre 2 :

$$w(r,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(r) h_p + \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(r) q_p(t). \tag{3.4}$$

On montre que l'expression (3.3) est modifiable en utilisant le même schéma de résolution que celui du chapitre 2 et qu'on peut se ramener après projection sur les modes propres obtenus dans le cas plan aux équations modales suivantes :

$$\omega_a^2 q_a + \ddot{q_a} = \varepsilon \left(\sum_q \Lambda_{qa} q_p + \sum_p \sum_q \beta_{pqa} q_p q_q + \sum_p \sum_q \sum_u \Gamma_{pqau} q_p q_q q_u - 2\mu_a \dot{q_a} + T_a \right) \tag{3.5}$$

où Λ_{qa} et β_{pqa} désignent respectivement les couplages linéaires et non linéaires quadratiques induits par la non-planéité de la source. Ils sont définis à l'aide des coefficients non linéaires cubiques Γ_{pqau} calculés dans le cas d'une structure plane (cf chapitre 2) :

$$\left\{\begin{array}{l} \Lambda_{qa} = \displaystyle\sum_p \sum_u 2\Gamma_{pqau} h_u h_p \\ \beta_{pqa} = \displaystyle\sum_u \left(\Gamma_{pqau} + 2\Gamma_{upaq}\right) h_u \end{array}\right. \tag{3.6}$$

3.1.4 Changement de base

Le nouveau problème linéaire associé aux équations modales (3.5) est le suivant :

$$\omega_a^2 q_a + \ddot{q_a} - \varepsilon \sum_p \sum_q \Lambda_{qa} q_p = 0, \tag{3.7}$$

où ω_a désigne les pulsations propres du problème plan. Afin de déterminer les nouvelles pulsations propres du système non plan $\overline{\omega_a}$, il est nécessaire de tronquer ce problème à N modes

puis de le diagonaliser. Ceci est possible en introduisant la matrice K définie ainsi :

$$K = \begin{pmatrix} \omega_1^2 - \varepsilon\Lambda_{11} & -\varepsilon\Lambda_{21} & \cdots & -\varepsilon\Lambda_{N1} \\ -\varepsilon\Lambda_{12} & \omega_2^2 - \varepsilon\Lambda_{22} & \cdots & -\varepsilon\Lambda_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varepsilon\Lambda_{1N} & -\varepsilon\Lambda_{2N} & \cdots & \omega_N^2 - \varepsilon\Lambda_{NN} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

L'ordre de troncature N modifie la précision des résultats dans la nouvelle base, aussi bien au niveau linéaire (estimation des fréquences propres et des déformées) qu'au niveau non linéaire (estimation des nouveaux coefficients cubiques et quadratiques). De manière générale, il faut s'assurer que le défaut de forme est bien estimé par la décomposition modale de l'équation (3.4). Dans toute la suite, les résultats obtenus comportent une décomposition du défaut sur les 9 premiers modes linéaires de la structure, de telle sorte qu'une erreur quadratique maximale de l'ordre du pour cent est atteinte.

La recherche des valeurs propres de K fournit les nouvelles pulsations propres $\overline{\omega_a}$ du système non plan. Ensuite, les nouveaux coefficients non linéaires cubiques $\overline{\Gamma}_{pqau}$ et quadratiques $\overline{\beta}_{pqa}$ sont exprimés dans la nouvelle base pour aboutir à la formulation finale :

$$\boxed{\overline{\omega_a}^2 q_a + \ddot{q_a} = \varepsilon \left(\sum_p \sum_q \overline{\beta}_{pqa} q_p q_q + \sum_p \sum_q \sum_u \overline{\Gamma}_{pqau} q_p q_q q_u - 2\mu_a \dot{q_a} + T_a \right)} \tag{3.9}$$

La formulation dans la nouvelle base base fait apparaître les effets de la forme au niveau mécanique :

• une modification des fréquence propres au niveau linéaire (la courbure augmente la raideur locale et repousse les fréquences propres vers les hautes fréquences),

• une modification (augmentation) des coefficients non linéaires cubiques Γ qui modifie la dynamique pour des grandes amplitudes de vibrations,

• l'ajout de coefficients non linéaires quadratiques β, qui modifient les tendances de non-linéarités (comportement assouplissant ou raidissant) et sont responsables de l'apparition d'harmoniques pairs dans la réponse vibratoire du système.

3.2 Influence de la forme au niveau mécanique

Dans cette section, on se propose d'étudier l'influence de la forme de la suspension dans un premier temps puis de la forme de la partie centrale sur le comportement vibratoire de la structure globale. Pour ce faire, plutôt que d'effectuer un inventaire des formes possibles avec chaque couple de paramètre mécanique (rapport de rigidité δ, rapport des densités σ), on va fixer un défaut de forme sphérique dans chaque partie et observer les conséquences sur les pulsations propres, les déformées modales et les coefficients non linéaires.

On s'avisera dans toute la suite de rester dans le cadre d'application de la théorie prévue, à savoir que tous les défauts utilisés ne doivent pas dépasser la moitié du rayon extérieur afin de ne pas commettre une trop grande erreur d'estimation des fréquences propres et ainsi sur les coefficients non linéaires.

Dans l'équation 3.7, les modifications apportées par la forme sont introduites à travers les coefficients Λ_{qa} définis uniquement à partir de la projection de la fonction de forme sur les modes linéaires obtenus dans le cas plan. Or, il a été montré au chapitre 2 que le rapport des densités σ n'a pas (ou très peu) d'influence sur les déformées propres du système. Ainsi, les résultats obtenus dans le cas d'un rapport des densités fixé sont valables quelle que soit la valeur de ce paramètre. C'est pourquoi tous les résultats présentés ont été effectués dans le cas d'un rapport des densités fixé à $\sigma = 1$.

3.2.1 Forme de la suspension

Afin d'illustrer l'influence de la forme de la suspension sur le comportement vibratoire de la structure, on introduit un défaut sphérique à la suspension comme représenté figure 3.3. D'autres formes peuvent être introduites mais plutôt que d'effectuer un catalogue de profils, on préfère illustrer le comportement typique obtenu avec ce profil simple.

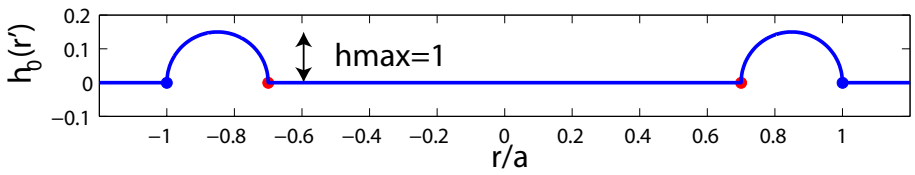


FIG. 3.3 – Exemple du défaut de forme $h_0(r')$ appliqué à la suspension. Dans ce cas, la jonction est situé en $s = 0.7$ (rouge) et le défaut est sphérique. Sur cette figure est représenté le cas limite $h_{max} = 1$.

On définit ainsi un paramètre de forme h_{max} qui correspond à la profondeur de la suspension (ramenée au rayon de la suspension s) et on étudie l'influence de ce paramètres sur les pulsations propres, les déformées et les coefficients non linéaires définis à l'équation (3.5). Le cas $h_{max} = 1$ correspond au cas où la suspension est de forme torique parfaite (comme représenté figure 3.3).

Comportement linéaire : pulsations propres et déformées modales

Les figures 3.4 et 3.5 représentent l'évolution des pulsations propres ω_a pour les 9 premiers modes de vibration en fonction du paramètre de forme h_{max} dans les cas limites $\delta = 1$ (plaque) et $\delta = 10^5$ (piston).

Il apparaît sur ces deux figures que la forme de la suspension a peu d'influence sur les pulsations propres du système, que ce soit pour un faible rapport de rigidités en flexion ($\delta = 1$ figure 3.4) ou pour un grand rapport de rigidité ($\delta = 10^5$ figure 3.5). Dans ces deux cas, il apparaît que de plus grandes modifications sont apportés par le choix de δ que par la forme de la suspension.

Concernant les déformées propres (non représentées dans ce cas), on observe qu'elles sont assez peu modifiées par la forme de la suspension : on montre que l'on se ramène alors à un cas où la suspension est rigidifiée et dans ce cas, les déformées correspondent à celles que l'on calculerait en diminuant le rapport des rigidités en flexion δ.

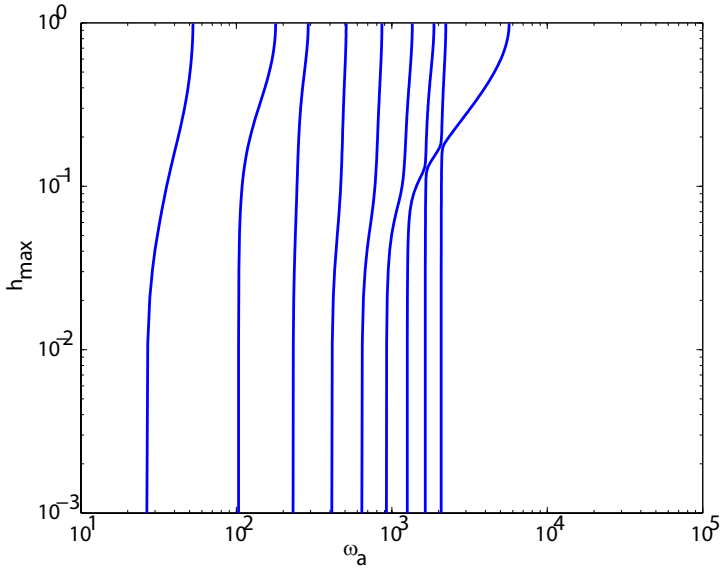


FIG. 3.4 – Evolution des 9 premières pulsations propres ω_a en fonction de la forme de la suspension h_{max} dans le cas d'une structure dont les deux matériaux ont des rigidités en flexion identiques ($\delta = 1$). Dans ce cas, la forme de la suspension a pour conséquence une rigidification de la structure (augmentation de toutes les pulsations propres).

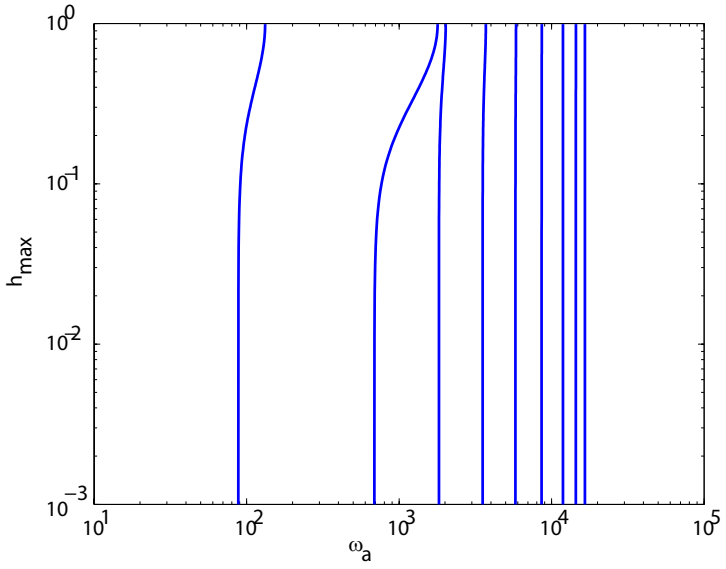


FIG. 3.5 – Evolution des 9 premières pulsations propres ω_a en fonction de la forme de la suspension h_{max} dans le cas d'une structure dont partie centrale est beaucoup plus rigide que la suspension ($\delta = 10^5$). Dans ce cas, la forme de la suspension n'a d'incidence que sur les 2 premiers modes de la structure (rigidification en basse fréquence) et les autres modes ne sont pas affectés par la forme de la suspension.

Comportement non linéaire : coefficients cubiques et quadratiques

Dans un second temps, l'effet de la forme de la suspension sur les coefficients non linéaires cubiques Γ_a et quadratiques β_a a été étudiée. Les figures 3.6 et 3.7 représentent l'évolution des coefficients cubiques Γ_a et quadratiques β_a pour les 9 premiers modes de vibration en fonction du paramètre de forme h_{max} dans les cas limites $\delta = 1$ (plaque) et $\delta = 10^5$ (piston).

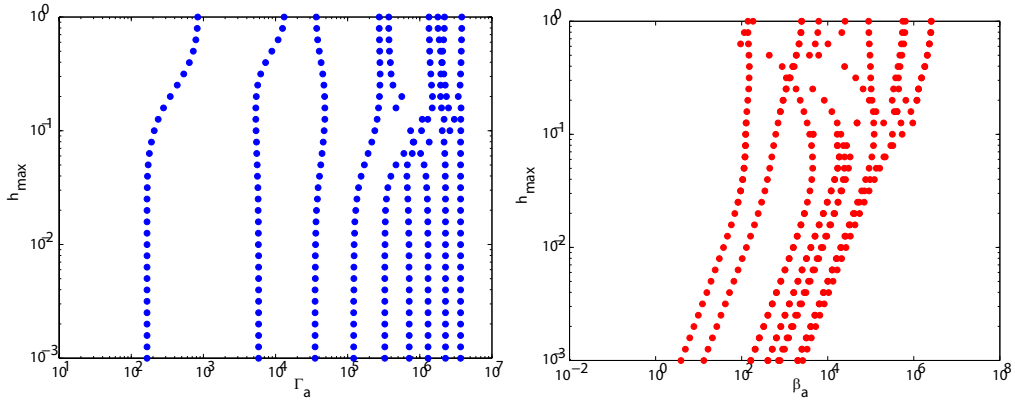


FIG. 3.6 – Evolution des 9 premières coefficients cubiques Γ_a (gauche) et quadratiques β_a (droite) en fonction de la forme de la suspension h_{max} dans le cas d'une structure dont les deux matériaux ont des rigidités en flexion identiques ($\delta = 1$).

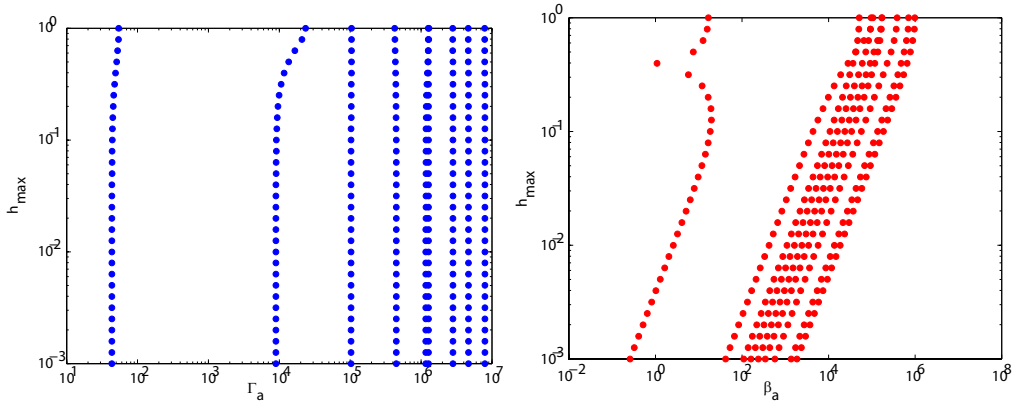


FIG. 3.7 – Evolution des 9 premières coefficients cubiques Γ_a (gauche) et quadratiques β_a (droite) en fonction de la forme de la suspension h_{max} dans le cas d'une structure dont partie centrale est beaucoup plus rigide que la suspension ($\delta = 10^5$).

De ces deux figures, il apparaît bien que la forme a pour effet de générer une valeur non nulle des coefficients quadratiques β_a (figures de droite) et ce même pour des faibles courbures. Il apparaît également que la forme de la suspension modifie légèrement les coefficients cubiques Γ_a (jusqu'à un facteur 10 pour le premier mode de vibration dans le cas d'une suspension torique), et de manière générale, l'introduction d'une non-planéité de la suspension va avoir tendance à augmenter les non-linéarités géométriques, ce qui est à proscrire dans le cas d'un haut-parleur.

3.2.2 Forme de la partie centrale

Dans un troisième temps, on s'est intéressé à l'influence de la forme de la partie centrale sur le comportement vibratoire de la structure globale. Comme précédemment, on illustre les résultats typiques obtenus dans le cas d'un profil sphérique et on définit de manière identique un paramètre de forme h_{max} correspondant à la profondeur du profil, comme indiqué figure 3.8. Le cas $h_{max} = 1$ correspond alors au cas d'une coque hémisphérique. Dans toute la suite, les calculs ont été effecetué pour un paramètre h_{max} jusqu'à 1 mais seules les valeurs inférieures à $h_{max} = 0.5$ sont acceptables (les conditions de validité du modèle étant respecttées en deça).

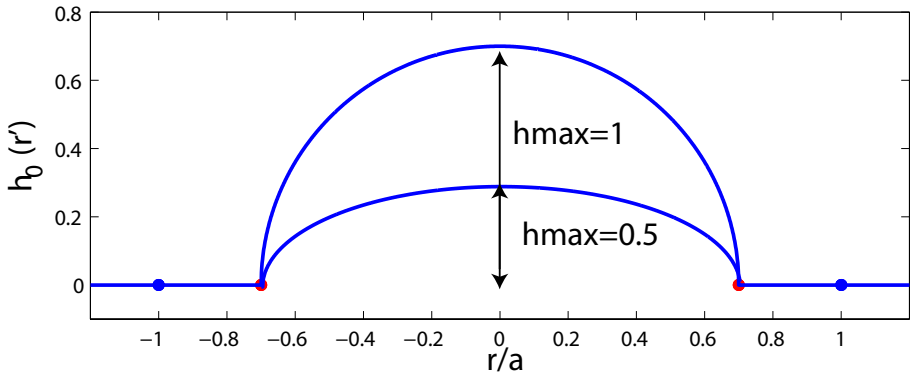


FIG. 3.8 – Exemple de défaut de forme $h_0(r')$ appliqué à la structure intérieure. Dans ce cas, la jonction est situé en $s = 0.7$ (rouge) et le défaut est sphérique. Sur cette figure sont représentés les cas limites $h_{max} = 0.5$ et $h_{max} = 1$ (coque hémisphérique). Dans toute la suite, seuls les résultats obtenus sur les structures telles que $h_{max} < 0.5$ ne sont valables.

Comportement linéaire : pulsations propres et déformées modales

Les figures 3.9 et 3.10 représentent l'évolution des pulsations propres ω_a pour les 9 premiers modes de vibration en fonction du paramètre de forme h_{max} dans les cas limites $\delta = 1$ (plaque) et $\delta = 10^5$ (piston).

Il apparaît sur ces deux figures que la forme de la partie centrale a un impact notoire pour le cas de deux structures identiques ($\delta = 1$ figure 3.9) et se traduit par une augmentation des pulsations propres : ainsi dans le cas d'un faible rapport de rigidités, le fait de rajouter une courbure permet d'augmenter "virtuellement" le rapport des rigidités δ. Cette tendance est également observable sur les déformées propres du système : en effet, la figure 3.11 représente les deux premières déformées propres $\Phi_1(r)$ et $\Phi_2(r)$ obtenues dans le cas d'une structure plane et d'une structure centrale hémisphérique pour un rapport de rigidités valant $\delta = 1$. On observe bien que dans ce cas, la déformée des deux premiers modes dans le cas de la coque hémisphérique se rapproche du cas $\delta = 10^5$ exposé figure 3.12.

En revanche, dans le cas d'un grand rapport de rigidité entre les deux structures ($\delta = 10^5$ figure 3.10), on remarque que la forme repousse légèrement (d'un facteur allant jusqu'à 2) les pulsations propres vers les hautes fréquences mais ne modifie pas les déformées propres du système (figure 3.12). Ainsi, au niveau linéaire tout se passe comme si la forme de la partie centrale avait comme effet d'augmenter le rapport de rigidités δ entre les deux sous-structures.

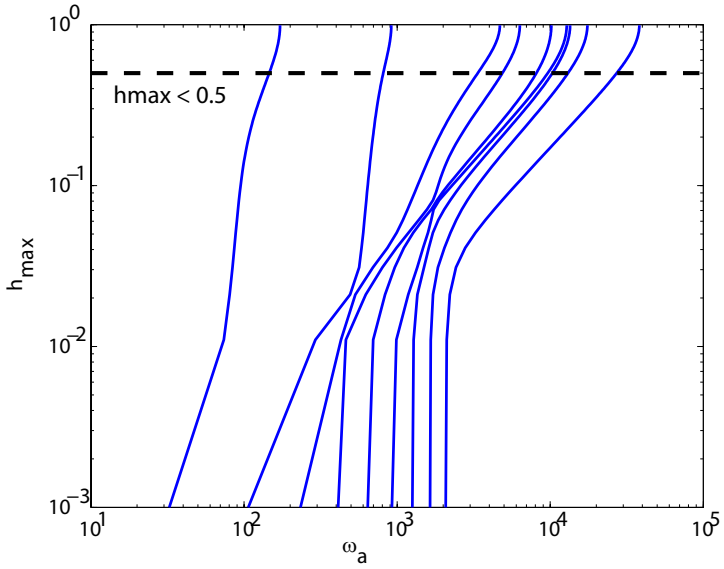


FIG. 3.9 – Evolution des 9 premières pulsations propres ω_a en fonction de la forme de la partie centrale h_{max} dans le cas d'une structure dont les deux matériaux ont des rigidités en flexion identiques ($\delta = 1$). Dans ce cas, la forme a pour incidence une rigidification de la structure (élévation de toutes les pulsations propres).

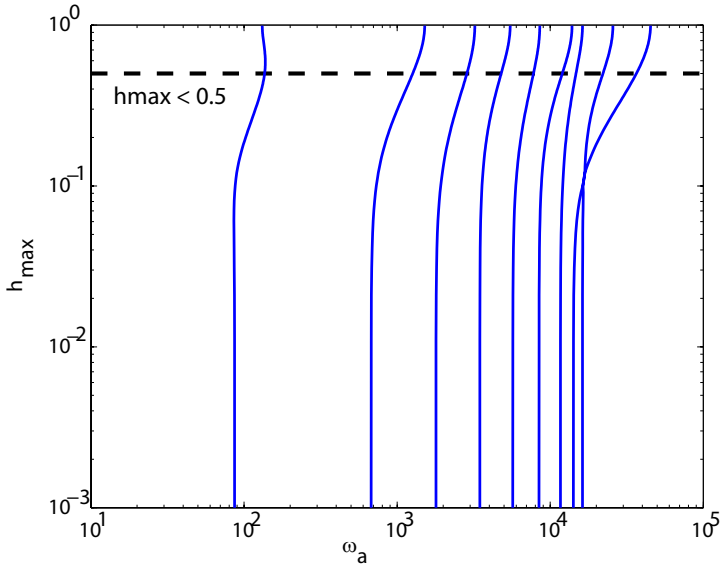


FIG. 3.10 – Evolution des 9 premières pulsations propres ω_a en fonction de la forme de la partie centrale h_{max} dans le cas d'une structure dont partie centrale est beaucoup plus rigide que la suspension ($\delta = 10^5$). Dans ce cas, la forme n'a d'incidence que sur les 2 premiers modes de la structure (rigidification en basse fréquence) et les autres modes ne sont pas affectés par la forme de la suspension.

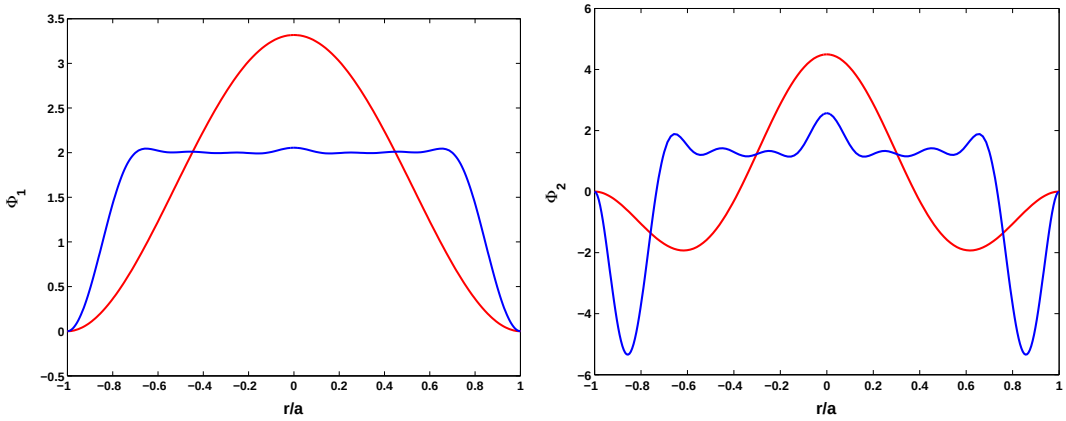


FIG. 3.11 – Deux premières déformées propres $\Phi_1(r')$ (droite) et $\Phi_2(r')$ (gauche) obtenues dans le cas d'un rapport de rigidités valant $\delta = 1$. Pour chaque courbe, la solution en rouge représente le cas d'une structure plane et la solution en bleu le cas obtenu pour une structure intérieure hémisphérique. Les oscillations observées sur les résultats de la coque (en bleu) sont des artefacts de calcul dus à la projection du défaut de forme sur uniquement 9 modes. On remarque dans ce cas que la forme a pour effet de rigidifier la structure centrale, ce qui revient à augmenter le rapport des rigidités δ. On se rapproche ainsi du cas piston plan du tableau 2.1, sans pour autant utiliser des matériaux très différents du point de vue des rigidités.

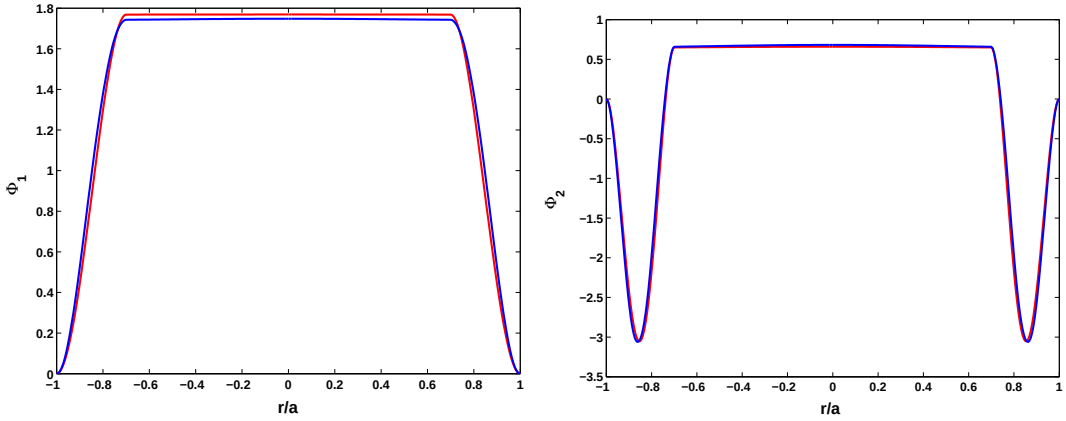


FIG. 3.12 – Deux premières déformées propres $\Phi_1(r')$ (droite) et $\Phi_2(r')$ (gauche) obtenues dans le cas d'un rapport de rigidités valant $\delta = 10^5$. Pour chaque courbe, la solution en rouge représente le cas d'une structure plane et la solution en bleu le cas obtenu pour une structure intérieure hémisphérique. On remarque dans ce cas que la forme a peu d'incidence sur les déformées propres, ce qui se comprend car on a deja atteint le cas limite $\delta \gg 1$.

Comportement non linéaire : coefficients cubiques et quadratiques

Reste enfin à étudier l'effet de la forme de la partie centrale sur les coefficients non linéaires cubiques Γ_a et quadratiques β_a. Les figures 3.13 et 3.14 représentent l'évolution des coefficients cubiques Γ_a et quadratiques β_a pour les 9 premiers modes de vibration en fonction du paramètre de forme h_{max} dans les cas limites $\delta = 1$ (plaque) et $\delta = 10^5$ (piston).

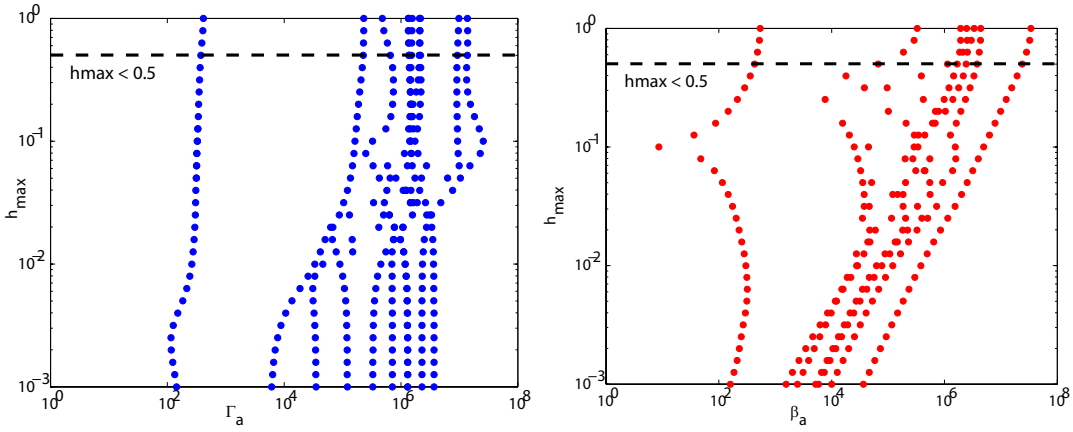


FIG. 3.13 – Evolution des 9 premières coefficients cubiques Γ_a (gauche) et quadratiques β_a (droite) en fonction de la forme de la partie centrale h_{max} dans le cas d'une structure dont les deux matériaux ont des rigidités en flexion identiques ($\delta = 1$).

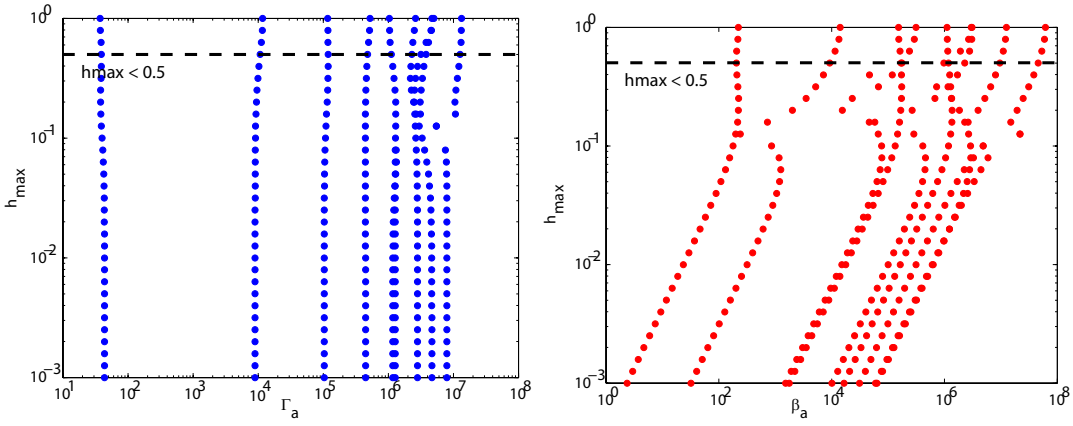


FIG. 3.14 – Evolution des 9 premières coefficients cubiques Γ_a (gauche) et quadratiques β_a (droite) en fonction de la forme de la partie centrale h_{max} dans le cas d'une structure dont partie centrale est beaucoup plus rigide que la suspension ($\delta = 10^5$).

Comme précédemment, il apparaît que la forme a pour effet de générer une valeur non nulle des coefficients quadratiques β_a (figures de droite) et ce même pour des faibles courbures. Dans le cas d'un rapport de rigidité identique $\delta = 1$, il apparaît que les coefficients cubiques Γ_a augmentent fortement avec la courbure alors que dans le cas d'un rapport de rigidité important $\delta = 10^5$, la forme a peu d'incidence sur ces coefficients (figure gauche de 3.14).

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, l'influence de la forme de la suspension et de la partie centrale sur le comportement vibratoire en régime linéaire et non linéaire a été montrée. Ceci a été effectué par ajout d'une fonction de forme $h_0(r)$ aux équations locales de vibration du chapitre 3. La méthode employée dans ce chapitre a montré un bon accord avec la méthode numérique des éléments finis sous l'hypothèse d'axisymétrie des vibrations de la structure. Dans noter cas, la fiabilité du modèle est assurée pour des profondeurs allant jusqu'à la moitié du rayon de la structure, ce qui nous permet de dégager qualitativement l'influence de la forme sur le comportement vibratoire de la structure.

De manière générale, il est à noter que la forme a pour incidence :

• de modifier les fréquences propres du système (rigidification de la structure),

• d'augmenter les non-linéarités géométriques par modification des coefficients cubiques dans les équations modales,

• de générer des termes non linéaires quadratiques dans les équations modales.

Il apparaît que la forme de la suspension a peu d'incidence sur le comportement vibratoire linéaire de la structure mais a pour effet d'augmenter les coefficients non linéaires, ce qui doit être à tout prix évité dans le cas d'un haut-parleur. En revanche, la forme de la partie centrale permet de modifier sensiblement les fréquences propres et les déformées propres du système, ce qui permet d'atteindre "virtuellement" des grands rapports de rigidité entre les deux structures, sans pour autant utiliser des matériaux dont le rapport des rigidités est très élevé. Ceci est très utile dans le cas de structures de type haut-parleur puisqu'il est ainsi possible de rechercher une solution matérielle "faisable" qui possède ainsi les caractéristiques vibratoires recherchées (grande séparation des modes et faibles coefficients non linéaires).

Le chapitre suivant balaie les résultats obtenus tout au long de cette première partie et compare les influences relatives de la forme et des matériaux sur le comportement vibratoire, tant au niveau linéaire qu'en régime de grandes amplitudes ainsi que sur l'efficacité de rayonnement de ce type de structures.

Chapitre 4

Bilan vibroacoustique : Influence relative de la forme et du matériau au niveau mécanique

Sommaire

4.1 Introduction 58
4.2 Sur le comportement vibratoire des structures de type haut-parleur 59
4.2.1 Au niveau linéaire 59
4.2.2 En régime de grandes amplitudes 61
4.3 Sur l'efficacité de rayonnement des structures de type haut-parleur 62
4.3.1 Définition 62
4.3.2 Influence de la forme et des matériaux 63
Cas d'une structure plane 63
Cas d'une structure avec courbure 65
4.4 Tableau récapitulatif 67

4.1 Introduction

Des deux chapitres précédents, il apparaît que la forme et les matériaux ont un impact notoire sur le comportement vibratoire de structures de type haut-parleur. Jusqu'alors, la plupart des études effectuées sur ce sujet étaient expérimentales et cette étude propose une modélisation théorique fine du comportement vibratoire, linéaire et non linéaire de ce genre de structures.

La solution de référence de notre problème est le cas d'une plaque plane encastrée à sa périphérie et nous avons dans un premier temps déterminé ce qu'engendre le fait d'utiliser une structure constituée de deux corps de deux matériaux distincts. Pour ce faire, nous avons utilisé la théorie de Von-Kármán des vibrations de plaques dans le cas de deux structures jointes. Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à l'impact d'une courbure locale dans les équations de vibration. Dans chaque cas, que ce soit pour caractériser l'impact des matériaux ou de la forme dans le cas de haut-parleurs, nous devons nous intéresser à différents critères tels que :

• L'éloignement respectif des modes entre eux (autrement dit la densité modale) qui va permettre de distinguer un régime de fonctionnement suivant un unique mode. Dans le cas de haut-parleurs, on aimerait que dans la bande passante utile, seul le premier mode soit excité, afin que le comportement vibratoire soit le plus simple possible.

• L'amortissement modal qui va déterminer si un mode va être plus ou moins présent dans la réponse transitoire du système ; dans le cas de haut-parleurs, on souhaiterait que le premier mode de vibration soit peu amorti (pour favoriser ce un mode de vibration unique) mais que les amortissements des autres modes soient importants afin que leur participation soit amoindrie.

• Les coefficients non linéaires qui vont déterminer les tendances de non-linéarités ainsi les niveaux vibratoires acceptables avant que les non-linéarités géométriques ne deviennent trop importantes dans la réponse vibratoire du système.

• L'efficacité de rayonnement qui détermine le taux d'énergie transféré dans le milieu environnant (variant avec la fréquence). Dans le cas de haut-parleurs, on aimerait atteindre un couplage maximal entre le milieu mécanique et le milieu fluide afin de gagner en rendement.

4.2 Sur le comportement vibratoire des structures de type haut-parleur

4.2.1 Au niveau linéaire

En régime de faibles amplitudes, seuls la densité modale et les amortissements modaux vont intervenir sur le comportement vibratoire de la structure. Nous allons ici résumer les résultats obtenus dans les cas limites suivants :

• cas d'une "plaque plane" (même rapport de rigidités en flexion $\delta = 1$, même rapport de densités $\sigma = 1$),

• cas intermédiaire "mixte" (rapport de rigidités en flexion moyen $\delta = 30$, rapport de densités $\sigma = 1$),

• cas d'un "piston plan" (rapport de rigidités en flexion important $\delta = 10^5$, même rapport de densités $\sigma = 1$),

puis en introduisant une non-planéité de la source (forme torique de la suspension puis forme sphérique de la structure centrale). Dans tous les résultats présentés, nous supposons que la structure extérieure est constituée d'un élastomère très amorti (coefficient d'amortissement visqueux $\mu = 0.8$), la structure intérieure d'un matériau très peu amorti (coefficient d'amortissement visqueux $\mu = 0.1$) et que le paramètre géométrique vaut $s = 0.7$. La dépendance vis à vis du rapport des densités σ et du paramètre géométrique s n'est pas présentée ici par soucis de concision mais il est à noter que ces paramètres influencent également les pulsations propres du système. Les figures 4.1, 4.2 et 4.3 représentent les 9 premières pulsations propres et leurs amortissements modaux respectifs dans le cas d'une structure plane, avec suspension torique et avec une structure interne sphérique.

On remarque ainsi les influences respectives de la forme et des configurations matérielles sur le comportement vibratoire linéaire. On peut ainsi dégager les tendances suivantes :

• un grand rapport de rigidité δ permet d'obtenir une bonne séparation du premier mode vis à vis des autres modes de vibration et permet d'augmenter l'amortissement modal des modes autres que le premier,

• la forme de la suspension a peu d'incidence sur les fréquences propres du système mais réduit l'amortissement modal des modes autres que le premier (figure 4.2),

• la forme de la partie centrale augmente la rigidité globale des modes d'ordre supérieur mais l'amortissement modal est diminué par rapport à la configuration plane pour ces modes (figure 4.3).

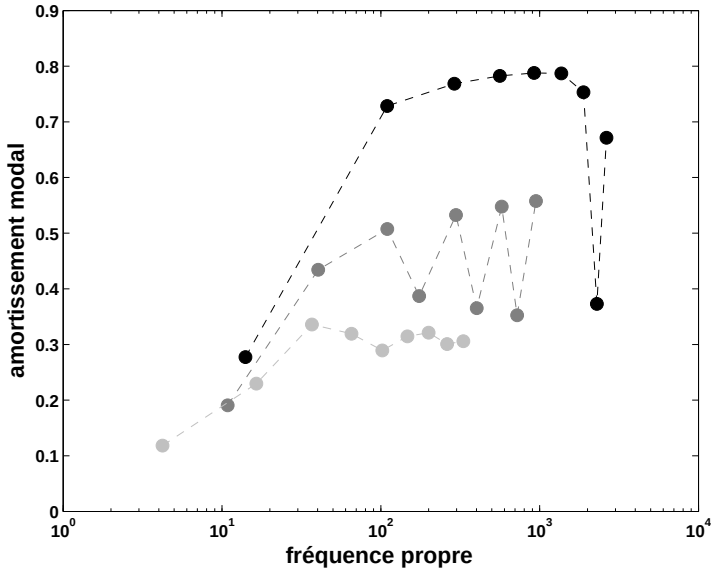


FIG. 4.1 – Pulsations propres et amortissements modaux pour les 9 premiers modes dans le cas d'une géométrie plane. Les points noirs représentent la configuration de plaque ($\delta = \sigma = 1$), les points gris foncé la configuration intermédiaire ($\delta = 30$ et $\sigma = 1$) et les points gris clair la configuration piston ($\delta = 10^5$ et $\sigma = 1$).

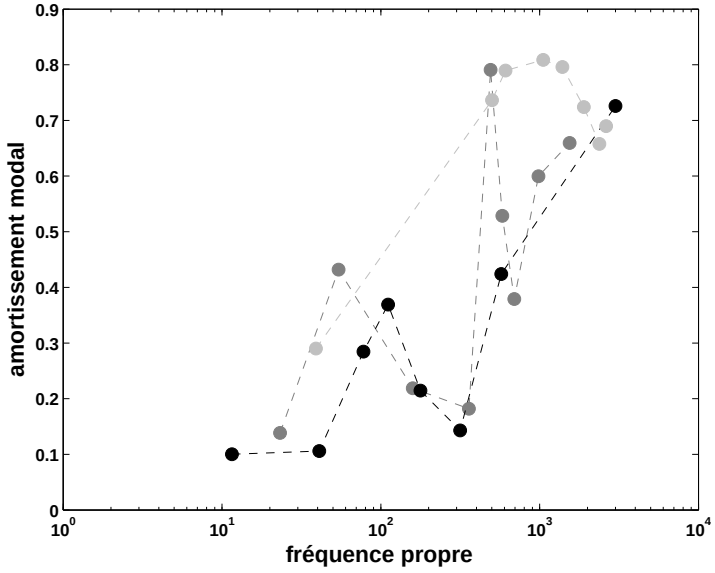


FIG. 4.2 – Pulsations propres et amortissements modaux pour les 9 premiers modes dans le cas d'une géométrie avec suspension torique. Les points noirs représentent la configuration de plaque ($\delta = \sigma = 1$), les points gris foncé la configuration intermédiaire ($\delta = 30$ et $\sigma = 1$) et les points gris clair la configuration piston ($\delta = 10^5$ et $\sigma = 1$).

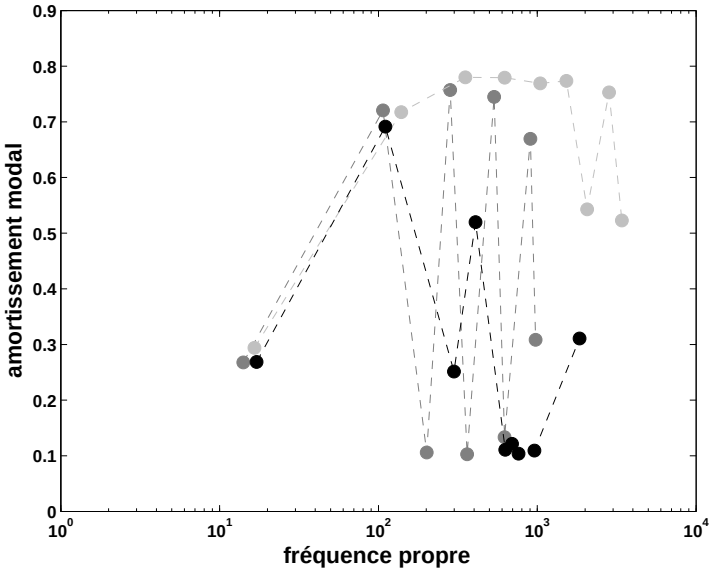


FIG. 4.3 – Pulsations propres et amortissements modaux pour les 9 premiers modes dans le cas d'une géométrie interne sphérique. Les points noirs représentent la configuration de plaque ($\delta = \sigma = 1$), les points gris foncé la configuration intermédiaire ($\delta = 30$ et $\sigma = 1$) et les points gris clair la configuration piston ($\delta = 10^5$ et $\sigma = 1$).

4.2.2 En régime de grandes amplitudes

En régime de grandes amplitudes, il a été montré (cf. chapitre 2) dans le cas d'une géométrie plane qu'il existe une configuration matérielle préférentielle qui permet de réduire les non-linéarités géométriques. Cette configuration correspond au cas "intermédiaire" $\delta = 30$ décrit plus haut. Le chapitre 2 a également montré que la configuration piston ($\delta \gg 1$) permet de réduire les coefficients non linéaires cubiques par rapport à la configuration plaque.

Lorsque l'on introduit une courbure locale (à la suspension comme à la partie centrale), on a également montré au chapitre 3 que la conséquence au niveau non linéaire est l'apparition de termes non linéaires quadratiques β_a non présents dans le cas de géométries planes. De plus, de manière générale, la non-planéité de la source a pour conséquence une augmentation des termes non linéaires cubiques qui engendrent une augmentation des non-linéarités géométriques. Ainsi, cette configuration devra être proscrite, sauf besoin particulier (on verra par la suite que la forme joue également un rôle prépondérant sur le rayonnement de la source).

Ainsi, si la seule donnée du problème était la séparation des modes et une limitation des non-linéarités, il apparaît que la configuration plane constituée de deux matériaux possédant un rapport de rigidités important $\delta > 30$ est la meilleure solution que l'on peut espérer atteindre.

4.3 Sur l'efficacité de rayonnement des structures de type haut-parleur

4.3.1 Définition

Afin d'évaluer l'efficacité d'une structure à rayonner dans un milieu, de nombreux critères, expérimentaux et théoriques ont été développés (puissance rayonnée [9, 24], efficacité de rayonnement [16, 27, 26], résistance de rayonnement normalisée [14, 119]). De ces paramètres, il apparaît que la résistance de rayonnement est le meilleur indicateur de la faculté d'une source de taille finie à rayonner [73, 119]. Celle-ci est définie dans le domaine fréquentiel (en notant par ω la pulsation) comme le rapport de la puissance acoustique sur la surface vibrante divisée par la vitesse quadratique moyenne de la surface :

$$R(\omega) = \frac{\iint_S \mathbf{I}.\mathbf{n}\ dS}{\rho c \iint_S |V|^2 dS} = \frac{\Re e\left(\iint_S P.V^\star dS\right)}{\rho c \iint_S V.V^\star dS}, \tag{4.1}$$

où S désigne la surface mise en vibration et $\mathbf{n}$ sa normale sortante, $\mathbf{I}$ l'intensité acoustique, ρ la densité du fluide environnant, c sa célérité du son, V la vitesse vibratoire en ce point, le signe $\star$ le complexe conjugué et $\Re e$ la partie réelle. Cet indicateur est faible lorsque les ondes générées interfèrent à la surface de l'objet mis en vibration, et lorsque R avoisine 1, cela signifie que la structure transfère bien son énergie vibratoire mécanique en énergie acoustique. Dans notre cas, la détermination de l'intensité acoustique $\mathbf{I}$ sur la surface vibrante passe par le calcul du champ de pression à la paroi. Ceci fait l'objet de la troisième partie où le calcul du champ de pression P est déterminé par utilisation de la technique de réponse impulsionnelle spatiale. En introduisant la décomposition modale du déplacement transverse :

$$w(r', \omega) = \sum_p \Phi_p(r') q_p(\omega) \tag{4.2}$$

on montre (cf chapitre 7) que le champ de pression s'exprime sous la forme :

$$P(\mathbf{x}, \omega) = \rho c \omega^2 \sum_p \mathcal{H}_p(\mathbf{x}, \omega) q_p(\omega) \tag{4.3}$$

où $\mathcal{H}_p(\mathbf{x}, \omega)$ représente la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle spatiale au point $\mathbf{x}$ qui dépend de la forme de l'objet considéré et de la déformée modale Φ_p. Dans ce cas, on montre [37] que l'on se ramène à l'expression suivante (dans le cas où les déformées modales sont normées) :

$$R(\omega) = \frac{\sum_p \sum_q \Re e\left(q_p(\omega) \mathcal{Z}_{pq}(\omega) q_q^\star(\omega)\right)}{\sum_p |q_p(\omega)|^2} \tag{4.4}$$

où $\mathcal{Z}_{pq}(\omega)$ est défini comme l'impédance mutuelle de rayonnement entre les modes p et q :

$$\mathcal{Z}_{pq}(\omega) = \iint_S \mathcal{H}_p(\mathbf{x}, \omega) \Phi_q(\mathbf{x}) dS.$$

Dans la situation où le fluide environnant est considéré comme léger [43], on peut négliger les impédances de rayonnement des modes $p \neq q$ [37, 43], d'où l'expression finale de la résistance de rayonnement :

$$R(\omega) = \frac{\sum_q \Re e\left(\mathcal{Z}_{qq}(\omega)\right) |q_q(\omega)|^2}{\sum_p |q_p(\omega)|^2} \tag{4.5}$$

L'expression (4.5) montre que la résistance de rayonnement est reliée à la partie réelle de l'impédance de rayonnement associée à chaque mode. Dans la suite, on va ainsi comparer ces impédances de rayonnement pour différentes configurations géométriques et matérielles afin de déterminer l'influence de la forme et du matériau sur la faculté de la source à rayonner.

4.3.2 Influence de la forme et des matériaux

Cas d'une structure plane

Les impédances de rayonnement font apparaître une dépendance vis à vis des déformées propres $\Phi_p(r')$ et de la forme de l'objet. Or il a été montré au chapitre 2 que seul le rapport des rigidités δ a une influence sur ces déformées propres. On peut ainsi conclure que le rapport des masses surfaciques σ n'aura aucune influence sur le rayonnement. On ne s'intéresse donc plus qu'à la dépendance vis à vis du rapport des rigidités δ entre les deux structures. La figure 4.4 compare les impédances de rayonnement des 3 premiers modes obtenues dans le cas d'une géométrie plane pour 3 rapports de rigidités δ valant 1 (plaque), 30 (intermédiaire) et 10^5 (piston).

La partie imaginaire de l'impédance de rayonnement représente la masse additionnelle de fluide mis en vibration ; il s'agit ainsi d'un effet réactif du fluide sur milieu solide (non pris en compte dans la modélisation mécanique). La partie réelle de l'impédance de rayonnement correspond à la résistance de rayonnement, critère déterminant la faculté de la structure à rayonner de l'énergie acoustique dans le milieu fluide.

On remarque que le rapport des rigidités a un fort impact sur la résistance de rayonnement. De manière générale, on remarque que pour chaque mode la résistance de rayonnement est maximale autour d'une fréquence particulière (nommée fréquence critique f_p^c associée au mode p) et que les tendance suivantes sont observées :

• pour $f < f_p^c$, le fluide a un effet résistif et réactif : la structure rayonne peu et l'effet principal est contenu dans la partie imaginaire de l'impédance de rayonnement,

• pour $f = f_p^c$, le rayonnement du mode est maximal,

• pour $f > f_p^c$, les effets sont essentiellement résistifs et la résistance de rayonnement tend vers une valeur dépendant du mode considéré (de sa déformée modale).

Dans note cas, on aimerait que le premier mode soit le seul à rayonner dans la gamme audible, aussi on aimerait se ramener au cas où la résistance de rayonnement du premier mode est maximale et la résistance de rayonnement des autres modes est minimale. Ainsi la configuration de la plaque (rapport de rigidités $\delta = 1$) est à éviter car tous les modes rayonnent alors que dans le cas du piston (grand rapport de rigidités $\delta = 10^5$), l'impédance de rayonnement des modes d'ordre supérieur est faible (il s'agit de modes de la suspension qui rayonnent peu).

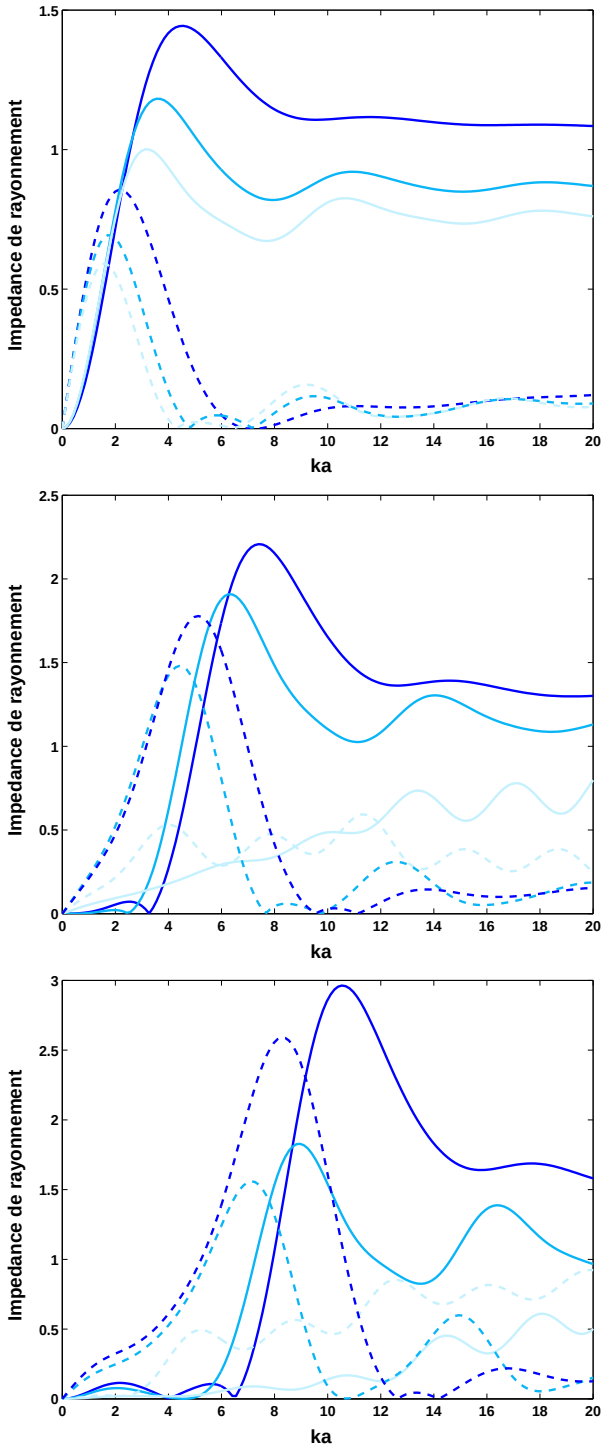


FIG. 4.4 – Impédances de rayonnement (partie réelle en traits pleins et partie imaginaire en traits pointillés) en fonction du nombre d'onde adimensionnée ka pour les 3 premiers modes (haut : premier mode, milieu : deuxième mode et bas : troisième mode) d'une structure plane et pour 3 rapports de rigidité différents : $\delta = 1$ (foncé), $\delta = 30$ (intermédiaire), $\delta = 10^5$ (clair).

Cas d'une structure avec courbure

De manière générale, on peut affirmer que la forme à deux influences majeures sur l'impédance de rayonnement d'une structure :

• La forme modifie le profil vibratoire (rigidification locale de la structure), ce qui a pour effet de modifier les déformées propres. Il a été montré au chapitre 3 que ce profil vibratoire est très peu perturbé dans le cas d'une courbure de la suspension externe et dans le cas d'une structure interne courbée lorsque le rapport des rigidités est déjà très important (de l'ordre de 10^5). En revanche dans le cas d'une structure courbée en sa partie centrale et possédant un faible rapport de rigidité $\delta < 100$, les déformées modales vont être grandement modifiées et on se rapproche alors des déformées obtenues dans le cas du piston (grand rapport de rigidités).

• Ensuite, la forme modifie le rayonnement de la source en champ proche (et en champ lointain). On peut déjà avancer (se référer aux travaux [18, 120, 133] pour plus de détails) que la forme joue un rôle important sur le rayonnement dès que le nombre d'onde vérifie $ka > 1$. Dans le cas d'une suspension externe torique, on pourrait montrer que le rayonnement est peu affecté, aussi nous ne présenterons pas de résultats dans le cas de cette géométrie mais nous nous attarderons plus en détail sur le cas de la structure centrale sphérique.

La figure 4.5 représente les impédances de rayonnement obtenues dans le cas d'une structure dont la partie centrale est hémisphérique. On remarque sur ces courbes que le fait d'introduire une forme sphérique à la partie centrale modifie l'impédance de rayonnement et de manière générale diminue la valeur de la résistance de rayonnement.

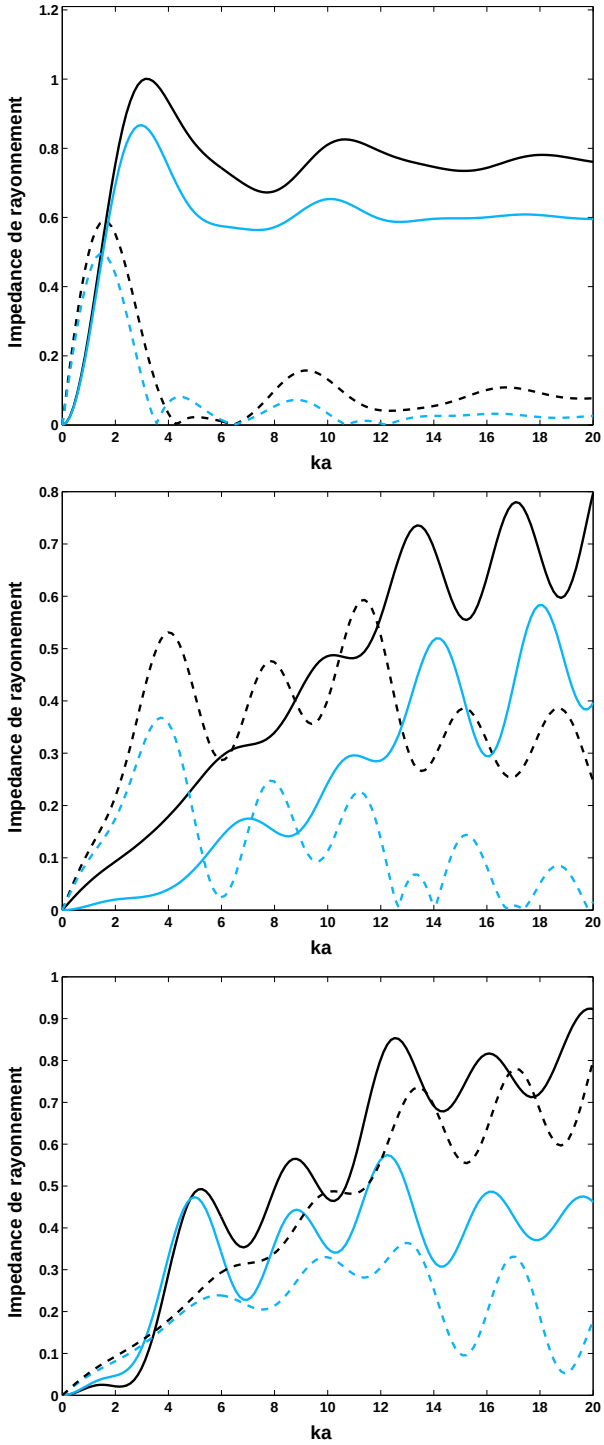


FIG. 4.5 – Impédances de rayonnement (partie réelle en traits pleins et partie imaginaire en traits pointillés) en fonction du nombre d'onde adimensionnée ka pour les 3 premiers modes (haut : premier mode, milieu : deuxième mode et bas : troisième mode) d'une structure plane (noir) et d'une coque hémisphérique (bleu) pour un rapport de rigidité $\delta = 10^5$.

4.4 Tableau récapitulatif

En résumé de cette première partie, nous pouvons ainsi évaluer l'influence respective des paramètres matériaux et de la forme sur les quatre critères définis au début de ce chapitre :

Forme	Géométrie plane			Suspension torique			Calotte sphérique		
Matériau	plaque	mixte	piston	plaque	mixte	piston	plaque	mixte	piston
Séparation des modes	−−	−	+	−	+	++	++	++	++
Modes supérieurs amortis	−	+	++	−−	−	+	−−	−	++
Minimisation des non-linéarités	+	++	+	−	+	−	−−	−	−−
Efficacité de rayonnemnt	−	+	++	−	+	++	+	+	+

TAB. 4.1 – Influence de la forme et des matériaux sur le comportement vibratoire, linéaire et non linéaire dans les cas limites plans, avec suspension torique et avec une structure centrale sphérique. Pour chaque configuration géométrique, on évalue de manière subjective (sur une échelle arbitraire allant de ++ à - -) le comportement en fonction du rapport des rigidités δ dans 3 cas limites : $\delta = 1$ (plaque), $\delta = 30$ (mixte) et $\delta = 10^5$ (piston).

De ce tableau, il apparaît que si le comportement vibratoire était la seule donnée du problème, la configuration idéale serait obtenue dans le cas d'une structure plane possédant un grand rapport de rigidités $\delta \gg 1$. Il apparaît également que le cas d'une suspension torique (cas de la majorité des haut-parleurs traditionnels) est à éviter pour limiter les non-linéarités géométriques.

Cependant, comme nous le verrons par la suite, le comportement vibratoire n'est pas la seule donnée du problème mais nous devons également tenir compte du rayonnement de la source qui est fortement dépendant de la forme de la structure. Ainsi, des compromis entre propriétés de rayonnement et comportement vibratoire devront être réalisés.

Deuxième partie

Résolution du problème électromécanique avec non-linéarités géométriques

Dans cette partie, on propose une méthode de résolution du problème électro-mécanique en régime non linéaire. Le but est de prédire le comportement vibratoire de structures de type haut-parleur sur toute la bande passante audible en régime de grandes amplitudes de vibration. Afin d'inclure les non-linéarités typiques en basses fréquences, on s'appuie sur le modèle de Thiele et Small à variables localisées non linéaires auquel on ajoute la formulation du chapitre précédent en vue d'inclure les non-linéarités géométriques intervenant en moyennes et hautes fréquences. Ce dernier type de non-linéarités n'a pas encore été étudié dans le passé (pour le cas du haut-parleur) et la présente formulation représente un pas vers une modélisation étendue du comportement non linéaire du haut-parleur en moyennes et hautes fréquences.

Nomenclature

Re	résistance électrique de la bobine
L	inductance de la bobine mobile
Bl	facteur de force
R_m	résistance mécanique du modèle de Thiele et Small
M_m	masse de la partie mobile du modèle de Thiele et Small
K_m	raideur généralisée du modèle de Thiele et Small
$u(t)$	tension aux bornes de la bobine
$i(t)$	intensité parcourant la bobine
$x(t)$	déplacement dans le cas d'un unique mode de vibration
$Fr(t)$	force de réluctance appliqué à la bobine
$w(r,t)$	déplacement transverse
ω_p	pulsation propre du mode p
μ_p	amortissement modal du mode p
Φ_p	p^{ime} mode propre en flexion
T_p	forces appliquées à la structure projetées sur le mode p
Γ_a	coefficient non linéaire cubique associé au mode a
β_a	coefficient non linéaire quadratique associé au mode a
Y	vecteur d'état
A	matrice d'état
B	vecteur d'excitation
$N(Y)$	vecteur contenant les termes non linéaires

Chapitre 5

Résolution dans le cas d'un unique mode de vibration

Sommaire

5.1 Introduction 74
5.2 Modèle de Thiele et Small 74
5.3 Non-linéarités dans les haut-parleurs 75
5.3.1 Non-linéarités électriques 75
Facteur de Force 76
Inductance de la bobine 76
5.3.2 Non-linéarités mécaniques 77
Premier mode de vibration 77
Autres modes de la structure 77
5.3.3 Non-linéarités acoustiques 78
5.4 Formulation en variables d'état 78
5.4.1 Régime linéaire 78
5.4.2 Régime de grandes amplitudes 79
5.5 Validation et cas test 81
5.5.1 Présentation 81
5.5.2 Résultats 83
5.6 Conclusion : modélisation basses fréquences d'un haut-parleur en régime de grandes amplitudes 84

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation du problème électroacoustique (couplage de l'excitation et de la structure mécanique) en régime de grandes amplitudes dans le cas où un unique mode de vibration est pris en compte. C'est le cas de la plupart des modélisations non linéaires de haut-parleurs fondées sur la théorie des variables à constantes localisées [32, 61, 62] qui permet de décrire le comportement basses fréquences d'un haut-parleur en régime de grandes amplitudes.

Dans un premier temps, on s'attarde sur le modèle couramment utilisé (modèle de Thiele et Small) pour décrire le comportement vibratoire basses fréquences. Dans un second temps, on s'attarde sur une description des différents types de non-linéarités qui existent au sein des haut-parleurs électrodynamiques. Enfin, on propose un schéma de résolution fondé sur les techniques de variables d'état qui permet de résoudre de manière numérique le problème sans avoir recours à des approximations polynômiales des lois de non-linéarités, comme c'est le cas dans tous les modèles disponibles dans la littérature [32, 61, 62].

5.2 Modèle de Thiele et Small

En basses fréquences, les composants électriques, mécaniques et acoustiques d'un haut-parleur électrodynamique se comportent comme des éléments concentrés dont les propriétés peuvent être exprimées à l'aide des variables à constantes localisées [107, 108]. L'hypothèse principale sous-jacente est que le mouvement de la membrane est de type piston plan (vibration selon un unique degré de liberté) pour un comportement linéaire de la structure. De ce fait, le haut-parleur peut être modélisé par des circuits équivalents, comme illustré figure 5.1. Sur cette figure, les paramètres classiques de Thiele et Small sont introduits :

- paramètres électriques (Re : résistance électrique de la bobine, L : inductance de la bobine, Bl : facteur de force),

- paramètres mécaniques (M_m : masse de la partie mobile, K_m : rigidité globale de la suspension, R_m : résistance mécanique de la suspension).

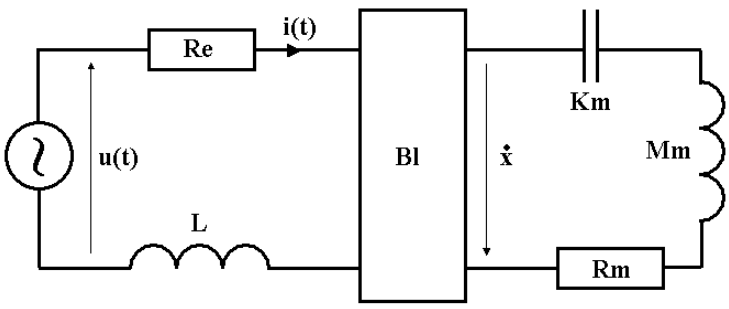


FIG. 5.1 – Modèle de Thiele et Small pour la transduction électromécanique.

Ces paramètres sont généralement mesurés pour de faibles excursions de la partie mobile et pour des fréquences autour de la première résonance du système. Le système d'équations correspondant à ce schéma électrique sont résumées ci-dessous équation (5.1) :

$$\begin{cases} u(t) & = Re\ i(t) + L\ \dfrac{di}{dt} + Bl\ \dfrac{dx}{dt}, \\ \\ Bl\ i(t) & = M_m\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + R_m\ \dfrac{dx}{dt} + K_m\ x(t), \end{cases} \tag{5.1}$$

où $x(t)$ désigne le déplacement de la structure, $i(t)$ le courant parcourant la bobine et $u(t)$ la tension aux bornes du haut-parleur. Le champ de pression est ensuite calculé en utilisant l'approximation de l'intégrale de Rayleigh en champ lointain. Cette approche donne de bons accords expérimentaux en basses fréquences (autour de la première fréquence de résonance du système) mais possède deux inconvénients majeurs :

- elle suppose des lois de comportement linéaire de la transduction électromécanique et n'est ainsi valable que pour des faibles excursions de la partie mobile.

- elle suppose un mouvement de corps rigide de la structure et ne peut alors pas rendre compte des phénomènes de résonances intervenant en moyennes et hautes fréquences.

Dans cette partie, on s'intéresse tout d'abord à une méthode de résolution permettant d'étendre la validité de ce modèle. Dans un premier temps, on s'intéresse aux extensions de ce modèle pour les grandes excursions de la partie mobile, puis dans un second temps, on s'intéresse au calcul du champ de déplacement lorsque celui-ci ne s'effectue plus selon un unique mode de vibration plan.

5.3 Non-linéarités dans les haut-parleurs

5.3.1 Non-linéarités électriques

Les non-linéarités dites "électriques" ou non-linéarités du moteur sont directement observables à l'entrée du haut-parleur (via une mesure d'impédance). Elles ont été largement étudiées dans la littérature et sont résumées dans [12, 61, 102]. L'influence de chaque terme non linéaire est discutée dans la suite.

Facteur de Force

La principale source de non-linéarités au sein des haut-parleurs classiques est due à la dépendance du facteur de force Bl vis à vis du déplacement. Ceci est dû à la non-constance du champ magnétique B au sein de l'entrefer (le champ magnétique décroît lorsqu'on s'éloigne de la position d'équilibre). Dans ce cas, il est nécessaire de prendre en compte la dépendance du champ magnétique vis à vis de la position de la bobine x. Ceci a pour incidence une modification de l'impédance électrique en basses fréquences et une perte de rendement mécanique autour de la première fréquence de résonance. Un moyen de remédier à ce problème est de construire un aimant permanent plus long (ou une bobine plus courte) afin d'étendre la plage de déplacement pour laquelle le champ magnétique reste constant. Cette dépendance est classiquement modélisée de deux manières :

• par une approximation polynomiale permettant d'utiliser les coefficients identifiés pour une méthode de résolution par équilibrage harmonique [61, 63] :

$$Bl(x) = Bl\left(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\right) \tag{5.2}$$

• par une approximation gaussienne plus réaliste et valable pour des plus grandes excursions [102] mais qui n'est plus soluble par la méthode de l'équilibrage harmonique :

$$Bl(x) = Ble^{-\mu(x-x_0)^2}. \tag{5.3}$$

Inductance de la bobine

Lorsque la bobine est alimentée et se déplace, elle donne naissance à un champ magnétique induit qui va interférer avec l'aimant permanent. Ce champ magnétique induit dépend de la position de la bobine dans l'entrefer et peut être modélisé comme une dépendance de l'inductance de la bobine L vis à vis du déplacement de la structure x. Cette non-linéarité donne naissance à deux termes sources dans les équations électriques et mécaniques. Le premier effet est une modification de la tension aux bornes de la bobine $u(t)$:

$$u(t) = \frac{dL(x)i}{dt} = L\frac{di}{dt} + i\frac{dL(x)}{dx}\frac{dx}{dt}. \tag{5.4}$$

Le second effet est l'apparition d'une force de rappel dénommée force de réluctance F_r dans la partie mécanique proportionnelle au carré de l'intensité et dépendant du déplacement x [102] :

$$F_r(x,t) = \frac{i^2}{2}\frac{dL(x)}{dx} \tag{5.5}$$

Ce type de non-linéarité peut néanmoins être évité en supprimant les plaques de champ (plaques de fer devant et derrière l'aimant permanent) et ainsi en utilisant un moteur sans fer [71]. Comme ce n'est pas le cas dans la majorité des haut-parleurs, on est astreint à modéliser cette non linéarité est modélisée par un développement polynomial :

$$L(x) = L\left(1 + l_1 x + l_2 x^2 + \cdots\right) \tag{5.6}$$

Ces non-linéarités affectent le comportement électrique et mécanique de la structure mais peuvent être réduites en dimensionnant correctement le moteur (taille de l'aimant de la bobine, position au repos et moteur sans fer).

5.3.2 Non-linéarités mécaniques

Pour des excitations dont la fréquence avoisine les fréquences de résonance de la structure, l'amplitude de déformation devient très importante et dans ce cas, de nombreux phénomènes non linéaires apparaissent, dépendant du mode considéré.

Premier mode de vibration

Autour du premier mode de vibration, c'est la suspension qui subit les plus grandes déformations alors que le partie centrale vibre en phase (mouvement de type piston plan). Dans ce cas différents types de non-linéarités apparaissent :

• non-linéarités matérielles dues à une dépendance de la loi de comportement des matériaux par rapport à l'excursion de la partie mobile. Ces phénomènes sont prépondérants dans les élastomères dont le comportement est viscoélastique avec des lois de comportement dépendant très fortement de l'excursion. Ce type de non-linéarités est très complexe à modéliser et aucun modèle n'a encore été proposé à ma connaissance.

• non-linéarités géométriques dues à une dépendance de la rigidité globale par rapport à l'excursion de la partie mobile. Celle-ci est classiquement modélisée par approximation polynomiale de $K_m(x)$:

$$K_m(x) = K_m \left(1 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\right) \tag{5.7}$$

• non-linéarités d'amortissement dues à une dépendance de la loi d'amortissement par rapport à l'excursion de la partie mobile. Ceci est surtout le cas des structures en élastomère dont le comportement viscoélastique varie fortement avec l'excursion de la partie mobile. Ces phénomènes sont observables en pratique (sur des mesures d'impédance électrique) et parfois modélisés directement dans le domaine temporel [51] ou par des approximations polynômiales [61] :

$$R_m(x) = R_m \left(1 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots\right) \tag{5.8}$$

Autres modes de la structure

Lorsque l'on excite la structure autour des autres modes de résonance mécanique, les déformations affectent cette fois la structure dans son ensemble. Ainsi des non-linéarités géométriques apparaissent dès que les amplitudes de vibration avoisinent l'épaisseur de la structure [128]. Compte tenu des matériaux utilisés et de la gamme d'excursions (en dehors du premier mode de vibration), on peut conclure que les non-linéarités matérielles et d'amortissement sont inexistantes dans ce cas. Très peu d'études ont été menées à ce sujet et les seuls observations expérimentales ont été effectuées dans les laboratoires de l'ENSTA en 2004 [22, 94, 95, 96]. Dans ce cas, il est nécessaire de modéliser la structure comme un ensemble d'oscillateurs non linéaires, comme cela a été réalisé dans le chapitre 2 : on se ramène à un nombre fini d'oscillateurs de type Duffing avec des non-linéarités quadratiques et cubiques (se reporter au chapitre 3 pour plus de détails). La formulation du problème avec inclusion de ces non-linéarités géométriques fait l'objet du chapitre 5.

5.3.3 Non-linéarités acoustiques

Lorsque la structure est soumise à des grandes amplitudes de vibration, deux phénomènes peuvent apparaître en fonction de la gamme de fréquences étudiée :

• en basses fréquences, les débattements d'air autour du haut-parleur (mais surtout au sein de l'évent d'un haut-parleur bass-reflex) sont importants et peuvent engendrer des phénomènes de turbulence aérodynamique. Ces phénomènes ont été mis en évidence dans [87, 88, 100] et sont difficilement modélisables (phénomènes très fortement non linéaires pouvant atteindre des régimes chaotiques),

• en hautes fréquences les vitesses atteintes par la membrane peuvent approcher les vitesses du son du milieu fluide considéré et dans ce cas, on peut voir apparaître des phénomènes de propagation non linéaire observés dans le cas de transducteurs ultrasonores [72].

Néanmoins, pour les hauts-parleurs considérés dans le présent manuscrit, leur effet dans le cas d'un haut-parleur électrodynamique baffle (sans bass-reflex) est négligeable. Aussi, ce type de non-linéarités est laissé de coté pour la suite de l'étude.

5.4 Formulation en variables d'état

5.4.1 Régime linéaire

Les équations de Thiele et Small (5.1) peuvent être exprimées directement dans le domaine temporel en utilisant une formulation de type espace d'état :

$$\boxed{\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\ \mathbf{Y} + \mathbf{B}\ u(t)} \tag{5.9}$$

où l'on introduit le vecteur d'état $\mathbf{Y}$, la matrice d'état $\mathbf{A}$, le vecteur d'entrée $\mathbf{B}$ comme suit :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} i \\ x \\ \dfrac{dx}{dt} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{Re}{L} & 0 & -\dfrac{Bl}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{Bl}{M_m} & -\dfrac{K_m}{M_m} & -\dfrac{R_m}{M_m} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Ensuite, la donnée du déplacement $x(t)$ est directement obtenue par le système linéaire suivant :

$$x(t) = \mathbf{C}\ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Y} \tag{5.11}$$

L'équation (5.9) peut être résolue directement dans le domaine temporel ou le domaine de Laplace en utilisant les propriétés de l'espace d'état. En effet, on montre que la fonction de transfert $G(s)$ dans le domaine de Laplace entre le déplacement $x(s)$ et l'entrée $u(s)$ (où s caractérise la variable de Laplace) est simplement obtenue par l'équation (5.12) et correspond à la solution classique de Thiele et Small [107] :

$$\begin{aligned} x(s) &= G(s).u(s) \\ &= \mathbf{C}\ (s\ \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\ \mathbf{B} \\ &= \frac{Bl}{L.M_m.s^3 + s^2(Re.M_m + L.R_m) + s(Re.R_m + Bl^2 + L.K_m) + Re.K_m} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Dans le domaine temporel, la solution est donnée par l'équation (5.13), en supposant de plus que $u(0) = 0$:

$$x(t) = \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau. \tag{5.13}$$

Le but de la partie suivante est d'inclure les non-linéarités classiques dans ce schéma en variable d'état afin de proposer une méthode de résolution générale valable pour les grandes amplitudes de vibration.

5.4.2 Régime de grandes amplitudes

Dans cette partie, nous supposons toujours que le mouvement de la structure s'effectue selon un mode unique de vibration (mode de piston plan), mais nous ajoutons cette fois une dépendance des variables localisées par rapport aux variables déplacement de la bobine x et intensité i. Les termes majeurs sources de non-linéarités retenus concernent la raideur $K_m(x)$, la résistance mécanique $R_m(x)$, l'inductance de la bobine $L(x)$ et le facteur de force $Bl(x)$ dépendant de l'excursion x. On aboutit alors à une nouvelle formulation plus générale d'après [102] :

$$\begin{cases} u(t) & = Re\ i(t) + L(x)\ \dfrac{di}{dt} + Bl(x)\ \dfrac{dx}{dt} + i\dfrac{dL}{dx}\dfrac{dx}{dt} \\ \\ Bl(x)\ i(t) & = M_m\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + R_m(x)\ \dfrac{dx}{dt} + K_m(x)\ x(t) - \dfrac{i^2}{2}\dfrac{dL}{dx} \end{cases} \tag{5.14}$$

qui peut être reformulée en espace d'état en incluant un nouveau terme $N(Y)$:

$$\boxed{\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A(Y)}\ \mathbf{Y} + \mathbf{B(Y)}\ u(t) + \mathbf{N(Y)}} \tag{5.15}$$

où $\mathbf{Y}$ désigne le même vecteur d'état que précédemment dans l'équation (5.9), et $\mathbf{A(Y)}$, $\mathbf{B(Y)}$ et $\mathbf{N(Y)}$ sont introduits comme suit :

$$\mathbf{A(Y)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{Re}{L(x)} & 0 & -\dfrac{Bl(x)}{L(x)} \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{Bl(x)}{M_m} & -\dfrac{K_m(x)}{M_m} & -\dfrac{R_m(x)}{M_m} \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

$$\mathbf{B(Y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L(x)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \mathbf{N(Y)}\ = \begin{pmatrix} -i\dfrac{dL}{dx}\dfrac{dx}{dt} \\ 0 \\ \dfrac{i^2}{2}\dfrac{dL}{dx} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

En faisant apparaître les valeurs des paramètres de Thiele et Small obtenues dans l'approximation linéaire :

$$\begin{cases} L(x) & = L + \widetilde{L(x)} \simeq \left(\frac{1}{L}\left(1 - + \frac{\widetilde{L(x)}}{L}\right)\right)^{-1} \\ Bl(x) & = Bl + \widetilde{Bl(x)} \\ K_m(x) & = K_m + \widetilde{K_m(x)} \\ R_m(x) & = R_m + \widetilde{R_m(x)} \end{cases} \tag{5.18}$$

on peut séparer une partie linéaire d'une partie non linéaire dans l'expression (5.19) :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\ \mathbf{Y} + \mathbf{B}(\mathbf{Y})u(t) + \mathbf{N}(\mathbf{Y}) \tag{5.19}$$

où $\mathbf{A}$ décrit la matrice d'état linéaire du système (identique à celle du problème de Thiele et Small décrit équation (5.9)) :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{Re}{L} & 0 & -\frac{Bl}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{Bl}{M_m} & -\frac{K_m}{M_m} & -\frac{R_m}{M_m} \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

et $\mathbf{N}(\mathbf{Y})$ contient tous les termes non linéaires de la transduction électromécanique :

$$\mathbf{N}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} -\frac{Re}{\widetilde{L(x)}} i - \left(\frac{\widetilde{Bl(x)}}{\widetilde{L(x)}} + \frac{Bl}{\widetilde{L(x)}} + \frac{\widetilde{Bl(x)}}{L}\right)\frac{dx}{dt} - i\frac{d\widetilde{L}}{dx}\frac{dx}{dt} \\ 0 \\ \frac{\widetilde{Bl(x)}}{M_m} i - \frac{\widetilde{K_m(x)}}{M_m} x - \frac{\widetilde{R_m(x)}}{M_m}\frac{dx}{dt} + \frac{i^2}{2}\frac{d\widetilde{L}}{dx} \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

L'équation (5.19) est ainsi écrite sous une forme générale afin d'être résolue par un solveur non linéaire :

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = f(\mathbf{Y}, t)\ \ ,\ \ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} i \\ x \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

La formulation ainsi obtenue est directement implémentable en utilisant un solveur commercial (Matlab© solveur `ode23s`) par utilisation de la techniques du point fixe et des schémas temporels de type Runge-Kutta d'ordre élevé. Pour le problème ainsi posé, i et x font partie du vecteur d'état $\mathbf{Y}$ et ainsi n'importe quelle dépendance vis à vis de ces deux paramètres peut être inclue dans la partie non linéaire (il est possible d'inclure par exemple des courants de Foucault [69] dans l'équation électrique). C'est ce qui confère à cette méthode son atout principal puisque les techniques classiques doivent faire des suppositions sur les formes des non-linéarités (lois polynômiales pour la résolution par la méthode de la balance harmonique). Dans notre cas, on peut déterminer séparément l'effet de chaque terme non linéaire dans la réponse du système en choisissant simplement quel terme de l'équation (5.21) est retenu.

5.5 Validation et cas test

5.5.1 Présentation

Afin de valider la méthode de calcul, nous avons comparé les résultats obtenus par Mills et Hawksford [78] avec ceux obtenus par notre modèle. Le cas d'étude concerne la modélisation basses fréquences d'un haut-parleur Celestion SL600 de 135mm de diamètre utilisé pour la reproduction des basses et des medium. Les coefficients linéaires de Thiele et Small ont été identifiés pour ce haut-parleur :

- paramètres électriques ($Re = 7\ \Omega$, $L = 1.04\ mH$, $Bl = 7.9\ N/A$),
- paramètres mécaniques ($M_m = 18.3\ g$, $K_m = 1695\ N/m$, $R_m = 2.4336\ kg/s$).

Pour ce haut-parleur, Mills et Hawksford ont mesuré la dépendance de 3 paramètres par rapport à l'excursion de la bobine. Il ressort de leur étude que le facteur de force $Bl(x)$, l'inductance de la bobine $L(x)$ et la raideur de la suspension $K(x)$ jouent un rôle prépondérant pour la gamme de fréquences et d'amplitudes considérée. Les figures 5.2 à 5.4 représentent la dépendance de ces 3 paramètres par rapport à l'excursion x telles qu'elles ont été mesurées par ces derniers.

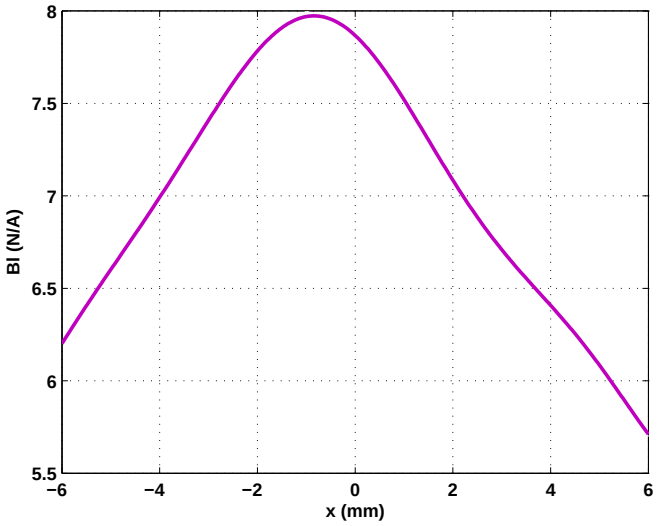


FIG. 5.2 – Variation du facteur de force $Bl(x)$ par rapport à l'excursion de la bobine x. Les excursions négatives indiquent que la bobine rentre à l'intérieur de la chambre.

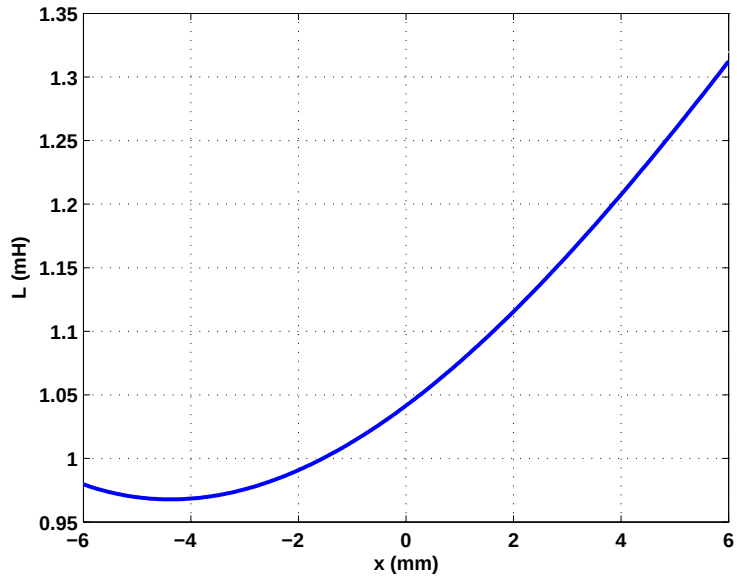


FIG. 5.3 – Variation de l'inductance $L(x)$ par rapport à l'excursion de la bobine x. Les excursions négatives indiquent que la bobine rentre à l'intérieur de la chambre.

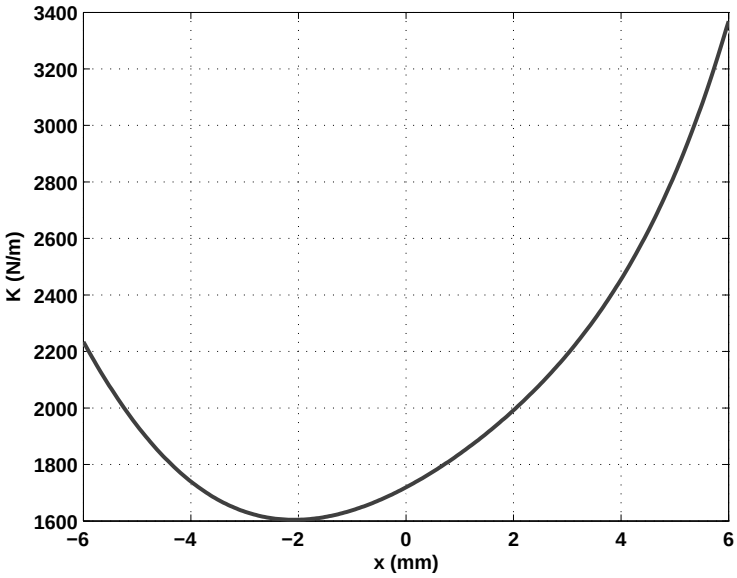


FIG. 5.4 – Variation de la raideur mécanique $K(x)$ par rapport à l'excursion de la bobine x. Les excursions négatives indiquent que la bobine rentre à l'intérieur de la chambre.

5.5.2 Résultats

Dans le cadre de leur étude, Mills et Hawksford [78] devaient approximer les courbes de dépendance des paramètres non linéaires (figures 5.2 à 5.4) par des polynômes d'ordre élevé (ordre 30 pour leur étude), afin d'introduire cette dépendance dans leur résolution par séries de Voltera, alors que dans notre cas, nous utilisons directement les courbes obtenues (et interpolées pour le besoin du calcul). Le but est de simuler l'accélération de la partie mobile (sous l'hypothèse d'un mouvement de piston plan) à 100 Hz pour un courant d'entrée de 1 A. Les amplitudes relatives des harmoniques relevées par les deux modèles sont confrontés à l'expérience tableau 5.1. La transformée de Fourier du signal obtenu à 100 Hz pour un courant d'entrée de 1 A par notre modèle est représentée sur la figure 5.5. Les deux méthodes sont en accord avec l'expérience mais notre méthode apparaît plus générale puisqu'elle peut s'adapter à tout type de non-linéarités et ne nécessite aucune approximation polynomiale des lois de comportement.

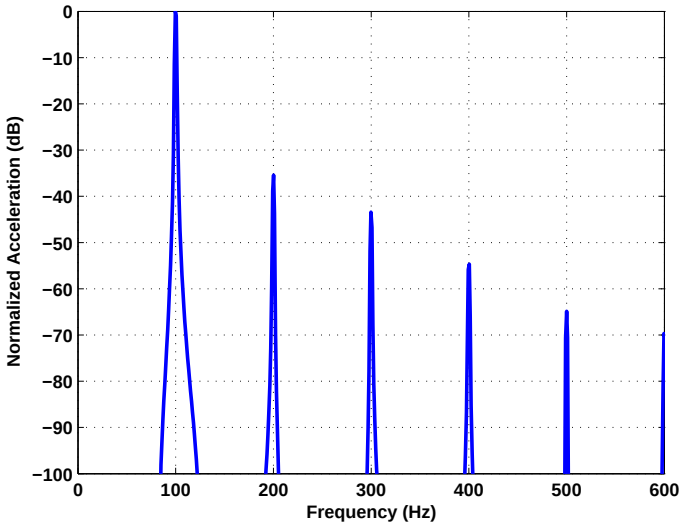


FIG. 5.5 – Transformée de Fourier du signal d'accélération obtenu par l'équation (5.19). Le signal d'entrée est un sinus de fréquence 100 Hz et le courant d'entrée vaut 1 A.Le signal est normalisé par l'amplitude du fondamental.

Harmonique	Mesuré[78]	Eq. (5.19)	Référence [78]
2	−34.5	−35.3	−34.3
3	−44.0	−43.6	−39.5
4	−55.8	−54.9	−50.6

TAB. 5.1 – Comparaison des niveaux relatifs des harmoniques (en dB) obtenus par notre modèle via l'équation (5.19), par des séries de Voltera et par la mesure [78].

5.6 Conclusion : modélisation basses fréquences d'un haut-parleur en régime de grandes amplitudes

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au modèle électrique et mécanique de haut-parleurs en basses fréquences. Les dépendances des paramètres électriques et mécaniques vis à vis de l'excursion de la bobine sont intégrés à travers une variation des paramètres de Thiele et Small avec l'amplitude.

Les techniques présentées dans la littérature proposent un schéma de résolution par séries de Volterra [78] ou par la méthode de l'équilibrage harmonique [61]. Nous proposons dans notre cas une méthode de résolution directe du système non linéaire à un degré de liberté. Le problème est explicité sous forme d'espace d'état puis directement résolu dans le domaine temporel à l'aide d'un solveur commercial.

Les solutions permettent ainsi de remonter au champ de déplacement en régime de grandes amplitudes de vibrations pour des fréquences d'excitation autour de la première résonance mécanique (comportement piston plan). Reste maintenant à étendre le principe de résolution au cas de N degrés de liberté afin de pouvoir modéliser le comportement vibratoire de la structure sur une plus grande bande passante et pour des grandes amplitudes de vibration.

Chapitre 6

Résolution dans le cas de multiples modes de vibration

Sommaire

6.1 Introduction 86
6.2 Excitation de la structure 87
6.3 Formulation en variables d'état avec inclusion des non-linéarités géométriques 88
6.4 Application : étude d'un haut-parleur classique en basses et moyennes fréquences 91
6.4.1 Présentation du cas test 91
6.4.2 Paramètres du haut-parleur 91
Paramètres de Thiele et Small 91
Paramètres mécaniques 94
6.4.3 Comparaison entre mesure et simulation 96
Régime linéaire 96
Régime de grandes amplitudes de vibration 97
6.5 Conclusion : modélisation en régime de grandes amplitudes dans la bande audible 98

6.1 Introduction

Dans cette partie, on va se placer dans le cas où la vibration ne s'effectue plus selon un unique mode de vibration mais sur N modes. Dans ce cas, on utilise la formulation modale des chapitres 2 et 3 qui permet de décrire le champ de déplacement $w(r,t)$ par décomposition modale :

$$w(r,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(r) q_p(t). \tag{6.1}$$

où les fonctions $\Phi_p(r)$ représentent les modes propres de la structure, et $q_p(t)$ la fonction propre associée au mode p décrivant la dynamique de l'oscillateur p. L'hypothèse sous-jacente à la décomposition de l'équation (6.1) est que les vibrations s'effectuent selon les modes axisymétriques (les modes asymétriques sont négligés). Cette hypothèse réductrice n'est bien entendu pas valable dans le cas d'un haut-parleur réel (cette hypothèse est discutée au chapitre 2) mais permet de décrire en premier approximation le comportement hautes fréquences.

La projection des équations mécaniques sur le mode propre a conduit au système décrit dans le chapitre 3 par l'équation (3.5) :

$$\omega_a^2 q_a + \ddot{q_a} = \varepsilon \left(\sum_p \sum_q \sum_u \Gamma_{pqau} q_p q_q q_u + \sum_p \sum_q \beta_{pqa} q_p q_q - 2\mu_a \dot{q_a} + T_a \right) \tag{6.2}$$

où ω_a décrit la pulsation propre du mode a, ε un coefficient adimensionné décrivant l'ordre des non-linéarités, Γ_{pqau} le coefficient non linéaire cubique couplant les modes p, q, a et u, β_{pqa} le coefficient non linéaire quadratique, μ_a le coefficient d'amortissement du mode a et T_a l'ensemble des forces extérieures appliquées sur le mode a (cf chapitre 3).

Dans le cadre de notre étude, les coefficients non linéaires doivent être évalués soit numériquement, soit de manière expérimentale. Sachant que les profils classiques de haut-parleurs présentent des profondeurs de l'ordre de l'épaisseur de la structure, il est impossible d'utiliser avec précision la formulation du chapitre 3 pour évaluer les coefficients non-linéaires. Aussi, nous allons réduire les équations couplées (6.2) à des équations de type Duffing en négligeant tous les phénomènes de couplage internes afin de se ramener pour chaque oscillateur à une équation modale avec non-linéarités quadratiques et cubiques qui traduit les effets premiers dus aux grandes excursions de la partie mobile :

$$\omega_a^2 q_a + \ddot{q_a} = \varepsilon \left(\Gamma_{aaaa} q_a^3 + \beta_{aaa} q_a^2 - 2\mu_a \dot{q_a} + T_a \right) \tag{6.3}$$

Cette hypothèse de troncature des termes non-linéaire est très forte (et d'autant plus que l'on a compétition entre non-linéarités quadratiques et cubiques) et peut aboutir à de mauvaises prédictions des tendances de non-linéarités, comme cela a été montré dans [129]. Cependant dans notre cas cette hypothèse a été choisie en constatant expérimentalement que :

• les non-linéarités géométriques sont faibles (de l'ordre de -20 à -40 dB en dessous du fondamental) dans la bande passante considérée. Par exemple, aucun courbe de tendance de non-linéarités ("backbone curve") n'a pu être mesurée au dela de la première fréquence de résonance.

• les fréquences propres sont éloignées (ne se recouvrent pas sur la bande passante considérée) : cette hypothèse est justifiée dans le cas de haut-parleurs réels, et d'autant plus que nous

ne considérons que les modes axisymétriques.

• un assez bon accord entre mesure et prédiction en utilisant cette réduction est observé (cf Annexe B).

Ainsi, afin d'évaluer l'ordre des non-linéarités géomatriques associées à chaque mode, seulement 2 coefficient doivent être évalués (coefficient cubique Γ_{aaaa} et coefficient quadratique β_{aaa}). Ces coefficients peuvent être directement évalués de manière numérique, en utilisant l'approche des chapitres 2 et 3 mais ceci n'est en théorie valable que pour des structures planes ou peu profondes (se référer au chapitre 3 pour la validité de l'approche théorique). Il est également possible d'évaluer ces coefficients à partir de mesures expérimentales de distortion. Cela a été effectué en Annexe B, et un bon accord entre prédiction et mesure est atteint. Dans toute la suite, les applications sur des structures réelles utiliseront cette méthode expérimentale dont la fiabilité est approuvée.

Le but de ce chapitre est d'introduire la formulation de l'équation (6.3) dans un schéma de résolution par espace d'état couplant la force d'excitation avec le mouvement vibratoire de la structure. Dans un premier temps, on va déterminer le terme d'excitation T_a de l'équation (6.3) en fonction des paramètres du haut-parleur et ensuite, nous intégrerons ces équations au schéma global.

6.2 Excitation de la structure

Dans un haut-parleur électrodynamique, la structure est excitée par une bobine mobile placée dans un champ magnétique supposé permanent. Dans ce qui suit, la bobine est vue comme un cylindre rigide d'épaisseur h_e collé au diaphragme en $r = r_e$ (se ramener à la figure 2.1 pour une description géométrique). Le déplacement de la structure en $r = r_e$ correspond au déplacement de la bobine noté $w_b(t)$ et est décrit d'après la décomposition modale de l'équation (2.15), en supposant que $\dfrac{h_e}{r_e} \ll 1$:

$$w(r_e, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(r_e) q_p(t). \tag{6.4}$$

L'équation pour le mouvement de la bobine s'écrit alors :

$$M_b \ddot{w_b}(t) = -T_e(t) + Fem(t) \tag{6.5}$$

où M_b désigne la masse de la bobine, $Fem(t)$ la force de Laplace exercée par la bobine due au courant qui la parcourt et $T_e(t)$ la force totale exercée sur la structure. D'après l'équation (2.26), le terme d'excitation associé au mode a de (6.2) est décrit par :

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{1}{\sigma} \int_0^s \Phi_a T(r,t)\ r dr \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_0^s \Phi_a T_e(t) \delta(r = r_e)\ r dr \\ &= -\left(\frac{2a^7 r_e h_e \Phi_a(r_e)}{E_A h_A^7 \sigma(r_e)} \right) \left(M_b \sum_p \Phi_p(r_e) \ddot{q}_p(t) - Fem(t) \right). \end{aligned} \tag{6.6}$$

A ce stade, il apparaît que tous les termes d'excitation T_a pour chaque mode contiennent une partie provenant de la force de Laplace (second terme de (6.6)) et une partie couplant tous les modes via l'inertie de la bobine. Ainsi, au niveau linéaire, tous les oscillateurs sont couplés dès lors que la bobine possède une inertie non négligeable. Cependant, en supposant cette inertie faible devant l'inertie de la structure, on obtient :

$$T_a = \left(\frac{2a^7 r_e h_e \Phi_a(r_e)}{E_A h_A^7 \sigma(r_e)} \right) Fem(t) = T_a^e Fem(t). \tag{6.7}$$

Cette hypothèse n'est pas forcément recevable dans le cas de haut-parleurs réels. Cela dit, le fait de garder l'inertie de la bobine modifie le système de l'équation (6.11) en rajoutant une matrice devant la vecteur d'état qui couple tous les modes au niveau linéaire. Différentes résolutions ont montré que l'influence de cette matrice est faible et la dynamique globale est peu modifiée (fréquences propres, excitations modales et amortissements).

6.3 Formulation en variables d'état avec inclusion des non-linéarités géométriques

L'équation électrique repérée dans (5.14) s'écrit dans le cas d'un unique mode de vibration :

$$u(t) = Re\ i(t) + L(x)\ \frac{di}{dt} + Bl(x)\ \frac{dx}{dt} + i\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{6.8}$$

où x désigne le déplacement de la bobine. Dans le cas de vibrations selon plusieurs modes, cette expression x doit être remplacée par la valeur de $w(r_e, t)$ de l'équation (6.4). La force contre-electromotrice devient par exemple :

$$Bl(x)\ \frac{dx}{dt} = Bl(x)\ \sum_{p=0}^{N} \Phi_p(r_e)\dot{q}_p(t) \tag{6.9}$$

Néanmoins, la dépendance des paramètres non linéaires vis à vis de x doit être modifiée afin de ne pas trop compliquer la formulation globale. Dans le cas de haut-parleurs classiques, c'est le premier mode de vibration qui est à l'origine des grandes excursions de la bobine. Aussi les non-linéarités électriques se manifestent autour de la première fréquence de résonance. Ainsi, les termes électriques $Bl(x)$ et $L(x)$ seront supposés comme dépendant de l'amplitude de vibration du premier mode, c'set-à-dire qu'ils ne dépendent que de $x(t) \simeq q_0(t)$. En rassemblant (6.3), (6.7) et (6.8) on se ramène au système suivant, en tronquant la décomposition à N modes (En pratique, cette troncature dépend de la bande passante que l'on souhaite modéliser, la participation de chaque mode étant prépondérante autour de sa fréquence propre) :

$$\begin{cases} u(t) & = Re\ i(t) + L(q_0)\ \dfrac{di}{dt} + Bl(q_0)\ \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \Phi_p(r_e)\dot{q}_p(t) + i\frac{dL}{dq_0}\sum_{p=0}^{N}\Phi_p(r_e)\dot{q}_p(t) \\ T_a(t) & = T_a^e\left(Bl(q_0)i(t) + \dfrac{i(t)^2}{2}\dfrac{dL}{dq_0}\right) \\ \omega_a^2 q_a + \ddot{q_a} & = \varepsilon\ \left(\Gamma_{aaaa}q_a^3 + \beta_{aaa}q_a^2 - 2\mu_a\dot{q_a} + T_a(t)\right) \\ w(r,t) & = \displaystyle\sum_{p=0}^{N}\Phi_p(r)q_p(t) \end{cases} \tag{6.10}$$

qui peut se mettre sous forme d'espace d'état :

$$\boxed{\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\ \mathbf{Y} + \mathbf{B(Y)}\ u(t) + \mathbf{NL_e(Y)} + \mathbf{NL_g(Y)}} \tag{6.11}$$

où l'on introduit un nouveau vecteur d'état $\mathbf{Y}$ et un nouveau vecteur d'entrée $\mathbf{B}$ de dimension $(2N+1)$:

$$\mathbf{Y} = \left(\begin{array}{c} i \\ \hline q_0 \\ \vdots \\ q_N \\ \hline \dfrac{dq_0}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dq_N}{dt} \end{array}\right), \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c} \dfrac{1}{L(x)} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) \tag{6.12}$$

et $\mathbf{A}$ une nouvelle matrice d'état de dimension $(2N+1)$ qui représente la dynamique linéaire du problème :

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} -\dfrac{Re}{L} & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{Bl\ T_0}{L} & \cdots & -\dfrac{Bl\ T_n}{L} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline T_0 & -\omega_0^2 & \cdots & 0 & -2\mu_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_N & 0 & \cdots & -\omega_N^2 & 0 & \cdots & -2\mu_N \end{array}\right) \tag{6.13}$$

et $\mathbf{NL_e(Y)}$ et $\mathbf{NL_g(Y)}$ qui représentent respectivement les non-linéarités électriques et géométriques pour lesquelles la décomposition de l'équation (5.18) est utilisée :

$$\mathbf{NL_e(Y)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{Re}{\widetilde{L(q_0)}}i - \left(\dfrac{\widetilde{Bl(q_0)}}{\widetilde{L(q_0)}} + \dfrac{Bl}{\widetilde{L(q_0)}} + \dfrac{\widetilde{Bl(q_0)}}{L}\right)\dfrac{dq_0}{dt} - i\dfrac{d\widetilde{L}}{dq_0}\dfrac{dq_0}{dt} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline T_0\widetilde{Bl(q_0)}i + \dfrac{i^2}{2}\dfrac{d\tilde{L}}{dq_0} \\ \vdots \\ T_N\widetilde{Bl(q_0)}i + \dfrac{i^2}{2}\dfrac{d\tilde{L}}{dq_0} \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

$$\mathbf{NL_g(Y)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \Gamma_0 q_0^3 + \beta_0 q_0^2 \\ \vdots \\ \Gamma_N q_n^3 + \beta_N q_n^2 \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

Enfin, le déplacement total est finalement obtenu en introduisant le vecteur d'observation $\mathbf{C(r)}$ tel que :

$$\boxed{w(r,t) = \mathbf{C(r)}\ \mathbf{Y}} \tag{6.16}$$

avec :

$$\mathbf{C(r)} = \begin{pmatrix} 0 & | & \Phi_0(r) & \cdots & \Phi_n(r) & | & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

6.4 Application : étude d'un haut-parleur classique en basses et moyennes fréquences

6.4.1 Présentation du cas test

Dans cette partie, on se propose d'appliquer la technique proposée à un haut-parleur classique (SP-165 PA de la marque Stageline). Ce haut-parleur de 18cm de diamètre de moyenne gamme (environ 20 euros) est utilisé pour reproduire les basses fréquences et le bas medium (jusqu'à environ 6 kHz d'après le spécifications du constructeur). Une photo du haut-parleur étudié est représentée figure 6.1.



FIG. 6.1 – Haut-parleur étudié : Stageline SP-165 PA.

La première étape est afin de prédire le comportement non linéaire sur toute la bande passante est de déterminer les paramètres de Thiele et Small en régime de grande amplitude (comportement basses fréquences) puis de déterminer les constantes modales afin de pouvoir prédire le comportement en dehors du comportement piston plan.

6.4.2 Paramètres du haut-parleur

Paramètres de Thiele et Small

Nous commençons par identifier le comportement basses fréquences de notre haut-parleur. Pour ce faire, nous estimons les constantes de Thiele et Small, à savoir la résistance électrique Re, l'inductance de la bobine L, le facteur de force Bl ainsi que les constantes mécaniques (raideur K_m, masse M_m et amortissement R_m). Ceci est réalisé par la méthode des moindres carrés, comme le propose Park [84]. Le principe est de réaliser une mesure simultanée du déplacement $X(\omega)$ (supposé selon un unique mode de vibration) de l'intensité $I(\omega)$ parcourant la bobine (par ajout d'une résistance en série [11]) et de la tension aux bornes du haut-parleur $U(\omega)$ à différentes fréquences ω_i. On cherche ainsi à estimer le vecteur :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} Re & L & Bl & K_m & M_m & R_m \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

et on réalise des mesures de $U(\omega)$, $I(\omega)$ et $X(\omega)$ (valeurs complexes) à une pulsation donnée ω et on résout le problème ainsi posé :

$$\mathbf{A}\ \mathbf{E} = \mathbf{B} \tag{6.19}$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} I(\omega) & j\omega I(\omega) & j\omega X(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I(\omega) & X & j\omega X(\omega) & -\omega^2 X(\omega) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} U(\omega) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

on remonte ainsi aux valeurs estimées par inversion du système (6.21) à l'aide du pseudo-inverse de la matrice $\mathbf{A}$, comme proposé par [84] :

$$\boxed{\mathbf{E} = \left(\mathbf{A}^\intercal \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^\intercal \mathbf{B}} \tag{6.21}$$

En pratique, on effectue la mesure des 3 variables $U(\omega)$, $I(\omega)$ et $X(\omega)$ sur des bruits blancs filtrés (jusqu'à 1kHz pour le haut-parleur considéré). Cette technique peut également être adaptée pour mesurer la dépendance de ces paramètres vis à vis de l'excursion de la partie mobile [103]. Pour ce faire, il suffit d'introduire un biais (offset) dans le signal d'entrée qui va avoir pour effet de décentrer la partie mobile d'un déplacement imposé x_i. En pratique, ceci est réalisé par un générateur de courant continu branché sur un circuit d'offset. Un descriptif du montage expérimental est présenté figure 6.2. On peut ainsi mesurer pour chaque déplacement x_i les paramètres $Re(x_i)$, $L(x_i)$, $Bl(x_i)$, $K_m(x_i)$, $M_m(x_i)$ et $R_m(x_i)$ par la technique décrite plus haut.

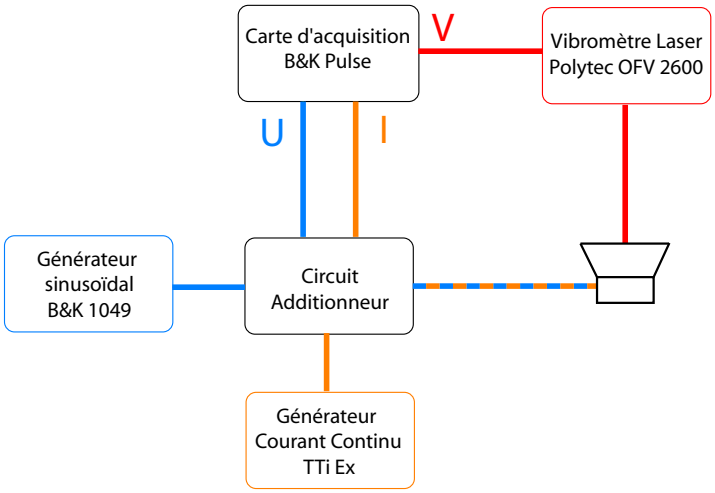


FIG. 6.2 – Descriptif du montage expérimental permettant de mesurer les constantes de Thiele et Small avec ajout d'un déplacement au repos (par addition d'un courant continu). Sont mesurés le déplacement de la structure $X(t)$, le courant parcourant la bobine $I(t)$ et la tension aux bornes de la bobine $U(t)$.

Les résultats obtenus via cette méthode sont présentés figures 6.3 pour une plage d'excursion allant jusqu'à $X_{max} = \pm 3$ mm.

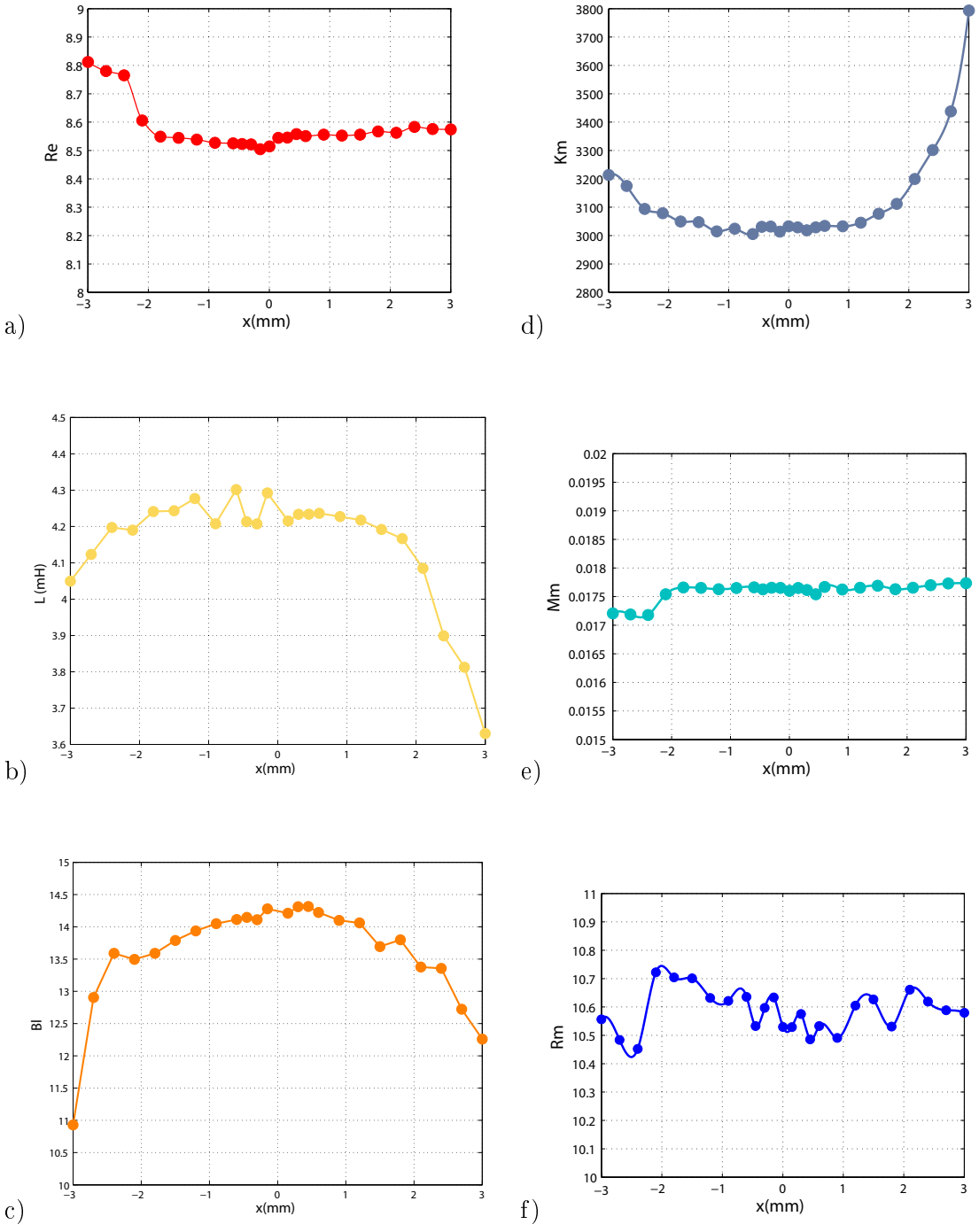


FIG. 6.3 – Résultats de mesure des paramètres de Thiele et Small en fonction de l'excursion de la bobine x. Sont représentées les évolutions de la résistance électrique $Re(x)$ (a), de l'inductance de la bobine $L(x)$ (b), du facteur de force $Bl(x)$ (c), de la raideur $K_m(x)$ (d), de la masse $M_m(x)$ (e) et de la résistance mécanique $R_m(x)$ (f). Il apparaît que seuls le facteur de force, l'inductance de la bobine et la raideur varie de manière significative avec l'excursion pour le haut-parleur considéré. Ce sont donc les paramètres majeurs responsables des non-linéarités en basses fréquences.

Il apparaît sur les figures de 6.3 que sur la plage considérée, seuls les paramètres d'inductance L, de facteur de force Bl et de raideur K dépendent fortement de l'excursion de la partie mobile. Aussi, les autres facteurs seront supposés constants afin d'alléger l'intégration numérique.

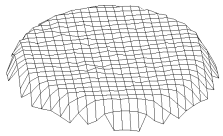
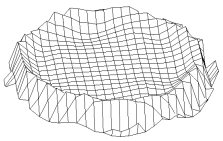
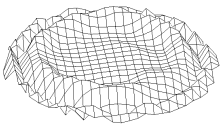
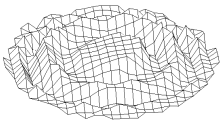
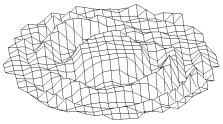
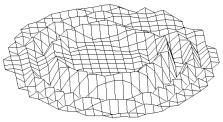
Paramètres mécaniques

Afin de mesurer les paramètres mécaniques, il est nécessaire d'effectuer une analyse modale expérimentale de la structure. Ceci est réalisé à l'aide du logiciel $IDEAS^{©}$ qui permet, à partir d'une mesure vibratoire de l'ensemble de la surface, d'extraire les paramètres modaux du haut-parleur pour chaque mode p, à savoir :

- les pulsations propres ω_p (ou fréquences propres f_p),
- les amortissements modaux μ_p,
- les résidus T_p (excitation relative du mode p),
- les déformées propres Φ_p.

Les résultats obtenus dans le cas du haut-parleur étudié sont résumés dans le tableau 6.1. Dans la présente analyse ne sont retenus que les modes axisymétriques de la structure entre 0 et 6400 Hz, et on adimensionne les excitations modales par celui du premier mode (mode de piston plan). Le critère de sélection des modes est opéré directement dans le logiciel d'analyse modale. Le principe est de fixer un nombre P de modes à chercher, de construire les matrices de correlation et d'augmenter P jusqu'à convergence de l'estimation. Ensuite, il s'agit de ne retenir que lesmodes axisymétriques dans les résultats.

Comme le souligne Skrodzka [105], les premiers modes (en dessous de 3kHz pour ce haut-parleur) correspondent à des modes de suspension qui sont très amortis. Leur influence au niveau vibratoire et acoustique est faible (amortissement élevé et rayonnement faible) mais ces modes vont être néanmoins responsables de non-linéarités comme nous le verrons par la suite. Ensuite, au dessus de 4 kHz pour ce haut-parleur apparaissent des modes de tronc de cône (partie centrale) moins amortis et de plus grande importance au niveau vibratoire et acoustique. Une étude plus poussé en hautes fréquence aurait également fait apparaître les modes de la coque centrale dont le rayonnement est également important.

Mode p	Fréquence $f_p(Hz)$	Amortissement $\mu_p/\omega_p(\%)$	Excitation T_p	Déformée Φ_p
1	118	48	1	
2	1150	5.6	0.14	
3	2060	5.4	0.136	
4	3550	8.34	0.358	
5	4300	6.50	-0.75	
6	5280	6.74	-1.51	

TAB. 6.1 – Analyse modale axisymétrique : fréquences propres f_p, amortissements modaux μ_p, résidus T_p (excitation relative du mode p) et déformées propres Φ_p du haut-parleur considéré SP-165 PA entre 0 et 6400 Hz. Les premiers modes correspondent à des modes de suspension et les modes au dessus de 4kHz correspondent à des modes du tronc de cône.

6.4.3 Comparaison entre mesure et simulation

Régime linéaire

En négligeant tous les termes non linéaires dans le système 6.11, on obtient une modélisation du champ de vitesse en régime linéaire. Les résultats obtenus par notre modèle sont comparés à la mesure de la vitesse vibratoire au centre du haut-parleur sur la figure 6.4.

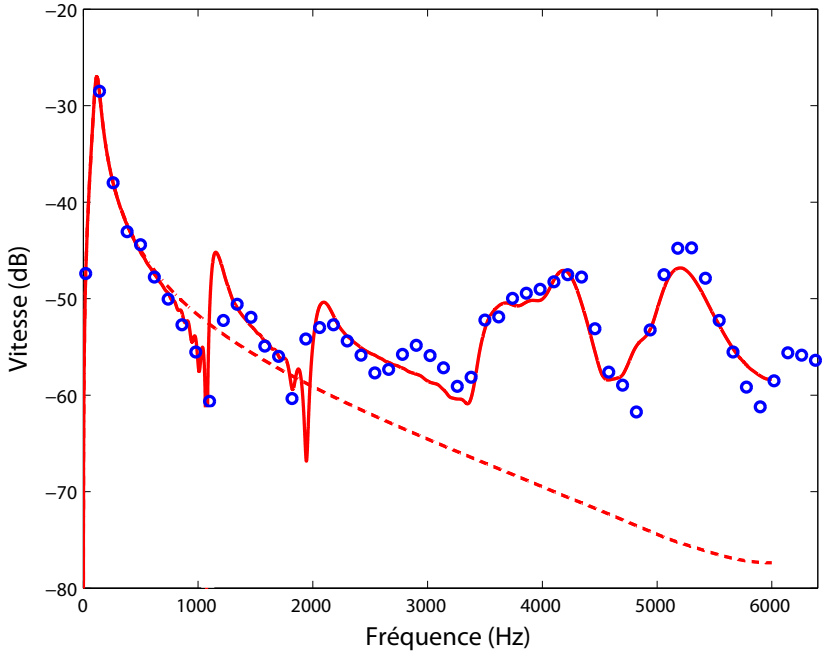


FIG. 6.4 – Comparaison entre la mesure de la vitesse vibratoire au centre (points bleu) avec la simulation (rouge). Sont représentés les résultats obtenus en considérant un unique degré de liberté (trait pointillé) et en considérant 6 modes de vibrations (trait plein). Le fait de considérer plusieurs modes de vibrations permet d'étendre la modélisation de 600 Hz dans le cas d'un mode de piston plan à 6 kHz (et même plus).)

Sur cette figure, est représentée en traits pointillés la solution obtenue en ne considérant qu'un seul mode de vibration (modèle de Thiele et Small classique) ainsi que la solution obtenue en considérant les 6 premiers modes axisymétriques du tableau 6.1. On observe qu'un bon accord est obtenu et que la présente modélisation permet d'étendre la plage fréquentielle. En effet, en n'utilisant qu'un unique mode de vibration, on se limite à une modélisation mécanique valable jusqu'à 600 Hz (un désaccord de plus de 30dB est observable à 6kHz dans le cas d'un modèle de Thiele et Small). En revanche, en utilisant 6 modes de vibration, on prédit le comportement vibratoire avec une précision inférieure à 3dB sur la bande passante considérée (en choisissant avec soin le nombre de modes à inclure). Les différences observées autour de 3000 Hz correspondent à la présence d'un mode asymétrique qui provient d'un mauvais centrage de la partie mobile. Ceci nous indique que l'hypothèse d'axisymétrie n'est pas valable expérimentalement mais permet de renseigner de manière adéquate sur les premiers effets des modes de vibration.

Régime de grandes amplitudes de vibration

Les mesures effectuées en régime de grandes amplitudes ont été réalisées fréquence par fréquence en utilisant des signaux harmoniques purs. La figure 6.5 récapitule les résultats obtenus. Pour chaque fréquence sont ainsi évalués les niveaux relatifs du fondamental (bleu) et des harmoniques 2 (rouge) et 3 (orange) pour une mesure de vitesse au centre de la structure. Les résultats de mesure sont comparés aux simulations obtenues en considérant tous les types de non-linéarités.

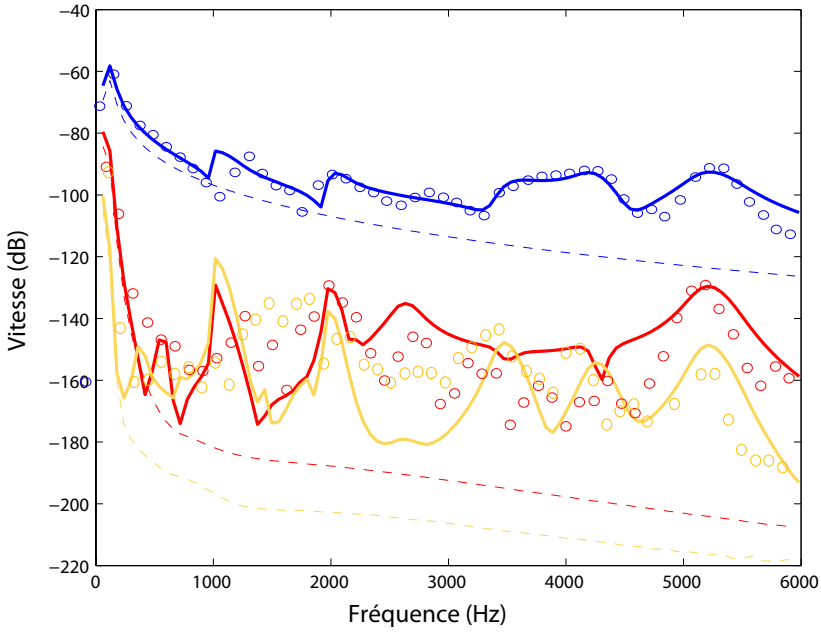


FIG. 6.5 – Comparaison entre la mesure de la vitesse vibratoire au centre obtenue en soumettant le haut-parleur à une puissance de 60W (points) avec la simulation (traits pleins) en régime de grande amplitude. Les courbes bleues corespondent au fondamental, les courbes rouges à l'harmonique 2 et les courbes orange à l'harmonique 3 mesuré pour chaque fréquence. Sont représentés les résultats obtenus en considérant un seul degré de liberté (trait pointillé) et en considérant 6 modes de vibrations (trait plein). Le fait de considérer plusieurs modes de vibrations permet d'étendre la modélisation de 600 Hz dans le cas d'un mode de piston plan à 6 kHz.)

On observe qu'en basses fréquences, le comportement non linéaire de la structure est très bien expliqué par le modèle à un degré de liberté (Thiele et Small non linéaire). En revanche, ce modèle (dont les résultats sont représentés en pointillés), n'est valable qu'en dessous de la fréquence de résonance du premier mode de vibration (autre que le mode de piston plan), soit dès 600Hz pour le haut-parleur considéré. Au delà de 600 Hz, le modèle de Thiele et Small n'est plus valable et aucune source de non-linéarités n'intervient plus (les déplacements sont trop faibles pour générer des non-linéarités avec ce modèle).

En utilisant les 6 modes de vibration, comme décrit dans ce paragraphe, on peut (en partie du moins) expliquer certains mécanismes générant de la distorsion harmonique en moyennes et hautes fréquences. On observe par exemple de manière expérimentale et numérique :

• une augmentation des harmoniques au voisinage des fréquences propres f_p du système, c'est-à-dire pour $f \simeq f_p$,

• une augmentation de l'harmonique a au voisinage du sous multiple de la fréquence propre f_p du système, c'est-à-dire pour $f \simeq f_p/a$.

Ces deux observations sont prédites par notre modèle, ce qui nous permet d'étendre la modélisation mécanique non linéaire jusqu'à 6kHz dans le présent exemple.

6.5 Conclusion : modélisation en régime de grandes amplitudes dans la bande audible

Dans cette partie, nous avons proposé une méthode de résolution en variable d'état appliquée à la transduction électromécanique de structures de type haut-parleur. La formulation retenue utilise le modèle classique de Thiele et Small en régime non linéaire dans lequel on inclut les effets des modes de vibrations avec prise en compte des non-linéarités géométriques. Il est montré que la prise en compte des modes supérieurs de vibrations permet d'étendre la validité du modèle aux moyennes et hautes fréquences. Un exemple d'application sur un haut-parleur classique a été effectué et un bon accord est obtenu en régime linéaire et non linéaire jusqu'à 6 kHz alors que les modèles existants sont limités à 600 Hz environ.

Trois hypothèses ont permis d'aboutir à la résolution du système proposé :

• la restriction de l'étude au cas de modes axisymétriques,

• la réduction des équations dynamiques à des équations de type Duffing (donc découplées),

• le fait de négliger l'inertie de la bobine vis à vis de l'inertie globale de la structure.

La validité de chaque hypothèse est discutée au fil de ce chapitre. Malheureusement dans le cadre de ce manuscrit, il n'a pas été possible de lever les deux premières hypothèses (très restrictives dans notre cas) du fait de la complexité de résolution (mais ce n'est pas à exclure que cela sera réalisé tantot).

Les deux premières parties du présent manuscrit sont consacrées au calcul du champ de déplacement de structures de type haut-parleur pour des grandes amplitudes de vibration. La formulation adoptée (décomposition modale puis représentation en espace d'état) fait apparaître la nécessité d'une formulation temporelle. Reste maintenant à proposer une méthode de calcul du champ de pression sonore (dans le domaine temporel) afin de déterminer l'influence de la forme de la source sur le champ de pression sonore généré par un haut-parleur.

Troisième partie

Rayonnement acoustique de structures circulaires minces soumises à de grandes amplitudes de vibration

Dans cette partie, on se propose de calculer le rayonnement acoustique d'une structure de révolution de forme quelconque. La formulation adoptée doit être compatible avec la décomposition modale exprimée dans les deux précédentes parties afin de pouvoir modéliser le comportement acoustique sur toute la bande passante audible.

La modélisation adoptée repose sur le principe de Réponse Impulsionnelle Spatiale qui permet de calculer directement dans le domaine temporel le rayonnement associé à chaque mode de la structure. Cette technique repose sur l'hypothèse de décomposition de la source en monopôles, et ainsi les effets de diffraction sont laissés de côté. Les calculs ont été réalisés sur des coques sphériques, convexes et concaves et comparés aux solutions exactes de la littérature. Ensuite, des résultats sont présentés dans le cas de sources coniques et de sources de forme complexe (de type haut-parleur). Pour chaque cas, apparaissent des phénomènes d'interférences dès que la longueur d'onde avoisine la profondeur du profil qui ont pour conséquence une décroissance du niveau sonore, une dépendance de la phase avec la fréquence et une extension de la directivité de la source.

Nomenclature

$h_0(r')$	fonction de profil axisymétrique
$\xi(r')$	courbure locale
S	surface mise en vibration
$\mathbf{x} = (r, z)$	point d'observation
$\mathbf{x_S} = (r', \theta)$	point d'intégration de la surface vibrante S
ϕ	angle dans la nouvelle base
$P(\mathbf{x}, t)$	pression au temps t et au point $\mathbf{x}$
$G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t')$	fonction de Green du milieu
$w(r', t)$	déplacement transverse de la srtucture
$\Phi_p(r')$	$p^{ième}$ mode propre en flexion
$q_p(t)$	fonction propre associée au mode p
$\delta(x)$	distribution de Dirac
$\mathbf{x_i}$	point d'impact appartenant à S
$\mathbf{x_o}$	point de sortie appartenant à S
$\mathbf{x_h}$	point haut de la structure
$\mathbf{x_b}$	point bas de la structure
$[t_i; t_o]$	support compact de la réponse impulsionnelle spatiale
$\mathcal{R}_n$	intégrale de Rayleigh
$\mathcal{H}_p(\mathbf{x}, \tau)$	réponse impulsionnelle spatiale associée au mode p au point $\mathbf{x}$
ka	nombre d'onde adimensionné
ω	pulsation réduite

Chapitre 7

Formulation du problème

Sommaire

7.1 Introduction 104
7.1.1 Rayonnement temporel de sources de révolution 104
7.1.2 Géométrie du problème 105
7.2 Formulation temporelle du problème de rayonnement 107
7.2.1 Formulation générale 107
Fonction de Green et intégrale d'Helmholtz 107
Formulation temporelle 109
7.2.2 Hypothèses de calcul 110
7.3 Calcul de l'intégrale de Rayleigh dans le domaine temporel . . 112
7.3.1 Méthodes existantes 112
7.3.2 Définition de la nouvelle base 113
Adimensionnement 113
Considérations géométriques et support temporel des réponses impulsionnelles spatiales 113
Définition de la nouvelle base 115
7.3.3 Changement de variable 116
7.4 Conclusions et intérêt de la formulation temporelle 118

7.1 Introduction

7.1.1 Rayonnement temporel de sources de révolution

Le but de cette partie est d'obtenir une formulation du champ de pression sonore généré par une structure de révolution en régime de grande amplitude de vibration. La mise en équation des vibrations de grandes amplitudes dans le cas de structures de type haut-parleur met en évidence la nécessité d'une formulation temporelle du problème mécanique (cf chapitres 2 à 4). Le but final étant une caractérisation de la transduction mécano-acoustique en fonction de la forme et des matériaux de la structure, il est nécessaire de rechercher une formulation du rayonnement qui fasse apparaître de manière analytique l'influence de la forme.

L'influence de la forme sur le rayonnement des haut-parleurs a déjà été étudiée de manière expérimentale et numérique dans le passé. Notons par exemple les travaux de McLachlan [77] en 1932 qui propose une étude expérimentale sur différents types de haut-parleurs (pavillon exponentiel, conique et sphérique) du champ de pression sonore généré en champ proche, ou les travaux de Frankort [38] ou Wright [133] qui se sont concentrés sur une étude numérique et expérimentale du champ de pression sonore rayonné par une structure de type haut-parleur. Ensuite, un travail de référence sur le rayonnement des coques sphériques peut être trouvé dans les travaux de Suzuki [120] qui s'est intéressé de manière numérique (par utilisation des harmoniques sphériques) au rayonnement de coques sphériques concaves et convexes. Des travaux similaires ont été réalisés dans le cas de structures coniques par A.M. Bruneau [18, 19] et les résultats numériques exhibaient une bonne concordance avec l'expérimentation. Toutes ces études s'appliquent à un type particulier de géométrie et aucune de ces formulations ne peut s'appliquer au cas d'une géométrie quelconque. Néanmoins, tous les auteurs ont pu mettre en évidence que la forme avait un impact notoire sur le rayonnement des sources et ce surtout en hautes fréquences. Il est ainsi apparu que la courbure locale engendre : une diminution du niveau sonore dans l'axe en hautes fréquences (phénomènes d'interférences dès que la longueur d'onde avoisine la profondeur du profil), une augmentation du niveau sonore dans l'axe autour du nombre d'onde $ka = 1$ pour des structures concaves (une diminution dans le cas de sources convexes) due aux phénomènes de diffraction de la source et une augmentation de la directivité de la source en hautes fréquences (pour des nombres d'onde $ka > 5$).

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la formulation du champ de pression sonore généré par une structure de révolution de forme quelconque. Le choix d'une formulation dans le domaine temporel (bien que moins documenté et plus difficile à implémenter) plutôt que dans le domaine fréquentiel (plus précis et très facilement implémentable) a été éffectué compte tenu des contraintes suivantes :

• la formulation mécanique des chapitres précédents est directement explicitée dans le domaine temporel aussi il est plus commode de conserver une formulation temporelle du champ de pression rayonné.

• s'agissant de rayonnement de structures soumises à de grandes amplitudes de vibration, les spectres obtenus ne se limitent pas forcément à des spectres de raies mais peuvent s'étendre à des spectres continus. Aussi un grand nombre de points fréquentiels doit être retenu dans une formulation dans l'espace de Fourier alors que dans le cas d'une formulation temporelle, seul l'échantillonage temporel détermine la bande passante modélisée et non la précision fréquentielle

(nombre de points). Dans le cas de structures simples [29, 48, 49, 55], la formualtion temporelle a montré une grande efficacité et des gains de calcul énormes (de l'ordre de 400 fois) vis à vis de la formulation fréquentielle aussi c'est ce formalisme qui a été retenu dans le chapitre qui suit.

Le rayonnement dans le domaine temporel a été étudié de manière approfondie dans le passé par Hu et Wu [53, 134] et Farn [36]. Ces formulations sont basées sur des triples intégrales mêlant espace et temps et leur calcul direct dans le domaine temporel n'est pas aisé. D'autres approches numérique utilisent la technique de potentiel retardés combinée aux éléments de frontière afin d'obtenir une formulation de type BEM implémentable directement dans le domaine temporel [13, 23, 42]. Le modèle utilisé pour la présente résolution consiste en une approximation géométrique de monopoles distribués sur toute la surface vibrante. Par l'utilisation d'un changement de variable adapté à la géométrie du problème, on montre que l'on se ramène à une expression simple traduisant de manière semi-analytique l'influence de la forme au niveau acoustique. Cette formulation représente une extension des travaux sur le principe de Réponse Impulsionnelle Spatiale (méthode S.I.R.) développé par Stepanishen [28, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118] et appliqué dans le passé au cas de structures planes [29, 48, 49, 55] ou sphériques [5, 60, 131]. Les résultats sont discutés dans le domaine temporel et fréquentiel et les effets typiques induits par une courbure locale sont mis en évidence (effets d'interférences en hautes fréquences, extension de la directivité) ; en outre, les effets de diffraction sont pour l'instant mis de coté dans le calcul global de rayonnement mais pourraient être pris en compte dans des travaux futurs.

7.1.2 Géométrie du problème

On considère une structure S circulaire de révolution autour de l'axe z et encastrée dans un écran infini et infiniment rigide (cf figure 7.1). On s'intéresse par la suite au rayonnement d'une telle structure pour un observateur situé au point d'observation $\mathbf{x}$ représenté par deux coordonnées r et z (du fait de la symétrie axiale, on choisit le point d'observation dans le plan $(u_y\ O\ u_z)$.

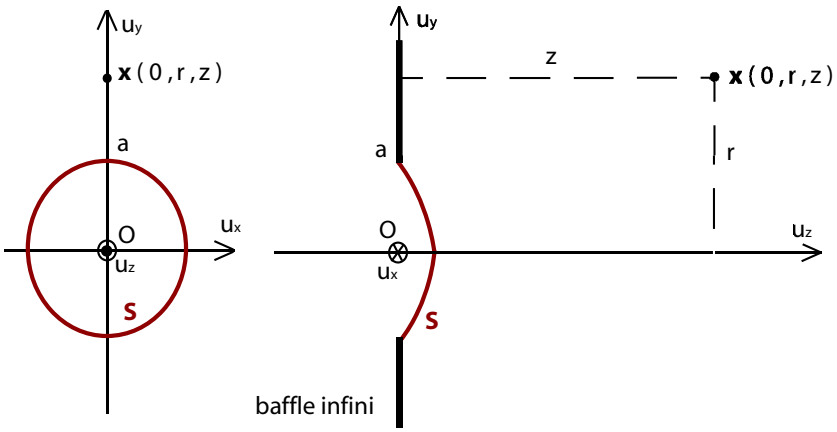


FIG. 7.1 – Description de la géométrie du problème de rayonnement.

La géométrie de la structure S est définie analytiquement par son profil $h_0(r')$ pour $r' \in [0; a]$ où a désigne le rayon extérieur de la structure. La fonction de profil $h_0(r')$ correspond à la projection dans le plan $z = 0$ de la coordonnée z du profil et est définie de manière adimensionnée

par :

$$h_0(r') = a h_{max} \left(1 - \widetilde{h_0}\left(\frac{r'}{a}\right)\right) \tag{7.1}$$

où h_{max} désigne la profondeur maximal de la structure et $\widetilde{h_0}(r'/a)$ la fonction de profil adimensionnée. Cette fonction est supposée monotone. Si $h_{max} < 0$, le profil considéré est concave et si $h_{max} > 0$, le profil considéré est convexe (le cas $h_{max} = 0$ désignant un profil plan). On définit la courbure locale $\xi(r')$ par :

$$\xi(r') = \frac{dh_0(r')}{dr'} = h_{max}\frac{d\widetilde{h_0}(r')}{dr'} \tag{7.2}$$

Le tableau 7.1 résume les profils analytiques des structures usuelles (disque plan, coques coniques et sphériques, convexes et concaves).

Profil	$h_0(r')$	$\widetilde{h_0}(r')$	$\xi(r') = h_0'$
plan	0	0	0
tronc de cône concave angle α	$-\alpha a\left(1 - \frac{r}{a}\right)$	$\frac{r}{a}$	α
tronc de cône convexe angle α	$\alpha a\left(1 - \frac{r}{a}\right)$	$\frac{r}{a}$	$-\alpha$
coque sphérique concave rayon de courbure R_0	$-\sqrt{R_0^2 - a^2}\left(1 - \sqrt{\frac{R_0^2 - r'^2}{R_0^2 - a^2}}\right)$	$\sqrt{\frac{R_0^2 - r'^2}{R_0^2 - a^2}}$	$-\frac{r'}{\sqrt{R_0^2 - r'^2}}$
coque sphérique convexe rayon de courbure R_0	$\sqrt{R_0^2 - a^2}\left(1 - \sqrt{\frac{R_0^2 - r'^2}{R_0^2 - a^2}}\right)$	$\sqrt{\frac{R_0^2 - r'^2}{R_0^2 - a^2}}$	$\frac{r'}{\sqrt{R_0^2 - r'^2}}$

TAB. 7.1 – Définition analytique des fonctions de profil $h_0(r')$, $\widetilde{h_0}(r')$ et $\xi(r')$ pour les 5 formes typiques étudiées .

7.2 Formulation temporelle du problème de rayonnement

7.2.1 Formulation générale

Le champ de pression sonore $P(\mathbf{x}, t)$, où $\mathbf{x}$ et t désignent respectivement les coordonnées spatiales et temporelles, est solution de l'équation des ondes sans termes sources [99] :

$$\Delta P - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \tag{7.3}$$

où c désigne la vitesse du son dans le fluide considéré (dans l'air $c = 340\ m.s^{-1}$) et Δ le Laplacien dans le système de coordonnées adopté.

Fonction de Green et intégrale d'Helmholtz

On introduit la fonction de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t')$ du milieu solution de [58] :

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') - \frac{1}{c^2}\ddot{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') = \delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x_S}). \tag{7.4}$$

Dans l'équation (7.4), $\mathbf{x}$ désigne le point d'observation, $\mathbf{x_S}$ le point d'intégration appartenant à la surface S, t le temps d'observation, t' le temps d'intégration et δ la distribution de Dirac. La fonction de Green est basée sur l'hypothèse du rayonnement direct des points sources. Cette approche, si elle est valide dans le cas d'une source plane, n'est qu'approchée dans le cas d'une source focalisée car elle ne prend pas en compte les réflexions multiples de la source sur elle-même [26, 99]. La connaissance de la fonction de Green associée aux conditions aux limites permet alors de remonter au champ de pression sonore généré $P(\mathbf{x}, t)$ via l'intégrale de Kirchhoff-Helmholtz [91] :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, t) = \rho \int_0^t \iint_{S_t} (G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t').\nabla_n P(\mathbf{x_S}, t') \\ - \nabla_n G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t').P(\mathbf{x_S}, t'))\ d\mathbf{x_S}dt' \end{aligned} \tag{7.5}$$

où ρ désigne la densité du fluide (pour l'air $\rho = 1.20\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ à 20 °C) et ∇_n le gradient normal à la surface au point considéré. Dans l'équation (7.5), la surface d'intégration S_t représente une surface fermée représentée figure 7.2. elle est constituée de 3 parties distinctes $S_t = S \cup S_b \cup S_{inf}$ qui comprend la surface vibrante S, la surface du baffle S_b et une surface de raccord à l'infini S_{inf} (quelconque).

En rajoutant la condition de Sommerfeld (rayonnement nul à l'infini), on va pouvoir s'affranchir de la contribution de S_{inf} dans l'équation (7.5). Les hypothèses sous-jacentes sont les suivantes, en définissant par R la distance moyenne à la source (cf figure 7.2) :

- condition de divergence à l'infini : $\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial P}{\partial R} - ikP\right) = 0$
- pression nulle à l'infini : $\lim_{R\to\infty} RP = 0$

Ces hypothèses permettent d'éliminer la contribution de la surface à l'infini et de redéfinir la surface d'intégration $S_t = S \cup S_b$.

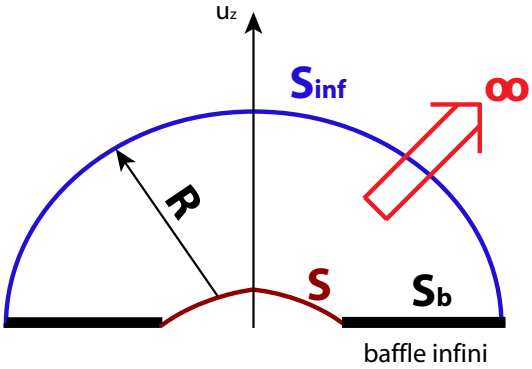


FIG. 7.2 – Définition des différentes surfaces d'intégration pour le calcul de l'intégrale d'Helmholtz. S désigne la surface vibrante, S_b la surface du baffle et S_{inf} la surface à l'infini. On définit par R la distance moyenne de S_{inf} à la source.

En fonction des conditions de baffle (baffle rigide, baffle mou ou baffle adapté), la fonction de Green associée à notre problème varie. On introduit ainsi deux fonctions de Green $G_1(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t')$ et $G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t')$ définies ci-contre d'après la théorie des sources images [58, 79, 101] :

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') &= \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x_{S1}}|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x_{S1}}|}, \\ G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') &= \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x_{S2}}|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x_{S2}}|}, \end{aligned} \tag{7.6}$$

où $G_1(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t')$ représente la contribution du son direct, $G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t')$ la contribution due à la réflexion sur le baffle, $\mathbf{x_{S1}}$ et $\mathbf{x_{S2}}$ les points d'intégration correspondant à chaque fonction de Green considérée et $\mathbf{x}$ le point d'observation (se référer à la figure 7.3). Dans le cas d'une structure plane, les 2 termes sont égaux mais dans le cas général, les 2 termes distincts doivent être retenus.

La fonction de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t')$ associé au problème avec conditions de baffle peut alors s'exprimer simplement à l'aide des deux fonctions de Green introduites précédemment :

• Cas du baffle rigide : dans ce cas, la vitesse à la surface du baffle est nulle, c'est-à-dire $\dfrac{\partial G}{\partial n} = 0$ sur le baffle et on se ramène à une condition de type Neumann homogène :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') = G_1(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') + G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') \tag{7.7}$$

• Cas non baffé : dans ce cas, la pression sur le baffle est supposée nulle [58, 79, 101] càd $G = 0$ sur le baffle et on se ramène à une condition de type Dirichlet homogène :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') = G_1(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') - G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') \tag{7.8}$$

En résumé, dans notre cas où la structure est encastrée dans un baffle infini, la fonction de Green solution de (7.4) avec la condition de baffle rigide s'écrit comme [58, 79, 91, 99] :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') &= G_1(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') + G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') \\ &= \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x_{S1}}|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x_{S1}}|} + \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x_{S2}}|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x_{S2}}|} \end{aligned} \tag{7.9}$$

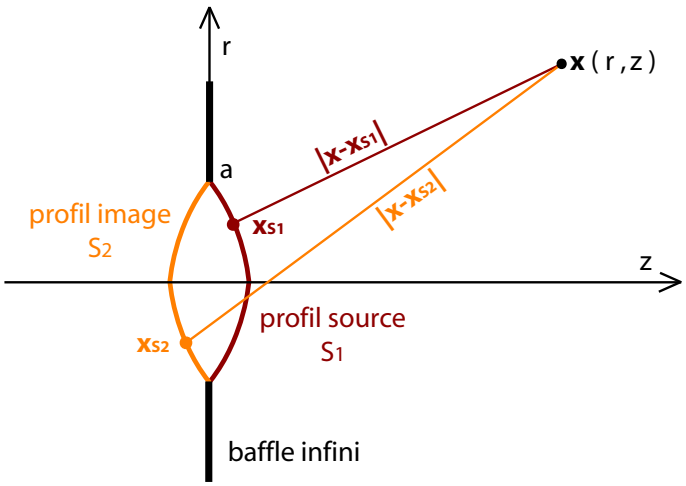


FIG. 7.3 – Définition des deux composantes de la fonction de Green par la méthode des sources images. $\mathbf{x}$ représente le point d'observation, $\mathbf{x_{S1}}$ le point d'intégration sur la surface vibrante et $\mathbf{x_{S2}}$ le point d'intégration de l'image de la source.

Cette formulation permet de décrire l'effet d'un baffle infini sur le rayonnement de la source et n'est en théorie valable que dans le cas d'un point source ou une surface vibrante plane. L'extension au cas d'une source présentant une courbure n'est pas évident mais permet de rendre compte en première approximation des effets induits par la présence ou l'absence de baffle.

Formulation temporelle

On montre que l'équation (7.5) se sépare en quatre termes en ne considérant plus que les deux variables vitesse normale $V_n(\mathbf{x_S}, t')$ et vitesse tangente $V_t(\mathbf{x_S}, t')$ au point d'intégration $\mathbf{x_S}$. Ces travaux ont été réalisés dans un premier temps dans le domaine fréquentiel [134] puis étendus dans le domaine temporel par la suite [53] :

$$\boxed{P(\mathbf{x},t) = \mathcal{R}_n(\mathbf{x},t) + \mathcal{R}_t(\mathbf{x},t) + \mathcal{D}_n(\mathbf{x},t) + \mathcal{D}_t(\mathbf{x},t)}. \tag{7.10}$$

L'équation (7.10) comprend quatre termes dont la signification peut être trouvée dans [53, 134] :

• $\mathcal{R}_n(\mathbf{x},t)$ représente la réponse du système à une distribution monopolaire de la composante normale V_n de la vitesse du fluide à la paroi :

$$\mathcal{R}_n(\mathbf{x},t) = -\rho \int_0^t \iint_S G(\mathbf{x},\mathbf{x_S},t,t') \frac{\partial V_n(\mathbf{x_S},t')}{\partial t'} d\mathbf{x_S} dt'. \tag{7.11}$$

• $\mathcal{R}_t(\mathbf{x},t)$ représente la réponse du système à une distribution dipolaire de la composante tangentielle V_t de la vitesse du fluide à la paroi :

$$\mathcal{R}_t(\mathbf{x},t) = \rho \int_0^t \iint_S \nabla_n G(\mathbf{x},\mathbf{x_S},t,t') \left(\int_{\mathbf{x_S}\to\mathbf{x_S}'} \frac{\partial V_t(\mathbf{x_S}',t')}{\partial t'} d\mathbf{x_S}' \right) d\mathbf{x_S} dt'. \tag{7.12}$$

• $\mathcal{D}_n(\mathbf{x},t)$ représente la réponse du système à une distribution couplée monopolaire / dipolaire de la composante normale V_n de la vitesse du fluide à la paroi. Ce terme peut être vu comme

le terme de diffraction engendré par la courbure locale de la structure et pondéré par la vitesse normale à la surface. Celui-ci ne peut être directement calculé dans le domaine temporel mais doit être déterminé par transformée de Fourier inverse à partir du calcul fréquentiel [134] :

$$\mathcal{D}_n(\mathbf{x},t) = -\rho \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_S \frac{\nabla_n G(\mathbf{x},\mathbf{x_S},\omega)}{1+\iint_{S'} \nabla_n G(\mathbf{x_S},\mathbf{x_S}',\omega) d\mathbf{x_S}'} \left(\iint_{S'} G(\mathbf{x_S},\mathbf{x_S}',\omega) \frac{\partial V_n(\mathbf{x_S}',t')}{\partial t'} d\mathbf{x_S}' \right) d\mathbf{x_S} d\omega dt'. \tag{7.13}$$

• $\mathcal{D}_t(\mathbf{x},t)$ représente la réponse du système à une distribution couplée dipolaire / dipolaire de la composante tangentielle V_t de la vitesse du fluide à la paroi. Ce terme peut être vu comme le terme de diffraction engendré par la courbure locale de la structure et pondéré par la vitesse tangentielle à la surface. Celui-ci ne peut être directement calculé dans le domaine temporel mais doit également être déterminé par transformée de Fourier inverse [134] :

$$\mathcal{D}_t(\mathbf{x},t) = -\rho \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_S \frac{\nabla_n G(\mathbf{x},\mathbf{x_S},\omega)}{1+\iint_{S'} \nabla_n G(\mathbf{x_S},\mathbf{x_S}',\omega) d\mathbf{x_S}'} \left(\iint_{S'} \nabla_n G(\mathbf{x_S},\mathbf{x_S}',\omega) \left(\int_{\mathbf{x_S}',\rightarrow\mathbf{x_S}''} \frac{\partial V_t(\mathbf{x_S}'',t')}{\partial t'} d\mathbf{x_S}'' \right) d\mathbf{x_S}' \right) d\mathbf{x_S} d\omega dt'. \tag{7.14}$$

7.2.2 Hypothèses de calcul

Le problème de rayonnement (tout comme le problème mécanique) est supposé invariant par rotation autour de l'axe de révolution z. Cette hypothèse découle de la structure même et de son excitation (se référer à la partie 2 pour plus de détails). Ceci nous permet de décrire le champ de pression $P(\mathbf{x},t)$ par les deux coordonnées cylindriques $\mathbf{x} = (r,z)$ définies figure 7.1.

Les différents termes de l'équation (7.10) ont des ordres de grandeurs différents suivant la courbure de la source, le point d'observation et les conditions aux limites. Dans le cas d'une structure plane, seul le premier terme $\mathcal{R}_n(\mathbf{x},t)$ demeure dans (7.10). En effet, lorsque la géométrie est plane, la vitesse tangente à la paroi est nulle et le gradient normal de la fonction de Green $\nabla_n G(\mathbf{x},\mathbf{x_S},t,t')$ est également nul. Si maintenant on rajoute l'hypothèse de faible courbure de la structure S, à savoir :

$$\left| \frac{h_0(r')}{a} \right| < \left| \frac{h_{max}}{a} \right| \ll 1. \tag{7.15}$$

Alors, sachant que le déplacement transverse $w(r',t)$ s'effectue selon l'axe z, la vitesse tangente est d'une ordre inférieur à la vitesse normale, ce qui permet d'éliminer les termes $\mathcal{R}_t(\mathbf{x},t)$ et $\mathcal{D}_t(\mathbf{x},t)$:

$$\left| \frac{V_t}{V_n} \right| \simeq \left| \frac{h_{max}}{a} \right| \ll 1. \tag{7.16}$$

Toujours sous l'hypothèse de faible courbure se cache l'ordre du terme de diffraction de la contribution normale $\mathcal{D}_n(\mathbf{x},t)$. En effet, si l'on regarde l'ordre de ce terme, celui-ci dépend du

gradient normal de la fonction de Green $\nabla_n G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t')$ qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\nabla_n G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') = (&- \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|^2} \\ &+ \frac{1}{4\pi c|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|} \frac{\partial\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|/c)}{\partial t'} \Big) \frac{\partial|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|}{\partial n}\end{aligned} \tag{7.17}$$

dont l'ordre de grandeur est directement relié à l'ordre de profondeur du profil :

$$\frac{\partial|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|}{\partial n} \propto |\mathbf{x} - \mathbf{x_S}| \frac{h_{max}}{a} \ll |\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|. \tag{7.18}$$

On se ramène alors, sous l'hypothèse de faible courbure à une expression du type :

$$\begin{aligned}P(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{R}_n(\mathbf{x}, t) \\ &= -\rho \int_0^t \iint_S G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') \frac{\partial V_n(\mathbf{x_S}, t')}{\partial t'} d\mathbf{x_S} dt'.\end{aligned} \tag{7.19}$$

Cette expression, appelée intégrale de Rayleigh, est exacte dans le cas d'une structure plane et renseigne sur les premiers effets induits par une courbure locale (interférences et accroissement de la directivité [52]) et rend correctement compte des effets induits par des géométries plus complexes en champ lointain uniquement, comme cela a été montré dans [21, 104]. Par la suite, on va donc étudier ce que devient l'intégrale de Rayleigh dans le cas de sources faiblement courbées (et même au delà de l'hypothèse (7.15)).

Enfin, nous supposons que le champ de déplacement transverse $w(r', t)$ en tout point r' de la structure s'exprime sous forme de variables séparées, à savoir :

$$w(r', t) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(r') q_p(t), \tag{7.20}$$

où les fonctions $\Phi_p(r')$ représentent les modes propres de la structure et $q_p(t)$ les fonctions temporelles associées. Dans ce cas, on utilise le formalisme du chapitre 2 et les données des déformées et des fonctions propres sont directement calculables ou mesurables expérimentalement. Sous cette hypothèse, l'intégrale de Rayleigh se réduit à :

$$P(\mathbf{x}, t) = -\rho \int_0^t \sum_{p=0}^{\infty} \left(\iint_S G(\mathbf{x}, \mathbf{x_S}, t, t') \Phi_p(\mathbf{x_S}) d\mathbf{x_S} \right) \ddot{q}_p(t') dt'. \tag{7.21}$$

Dans toute la suite, on se propose, par un changement de variable approprié, de réduire l'intégration spatiale entre parenthèses dans l'équation (7.21) et de faire apparaître une simplification de cette expression valable dans le cas d'une géométrie quelconque.

7.3 Calcul de l'intégrale de Rayleigh dans le domaine temporel

7.3.1 Méthodes existantes

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul de l'intégrale de Rayleigh définie par l'équation (7.21). L'idée est de procéder à un changement de variables approprié à la géométrie du problème afin de réduire la triple intégration (intégration temporelle et double intégration spatiale) en une intégrale simple par utilisation du théorème de convolution. Cette méthode permet ainsi de découpler le problème en temps du problème spatial (on s'affranchit ainsi d'une contrainte de discrétisation en espace dépendant du temps). L'étude se déroule de la manière suivante :

• on s'intéresse tout d'abord aux propriétés du champ rayonné par des considérations géométriques,

• on exprime l'intégrale de Rayleigh dans une nouvelle base dépendant de la géométrie considérée,

• grâce au théorème de convolution, on réduit l'ordre d'intégration et on calcule les réponses impulsionnelles spatiales (S.I.R.).

Par souci de concision, on décrit par la suite le calcul dans le cas où la fonction de Green retenue ne contient que le terme dû à la source (terme G_1 de (7.9) uniquement). Cependant les résultats présentés au chapitre 8 tiennent compte des réflexions dues à l'écran (on retient les deux termes dans (7.9)).

Le point de départ est d'exprimer l'intégrale de Rayleigh dans la base cylindrique en repérant par $\mathbf{x_S} = (r', \theta)$ la variable d'intégration. L'élément de surface normal est ainsi défini par :

$$\iint_S (\star)\, d\mathbf{x_S} = \int_0^a \int_0^{2\pi} (\star)\, \frac{r' d\theta dr'}{\sqrt{1+\xi^2}}, \tag{7.22}$$

où $\xi(r')$ désigne la courbure locale définie à l'équation (7.2). Ces variables d'intégration sont injectées dans l'équation (7.21) afin d'obtenir :

$$P(\mathbf{x}, t) = -\rho \int_0^t \sum_p \left(\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|/c)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|} \Phi_p(r') \frac{r' d\theta dr'}{\sqrt{1+\xi^2}} \right) \ddot{q}_p(t') dt' \tag{7.23}$$

avec :

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}| = \sqrt{(h(r') - z)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta}. \tag{7.24}$$

Le calcul direct de (7.23) dans le cas d'une structure quelconque n'est pas évident car une discrétisation fine sur les variables spatiale est requise afin que l'intégration spatiale converge. Différentes simplifications peuvent être opérées sur cette expression, en considérant par exemple le rayonnement en champ lointain (lorsque $(z^2 + r^2) \gg a^2$). Le moyen couramment utilisé pour évaluer les intégrales de (7.23) est de passer dans le domaine fréquentiel par transformée de Fourier puis d'effectuer un changement de variable adapté (transformée de Hankel [116, 114] ou harmoniques sphériques [120]). Dans tous les cas, aucune méthode générale n'a été proposée et la littérature fournit les transformations standard dans les cas simples tels que le piston plan [115] ou la coque sphérique [48].

L'idée est alors d'effectuer le calcul directement dans le domaine temporel en effectuant un changement de variable adapté au problème afin de réduire la double intégration spatiale (suivant r' et θ) par une intégration selon la coordonnée spatiale $|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|$ et un angle ϕ qui doit être déterminé. Ensuite, l'intégration suivant $|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|$ peut être simplement éliminée par le théorème de convolution, ce qui permet de réduire le problème intégral d'un ordre.

7.3.2 Définition de la nouvelle base

Adimensionnement

On introduit les nouvelles coordonnées spatiales adimensionnées $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{r}, \widetilde{z})$, les nouvelles coordonnées d'intégration $\widetilde{\mathbf{x_S}} = (\widetilde{r'}, \theta)$ ainsi que la coordonnée temporelle adimensionnée $\widetilde{t}$ pour exprimer l'expression (7.21) sous forme adimensionnée :

$$\mathcal{R}_n(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{t}) = \rho c a^2 \int_0^{\widetilde{t}} \sum_p \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\delta(\widetilde{t} - \widetilde{t'} - \widetilde{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|})}{4\pi \widetilde{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}} \right) \Phi_p(\widetilde{r'}) \frac{\widetilde{r'} d\theta d\widetilde{r'}}{\sqrt{1+\xi^2}} \right) \ddot{q}_p(\widetilde{t'}) d\widetilde{t'} \qquad (7.25)$$

avec :

$$\widetilde{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|} = \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}{a} \qquad \widetilde{r'} = \frac{r'}{a} \qquad \widetilde{t} = \frac{tc}{a} \ .$$

Dans la suite du chapitre, les $\widetilde{(\star)}$ sont omis afin de ne pas surcharger les écritures. Néanmoins, il ne faut pas oublier que toutes les coordonnées spatiales sont adimensionnées par le rayon extérieur a, les données temporelles par le temps caractéristique a/c et que les pulsations ω sont présentées selon le nombre d'onde adimensionné $ka = \omega a/c$.

Considérations géométriques et support temporel des réponses impulsionnelles spatiales

De manière générale, la réponse impulsionnelle de la structure pour un récepteur situé en $\mathbf{x}$ a un support compact noté $[t_i : t_o]$, où t_i désigne le temps de propagation de $\mathbf{x}$ jusqu'au point de la structure le plus proche de $\mathbf{x}$ et t_o correspond au temps de propagation de $\mathbf{x}$ jusqu'au point de la structure le plus éloigné de $\mathbf{x}$.

On note par $\mathbf{x_i} = (r_i, h(r_i))$ le point d'impact, défini de manière unique dans le cas d'une structure à profil monotone. Celui-ci est situé à l'intersection de la sphère centrée en $\mathbf{x}$ de rayon ct_i avec la structure S. Il est solution de :

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x_i}| = \min_{(r',\,\theta)} \left(\sqrt{(h(r')-z)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta} \right). \qquad (7.26)$$

On note par $\mathbf{x_o} = (r_o, h(r_o))$ le point de sortie, également défini de manière unique dans le cas d'une structure à profil monotone. Il s'agit du point situé à l'intersection de la sphère centrée en $\mathbf{x}$ de rayon ct_o avec la structure S. Il est solution de :

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x_o}| = \max_{(r',\,\theta)} \left(\sqrt{(h(r')-z)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta} \right). \qquad (7.27)$$

On repère également par $\mathbf{x_h} = (1, 0)$ et $\mathbf{x_b} = (-1, 0)$ les points située tout en haut et tout en bas de la structure (se référer à la figure 7.4). En utilisant les 4 points ainsi définis ($\mathbf{x_i}$,$\mathbf{x_o}$,$\mathbf{x_h}$,$\mathbf{x_b}$), on différencie 3 zones distinctes pour lesquelles le calcul de l'intégrale de Rayleigh varie. Les

différentes zones sont ainsi définies sur le tableau 7.2. Un exemple des 3 zones de calcul est représenté figure 7.4 dans le cas d'une structure convexe. Les zones I n'existent que dans le cas de structures convexes, les zones III uniquement dans le cas de sources concaves. L'intersection des 3 zones notée F sur la figure 7.4 est nommé le point focal de la source (très utilisé en imagerie ultrasonore) : à ce point, le support temporel de la réponse impulsionnelle du système est minimal.

zone	Conditions sur $\mathbf{x_i}$ et $\mathbf{x_o}$	Conditions sur r_i et r_o
zone I	$\mathbf{x_i} \neq \{\mathbf{x_h}, \mathbf{x_b}\}$ et $\mathbf{x_o} = \{\mathbf{x_h}, \mathbf{x_b}\}$	$r_i < 1$ et $r_o = -1$
zone II	$\mathbf{x_i} = \{\mathbf{x_h}, \mathbf{x_b}\}$ et $\mathbf{x_o} = \{\mathbf{x_h}, \mathbf{x_b}\}$	$r_i = 1$ et $r_o = -1$
zone III	$\mathbf{x_i} = \{\mathbf{x_h}, \mathbf{x_b}\}$ et $\mathbf{x_o} \neq \{\mathbf{x_h}, \mathbf{x_b}\}$	$r_i = 1$ et $r_o > -1$

TAB. 7.2 – Définition des 3 différentes zones de calcul (I, II et III) utilisées pour le calcul du champ de pression.

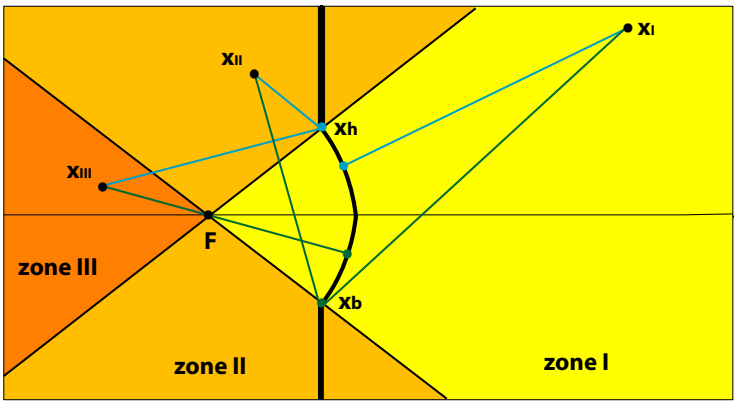


FIG. 7.4 – Définition des 3 différentes zones de calcul et leur projections correspondantes dans le cas d'un profil convexe. Pour chaque point de chaque zone, on indique en bleu le chemin le plus court entre $\mathbf{x}$ et S (indiquant le point $\mathbf{x_i}$) et en vert le chemin le plus long entre $\mathbf{x}$ et S (indiquant le point $\mathbf{x_o}$). Il est à remarquer que la zone I n'est définie qu'au devant d'une source convexe et la zone III au devant d'une source concave. Le point F représente le point de focalisation de la source (nommé "sweet point" par la communauté électroacoustique).

Définition de la nouvelle base

On introduit un nouvel angle θ_0 formé par l'intersection de l'axe z avec la droite $(\mathbf{x}\mathbf{x_i})$. Il est défini en fonction de la position du récepteur $\mathbf{x}$ et de la géométrie de S (via $\mathbf{x_i}$). On introduit également une nouvelle base locale $\mathcal{B}_i$ associée au point $\mathbf{x_i}$. On nomme ses vecteurs orthonormés $\mathcal{B}_i = (\vec{t_{ix}}, \vec{t_{iy}}, \vec{n_i})$ comme le montre la figure 7.5. On les définit mathématiquement par rapport à la base cartésienne $\mathcal{B}_c = (\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_0} &= & -\sin\theta_0 \vec{u_y} & -\cos\theta_0 \vec{u_z}, \\ \overrightarrow{t_{0y}} &= & \cos\theta_0 \vec{u_y} & -\sin\theta_0 \vec{u_z}, \\ \overrightarrow{t_{0x}} &= & \vec{u_x}. & \end{cases} \tag{7.28}$$

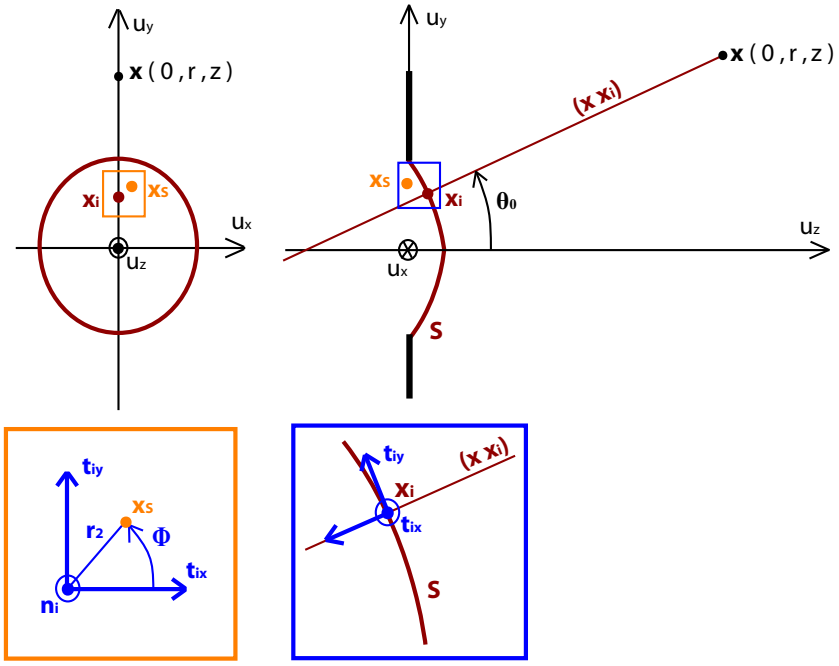


FIG. 7.5 – Définition de la base locale $\mathcal{B}_i = (\vec{t_{ix}}, \vec{t_{iy}}, \vec{n_i})$ et du nouveau jeu de coordonnées associé $\mathbf{x_S} = (r_2, \phi)$. Les points $\mathbf{x}$, $\mathbf{x_i}$ et $\mathbf{x_S}$ représentent respectivement le point d'observation, le point d'impact et le point d'intégration appartenant à S. Dans le cas considéré, le point d'observation $\mathbf{x}$ est situé dans la zone I.

Dans cette nouvelle base, on définit un nouveau jeu de coordonnées polaires $\mathbf{x_S} = (r_2, \phi)$ comme l'indique la figure 7.5. Ces coordonnées sont définies dans la nouvelle base $\mathcal{B}_i$ par :

$$\overrightarrow{\mathbf{x_i}\mathbf{x_S}} = \left(\frac{h(r_i) - h(r')}{\cos\theta_0} - r_2 \cos\phi \tan\theta_0 \right) \overrightarrow{n_i} + r_2 \cos\phi \, \overrightarrow{t_{iy}} + r_2 \sin\phi \, \overrightarrow{t_{ix}}. \tag{7.29}$$

C'est ce nouvel angle ϕ défini dans cette base $\mathcal{B}_i = (\vec{t_{ix}}, \vec{t_{iy}}, \vec{n_i})$ qui va servir d'angle d'intégration. Le but de la suite du calcul est ainsi de définir l'intégrale de Rayleigh selon les variables ϕ et $|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|$. Le choix de cet angle ϕ n'est pas anodin ; en effet, il fallait trouver un angle tel qu'il y ait bijection de la fonction :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \ : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B}_i \\ \mathbf{x_S} &\longrightarrow (|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|, \phi). \end{aligned} \tag{7.30}$$

On vérifie que tout point est alors défini de manière unique par la connaissance du couple de variables $(|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|,\phi)$, du profil de la structure $h(r')$ (qui doit alors être monotone) et du point d'observation $\mathbf{x}$. C'est ce même changement de variable qui avait été adopté dans le cas de structures planes ([41, 49, 31, 55, 56, 115]) et de coques sphériques ([5, 40, 60, 131]), à la différence près que notre formulation est valable pour un profil quelconque (tant qu'il est monotone).

7.3.3 Changement de variable

Exprimons maintenant ce que deviendrait l'intégrale de Rayleigh dans la nouvelle base $(|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|,\phi)$. Pour ce faire, il est nécessaire de définir les vecteurs tangents à la surface par rapport aux variables $|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|$ et ϕ nommés respectivement $\overrightarrow{T_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}}$ et $\overrightarrow{T_\phi}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{T_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}} &= \dfrac{\partial\overrightarrow{\mathbf{x_S}}.\overrightarrow{u_x}}{\partial|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}\overrightarrow{u_x}+\dfrac{\partial\overrightarrow{\mathbf{x_S}}.\overrightarrow{u_y}}{\partial|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}\overrightarrow{u_y}+\dfrac{\partial\overrightarrow{\mathbf{x_S}}.\overrightarrow{u_z}}{\partial|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{T_\phi} &= \dfrac{\partial\overrightarrow{\mathbf{x_S}}.\overrightarrow{u_x}}{\partial\phi}\overrightarrow{u_x}+\dfrac{\partial\overrightarrow{\mathbf{x_S}}.\overrightarrow{u_y}}{\partial\phi}\overrightarrow{u_y}+\dfrac{\partial\overrightarrow{\mathbf{x_S}}.\overrightarrow{u_z}}{\partial\phi}\overrightarrow{u_z}. \end{cases} \tag{7.31}$$

Et ainsi on exprime le vecteur d'intégration dans la nouvelle base choisie [59] :

$$\overrightarrow{d\mathbf{x_S}} = \left(\overrightarrow{T_\phi}\times\overrightarrow{T_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}}\right)\ d|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|\ d\phi. \tag{7.32}$$

Le calcul détaillé des vecteurs tangents et de l'élément d'intégration $\overrightarrow{d\mathbf{x_S}}$ est décrit en annexe C. On réinjecte notre nouveau vecteur d'intégration de dans (7.23) afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n(\mathbf{x},t) = \frac{\rho c}{2\pi}\int_0^t\sum_p\int_\phi\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}&\left(\Phi_p(r')\left(\overrightarrow{T_\phi}\times\overrightarrow{T_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}}\right)\right.\\ &\left.\delta(\tau-|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|/c)d|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|d\phi\right)\ddot{q}_p(t-\tau)d\tau\end{aligned} \tag{7.33}$$

où l'on a introduit le retard $\tau = t-t'$. On effectue ensuite l'intégration selon $|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|$ et d'après le théorème de convolution [15, 59] défini en annexe C, on se ramène finalement à la formulation suivante :

$$\boxed{\mathcal{R}_n(\mathbf{x},t) = -\frac{\rho c}{2\pi}\int_0^t\sum_p\mathcal{H}_p(\mathbf{x},\tau)\ddot{q}_p(t-\tau)d\tau} \tag{7.34}$$

avec :

$$\boxed{\mathcal{H}_p(\mathbf{x},\tau) = \int_\phi\left(\frac{\Phi_p(r')}{FA+B\cos\phi-C\sin^2\phi}\right)_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|=c\tau}d\phi} \tag{7.35}$$

et :

$$\begin{cases} F &= 1+\dfrac{\xi}{r'}(h(r')-z), \\ A &= \left(\dfrac{1-(\sin\theta_0\sin\phi)^2}{\cos\theta_0}\right), \\ B &= \left(\dfrac{Fr_i-r}{r_2}\right), \\ C &= \left(\dfrac{r}{r'}\xi\sin\theta_0\right). \end{cases} \tag{7.36}$$

Dans cette formulation, on fait ainsi émerger une nouvelle fonction $\mathcal{H}_p(\mathbf{x}, \tau)$ dépendant de la position du récepteur $\mathbf{x}$, du temps d'intégration τ, de la forme de l'objet $h_0(r')$ et de la déformée modale $\Phi_p(r')$ associée au mode p. Cette fonction est communément appelée la réponse impulsionnelle spatiale (S.I.R.) associée au mode p. Sa formulation est analytique dans le cas de structures planes ou sphérique mais se limite à une intégrale dans le cas d'une structure quelconque. Les bornes d'intégration de ϕ dépendent de la position du récepteur et du temps d'intégration ; leur expression détaillée en fonction des zones de calcul est précisée en annexe C.

Dans cette expression, la notation $|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}| = c\tau$ signifie qu'à chaque pas de temps, on associe une valeur de $|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|$ et on en détermine alors les variables r' et r_2 associées à chaque angle ϕ. Ceci nous affranchit d'une contrainte de pas spatial en fonction du pas de temps, car nous avons séparé l'intégration temporelle de l'intégration spatiale, ce qui assure une convergence rapide des calculs pour une faible discrétisation de l'angle ϕ (en pratique, la convergence est assurée dès 15 points en ϕ) comme présenté figure 7.6.

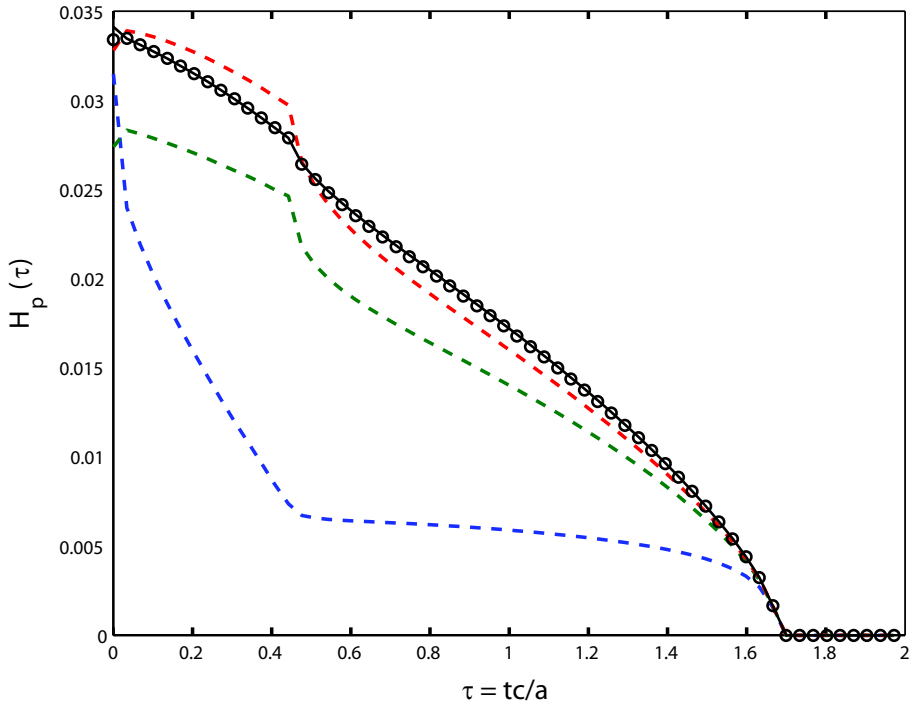


FIG. 7.6 – Calcul de la réponse impulsionnelle hors-axe d'une coque hémisphérique pour différents pas d'intégration en ϕ. La réponse exacte est représentée par des points noirs et est comparée à ceux calculés en utilisant 2 points (pointillés bleus), 5 points (pointillés verts), 9 points (pointillés rouges) et 15 points (trait plein noir) de discrétisation.

7.4 Conclusions et intérêt de la formulation temporelle

Dans ce chapitre, une formulation du champ de pression rayonné par une structure circulaire de forme quelconque a été proposée. Le modèle adopté repose sur l'hypothèse de rayonnement monopolaire de chaque point de la structure, ce qui permet de réduire le calcul du champ de pression à l'intégrale de Rayleigh (les termes de diffraction sont laissés de côté). La méthode retenue est fondée sur le calcul temporel de la Réponse Impulsionnelle Spatiale (S.I.R.) $\mathcal{H}_p$ associée à chaque mode p. Cette formulation a été développée dans la littérature dans le cas de structures planes et sphériques et a été étendue dans la présente étude au cas de structures de révolution de forme quelconque.

Afin d'illustrer les avantages d'une formulation temporelle vis à vis d'une formulation fréquentielle, une comparaison des temps de calculs obtenus en utilisant les deux méthodes est présenté au tableau 7.3 dans le cas de la réponse hors axe en champ lointain d'une coque hémisphérique. Le but est d'illustrer que dans l'optique de calculer un spectre précis (comportant beaucoup de points fréquentiels) l'approche temporelle est plus avantageuse. Dans cette optique, on compare les temps de calcul obtenus dans deux cas particuliers :

- de $ka = 1$ à $ka = 100$ avec 100 points fréquentiels,
- de $ka = 0.1$ à $ka = 100$ avec 1000 points fréquentiels.

Dans chaque cas (100 et 1000 points fréquentiels) on choisit un pas d'intégration spatial satisfaisant une erreur maximale de 10^{-6} dans les spectres obtenus.

	Nombres de points fréquentiels	Nombre de points d'intégration nécessaires	Temps de calcul
Temporel	100	20	**2.7** s
Fréquentiel	100	200	**2.6** s
Temporel	1000	20	**2.7** s
Fréquentiel	1000	200	**26** s

TAB. 7.3 – Comparaison des temps de calculs entre formulation temporelle et fréquentielle. Dans notre cas, la formulation adoptée permet de réduire d'un facteur 10 les temps de calcul.

Les résultats du tableau 7.3 illustrent le fait que la méthode temporelle n'est limitée que par la borne supérieur en ka et non par le nombre de points fréquentiels. Aussi dans notre cas, il est plus avantageux d'effectuer le calcul directement dans le domaine temporel, bien que l'implémentation numérique de l'équation (7.35) soit plus délicate.

Chapitre 8

Application : rayonnement de sources sphériques et coniques, convexes et concaves

Sommaire

8.1 Introduction 120
8.2 Source plane circulaire 120
8.3 Coques sphériques concaves et convexes 122
8.3.1 Pression dans l'axe 122
Champ lointain 122
Champ proche 126
8.3.2 Pression hors axe 127
8.4 Sources coniques, concaves et convexes 131
8.4.1 Pression dans l'axe 131
8.4.2 Pression hors axe 133
8.5 Sources de forme complexe de type haut-parleur 134
8.5.1 Formulation dans le cas de profils non monotones 134
8.5.2 Résultats pour une géométrie de type haut-parleur 134
Pression dans l'axe 134
Pression hors axe 134
8.6 Conclusion 138
8.6.1 Rayonnement transitoire de structures circulaires de forme quelconque138
8.6.2 Sur la forme des haut-parleurs 139

8.1 Introduction

Dans cette partie, on s'intéresse aux résultats obtenus à l'aide du modèle présenté au chapitre précédent. Le but étant de caractériser l'influence de la forme au niveau acoustique, on va s'intéresser aux réponses du système dans l'axe et hors axe, puis en fonction de l'éloignement à la source.

On se focalise sur le comportement de sources typiques : le piston plan dont la solution exacte dans le domaine fréquentiel et temporel est fournie dans la littérature [79, 116], la coque sphérique dont la solution exacte dans le domaine fréquentiel est donnée par [120], dans un troisième temps le tronc de cône dont la solution est obtenue de manière exacte dans le domaine fréquentiel par [19] puis un profil de haut-parleur classique (jonction d'un tronc de cône avec une coque sphérique). Le but de la présente démarche est de comparer les solutions exactes avec notre modèle pour en voir les limites.

Dans toute cette partie, on explore le comportement acoustique d'une source vibrant en phase (en mode de piston plan) car c'est celui qui est décrit dans toutes les références bibliographiques et qu'il permet d'illustrer simplement l'influence de la forme sur le rayonnement.

8.2 Source plane circulaire

Dans le cas d'une source circulaire plane, la fonction de profil $h(r')$ est identiquement nulle et dans ce cas, on se retrouve avec $r_i = r$, c'est-à-dire que le point d'impact $\mathbf{x_i}$ est à même hauteur que le point d'observation $\mathbf{x}$. Il en découle que $\theta_0 = 0$. Dans ce cas, on aboutit à la formulation suivante :

$$\mathcal{R}_n(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho c}{2\pi} \int_0^t \sum_p \mathcal{H}_p(\mathbf{x}, \tau) \ddot{q}_p(t - \tau) d\tau \tag{8.1}$$

avec :

$$\mathcal{H}_p(\mathbf{x}, \tau) = \int_\phi \left(\Phi_p(r')\right)_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|=c\tau} d\phi \tag{8.2}$$

où les bornes d'intégration sont détaillées en annexe C d'après (C.8). Cette formulation est exacte dans le cas d'une source plane et correspond bien à la définition obtenue dans par [79, 48, 116]. Un exemple des réponses impulsionnelles obtenues dans le cas d'une structure plane excité par un mouvement plan (mouvement de piston plan $\Phi_p(r') = 1$) est donnée figure 8.1.

On montre qu'en prenant la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles en champ lointain, on retrouve bien l'expression de l'indice de directivité $D(\theta)$ d'un piston plan défini comme la variation de pression avec l'angle d'observation θ (cf figure 8.2) :

$$D(\theta) = 2 \left| \frac{J_1(ka \ \sin\theta)}{ka \ \sin\theta} \right| \tag{8.3}$$

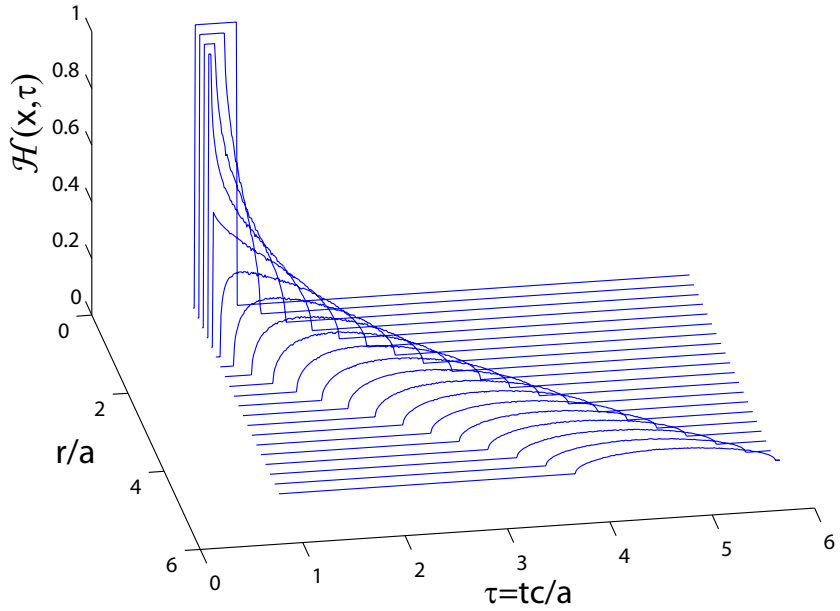


FIG. 8.1 – Réponses impulsionnelles spatiales calculées pour un piston plan. L'observateur est situé en $z = a$ et on observe les réponses $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \tau)$ pour différents écarts r par rapport à l'axe de la source.

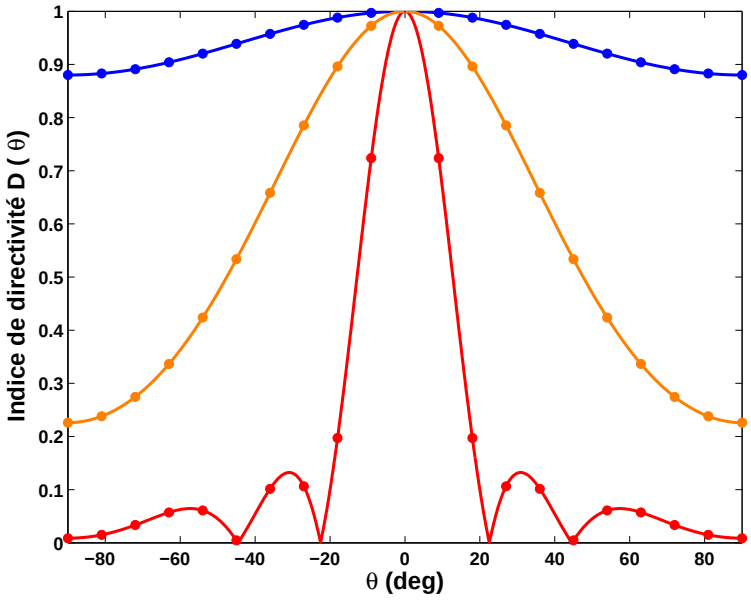


FIG. 8.2 – Comparaison des fonctions de directivité du cas piston plan obtenues de manière théorique (traits pleins) et en utilisant la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles calculées (points). On repère par θ l'angle d'observation et on observe la fonction de directivité (définie à l'équation (8.3) pour différents nombres d'ondes $ka = 1$ (bleu), $ka = 3$ (orange) et $ka = 10$ (rouge).

8.3 Coques sphériques concaves et convexes

Dans le cas d'une coque sphérique, il est plus difficile que dans le cas plan de mener les calculs analytiquement. Une formulation analytique dans le domaine temporel est disponible dans [5, 60, 83, 92] mais ces étude ne retiennent également qu'un unique terme de rayonnement dû à l'intégrale de Rayleigh. Nous allons dans cette partie comparer plutôt nos résultats avec ceux obtenus par Suzuki dans [120]. Celui-ci a en effet effectué le calcul exact dans le domaine fréquentiel (résolu par la méthode des harmoniques sphériques) du rayonnement de coques sphériques convexes et concaves. Ses résultats tiennent ainsi compte des termes de diffraction engendrés par la courbure locale et il est donc intéressant de comparer les résultats obtenus par approximation du problème à l'intégrale de Rayleigh.

Nous comparons les résultats obtenus par Suzuki à nos résultats de modélisation pour 3 coques représentées sur la figure 8.3. Ces trois coques sont définies par un rayon de courbure $R_0 = \infty$ (profil plan), $R_0 = 1.5$ et $R_0 = 1$ (coque hémisphérique). Tous les résultats sont présentés dans le domaine fréquentiel (en fonction du nombre d'onde adimensionné ka, mais il est nécessaire de préciser que les calculs de notre modèle ont été effectués dans le domaine temporel puis analysés par transformée de Fourier.

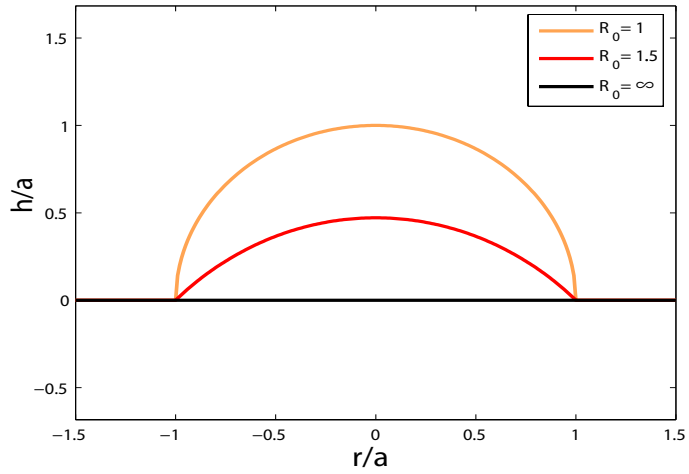


FIG. 8.3 – Différents profils sphériques étudiés afin d'illustrer les effets de la forme sur le rayonnement. Le facteur R_0 correspond au rayon de courbure de la coque ($R_0 = \infty$ correspondant à un disque plan).

8.3.1 Pression dans l'axe

Champ lointain

Afin d'illustrer les premiers effets de la forme au niveau acoustique, on s'intéresse à la réponse du système dans l'axe en champ lointain. Pour ce faire, on calcule la réponse du système pour $z >> a$ et $r = 0$. En pratique, on effectue le calcul en $z = 100a$. Les figures 8.5 et 8.6 représentent la transformée de Fourier (en valeur absolue et en phase) des réponses impulsionnelles dans l'axe en champ lointain en fonction du nombre d'onde adimensionné ka pour les différents profils convexes et concaves de la figure 8.3. Les résultats du modèles sont tracés en traits continus et la référence de Suzuki [120] par des points discrets.

Les tendances observées par les deux modèles sont identiques mais on remarque de légères différences autour de $ka = 1$. En effet, le modèle de Suzuki [120] (solution exacte du problème) prévoit une modification du niveau sonore dans l'axe entre $ka = 0.5$ et $ka = 3$ pour les coques concaves et convexes. Dans le cas d'une coque convexe, il s'agit d'une chute de pression (allant jusqu'à -6 dB dans le cas d'une coque hémisphérique) et pour une coque concave, sa modélisation prévoit une augmentation du niveau sonore (allant jusqu'à +6 dB dans le cas d'une coque hémisphérique). Ces effets localisés en fréquence autour de $ka = 1$ sont attribués aux phénomènes de diffraction (qui deviennent de plus en plus important lorsque la source possède une forte courbure) qui ne sont pas pris en compte dans notre modélisation. Au delà de $ka = 3$, ces phénomènes s'estompent et on observe alors un excellent accord entre les deux modèles. La résolution par harmoniques sphériques proposée par Suzuki est cependant limitée en fréquences (problèmes de convergences pour $ka > 10$) et il est intéressant de regarder les résultats de notre modèle en plus haute fréquence pour avoir une idée quantitative des phénomènes pour $ka >> 1$. La figure 8.7 représente les résultats de notre simulation dans le cas de coques sphériques convexes (les mêmes tendances sont observés dans le cas de coques concaves) pour des nombres d'ondes allant jusqu'à $ka = 100$.

Sur la figures 8.7, il apparaît que la forme a peu d'influence en très basses fréquences (pour $ka < 1$), mais au delà de la limite $ka = 1$, on remarque une décroissance du niveau sonore selon une pente de -20 dB/décade par rapport à la solution obtenue dans le cas du piston plan, indépendante de la profondeur du profil (donc du rayon de courbure). Cette décroissance peut être attribuée à des phénomènes d'interférences qui apparaissent dès lors que que la longueur d'onde est de l'ordre de la profondeur du profil (comme indiqué figure 8.4. En effet, on comprend que dès lors que la longueur d'onde atteint la profondeur maximale du profil, des interférences constructives et destructives vont s'opérer et c'est ce qui explique les variations rapides du niveau de pression sonore en fonction du nombre d'onde adimensionné (phénomène de filtrage en peigne). Ces phénomènes sont moins accentués dans le cas d'une coque hémisphérique.

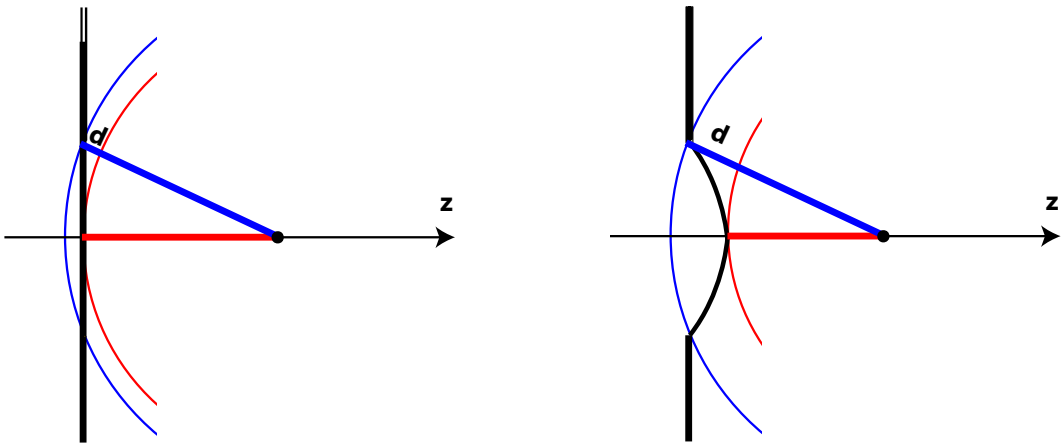


FIG. 8.4 – Mise en évidence des phénomènes d'interférence dans l'axe dus à la courbure. A gauche est représentée la différence de marche d entre le point le plus proche et le point le plus éloigné de l'observateur dans le cas d'une source plane et à droite la différence de marche dans le cas d'un profil non plan pour le même observateur. On observe bien que la courbure augmente la différence de marche d et induit ainsi des phénomènes d'interférences.

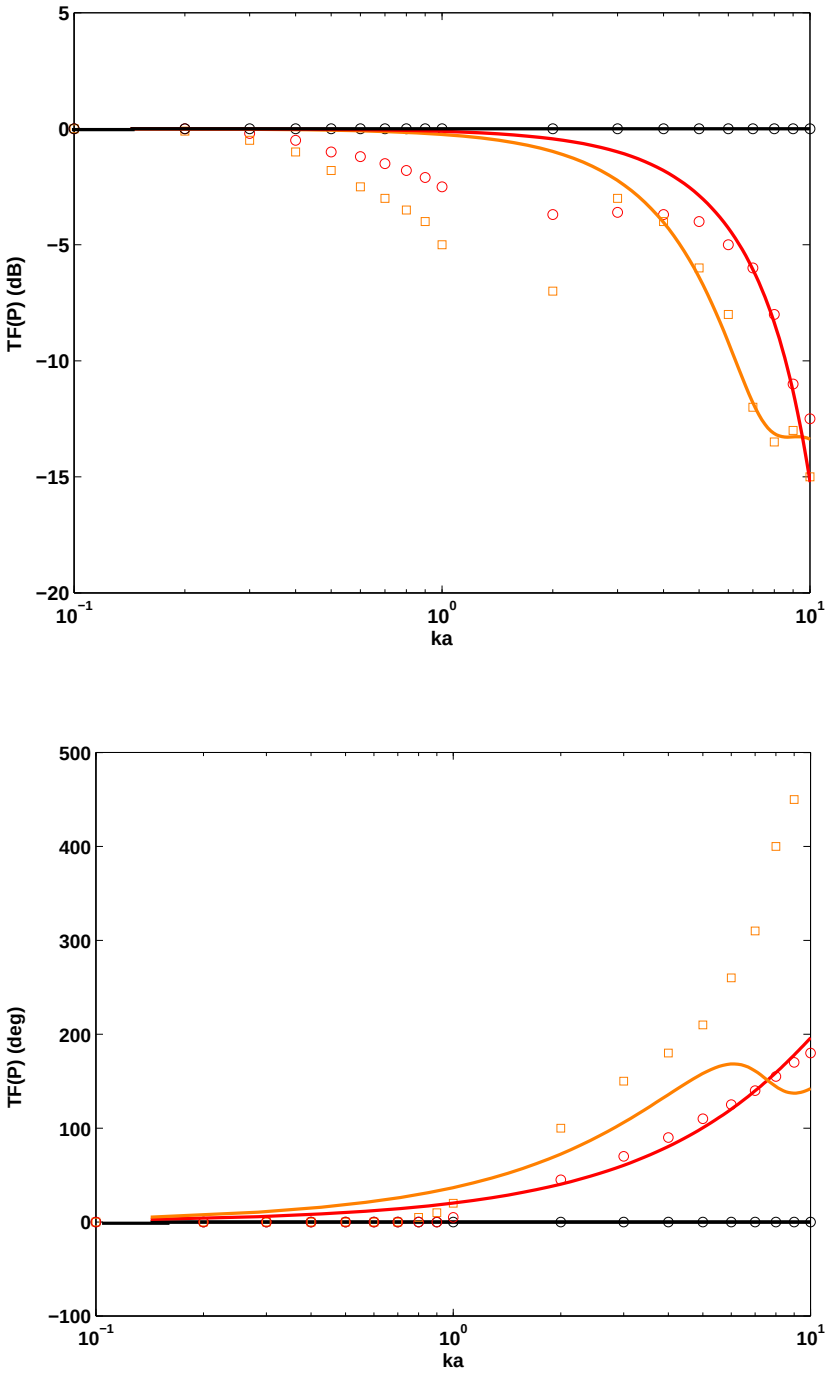


FIG. 8.5 – Module (haut) et Phase (bas) de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles en fonction du nombre d'onde adimensionné ka pour les différents profils convexes de la figure 8.3. Le point d'observation $\mathbf{x}$ est situé en $r = 0$ et $z = 100a$. Les résultats du modèle (équation (7.35)) sont représentés en traits pleins (avec le code couleur adopté figure 8.3) et les résultats de Suzuki [120] sont représentés par des points (□ et ○). Sur la courbe du haut (module de la réponse impulsionnelle), on observe une décroissance due à des phénomènes d'interférences qui apparaissent pour des longueurs d'ondes de l'ordre de la profondeur du profil considéré.

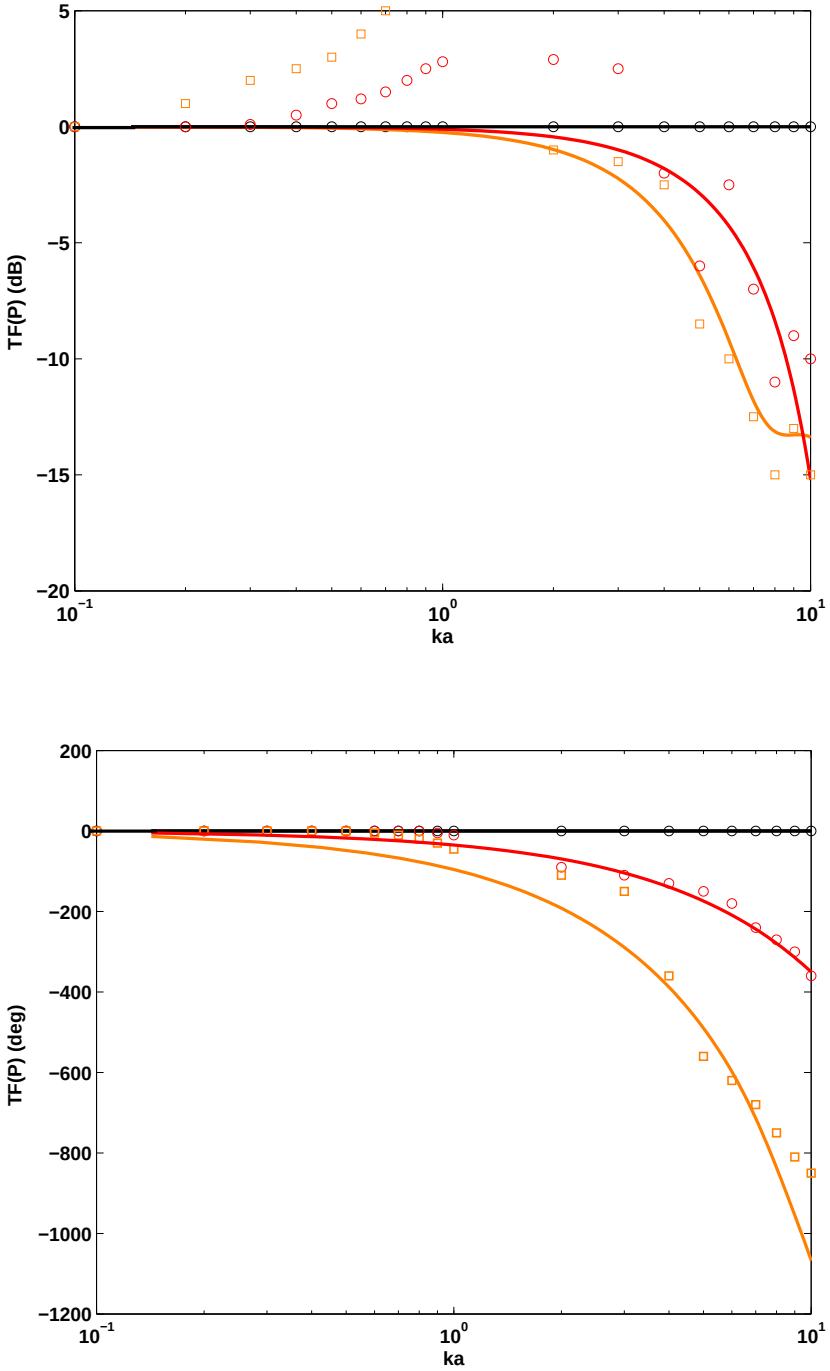


FIG. 8.6 – Module (haut) et Phase (bas) de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles en fonction du nombre d'onde adimensionné ka pour les différents profils concaves de la figure 8.3. Le point d'observation $\mathbf{x}$ est situé en $r = 0$ et $z = 100a$. Les résultats du modèle (équation (7.35)) sont représentés en traits pleins (avec le code couleur adopté figure 8.3) et les résultats de Suzuki [120] sont représentés par des points (□ et ○). Sur la courbe du haut (module de la réponse impulsionnelle), on observe une décroissance due à des phénomènes d'interférences qui apparaissent pour des longueurs d'ondes de l'ordre de la profondeur du profil considéré.

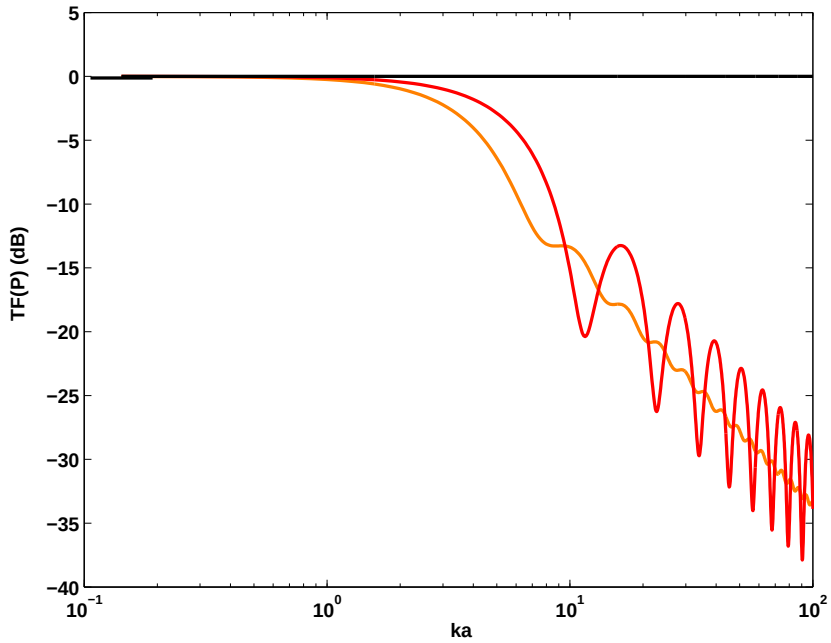


FIG. 8.7 – Module de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles en fonction du nombre d'onde adimensionné ka pour les différents profils convexes de la figure 8.3. Le point d'observation $\mathbf{x}$ est situé en $r = 0$ et $z = 100a$. Sur cette figure, seuls sont représentés les résultats obtenus par notre simulation (la méthode de Suzuki converge difficilement pour $ka > 10$). On observe une décroissance en -20 dB/décade indépendante de la profondeur du profil. Cette décroissance est attribuée aux phénomènes d'interférences qui apparaissent pour des longueurs d'ondes de l'ordre de la profondeur du profil considéré.

Champ proche

En champ proche, les mêmes phénomènes sont observables mais on s'intéresse ici à l'influence de l'éloignement à la source par rapport au profil choisi. Pour ce faire, on étudie les variations du niveau de pression sonore à différents nombres d'onde adimensionnés ka. Les figures composant 8.8 représentent l'évolution du niveau sonore (en dB) dans l'axe par rapport à l'éloignement à la source z pour $ka = 1$, $ka = 5$ et $ka = 10$.

Sur la figure 8.8, il apparaît que pour $ka = 1$ (c'est-à-dire en basses fréquences), la forme a très peu d'incidence sur l'évolution en fonction de la distance à la source : dans tous les cas, on trouve que le niveau de pression sonore décroît en $1/r$ dès $z = 6a$, ce qui correspond au rayonnement en champ lointain (approximation monopolaire du rayonnement). En revanche, les effets de la forme se font sentir pour les plus hautes fréquences (pour $ka > 5$) ; en effet, on observe trois effets principaux :

• une diminution du niveau sonore pour des structures courbées (phénomènes d'interférences décrits plus haut),

• un filtrage en peigne lui aussi dû aux interférences destructives et constructives selon la distance à la source. Ces effets sont moins marqués dans le cas de structures très courbées.

• un phénomène de transition vers le champ lointain : on se ramène à une décroissance en $1/r$ d'autant plus tôt que la profondeur du profil est importante. Ainsi sur la figure 8.8 à $ka = 10$, la décroissance en $1/r$ apparaît dès $z = 6a$ pour la coque hémisphérique alors qu'elle ne se produit qu'à partir de $z = 10a$ dans le cas d'un piston plan.

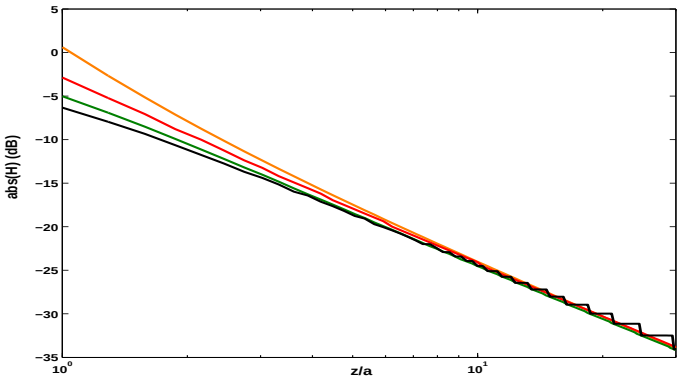
8.3.2 Pression hors axe

Comme souligné précédemment, au niveau acoustique, la forme modifie le rayonnement dans l'axe en champ lointain dès lors que la longueur d'onde avoisine la profondeur de la structure. Cela dit, l'énergie fournie au système n'est pas perdue mais juste répartie de manière différente dans l'espace. En effet, dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'influence de la forme sur la directivité de la source, toujours sous l'hypothèse d'un mouvement plan.

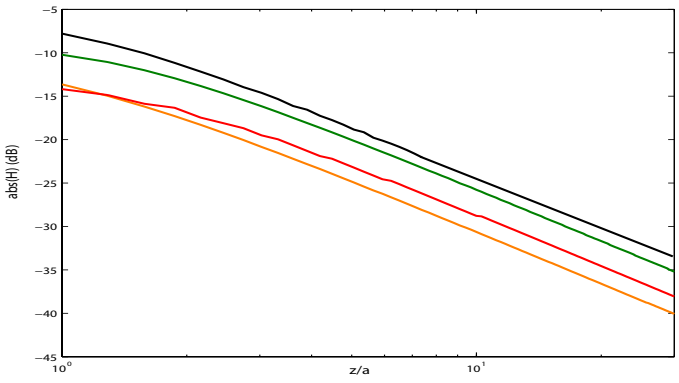
Les figures 8.9 et 8.10 représentent les figures de directivité (pression en échelle linéaire) obtenues en champ lointain ($z = 100\ a$) pour les 3 profils (convexes et concaves) considérés pour différentes valeurs du nombre d'onde adimensionné $ka = 1$, $ka = 3$ et $ka = 10$. Tous les résultats sont adimensionnés par rapport à la valeur de la pression dans l'axe et comparés aux résultats obtenus par Suzuki [120].

On observe qu'en basses fréquences (pour $ka = 1$), le profil affecte très peu le rayonnement hors-axe (comme pour la réponse dans l'axe). Le rayonnement est monopolaire, et ce indépendamment de la courbure. En revanche pour les hautes fréquences, on observe que la forme a un impact notoire sur la directivité de la source : alors que la source plane (en noir) devient très directive à partir de $ka = 3$, l'ajout d'une courbure locale permet d'élargir la directivité et de rayonner dans un angle solide plus important. Par exemple à $ka = 10$, si l'on regarde à 45 ° de l'axe, la source hémisphérique présente un affaiblissement de l'ordre de 10dB par rapport à la réponse dans l'axe alors que la source plane présente un affaiblissement de l'ordre de 40dB. De plus, il est à noter que la source convexe apparaît être moins directive que la source concave.

a) $ka = 1$



b) $ka = 3$



c) $ka = 10$

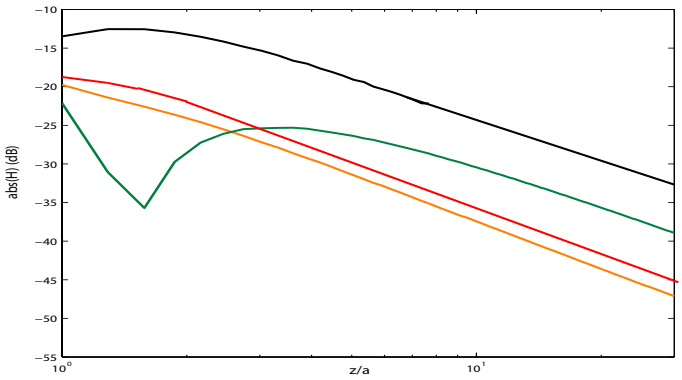
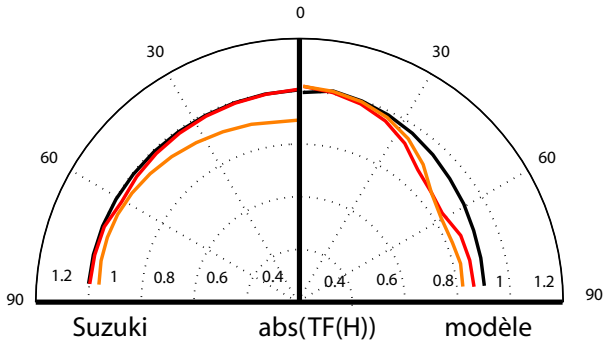
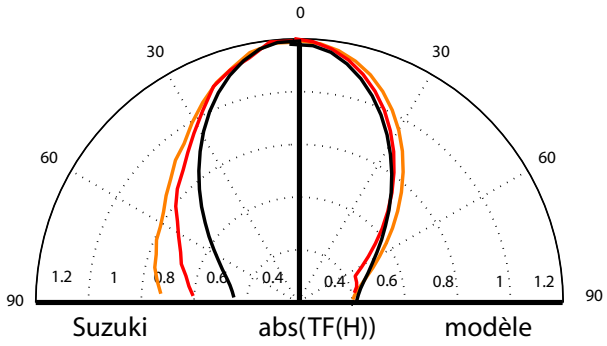


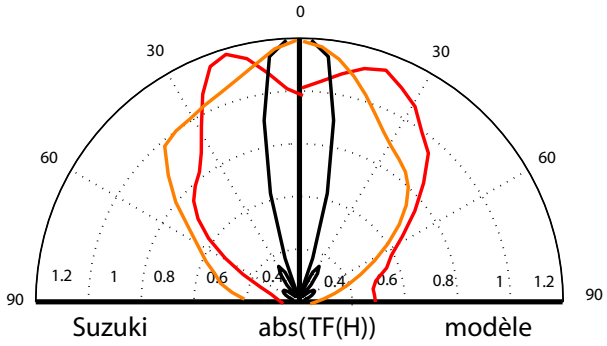
FIG. 8.8 – Evolution de la pression sonore dans l'axe (en dB) en fonction de l'éloignement à la source z/a pour les 3 profils considérés en fonction du nombre d'onde : $ka = 1$ (haut), $ka = 3$ (milieu) et $ka = 10$ (bas). Ces fonctions sont définies comme le module de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles. On observe que la forme a peu d'influence pour les bas nombres d'ondes ($ka < 1$) et qu'elle permet d'éviter les phénomènes de champ proche (variation rapide du niveau de pression avec la distance à la source) pour les grand nombres d'onde ($ka > 10$).



a) $ka = 1$

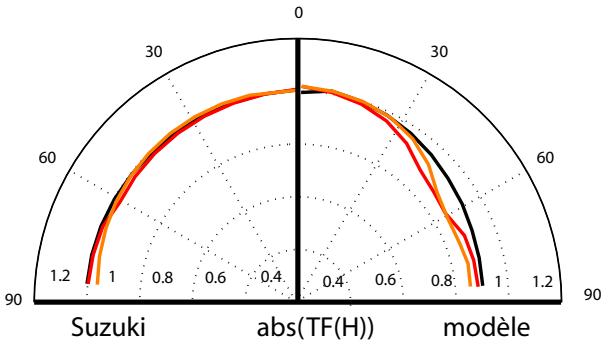


b) $ka = 3$

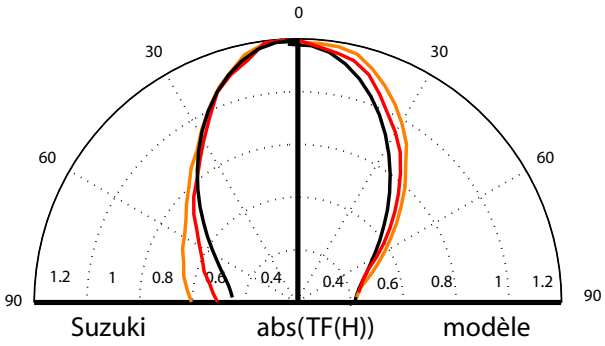


c) $ka = 10$

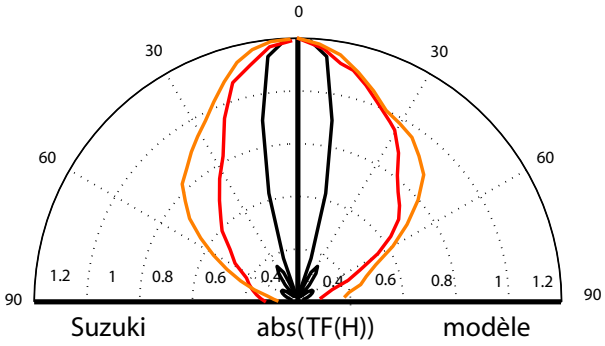
FIG. 8.9 – Fonctions de directivité en échelle linéaire pour les 3 profils convexes considérés en fonction du nombre d'onde : $ka = 1$ (haut), $ka = 3$ (milieu) et $ka = 10$ (bas). Ces fonctions sont définies comme le module de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles adimensionnées par la valeur maximale. Les données de gauche correspondent aux résultats de Suzuki [120] et celles de droite ceux du modèle présente (equation (7.35)). On observe que la forme a peu d'influence pour les bas nombres d'ondes ($ka < 1$) et qu'elle permet d'étendre la directivité en champ lointain pour les grands nombres d'onde ($ka > 3$).



a) $ka = 1$



b) $ka = 3$



c) $ka = 10$

FIG. 8.10 – Fonctions de directivité en échelle linéaire pour les 3 profils concaves considérés en fonction du nombre d'onde : $ka = 1$ (haut), $ka = 3$ (milieu) et $ka = 10$ (bas). Ces fonctions sont définies comme le module de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles adimensionnées par la valeur maximale. Les données de gauche correspondent aux résultats de Suzuki [120] et celles de droite ceux du modèle présente (equation (7.35)). On observe que la forme a peu d'influence pour les bas nombres d'ondes ($ka < 1$) et qu'elle permet d'étendre la directivité en champ lointain pour les grands nombres d'onde ($ka > 3$).

8.4 Sources coniques, concaves et convexes

Dans le cas de sources coniques, la littérature est bien moins fournie que dans le cas de coques sphériques. Cependant dans le domaine fréquentiel, on peut citer les travaux de Bruneau [19] et de Brown [17] qui proposent une modélisation exacte du champ de pression sonore généré par un tronc de cône. Les résultats présentés dans l'étude de Bruneau concernent la pression dans l'axe et hors axe en champ proche (de $z/a = 0.1$ jusqu'à $z/a = 10$) et une excellente concordance avec l'expérience a pu être réalisée en basses fréquences jusqu'à $ka = 3$ (les résultats en plus haute fréquence n'étaient plus valables du fait d'un comportement vibratoire non plan de la structure). Cependant, aucune figure de directivité n'y était présentée. Nous allons ainsi présenter les résultats de notre modèle obtenus dans le cas de profils coniques concaves et convexes dont la géométrie est présentée figure 8.11.

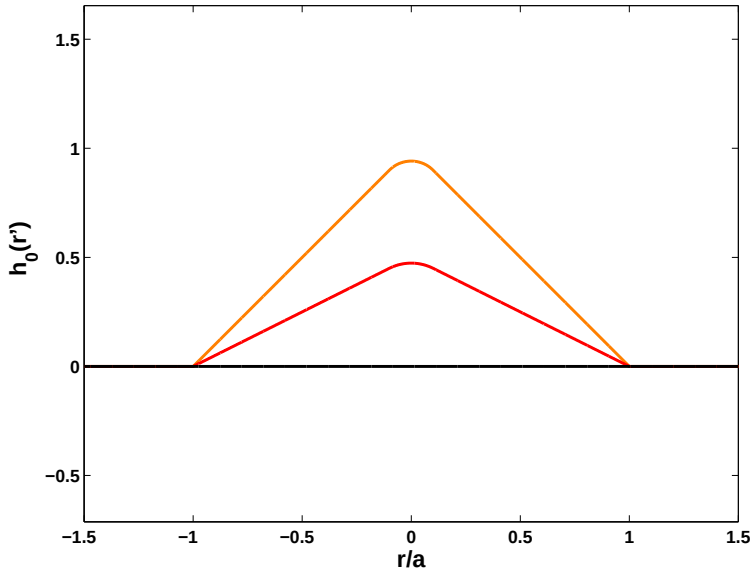


FIG. 8.11 – Représentation des 2 profils coniques considérés. Afin de s'affranchir des phénomènes de diffractions dus à la pointe du cone, on a rajouté artificiellement une coque sphérique à l'apex du cône (pour $r < 0.1a$).

Sur cette figure, il apparaît que la pointe du cône n'est pas représentée car elle représente un point anguleux, siège de diffraction. Afin d'éviter ce problème, on adjoint au tronc de cône une coque sphérique dont le rayonnement est faible comparé à la source totale.

8.4.1 Pression dans l'axe

La figure 8.12 représente les réponses obtenues par notre modèle dans le cas des coques coniques convexes de la figure 8.11 en champ lointain (en $z = 100a$). Comme pour le cas des coques sphériques, on observe des phénomènes d'interférences en hautes fréquences qui ont pour conséquence un filtrage en -20 dB/décade. Cependant, le phénomène de filtrage en "peigne" observé dans le cas des coques sphériques (cf figure 8.7) est atténue dans le cas des coques coniques. Des résultats similaires (non présentés ici) sont obtenus dans le cas de sources concaves, à ceci près que la phase est une fonction décroissante du nombre d'onde ka.

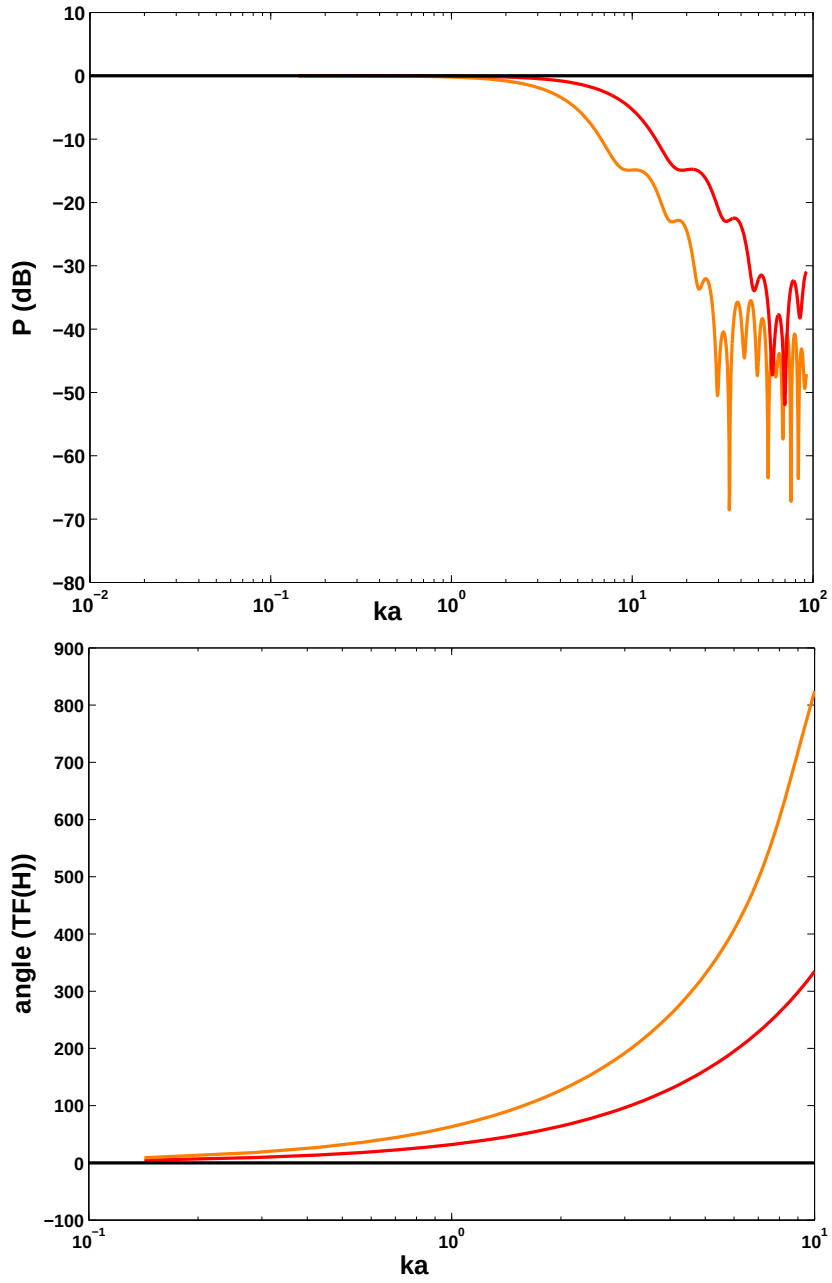
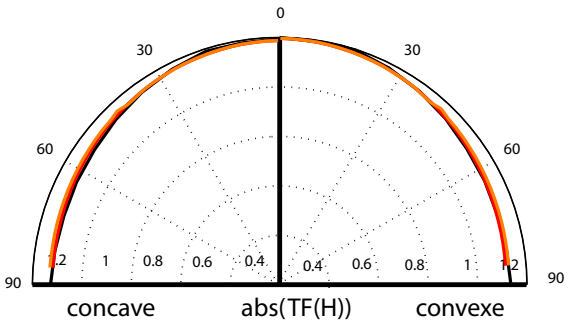


FIG. 8.12 – Module (haut) et Phase (bas) de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles en fonction du nombre d'onde adimensionné ka pour les différents profils coniques convexes de la figure 8.11. Le point d'observation $\mathbf{x}$ est situé en $r = 0$ et $z = 100a$. Sur la courbe du haut (module de la réponse impulsionnelle), on observe une décroissance en -20 dB/décade indépendante de la profondeur du profil. Cette décroissance est attribuée aux phénomènes d'interférences qui apparaissent pour des longueurs d'ondes de l'ordre de la profondeur du profil considéré.

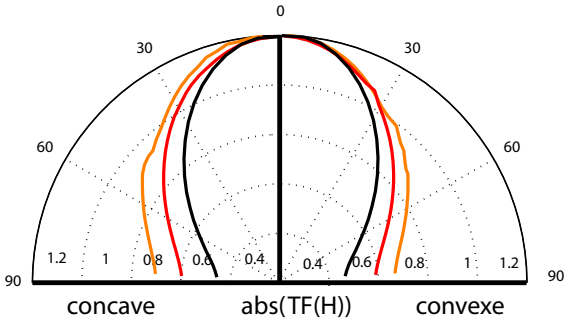
8.4.2 Pression hors axe

Il reste à présent à déterminer les fonctions de directivité associées à chaque profil. Celles-ci sont représentées figure 8.13 pour des coques coniques concaves et convexes. On remarque qu'il y a très peu de différences de directivité entre les coques coniques convexes et concaves. Le diagramme de directivité en hautes fréquences ($ka = 10$) fait apparaître des lobes secondaires (dont l'angle est indépendant de la concavité de la source) correspondant à l'angle d'ouverture du cône, caractéristiques du rayonnement des sources coniques [85].

a) $ka = 1$



b) $ka = 3$



c) $ka = 10$

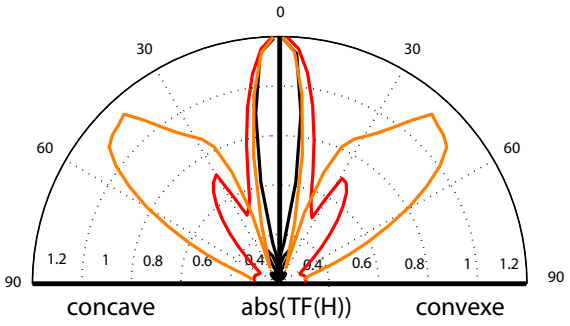


FIG. 8.13 – Fonctions de directivité en échelle linéaire pour les 3 profils coniques concaves (gauche) et convexes (droite) considérés en fonction du nombre d'onde : $ka = 1$ (haut), $ka = 3$ (milieu) et $ka = 10$ (bas). Ces fonctions sont définies comme le module de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles adimensionnées par la valeur maximale. On observe que la forme a peu d'influence pour les bas nombres d'ondes ($ka < 1$) et qu'elle permet d'étendre la directivité (indépendamment de la concavité) en champ lointain pour les grands nombres d'onde ($ka > 3$).

8.5 Sources de forme complexe de type haut-parleur

8.5.1 Formulation dans le cas de profils non monotones

Dans le cas de sources de forme complexes (non monotones), notre méthode doit être adaptée afin de pouvoir calculer le champ émis. En effet, la formulation de l'équation (7.35) n'a de validité que dans le cas d'un profil monotone. Afin de modéliser le rayonnement de sources de forme plus complexe (un haut-parleur par exemple), il est nécessaire de superposer (au niveau temporel) le rayonnement induit par chaque portion monotone. L'hypothèse sous-jacente est que les réflexions multiples de la source sur elle-même sont négligées. Un exemple de la démarche dans le cas d'un haut-parleur classique (tronc de cone droit joint à une coque sphérique) est présenté figure 8.14.

Dans ce cas, on calcule la réponse impulsionnelle associé à chaque sous-structure de profil monotone, puis on les additionne en tenant compte du retard induit par la translation du profil sphérique. Un exemple de la construction de la réponse impulsionnelle dans l'axe dans le cas de la structure de la figure 8.14 est présenté figure 8.15.

8.5.2 Résultats pour une géométrie de type haut-parleur

Pression dans l'axe

La figure 8.16 représente la réponse dans l'axe (transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle dans l'axe) obtenue dans le cas de la géométrie représentée figure 8.14. La réponse est comparée à celle obtenue dans le cas d'une coque hémisphérique (rouge) et d'un tronc de cône d'angle d'ouverture de 45° (orange). On observe comme précédemment des phénomènes d'interférences responsables d'une décroissance du niveau sonore pour $ka > 5$, mais ceux-ci sont d'un effet moindre comparativement à une source monotone de même profondeur (traits pointillés de la figure 8.16).

Pression hors axe

La figure 8.17 représente les fonctions de directivité associées au profil de haut-parleur considéré et au tronc de cône concave de même profondeur. On remarque que la directivité d'une structure de type haut-parleur est assez similaire à la fonction de directivité d'un cône concave jusqu'à $ka = 3$, mais qu'elle est plus réduite en plus hautes fréquences (pour $ka = 10$).

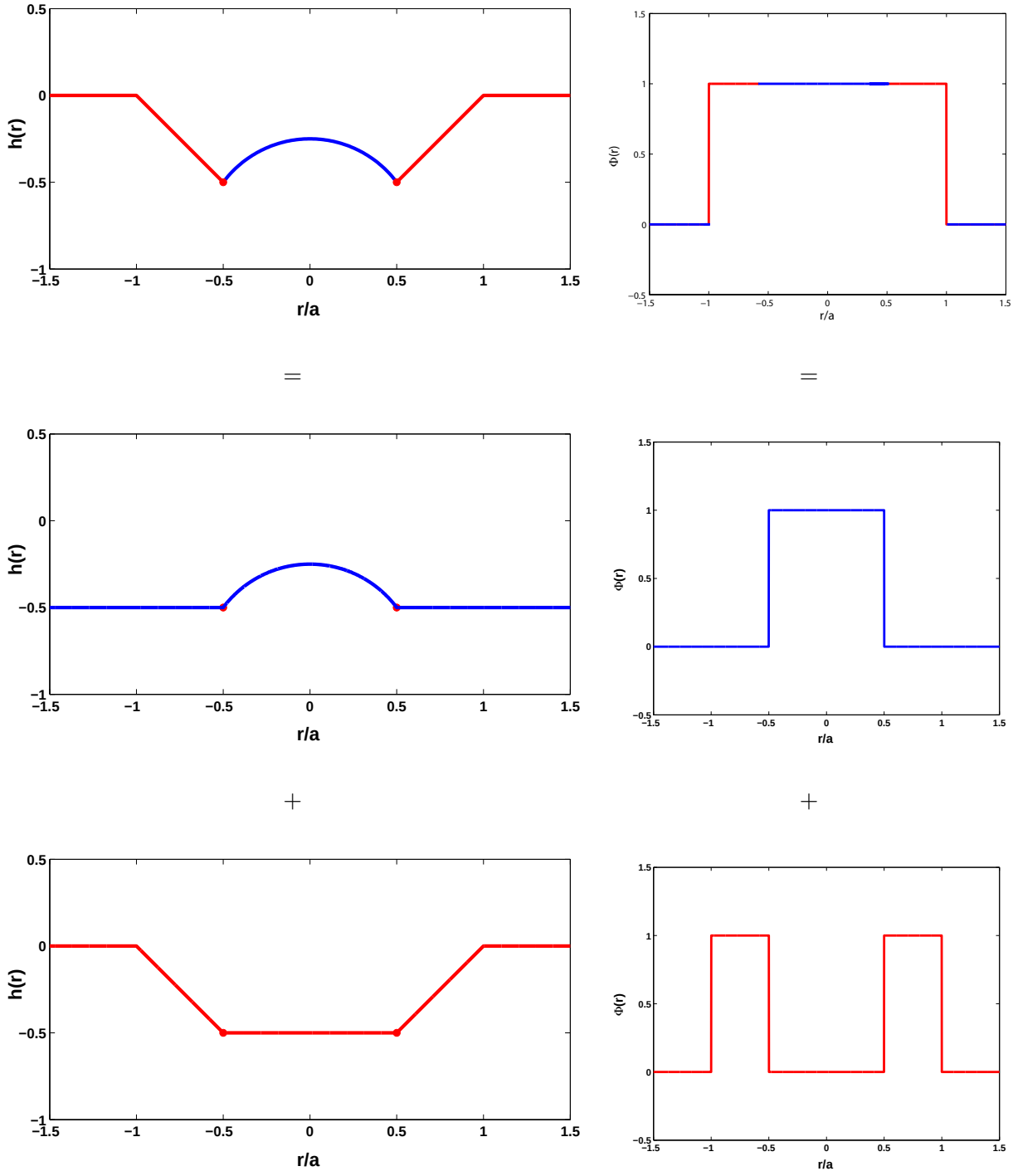


FIG. 8.14 – Démarche de calcul pour déterminer le rayonnement d'un haut-parleur classique, vu comme l'association d'un tronc de cône avec une coque sphérique. A gauche sont représentés les profils $h_0(r')$ des différentes sous-parties utilisées pour le calcul et à droite sont représentées les déformées modales $\Phi(r')$ associées.

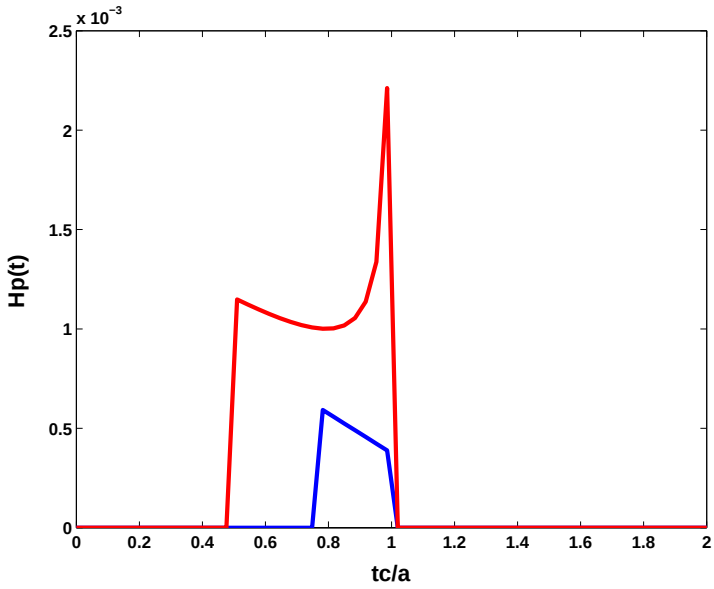


FIG. 8.15 – Construction de la réponse impulsionnelle d'une structure complexe : on calcule d'abord la réponse impulsionnelle du tronc de cone (rouge), puis celle de la coque sphérique (bleu) et la réponse totale est obtenue comme la somme des deux réponses impulsionnelles. Les différentes réponses impulsionnelles sont calculées dans l'axe (en $r = 0$) pour un observateur situé en $z = 100a$.

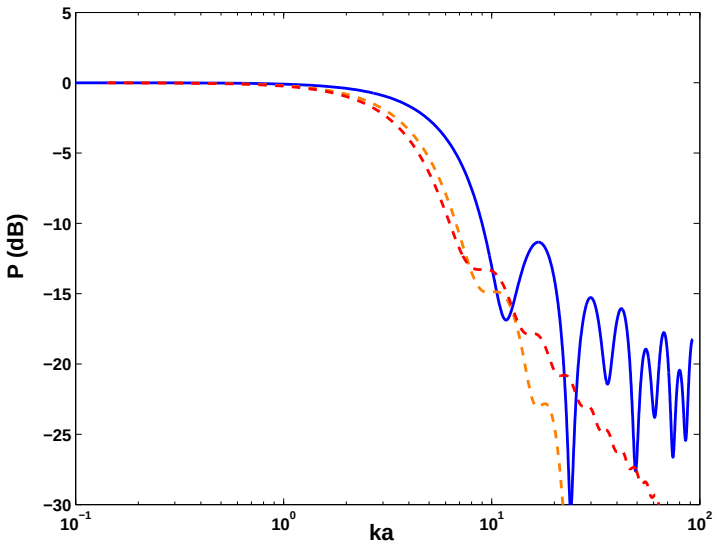
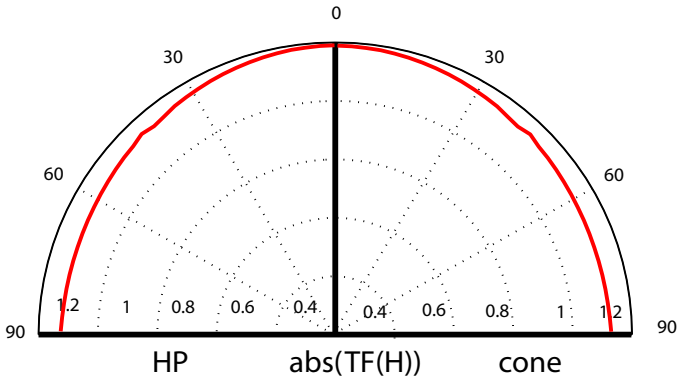
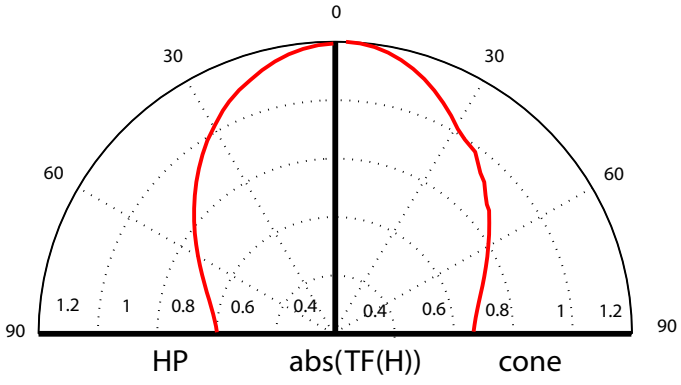


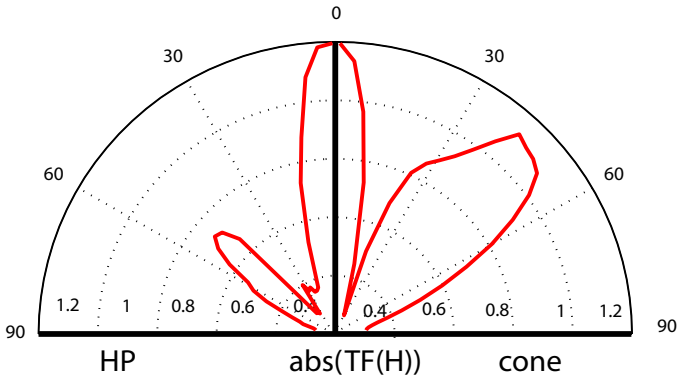
FIG. 8.16 – Pression dans l'axe (en dB) en champ lointain ($z = 100a$) obtenue dans le cas d'une géométrie de type haut-parleur. La réponse du système (bleu) est comparée à celle obtenue dans le cas d'une coque hémisphérique (rouge) et d'un tronc de cône (orange). Les phénomènes d'interférences donnent une fois de plus naissance à une décroissance du niveau sonore pour $ka > 3$.



a) $ka = 1$



b) $ka = 3$



c) $ka = 10$

FIG. 8.17 – Fonctions de directivité en échelle linéaire pour le profil de haut-parleur étudié (gauche) et dans le cas d'un cône concave de même profondeur (droite) en fonction du nombre d'onde : $ka = 1$ (haut), $ka = 3$ (milieu) et $ka = 10$ (bas). Ces fonctions sont définies comme le module de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles adimensionnées par la valeur maximale. On observe que le rayonnement d'une structure de type haut-parleur est assez similaire au rayonnement d'un tronc de cône excepté pour les grands nombres d'ondes $ka = 10$ pour lesquels la directivité du cône est plus étendue.

8.6 Conclusion

8.6.1 Rayonnement transitoire de structures circulaires de forme quelconque

Dans cette partie, on s'est intéressé aux résultats de notre modèle de rayonnement de sources de révolution encastrées. Les résultats sont présentés dans le cas de coques sphériques convexes et concaves, de troncs de cône et de structures de type haut-parleurs (jonction d'un tronc de cône avec une calotte sphérique). Les résultats ont été comparés à ceux obtenus de manière exacte dans le domaine fréquentiel par Suzuki [120] pour des calottes sphériques. Les résultats font apparaître les différents effets de la courbure sur le rayonnement :

• la courbure induit des phénomènes d'interférences qui apparaissent dès que la longueur d'onde atteint la profondeur du profil et qui sont responsables d'une chute de pression dans l'axe (filtre en -20 dB/décade pour les coques sphériques et coniques) et d'un filtrage en peigne plus ou moins accentué selon le profil et la profondeur du profil.

• la courbure est également responsable de phénomènes de diffraction qui provoquent une augmentation du niveau sonore (jusqu'à 6 dB) dans l'axe pour une structure convexe (ou une diminution dans le cas d'une structure concave). Ces phénomènes se produisent pour des nombres d'onde compris entre $ka = 1$ et $ka = 3$ et ne sont pas pris en compte dans notre modèle.

• enfin, la courbure permet d'étendre la directivité de la source, et ce dès le nombre d'onde $ka = 3$. Cela signifie que l'énergie perdue dans l'axe par interférence est en fait redistribuée hors axe.

	Strucure plane	Structure convexe	Structure concave
Pression dans l'axe	$++$	$--$	$-$
Directivité en hautes fréquences	$--$	$++$	$+$

TAB. 8.1 – Influence de la forme sur le comportement acoustique dans les cas plans, convexes et concaves. Pour chaque configuration géométrique, on évalue de manière subjective (sur une échelle arbitraire allant de ++ à - -) le comportement en fonction de la forme du transducteur.

8.6.2 Sur la forme des haut-parleurs

Les critères de choix de la forme d'un transducteur dépendent de son utilisation. En effet, deux cas très différents s'opposent et doivent être soulignés :

• Dans le cas d'une écoute très localisée en espace (point d'écoute fixe) tel qu'en studio ou pour une écoute au casque, le transducteur recherché doit permettre de retranscrire le plus fidèlement possible dans son axe. Aussi, au vu de ce chapitre, la configuration plane est préférable (pas d'interférence ni de diffraction dans l'axe et réponse plate en champ lointain).

• Dans le cas d'une écoute non localisée en espace (grande zone d'écoute) tel qu'en situation de diffusion en large espace, on souhaite que le champ de pression soit assez uniforme sur une grande zone d'écoute. Aussi, la configuration sphérique (ou de manière générale courbée) est préférable. Ensuite, le choix de la courbure de la source relève d'un compromis entre directivité et fidélité de la réponse dans l'axe.

En ce qui concerne les haut-parleurs traditionnels, le choix de la forme s'est porté historiquement sur l'assemblage d'un tronc de cône avec une calotte sphérique. Cette forme a avant tout été choisie pour des considérantions pratiques et matérielles. En effet, les premiers prototypes de haut-parleur possédaient des membranes en carton très souples et le moyen le plus pratique de rigidifier la structure était d'imposer une courbure locale (tronc de cône). Par la suite, une calotte sphérique a été ajoutée afin de protéger le moteur mais surtout afin d'éviter tout court circuit entre les faces avant et arrière du transducteur.

Ainsi, la forme complexe des haut-parleurs modernes n'a pas (ou quasiment pas) été conçue pour ses propriétés acoustiques mais sur des considérations matérielles. Les progrès récents réalisés dans le domaine des matériaux (alliages et autres polymères) et des procédés de fabrication ont permis la réalisation de structures toujours plus fines et rigides, de telle sorte que la forme n'est plus le seul recours afin d'obtenir une structure qui se déforme peu dans la gamme audible. C'est pourquoi, on voit apparaître aujourd'hui des haut-parleurs dont la structure mécanique est différente (haut-parleurs sphériques de forme concave ou convexe) et dont les propriétés acoustiques sont mieux maîtrisées.

Quatrième partie

Analyse expérimentale

Dans cette partie, on se propose de valider les résultats mécaniques et acoustiques déterminées de manière théorique et numérique dans les chapitres précédents. On s'intéresse notamment à l'effet de la forme et du matériau au niveau mécanique et acoustique pour différentes configurations matérielles et géométriques. Ce travail expérimental a été réalisé sur un prototype de haut-parleur sans suspension développé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) par Guy Lemarquand.

Du fait de la construction du moteur, les non-linéarités classiques (non-linéarités électriques et non-linéarités de suspension) existant au sein des haut-parleurs traditionnels peuvent être éliminées et ainsi, seules les non-linéarités géométriques demeurent. Étant donné que note modèle inclut ce type de non-linéarités, nous comparons les mesures vibratoires et acoustiques aux prédictions de notre modèle.

Chapitre 9

Analyse expérimentale : influence de la forme et du matériau

Sommaire

9.1 Présentation des prototypes étudiés 146
9.1.1 Principe de fonctionnement et avantages 147
9.1.2 Profils étudiés 147
9.1.3 Protocole expérimental et matériel utilisé 148
9.2 Mesures et modéle en régime linéaire 149
9.2.1 Etude mécanique 151
9.2.2 Etude acoustique 152
Pression dans l'axe en champ lointain 153
Pression dans l'axe en champ proche 154
Comparaison entre théorie et expérience 154
Directivité en champ lointain 156
9.3 Mesures et modéle en régime de grande amplitude 157
9.4 Conclusion 158

9.1 Présentation des prototypes étudiés

Le dispositif expérimental utilisé est celui développé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) par Guy Lemarquand [30, 71]. Il s'agit d'un haut-parleur de 55 mm de diamètre sans suspension (donc composé d'un unique matériau) dont la partie mobile est amovible (on peut ainsi aisément changer la partie mobile, tant au niveau de la forme que du matériau). Un schéma du dispositif est présenté figure 9.1 et des photos du prototype et des profils étudiés sont visibles sur les figures 9.2 et 9.3.

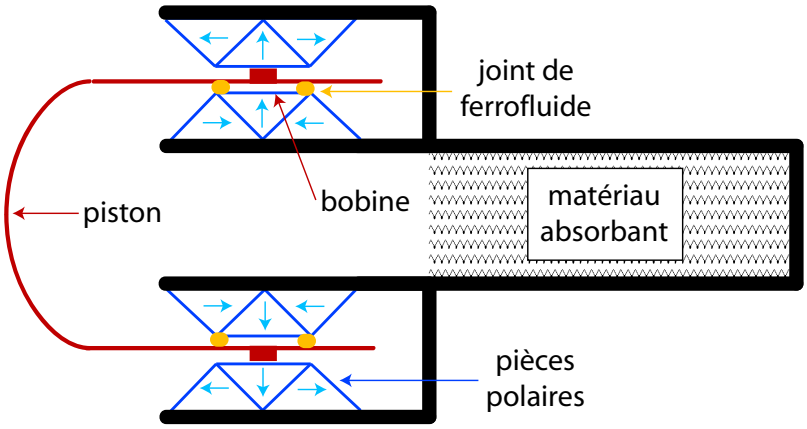


FIG. 9.1 – Schéma descriptif du prototype développé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) par Guy Lemarquand. Le profil central (ici une coque sphérique convexe) peut être changé afin d'étudier l'influence de la forme et du matériau.

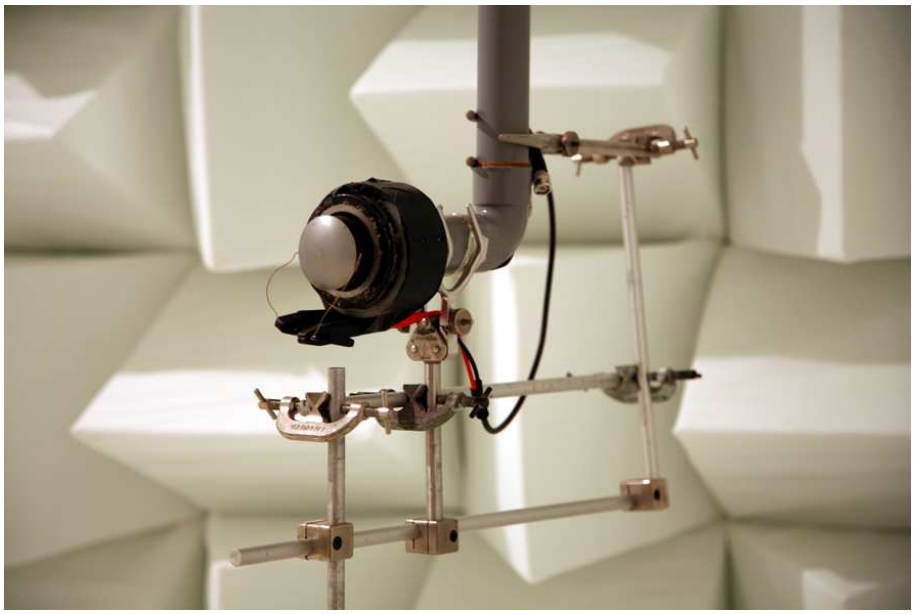


FIG. 9.2 – Photo en chambre anéchoïque du prototype développé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) par Guy Lemarquand. Le profil central (ici une coque sphérique convexe) peut être changé afin d'étudier l'influence de la forme et du matériau.

9.1.1 Principe de fonctionnement et avantages

Ce prototype offre l'avantage de ne pas posséder de suspension externe, le guidage étant assuré par les joints de ferrofluide (cf figure 9.1). Cette particularité supprime totalement les non-linéarités induites par la suspension (non-linéarités matérielles et géométriques pour les premiers modes de vibration) ainsi que les nombreux modes de vibration de la structure externe. Ainsi, ce dispositif permet d'obtenir un mouvement de type piston plan (cette fois on a bien un déplacement de corps rigide pour la partie mobile) pour des fréquences allant jusqu'à la première fréquence de résonance de la partie mobile (en pratique jusqu'à 10 kHz environ).

Dans ce cas, la force de rappel est assurée par la charge acoustique située à l'arrière de la partie mobile (tube de PVC d'un mètre de long rempli de matériau absorbant). Le fait de remplir la cavité arrière de matériau absorbant diminue grandement la force de rappel mais celle ci n'est néanmoins pas nulle et se caractérise par une résonance basses fréquences très amortie (aux alentours de 500 Hz).

Le moteur de ce prototype est réalisé par l'assemblage de 3 pièces polaires en néodyme-ferbore ($Nd_2Fe_{14}B$) circulaires à section triangulaire (cf figure 9.1) permettant d'éviter les fuites magnétiques (par fermeture des lignes de courant). La structure du moteur est également réalisée sans fer, ce qui permet d'éliminer de manière très efficace les imperfections de la partie électrique : en effet, du fait de l'utilisation d'un moteur sans fer, l'inductance propre de la bobine reste constante même pour des fortes excursions, ce qui permet d'éviter les force de réluctance et les courants de Foucault (se référer au chapitre 4 pour plus de précisions sur les défauts des moteurs de haut-parleur).

9.1.2 Profils étudiés

La suppression de la suspension en élastomère permet de changer aisément l'équipage mobile. A cet effet, de nombreuses réalisations ont été effectuées, et des exemples d'équipages mobiles sont présentés sur la figure 9.3. Toutes les réalisations possèdent le même diamètre extérieur de 55 mm. Parmi les prototypes étudiés on s'intéresse dans cette partie aux 5 profils suivants :

- profil plan en aluminium de 100 μm d'épaisseur,
- profil plan en balsa de 1 mm d'épaisseur,
- profil sphérique convexe en aluminium de 150 μm d'épaisseur et de profondeur 8.6 mm ,
- profil sphérique concave en aluminium de 150 μm d'épaisseur et de profondeur 8.6 mm,
- profil sphérique concave en kevlar de 150 μm d'épaisseur et de profondeur 8.6 mm,



FIG. 9.3 – Photo de trois équipages mobiles différents. De gauche à droite : profil plan en balsa, profil concave en aluminium et profil concave en carton.

9.1.3 Protocole expérimental et matériel utilisé

Dans l'optique de caractériser le prototype présenté, la démarche suit celle exprimée au chapitre 5. Trois étapes sont ainsi nécessaires afin d'évaluer le champ de pression en régime linéaire et non linéaire : détermination des constantes électriques, puis des caractéristiques modales en régime linéaire, et enfin des caractéristiques non linéaires électriques (cf chapitre 5) et mécaniques (cf annexe B).

Le tableau 9.1 résume le matériel utilisé lors des expérimentations. Les spectres dans le domaine linéaire ont été obtenus en moyennant la réponse à un bruit blanc. En pratique, 200 mesures ont été moyennées afin d'obtenir les réponses présentées. Afin de caractériser la réponse du système en régime de grandes amplitudes, les mesures ont cette fois été réalisées sur des signaux monofréquentiels et pour chaque fréquence d'excitation on mesure la réponse du système (les différents harmoniques en sortie) par transformée de Fourier du signal de sortie.

Type	Marque	Modèle
Carte d'acquisition	Brüel & Kjaer	3560C
Générateur de bruit blanc	Brüel & Kjaer	1405
Générateur de sinus	Brüel & Kjaer	1051
Amplificateur	Brüel & Kjaer	2706
Vibromètre Laser	Polytech	PSV-400
Microphone 1/4" free-field	Brüel & Kjaer	4939
Préamplificateur	Brüel & Kjaer	2670
Table tournante	Brüel & Kjaer	9640
Logiciel d'analyse	Brüel & Kjaer	Pulse 11

TAB. 9.1 – Définition du matériel utilisé pour les mesures électriques, mécaniques et acoustiques.

9.2 Mesures et modéle en régime linéaire

De la même manière qu'au chapitre 5, on va tout d'abord évaluer le comportement basses fréquences des prototypes afin d'en extraire les paramètres de Thiele et Small. Ceci est réalisé par estimation des 6 paramètres à l'aide de la technique des moindres carrés (cf chapitre 5 pour plus de détails). La partie électrique ainsi que la cavité arrière étant identiques pour tous les équipages mobiles, ces paramètres sont évalués une seule fois et sont valables pour tous les prototypes.

Les figures 9.4 représentent les courbes d'impédance obtenues dans le cas d'un profil sphérique convexe en aluminium. On remarque bien en basses fréquences le caractère résistif et le caractère inductif à partir de 2 kHz. Ce caractère inductif n'est pas soumis à des courants de Foucault comme c'est le cas pour des haut-parleurs classiques [69] car le moteur ne possède aucun élément en fer. Cela se traduit par une inductance indépendante de la fréquence (pas de rupture de pente dans la partie inductive de l'impédance électrique). Les différentes résonances observées correspondent à 2 phénomènes bien distincts :

• pour $f < 8$ kHz, les résonances sont dues à des ondes stationnaires qui se développent dans la cavité arrière. Celle-ci étant rembourrée de laine de roche, ces résonances sont très amorties,

• pour $f > 8$ kHz, les résonances sont attribuées à l'apparition de modes de vibration dans la partie mécanique. Expérimentalement, seuls les modes axisymétriques ont été observés. Ces résonances sont fortement accrues et dépendent de l'équipage mobile considéré.

On extrait ainsi les paramètres de Thiele et Small en régime de faible amplitude associés au premier mode de vibration (mode de cavité) :

• paramètres électriques ($Re = 4.6\ \Omega$: résistance électrique, $L = 210\ \mu$H : inductance de la bobine et $Bl = 4.65$ N/A : facteur de force),

• paramètres mécaniques ($K_m = 5.4$ N/m : raideur mécanique associée au premier mode de cavité, $M_m = 5.1$ g : masse de la partie mobile et $R_m = 5.6$ kg/s : résistance mécanique associée au premier mode de cavité).

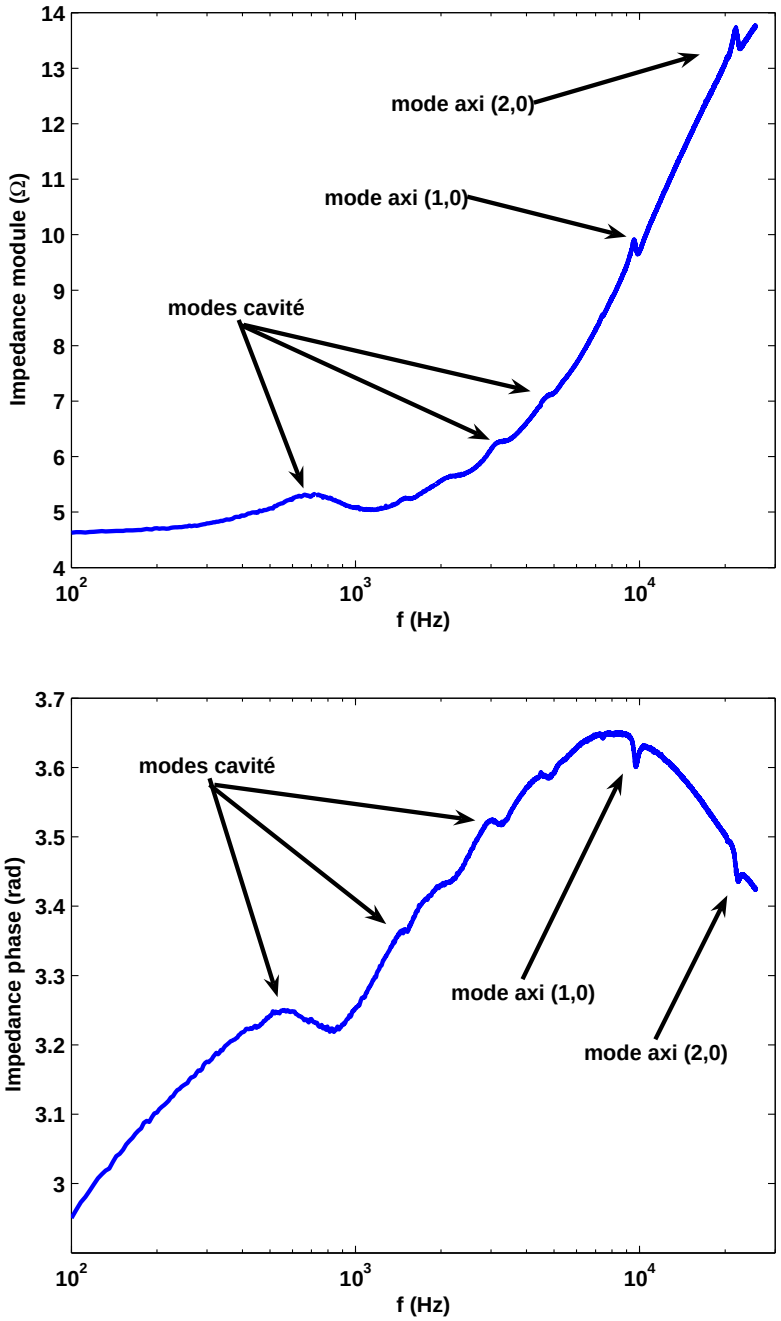


FIG. 9.4 – Mesures de l'impédance d'entrée (module (haut) et phase (bas)) du prototype avec profil convexe en aluminium. Les courbes d'impédance sont affectées par les résonances acoustiques (cavité montée à l'arrière du HP) et les résonances mécaniques de l'équipage mobile (modes axisymétriques).

9.2.1 Etude mécanique

Comme précédemment, on procède à une analyse modale, via le logiciel IDEAS©, de la structure en régime de faible amplitude sur la bande passante audible, à savoir jusqu'à 20 kHz. Les résultats obtenus dans le cas des différentes structures sont rassemblés dans le tableau 9.2. Seuls les modes de vibration axisymétriques de la partie mécanique y figurent (les modes de cavité ont des caractéristiques modales identiques et correspondent à un mouvement plan de la structure).

	f_1 (Hz) (μ_1%)	f_2 (Hz) (μ_2%)	f_3 (Hz) (μ_3%)	f_4 (Hz) (μ_4%)	f_5 (Hz) (μ_5%)	f_6 (Hz) (μ_6%)
profil plan aluminium	243.8 (10.2)	906 (1.8)	2875 (1.3)	4938 (0.18)	7656 (0.34)	10750 (0.78)
profil plan balsa	2112 (1.2)	10340 (1.63)	17500 (0.95)			
coque concave kevlar	7560 (3.76)	17350 (1.05)	18700	20450		
coque concave aluminium	8850 (1.42)	15150 (0.54)	18700 (0.57)	20450 (0.60)		
coque convexe aluminium	9650 (1.64)	17290 (0.61)	18550 (0.56)	20100 (1.04)		

TAB. 9.2 – Paramètres modaux (fréquences propres f_p et amortissements modaux μ_p) mesurés sur les différentes coques dans la gamme audible.

De ces analyses modales, il apparaît que la forme et le matériau ont une influence notoire sur le profil vibratoire. En effet, comme prédit au chapitre 3, le fait d'ajouter une courbure locale permet de rigidifier la structure et ainsi de repousser les modes de vibration vers les hautes fréquences. Ainsi, si plus de 10 modes de vibration interviennent dans la bande passante audible dans le cas d'un profil plan en aluminium, seuls 3 modes sont présents dans le cas d'une coque sphérique en aluminium de même épaisseur.

Les matériaux utilisés ont également une influence sur le comportement vibratoire via les fréquences propres (un matériau plus rigide résonne plus haut en fréquence) mais également via les amortissements modaux. En effet, dans le cas de la reproduction sonore par un haut-parleur électrodynamique, on souhaite que la réponse du système soit la plus plate possible. Pour ce faire,

on peut soit repousser les fréquences propres hors du spectre audible , soit utiliser des matériaux très absorbants et dans ce cas, les résonances mécaniques seront réduites. Sur le tableau 9.2, il apparaît que le profil en kevlar possède des résonances plus amorties que le profil en aluminium (alors que les pulsations propres sont très proches pour ces 2 profils).

La mesure des paramètres de Thiele et Small ainsi que l'analyse modale permettent de prédire le comportement vibratoire de la source sur la bande passante audible. Une comparaison entre la mesure et la prédiction de la vitesse vibratoire au centre de la coque sphérique convexe est présenté figure 9.5

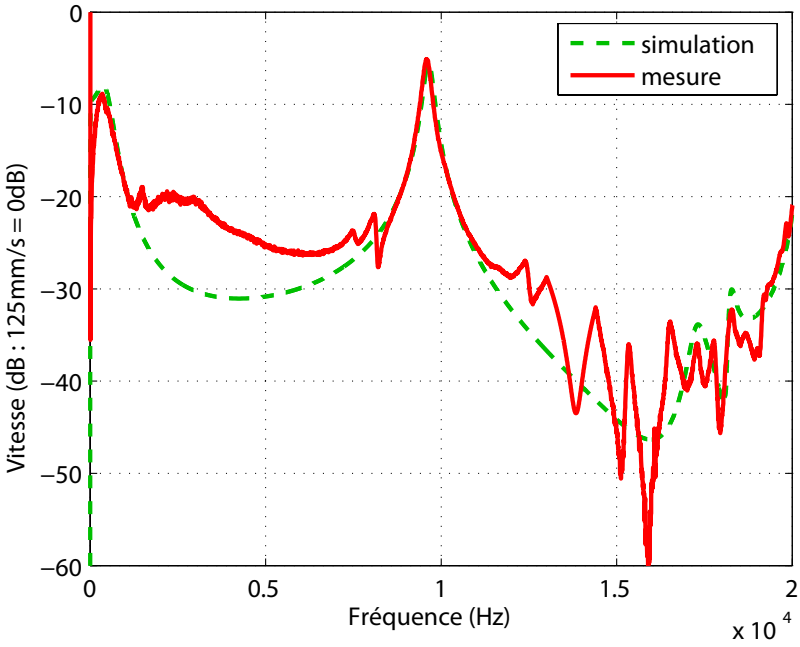


FIG. 9.5 – Comparaison entre la vitesse vibratoire mesurée (trait plein rouge) et prédite (pointillés verts) au centre pour la coque sphérique convexe en aluminium. Seulls les modes axisymétriques de la structure sont pris en copmpte (les résonances des modes asymétriques entre 10 et 15 kHz en sont pas modélisées) . Les différences entre 1 et 6 kHz sont attribuées à la non prise en compte des modes de cavités supérieur au premier.

9.2.2 Etude acoustique

On s'interesse enfin à la réponse acoustique du système. Pour ce faire, des mesures du champ de pression ont été effectuées dans la chambre anéchoïque de l'ENSTA. Dans un premier temps, on s'est intéressé à la réponse linéaire du système dans l'axe, en champ proche et lointain puis dans un second temps, on s'est intéressé à la directivité des différentes sources. Ensuite, l'étude se focalise sur la réponse dans l'axe en régime de grandes amplitudes.

Pression dans l'axe en champ lointain

L'étude théorique et numérique menée au chapitre 8 a mis en évidence l'influence de la forme au niveau acoustique. Il est apparu que la forme est responsable de différents phénomènes intervenant dans des plages fréquentielles différentes :

• Pour $ka < 1$, la forme n'a aucune influence sur le champ de pression sonore,

• Pour $1 < ka < 3$, des phénomènes de diffraction apparaissent : ils sont responsables d'une augmentation du niveau sonore dans l'axe pour des sources concaves (et respectivement d'une diminution du niveau sonore dans le cas de sources convexes) de l'ordre de 3dB,

• Pour $ka > 3$, des phénomènes d'interférences apparaissent et sont responsables d'une forte diminution du niveau sonore dans l'axe (rampe de -20dB/décade pour les profils sphériques et coniques).

Nous avons essayé de mettre en évidence ces phénomènes sur les différentes coques à notre disposition. La théorie prédit que les effets de diffraction devraient se produire pour les coques sphériques pour des fréquences entre 2 et 6 kHz, et les phénomènes d'interférence au dessus de 6.7kHz (à partir de $ka = 3.2$). Ces résultats sont confirmés par les mesurezs reproduites sur la figure 9.6 dans le cas des 3 coques sphériques étudiées.

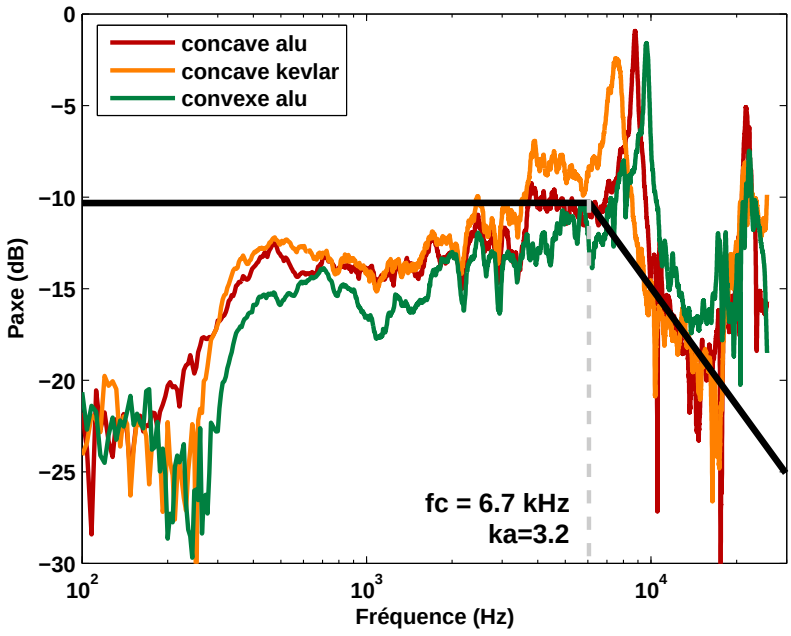


FIG. 9.6 – Mesures de pression (en dB) en fonction de la fréquence pour 3 profils sphériques : concave en aluminium (vert), concave en kevlar (orange) et convexe en aluminium (rouge). Dans chaque cas, la courbure est identique et la théorie (ligne noire) prédit une rampe de décroissance de -20 dB/décade à partir de $f = 6700$ Hz, ce qui se retrouve expérimentalement. En revanche, les effets de diffraction attendus entre 2 et 6 kHz sont difficilement observables.

Pression dans l'axe en champ proche

L'effet de proximité à la source a également été étudié et est présenté dans le cas de la coque sphérique convexe. La figure 9.7 représente l'évolution de la réponse dans l'axe du haut-parleur sphérique convexe en aluminium pour différentes distances d'écoute. De ces deux figures, il apparaît que l'éloignement à la source ne se traduit (pour la source convexe) que par un affaiblissement général du niveau sonore et par une modification de la partie haute du spectre (pour $ka > 9$). Ceci est illustré par la figure 9.8 qui représente l'évolution de la pression pour les nombres d'onde $ka = 1$, $ka = 3$ et $ka = 6$. Les résultats sont comparés aux simulations et un très bon accord est obtenu.

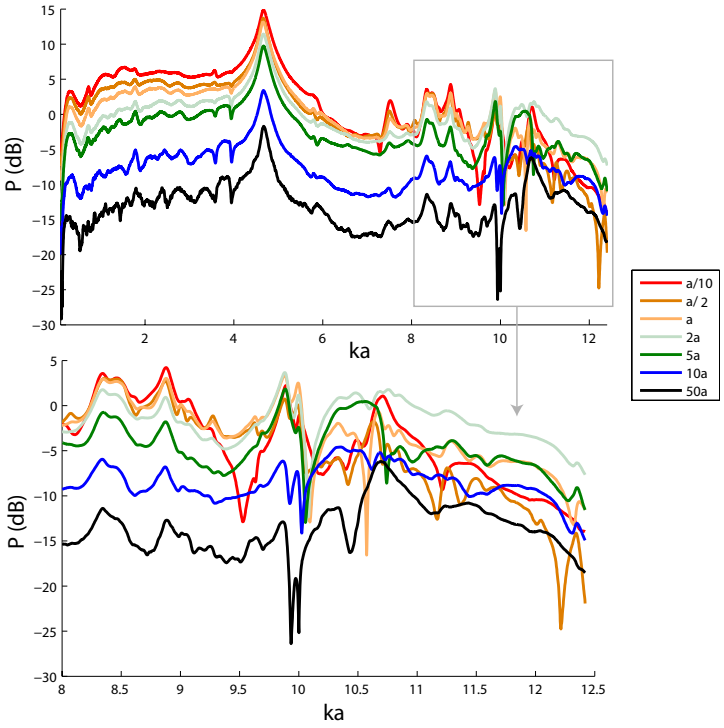


FIG. 9.7 – Mesures de pression (dB) en fonction du nombre d'onde adimensionné ka pour différentes positions d'observation dans l'axe de la source dans le cas du profil convexe en aluminium. La figure du bas correspond à un zoom de celle du haut pour ka entre 8 et 12. Mise à part une diminution du niveau de pression, des différences dans le spectre sont observables à partir de $ka = 9$.

Comparaison entre théorie et expérience

A partir des mesures électriques, vibratoires et la donnée précise de la forme de l'équipage mobile, la réponse acoustique du système est calculée en utilisant le principe développé aux chapitres 5 et 7. Nous allons ainsi comparer les mesures de pression dans l'axe et hors axe dans le cas du profil convexe avec le champ de pression simulé. La figure 9.9 représente le champ de pression sonore mesuré et estimé dans l'axe et hors axe (à 45° de l'axe de la source) pour un observateur situé à 1m de la source. Bien que seulement 4 modes soient pris en compte, un assez bon accord (erreur inférieure à 3 dB) est observé entre la prédiction et les relevés expérimentaux sur toute la gamme audible.

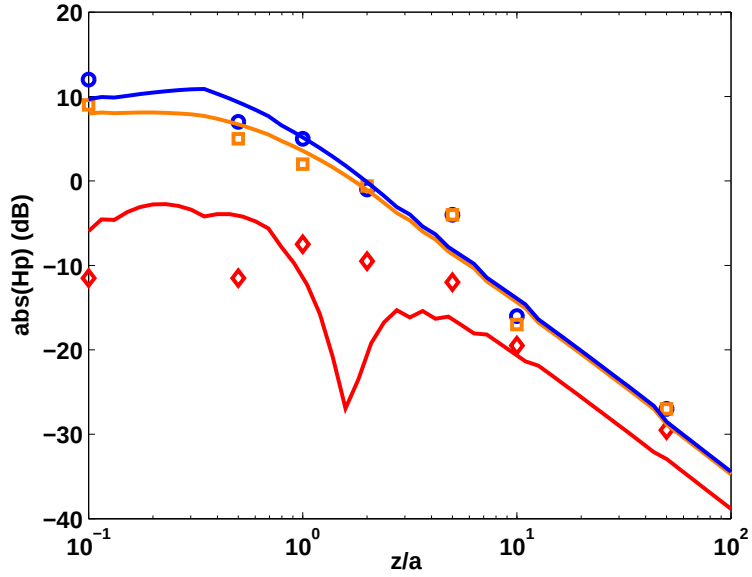


FIG. 9.8 – Mesures et prédictions de la pression dans l'axe (dB) en fonction de la distance à la source z/a pour la coque sphérique convexe et pour 3 nombres d'onde adimensionnés ka : $ka = 1$ (bleu), $ka = 3$ (orange) et $ka = 10$ (rouge). Les traits pleins représentent les résultats numériques d'après l'équation (7.35) et les points (○, □ et ◇) les mesures effectuées sur la coque sphérique convexe en aluminium.

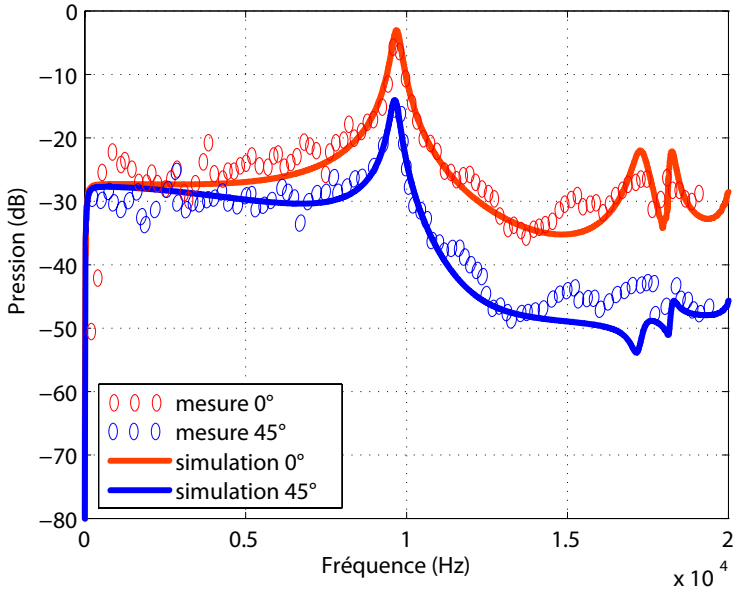
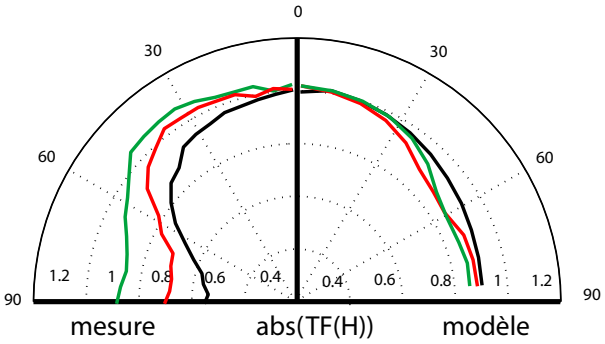


FIG. 9.9 – Comparaison entre la pression sonore mesurée (points) et prédite (traits pleins) dans l'axe (rouge) et à 45° (bleu) pour la coque sphérique convexe en aluminium. L'observateur est situé à une distance de 1m par rapport au centre de la source. Bien que peu de modes soient modélisés, un bon accord est observé dans l'axe et hors axe.

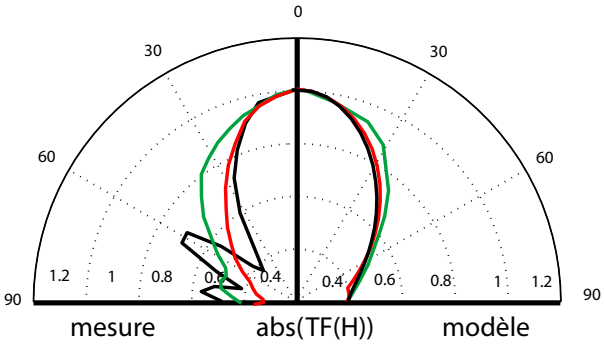
Directivité en champ lointain

En champ lointain, on s'intéresse également à la directivité de la source qui ne dépend que de la forme de l'équipage mobile et du profil vibratoire. La figure 9.10 compare les fonctions de directivité mesurées pour 3 nombres d'onde différents ($ka = 1$, $ka = 3$ et $ka = 6$) dans le cas de la coque sphérique convexe en aluminium (vert), de la coque concave en aluminium (vert) et de la source plane en balsa (noir). Un assez bon accord expérimental est observé et les tendances sont bien exprimées à travers cette expérience, à savoir que la forme tend à étendre la directivité de la source (surtout en hautes fréquences) et que la source convexe est toujours moins directive que la source concave (se référer à la partie 8 pour les résultats théoriques).

a) $ka = 1$



b) $ka = 3$



c) $ka = 6$

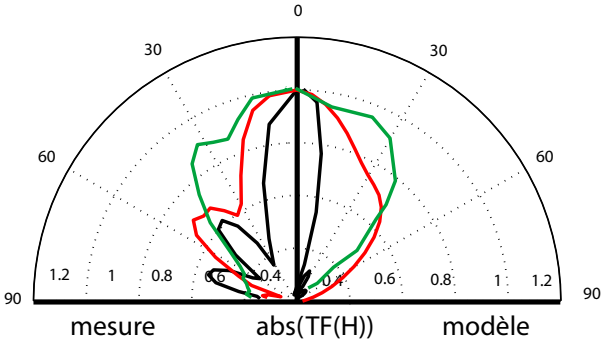


FIG. 9.10 – Fonctions de directivité en échelle linéaire pour les 4 profils convexes considérés en fonction du nombre d'onde : $ka = 1$ (haut), $ka = 3$ (milieu) et $ka = 6$ (bas). Ces fonctions sont définies comme le module de la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles adimensionnées par la valeur maximale. Les données de gauche correspondent aux résultats expérimentaux et celles de droite ceux du modèle présente (equation (7.35)). On observe que la forme a peu d'influence pour les faibles nombres d'onde ($ka < 1$) et qu'elle permet d'étendre la directivité en champ lointain pour les grands nombres d'onde ($ka > 3$).

9.3 Mesures et modéle en régime de grande amplitude

Étant donné que le moteur a été conçu sans fer, l'inductance de la bobine demeure constante quelle que soit l'excursion de la bobine. En pratique, cela signifie que le paramètre L représentant l'inductance propre de la bobine est indépendant de la position de la bobine, ce qui n'est généralement pas le cas dans les haut-parleurs classiques [61]. De plus, le fait d'utiliser 3 pièces polaires au lieu d'une seule permet de garantir un champ magnétique constant dans l'entrefer. Ceci se traduit par un facteur de force Bl indépendant de la position de l'équipage mobile. Ceci a pour conséquence que la plupart des non-linéarités classiquement observables dans les haut-parleurs conventionnels n'existent pas au sein du présent prototype.

Cependant, un type de non-linéarités demeure, et est rarement étudié car n'intervenant que pour les moyennes et hautes fréquences. Il s'agit des non-linéarités géométriques dues à de grandes déformations de la structure mise en vibration et décrites en détail dans le chapitre 2. Dans le cas présent, il s'agit de la source principale de non-linéarités dans le spectre audible. La figure 9.11 représente la réponse du prototype convexe en aluminium dans l'axe à 1m pour une excitation de 5 W. Le principe de mesure est d'envoyer un sinus balayé en fréquence et pour chaque fréquence, on relève le niveau de pression contenu dans le fondamental et les 3 premiers harmoniques.

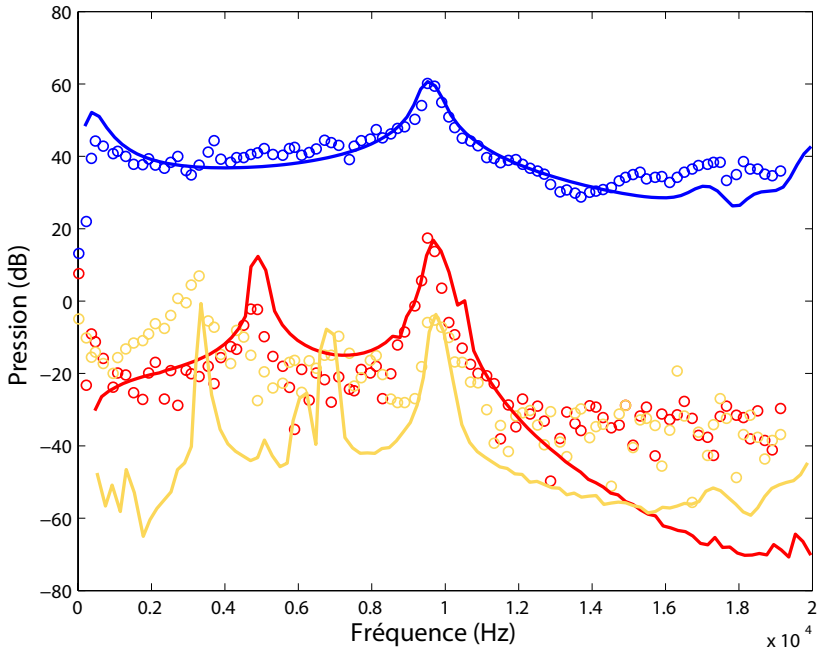


FIG. 9.11 – Evolution du fondamental et des différentes harmoniques dans la réponse en pression à un sinus balayé en fréquence. Pour chaque fréquence, on analyse le niveau de pression du fondamental (bleu) et des différents harmoniques (rouge pour l'harmonique 2 et orange pour l'harmonique 3). Les mesures présentées (points) ont été effectuées sur le profil convexe en aluminium pour un observateur situé dans l'axe à 1m de la source et une puissance de 5W et sont comparés aux résultats de simulation du modèle présenté tout au long de ce manuscrit (traits pleins). Les non-linéarités géométriques, qui se manifestent alors autour des fréquences propres du système et des sous-multiples de celles-ci, sont bien représentées par notre modèle.

Sur la figure 9.11, on peut donc clairement identifier l'effet des non-linéarités géométriques sur la réponse en fréquence. De manière générale, on peut affirmer que ce type de non-linéarités apparaît :

• lorsque l'on excite la structure au voisinage d'une fréquence propre, cad $f \simeq f_p$; dans ce cas, l'amplitude des vibrations de la structure devient importante (de l'ordre de l'épaisseur) et on voit apparaître de la distortion harmonique dans le signal de pression résultant.

• lorsque l'on excite la structure au voisinage d'un sous-multiple d'une fréquence propre, cad $f \simeq f_p/n$ avec n entier ; dans ce cas, la fréquence de l'harmonique n correspond à une fréquence propre du système et cet harmonique va être amplifié par résonance.

Ce type de non-linéarité qui, a notre connaissance, n'a pas encore fait l'objet d'études publiées dans la littérature, est directement intégrable (de manière exacte théoriquement) dans notre schéma de résolution (cf partie 5) par addition de non-linéarités quadratiques et cubiques dans les équations modales de déplacement. Dans la simulation présentée, seuls les coefficients quadratiques et cubiques associés au premier mode de vibration $f_1 = 9.6$ kHz sont choisis non nuls. Les mesures des niveaux relatifs des harmoniques 2 et 3 mesurés sont comparés à ceux de notre modèle et un assez bon accord est observé autour de la première fréquence de résonance et des sous-multiples de celle-ci.

Fréquence	Harmonique 2		Harmonique 3	
	Mesuré	Estimé	Mesuré	Estimé
$f_1/3$: 3.2 kHz	−61	−62	−24	−28
$f_1/2$: 4.8 kHz	−41	−31	−55	−75
$2.f_1/3$: 6.5 kHz	−61	−57	−44	−45
f_1 : 9.6 kHz	−42	−43	−64	−64

TAB. 9.3 – Mesures et estimations des taux d'harmoniques 2 et 3 en dB dans le signal de pression dans l'axe à 1 m du prototype convexe en aluminium. Le haut-parleur est excité par des signaux sinusoïdaux à fréquence variable et pour une puissance d'entrée de 5W.

9.4 Conclusion

Dans ce chapitre est étudiée de manière expérimentale l'influence de la forme et du matériau sur un prototype développe au LAUM par Guy Lemarquand. Des analyses mécaniques (analyses modales) et acoustiques (pression dans l'axe et directivité) ont été effectuées sur des profils plans et sphériques, concaves et convexes. Les résultats expérimentaux sont comparés au modèle proposé tout au long de la thèse et un bon accord est observé en régime linéaire et en régime de grandes amplitudes. Pour des grandes amplitudes de vibration, il est montré que seules les non-linéarités géométriques demeurent et peuvent être modélisées par des oscillateurs avec addition de non-linéarités cubiques et quadratiques.

Chapitre 10

Conclusions générales et perspectives

Sommaire

10.1 Rayonnement de structure minces pour de grandes amplitudes de vibration 160
Problème mécanique 160
Couplage électromécanique 160
Rayonnement acoustique 160
Analyse expérimentale 161
10.2 Influence de la forme et du matériau 161
Considération générales 161
Application au haut-parleur électrodynamique 164
Application numérique 164
10.3 Domaines d'application et perspectives 166
Applications possibles 166
Dans le futur... 166

10.1 Rayonnement de structure minces pour de grandes amplitudes de vibration

Les travaux menés au cours de cette thèse ont abouti à une formulation temporelle du problème de rayonnement de structures minces de type haut-parleur soumises à de grandes amplitude de vibration. L'analyse du problème repose sur 3 points distincts qui sont : la résolution du problème mécanique non linéaire, la résolution du couplage entre l'excitation et la structure puis le rayonnement de la source, comme exposé sur la figure 10.1.

Problème mécanique

Le problème mécanique repose sur les équation de Von-Kármán dont les hypothèses sont résumées au chapitre 2. Le problème a été adimensionné et l'influence des paramètres matériaux est exprimée à l'aide de paramètres adimensionnés tels que le rapports des rigidités en flexion δ et le rapport des densités σ entre les deux structures. Ensuite, pas projection modale sur les modes linéaires de la structure, on se ramène à une infinité d'équation modales non linéaires couplées dans le domaine temporel.

Le point de départ est l'étude du problème dans le cas d'une structure plane puis l'influence de la forme est introduite par ajout d'un défaut de forme dans les équations locales de vibration (chapitre 3). Dans chaque cas, l'influence des paramètres de forme et des paramètres matériaux sur les caractéristiques modales (déformées modales, pulsations propres, amortissement modaux et coefficients non linéaires) est étudiée et on recherche une configuration qui permet à la fois de diminuer la densité modale et de réduire les non-linéarités.

Couplage électromécanique

Le problème électromécanique est exposé au chapitre 5 et s'appuie sur la modélisation classique de Thiele et Small en régime non linéaire à laquelle on ajoute l'influence des modes de vibration de la structure avec prise en compte des non-linéarités géométriques. La méthode adoptée s'appuie sur le formalisme de variables d'état qui peut se résoudre de manière directe dans le domaine temporel à l'aide d'un solveur commercial (Matlab©). La méthode de résolution est appliquée à un haut-parleur classique et on montre que le présent modèle permet de prédire le comportement vibratoire de la structure sur une gamme fréquentielle étendue par rapport aux modèles existants, et ce en régime linéaire et non linéaire.

Rayonnement acoustique

Ensuite, un modèle temporel de rayonnement compatible avec le modèle mécanique précédemment exposé est proposé au chapitre 7. Ce modèle suppose que le champ de pression est décrit par l'intégrale de Rayleigh, ce qui revient à négliger les termes de diffraction induits par la source. Les résultats sont comparés aux solutions exactes obtenues dans le cas d'une coque sphérique [120] et un bon accord est obtenu, sauf dans la plage de nombres d'onde comprise entre $ka = 1$ et $ka = 3$.

La formulation adoptée offre l'avantage de s'appliquer à n'importe quel type de profil, ce qui n'avait jusqu'alors pas été réalisé dans le domaine temporel. Aussi, la méthode est appliquée par la suite au cas de structures coniques et de forme plus complexe (de type haut-parleur) pour lesquelles la littérature est bien moins fournie.

Analyse expérimentale

Ainsi, en joignant les contributions correspondant aux trois premières parties du présent manuscrit, on obtient une modélisation du champ de pression sonore rayonné par une structure mince en régime de grandes amplitudes. Cette modélisation globale est appliquée au cas d'un prototype de haut-parleur développé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) par Guy Lemarquand et un bon accord expérimental est obtenu en régime de faibles et de grandes amplitudes. Si le comportement vibratoire de telles structures a déjà été étudié dans la littérature, aucun modèle ne permettait à ce jour de prédire le rayonnement de ces structures et ceci a été réalisé au cours de ce travail de thèse.

10.2 Influence de la forme et du matériau dans la reproduction sonore par un haut-parleur électrodynamique

Considération générales

Des travaux théoriques de modélisation mécanique et acoustique, nous avons pu identifier l'influence de la forme et des matériaux dans la reproduction sonore par un haut-parleur électrodynamique. Il est ainsi apparu que (cf figure 10.1) :

• les matériaux ont pour pour effet de modifier le comportement vibratoire linéaire et non linéaire de structures de type haut-parleur (modification des fréquences propres, des amortissements modaux, des déformées modales et des coefficients non linéaires),

• la forme de la suspension ne modifie que très légèrement le comportement vibratoire linéaire de la structure mais augmente les non-linéarités géométriques de manière significative, aussi ce cas devra être évité dans la mise au point de haut-parleurs fidèles,

• la forme de la partie centrale provoque une rigidification de la structure et permet d'étendre le comportement "piston plan" de la structure, ce qui est un avantage dans le cas de haut-parleurs mais augmente également la production de non-linéarités géométriques,

• la forme modifie également de manière importante le rayonnement de la structure et cause des phénomènes d'interférences et de diffraction qui sont responsables d'une diminution de la pression dans l'axe en hautes fréquences. Ceci va de pair avec une augmentation de la directivité de la source en hautes fréquences.

Un tableau récapitulatif des différents effets de la forme et des matériaux (en fonction du rapport des rigidités en flexion entre la suspension et la partie interne) est présenté en 10.1. Sur ce tableau sont représentés les différents critères qui permettent de différencier l'influence respective de la forme est des propriétés matérielles sur les caractéristiques globales du transducteur.

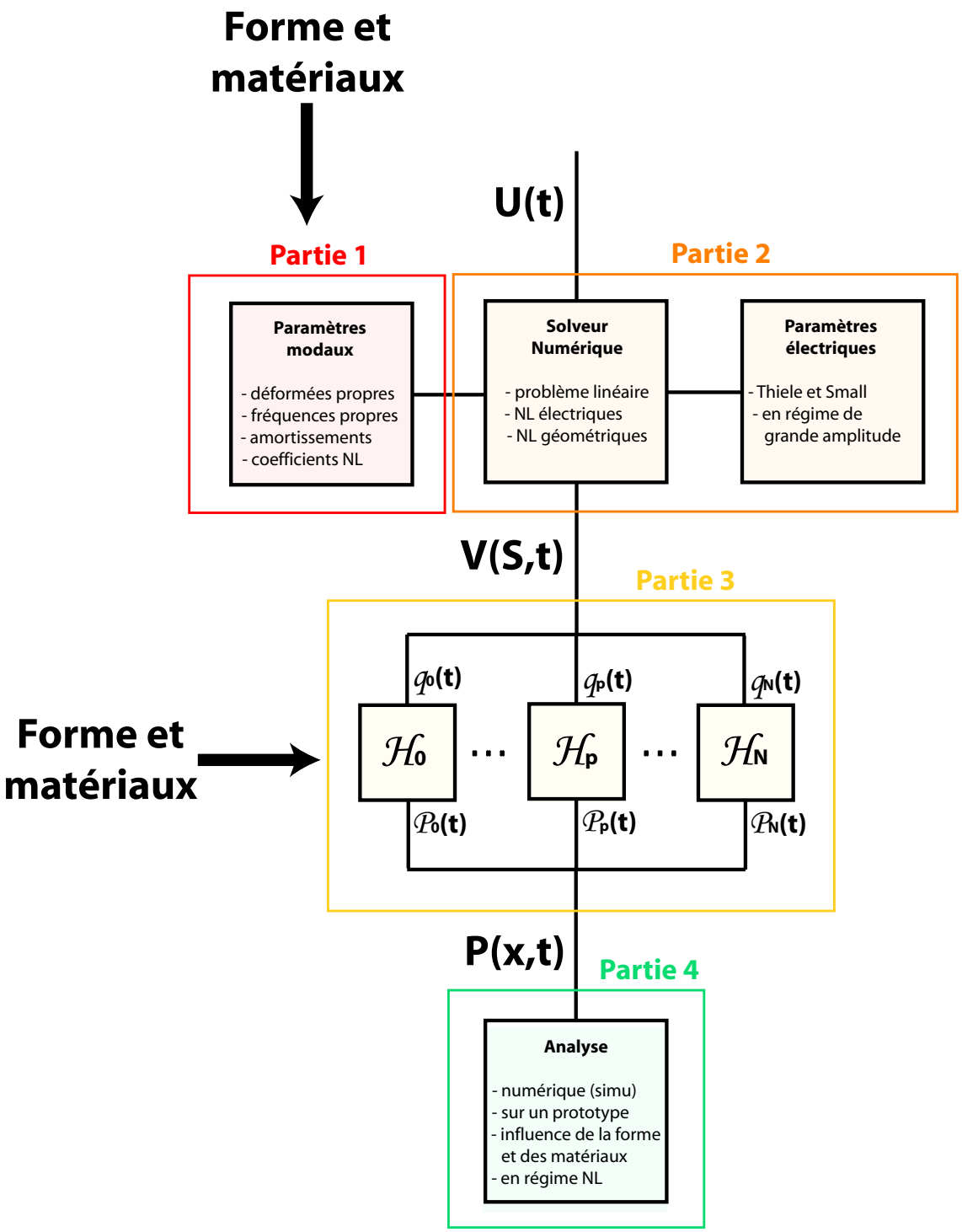


FIG. 10.1 – Schéma récapitulatif de la démarche adoptée afin de calculer le champ de pression rayonné par une structure soumise à de grandes amplitudes de vibration. $U(t)$, $V(S,t)$ et $P(x,t)$ désignent respectivement la tension aux bornes du haut-parleur, le champ de vitesse de la membrane et le champ de pression sonore au point d'observation x.

Forme	Géométrie plane			Suspension torique			Calotte sphérique		
Matériau	plaque	mixte	piston	plaque	mixte	piston	plaque	mixte	piston
Séparation des modes	−−	−	+	−	+	++	++	++	++
Modes supérieurs amortis	−	+	++	−−	−	+	−−	−	++
Minimisation des non-linéarités	+	++	+	−	+	−	−−	−	−−
Efficacité de rayonnemnt	−	+	++	−	+	++	+	+	+
Réponse en pression dans l'axe	+	+	++	+	+	++	−−	−−	−
Direcitivité en hautes fréquences	−−	−−	−−	−−	−−	−−	+	++	++

TAB. 10.1 – Influence de la forme et des matériaux sur le comportement vibratoire et acoustique, linéaire et non linéaire dans les cas limites plans, avec suspension torique et avec une structure centrale sphérique. Pour chaque configuration géométrique, on évalue de manière subjective (sur une échelle arbitraire allant de ++ à - -) le comportement en fonction du rapport des rigidités δ dans 3 cas limites : $\delta = 1$ (plaque), $\delta = 30$ (mixte) et $\delta = 10^5$ (piston).

Application au haut-parleur électrodynamique

Aussi, dans le cas de haut-parleurs, il est impératif d'opérer des compromis entre performances mécaniques et acoustiques en fonction de l'utilisation du système. Cela dit, pour le dimensionnement de haut-parleur, la démarche préférable à adopter est la suivante :

• Définir la forme du transducteur et ses dimensions en fonction de l'utilisation que l'on souhaite en faire et de sa bande passante. Dans le cas d'une écoute très localisée en espace (point d'écoute fixe) tel qu'en studio ou pour une écoute au casque, le transducteur recherché doit permettre de retranscrire le plus fidèlement possible dans son axe. Aussi, au vu du chapitre 8, la configuration plane est préférable (pas d'interférence ni de diffraction dans l'axe et réponse plate en champ lointain). Dans le cas d'une écoute non localisée en espace (grande zone d'écoute) tel qu'en situation de diffusion de concert, on souhaite que le champ de pression soit assez uniforme sur une grande zone d'écoute. Aussi, la configuration sphérique (ou de manière générale courbée) est préférable. Ensuite, le choix de la courbure de la source relève d'un compromis entre directivité et fidélité de la réponse dans l'axe.

• Choisir les caractéristiques matérielles associées à cette forme qui permettent de diminuer la densité modale (en repoussant les modes de vibration supérieurs idéalement hors de la gamme audible) et de réduire au mieux les non-linéarités géométriques. On montre qu'une telle configuration existe dans le cas d'une structure plane (structure à deux corps dont le rapport des rigidités en flexion entre les deux matériaux vaut 30).

Historiquement, la démarche des constructeurs allait dans la direction opposée : le choix de la forme s'est directement porté sur l'assemblage d'un tronc de cône avec une calotte sphérique. Cette forme a avant tout été choisie pour des considérations pratiques et matérielles. En effet, les premiers prototypes de haut-parleur possédaient des membranes en carton très souples et le moyen le plus pratique de rigidifier la structure était d'imposer une courbure locale (tronc de cône). Par la suite, une calotte sphérique a été ajoutée afin de protéger le moteur mais surtout afin d'éviter tout court circuit entre les faces avant et arrière du transducteur.

Aujourd'hui, l'utilisation de modèles complexes permet de prédire plus ou moins finement le comportement vibratoire et acoustique des transducteurs mais on ne s'éloigne pas excessivement de la forme originelle. Les progrès récents réalisés dans le domaine des matériaux (alliages et polymères) et des procédés de fabrication ont permis la réalisation de structures toujours plus fines et rigides, de telle sorte que la forme n'est plus le seul recours afin d'obtenir une structure qui se déforme peu dans la gamme audible. C'est pourquoi, on voit apparaître aujourd'hui des haut-parleurs dont la structure mécanique est différente (haut-parleurs sphériques de forme concave ou convexe) et dont les propriétés acoustiques sont mieux maîtrisées, et ainsi la tendance est inversée et l'on se rapproche de plus en plus de la démarche exposée plus haut.

Application numérique

Procédons, à titre d'exemple, à une petite application numérique. Supposons que nous voulions réaliser un transducteur sur toute la bande audible (de 20 Hz à 20 kHz) dans deux configurations particulières : une source très directive et une source à directivité étendue. Les contraintes du systèmes sont les suivantes :

- Condition (1) : Réponse en fréquence plate sur la gamme audible.

- Condition (2) : Première fréquence propre à 100 Hz.

- Condition (3) : Densité modale faible et comportement de type piston en basses fréquences).

La condition (1) définit une conditions sur la forme de la structure. En effet, le fait d'imposer une réponse plate dicte une plage de nombres d'ondes sur laquelle on souhaite que le transducteur émette. Cette condition définit ainsi un rayon extérieur maximal a_{max} que l'on peut s'autoriser afin d'espérer avoir une réponse plate.

Les conditions (2) et (3) imposent le choix des caractéristiques matérielles (épaisseur et choix des matériaux) en fonction de la forme adoptée. Sachant que la première fréquence de résonance est choisie la plus faible possible, on opte pour un élastomère (de module d'Young $E = 10^8$ Pa et de densité $\rho = 10^3$ kg/m^3) comme constituant extérieur. La suspension est choisie plate et fine (rapport des rayons valant $s = 0.9$) afin de réduire les non-linéarités. Un récapitulatif des différentes caractéristiques à choisir est présenté ci-dessous :

	Type	Source Directive	Source Etendue
Condition (1)	Forme	Plane	Sphérique $R_0 = 1.5$
	Nombre d'onde maximal ka_{max}	$ka < 10$	$ka < 5$
	Rayon a_{max}	a <2.7 cm	a <1.4 cm
Condition (2)	épaisseur	$500\mu m$	$1mm$
Condition (3)	rapport des rigidités	$\delta = 10^5$	$\delta = 30$
	rapport des densités	$\sigma = 10$	$\sigma = 10$
	$2^{ème}$mode de suspension	$f_2 \simeq 1200Hz$	$f_2 \simeq 1200Hz$
	1^{er}mode de la structure interne	$f_s \simeq 17000Hz$	$f_s \simeq 21000Hz$

10.3 Domaines d'application et perspectives

Applications possibles

Le principe de résolution adopté dans la présente étude ne se limite pas au cas de structures de type haut-parleur mais peut être dérivé dans le cas de structures minces circulaires de forme et de matériaux quelconques, encastrées ou non bafflées (les conditions de rayonnement devant alors être adaptées).

On peut aussi penser élargir les domaines d'applications aux instruments de type cymbales, au sein desquels les non-linéarités géométriques sont d'une influence capitale. Dans ce cas, la formulation du problème mécanique a déjà été développée [121, 122] et il ne resterait plus qu'à déterminer le champ acoustique rayonné par utilisation des méthodes décrites au chapitre 7.

Aussi, il serait possible d'élargir la présente formulation au cas de structures non circulaires (plaques rectangulaires) et ainsi calculer le champ de pression sonore rayonné par de telles structures pour des grandes amplitudes de vibrations (table d'harmonie de piano ou caisse de guitare par exemple). Dans ce cas, le formalisme devra être adapté afin de convenir aux coordonnées cartésiennes.

Dans le futur...

Cependant, si ce travail présente une démarche de calcul du champ de pression rayonné par une structure mince en régime de grandes amplitudes, de nombreux problèmes restent encore à élucider tels que les effets de fortes courbures, tant an niveau mécanique que acoustique. An niveau mécanique, cela reviendrait à prendre en compte un modèle de coque profonde qui intègrerait un défaut de forme important. Au niveau acoustique, il serait nécessaire de retenir les effets de diffraction dans le domaine temporel (implémentation de type BEM [23] ou calcul directement en utilisant la formulation de type Réponse Impulsionnelle Spatiale).

De plus, le couplage de la structure avec le fluide environnant n'est exposé que de manière succincte au chapitre 4 et nécessiterait une modélisation plus fine dans le domaine temporel. De manière générale, ce dernier point concernant le couplage fluide/structure dans le domaine temporel reste délicat dans l'analyse du problème. Autant, pour les structures considérées, l'influence du fluide environnant est faible (mais pas forcément négligeable, par exemple dans le cas d'un haut-parleur couplé avec une cavité) alors que pour des structures de petites dimensions ou immergées dans un fluide plus dense (transducteur sous-marin par exemple), cette approximation n'est plus valable. Un formalisme doit alors être trouvé, couplant tous les modes entre eux. Il faudrait dans ce cas se ramener à une expression équivalente à la notion d'impédance mutuelle de rayonnement dans le domaine temporel, qui permettrait de prédire fréquences et amortissements modaux dans le cas où l'action du fluide environnant n'est plus négligeable.

Enfin, la présente formulation ouvre une nouvelle voie dans le domaine du contrôle non linéaire de sources sonores car les modélisations jusqu'alors existantes se limitent aux basses fréquences alors que notre modèle permet d'expliquer le rayonnement dans une gamme de fréquences étendue. Ainsi, il serait très intéressant dans le futur de développer une interface de contrôle permettant de limiter les distortions (linéaires et non linéaires) sur toute la bande audible afin de disposer d'une source sonore "idéale" dont le rayonnement (au moins en un point de l'espace) serait parfaitement maîtrisé, et ce même pour des régimes de grandes amplitudes.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions.* Dover Publications, 1970.

[2] K.M. Al-Ali. Loudspeakers : modeling and control. Master's thesis, Berkeley Univsersity of California, November 1999.

[3] M. Amabili. Theory and experiments for large-amplitude vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shells with imperfections. *Journal of Sound and Vibration*, 262(4) :921–975, May 2003.

[4] M. Amabili, G. Frosali, and M.K. Kwak. Free vibrations of annular plates coupled with fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 191(5) :825–846, July 1996.

[5] M. Arditi, F.S. Foster, and J.W. Hunt. Transient fields of concave annular arrays. *Ultrasonic Imaging*, 3(1) :37–61, January 1981.

[6] A. Arpaci. Annular plate dampers attached to continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 191(5) :781–793, April 1996.

[7] M.F. Ashby. *Materials selection in Mechanical Design.* Butterworth and Heinemann, 2005.

[8] S. Azimi. Free vibration of circular plates with elastic edge supports using the receptance method. *Journal of Sound and Vibration*, 120(1) :19–35, January 1988.

[9] M.R. Bai and M. Tsao. Estimation of sound power of baffled planar sources using radiation matrices. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112(3) :876–883, September 2002.

[10] D.A. Barlow, G.D. Gallety, and J. Mistry. The resonances of loudspeaker diaphragms. *Journal of the Audio Engineering Society*, 29(10) :699 – 704, October 1981.

[11] L.L. Beranek. *Acoustical Measurements.* Acoustical Society of America, 1988.

[12] D.R. Birt. Nonlinearities in moving-coil loudspeakers with overhung voice-coils. *Journal of the Audio Engineering Society*, 39(4) :100–108, April 1991.

[13] M. Bluck and S.P. Walker. Analysis of three-dimensional transient acoustic wave propagation unsing the boundary integral equation method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(8) :1419–1431, December 1996.

[14] X. Boutillon. Analytical investigation of the flattening effect : the reactive power balance rule. *Journal of the Acoustical Society of America*, 90(2) :754–763, August 1991.

[15] R. Bracewell. *"Convolution Theorem." The Fourier Transform and Its Applications, 3rd ed.* McGraw-Hill, 1999.

[16] S. Brückner. Impact of fluid loading on the radiated sound power of vibrating plates. Master's thesis, Universität Stuttgart, April 1998.

[17] W.N. Brown. Theory of conical sound radiators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 13(1) :20–22, July 1941.

[18] A.M. Bruneau. Rayonnement d'un haut-parleur à diaphragme conique. *Acustica*, 48(2) :86–96, February 1981.

[19] A.M. Bruneau and M. Bruneau. Electrodynamic loudspeaker with baffle : motional impedance and radiation. *Journal of the Audio Engineering Society*, 34(12) :970–980, December 1986.

[20] C. Camier, C. Touzé, and O. Thomas. Effet des imperfections géométriques sur les vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces. In *18ième Congrès Francais de Mécanique, Grenoble*, Août 2007.

[21] D. Cathignol and O.A. Sapozhnikov. On the application of the rayleigh integral to the calculation of the field of a concave focusing radiator. *Acta Physica*, 45 :735–742, November 1999.

[22] A. Chaigne and N. Quaegebeur. Radiation of electrodynamic loudspeakers subjected to large amplitude motion. In *Forum Acusticum, Budapest*, 2005.

[23] D.J. Chappell, P.J. Harris, D. Henwood, and R. Chakrabarti. A stable boundary element method for modeling transient acoustic radiation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 120(1) :74–80, July 2006.

[24] P.T. Chen and J.H. Ginsberg. Complex power, reciprocity, and radiation modes for submerged bodies. *Journal of the Acoustical Society of America*, 98(6) :3343–3351, December 1995.

[25] M. Colloms. *High performance loudspeakers, 6th edition.* John Wiley and Sons, 2005.

[26] L. Cremer, M. Heckl, and E.E. Ungar. *Structure-borne sound.* Springer-Verlag, 1973.

[27] N.N. Currey and K.A. Cunefare. The radiation modes of baffled finite plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 98(3) :1570–1580, September 1995.

[28] C.J. Daly and N.A.H.K. Rao. A spatially averaged impulse response for an unfocused piston transducer. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(3) :1563–1566, March 1999.

[29] G.B. Deane. The beam forming properties of a concave spherical reflector with an on-axis receiver. *Journal of the Acoustical Society of America*, 106(3) :1255–1261, 3 1999.

[30] S. Degraeve. Influence de la forme et du matériau de la membrane d'un haut-parleur sur l'impédance et la pression acoustique. Master's thesis, Université du Maine, Juin 2006.

[31] J. D'hooge, J. Nuyts, B. Bijnens, B. De Man, P. Suetens, J. Thoen, M.C. Herregods, and F. Van de Werf. The calculation of the transient near and far field of a baffled piston using low sampling frequencies. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102(1) :78–86, July 1997.

[32] A. Dobrucki. Nontypical effects in an electrodynamic loudspeaker with a nonhomogeneous magnetic field in the air gap and nonlinear suspensions. *Journal of the Audio Engineering Society*, 42(7/8) :565–576, July 1994.

[33] P.C. Dumir, C.R. Kumar, and M.L. Gandhi. Non-linear axisymetric vibration of orthotropic thin annular plates with a rigid central mass. *Journal of the Acoustical Society of America*, 77(6) :2184–2187, June 1985.

[34] J. Eargle. *Loudspeaker Handbook.* Kluwer Academic, 2003.

[35] O. Von Estorff. *Boundary elements in acoustics.* W.I.T. Press, 2000.

[36] C.L.S. Farn and H. Huang. Transient acoustic fields generaed by a body of arbitrary shape. *Journal of the Acoustical Society of America*, 43(2) :252–257, February 1968.

[37] P.J.T. Filippi, J.P.Lefebvre, D.Habault, A.Bergassoli, J.L.Guyader, and C.Lesueur. *Acoustique générale*. Les Editions de Physique, 1994.

[38] F.J.M. Frankort. Vibration pattern and radiation behavior of loudspeaker cones. *Journal of the Audio Engineering Society*, 26(9) :609–622, september 1978.

[39] A. Frendi, L. Maestrello, and A. Bayliss. Coupling between plate vibration and acoustic radiation. *Journal of Sound and Vibration*, 177(2) :207–226, 1994.

[40] D. Guyomar and J. Powers. Transient fields radiated by curved surfaces - application to focusing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 76(5) :1564–1572, November 1984.

[41] D. Guyomar and J. Powers. Transient radiation from axially symmetric sources. *Journal of the Acoustical Society of America*, 79(2) :273–277, February 1986.

[42] T. Ha-Duong, B. Ludwig, and I. Terrasse. A galerkin bem for transient acoustic scattering by an absorbing obstacle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(13) :1845–1882, June 2003.

[43] D. Habault and P.J.T. Filippi. Light fluid approximation for sound radiation and diffraction by thin elastic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 213(2) :333–374, January 1998.

[44] J. Hadian and A.H. Nayfeh. Modal interaction in circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 142(2) :279–292, October 1990.

[45] G. Handelman and H. Cohen. On the effects of the addition of mass to vibrating systems. In *Proceeding of the 9th International Congress Applied Mechanics*, volume 7, pages 509–518, 1957.

[46] V. Hansen and E.R. Madsen. On aural phase detection : Part 1. *Journal of the Audio Engineering Society*, 22(1) :10–14, January 1974.

[47] V. Hansen and E.R. Madsen. On aural phase detection : Part 2. *Journal of the Audio Engineering Society*, 22(10) :783–788, December 1974.

[48] G.R. Harris. Review of transient field theory for a baffled planar piston. *Journal of the Acoustical Society of America*, 70(1) :10–19, July 1981.

[49] G.R. Harris. Transient field of a baffled planar piston having an arbitrary vibration amplitude. *Journal of the Acoustical Society of America*, 70(1) :186–204, July 1981.

[50] A. Hayama, K. Furihata, D.K. Asano, and T. Yanagisawa. Acoustic characteristics of an electrodynamic planar digital loudspeaker using noise shaping technology. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117(6) :3636–3644, June 2005.

[51] D.J. Henwood. Approximating the hysteretic damping matrix by a viscous matrix modeling in the time domain. *Journal of sound and Vibration*, 254(3) :575–593, October 2002.

[52] D.W. Herrin, F. Martinus, T.W. Wu, and A.F. Seybert. A new look at the high frequency boundary element and rayleigh integral approximations. *Journal of the Society of Automotive Engineers*, 1 :1, 2003.

[53] Q. Hu and S.F. Wu. An explicit integral formulation for transient acoustic radiation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104(6) :3251–3258, December 1998.

[54] S. Huang. Nonlinear vibration of a hinged orthotropic circular plate with a concentric rigid mass. *Journal of Sound and Vibration*, 214(5) :873–883, July 1998.

[55] J.A. Jensen. A new calculation procedure for spatial impulse responses in ultrasound. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(1) :3266–3274, October 1999.

[56] J.A. Jensen and N.B. Svendsen. Calculation of pressure fields from arbitrarily shaped, apodized, and excited ultrasound transducers. *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics , and frequency control*, 39(2) :262–267, March 1992.

[57] J. Jouhaneau. *Notions élémentaires d'acoustique - électroacoustique*. Conservatoire National des arts et métiers, 2000.

[58] M.C. Junger and D. Feit. *Sound, structures and their interaction*. MIT, Cambridge, 1972.

[59] W. Kaplan. *Advanced Calculus, 4th ed.* Addison-Wesley, 1992.

[60] J.A. Ketterling. Acoustic field of a wedge-shaped section of a spherical cap transducer. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114(6) :3065–3075, December 2003.

[61] W. Klippel. Nonlinear large-signal behavior of electrodynamic loudspeakers at low frequencies. *Journal of the Audio Engineering Society*, 40(6) :483–496, June 1992.

[62] W. Klippel. Diagnosis and remedy of nonlinearities in electrodynamical transducers. In *Proceeding of the 109th AES Convention, Los Angeles*, September 2000.

[63] W. Klippel. Nonlinear modeling of the heat transfer in loudspeakers. *Journal of the Audio Engineering Society*, 52(1/2) :3–25, January 2004.

[64] W. Klippel and U. Seidel. Fast and accurate measurement of linear transducer prameters. In *Proceeding of the 110th AES Convention*, May 2001.

[65] C. Lambourg. *Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes : Application à la synhèse sonore*. PhD thesis, Université du Maine, Février 1997.

[66] G.C. Lauchle. Radiation of sound from a small loudspeaker located in a circular baffle. *Journal of the Acoustical Society of America*, 57(3) :543–549, March 1975.

[67] P.A.A. Laura, G. Diez, and V.H. Cortinez. A note on vibrating circular plates carrying concentrated masses. *Mechanics Research Communications*, 11 :397–400, 1984.

[68] M. Lavandier. *Différences entres enceintes acoustiques : une évaluation physique et perceptive*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, Décembre 2005.

[69] W. Marshall Leach. Loudspeaker voice-coil inductance losses : circuit models, parameter estimation and effect on frequency response. *Journal of the Audio Engineering Society*, 50(6) :442–448, June 2002.

[70] A. Leissa. *Vibration of Plates*. Acoustical Society of America, 1993.

[71] G. Lemarquand. Un nouveau concept de haut-parleur électrodynamique. In *Actes du 8ème Congrès Francais d'Acoustique, Tours*, 2006.

[72] P. Lesniewski. *Modeling of an ultrasonic transducer's transient acoustic field*. PhD thesis, University of south Australia, July 2001.

[73] J.F. Li and Z.Y. He. The influence of a non-rigid baffle on intermodal radiation impedances of a fluid-loaded bilaminar plate. *Journal of Sound and Vibration*, 190(2) :221–238, February 1996.

[74] S.R. Li, Y.H. Zhou, and X. Song. Non-linear vibration and thermal buckling of an orthotropic annular plate with a centric rigid mass. *Journal of Sound and Vibration*, 251(1) :141–152, March 2002.

[75] S.P. Lipshitz, M. Pocock, and J. Vanderkooy. On the audibility of midrange phase distortion in audio systems. *Journal of the Audio Engineering Society*, 30(9) :580–595, September 1982.

[76] S.J. Loutridis. Resonance identification in loudspeaker drivers units : a comparison of techniques. *Applied acoustics*, 66 :1399–1426, 2005.

[77] N.W. McLachlan. On symmetrical modes of vibration of truncated conical shells with application to loudspeaker diaphragms. *Proceedings of the Physical Society*, 44 :408–425, 1932.

[78] P.G.L. Mills and M.O.J. Hawksford. Distortion reduction in moving-coil loudspeaker systems using current-drive technology. *Journal of the Audio Engineering Society*, 37(3) :129–148, March 1989.

[79] P.M. Morse and K. Uno Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University, 1968.

[80] P. Muller and C. Ossadzow. *Introduction aux coques minces élastiques*. Hermes sciences, 1999.

[81] D.J. Murphy. Axisymmetric model of a moving-coil loudspeaker. *Journal of the Audio Engineering Society*, 41(9) :679–690, June 1993.

[82] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear oscillations*. John Wiley and Sons, 1979.

[83] H.T. O'Neil. Theory of focusing radiators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 21(5) :516–526, September 1949.

[84] S.T. Park and S.Y. Hong. Development of the two-stage harmonic balance method to estimate nonlinear parameters of electrodynamic loudspeakers. *Journal of the Audio Engineering Society*, 49(3) :99–116, March 2001.

[85] M.S. Patterson and F.S. Foster. Acoustic fields of conical radiators. *IEEE transactions on Sonics and Ultrasonics*, 29(2) :83–91, March 1982.

[86] G. Pellerin. Caractérisation du haut-parleur par éléments finis. Master's thesis, Université Paris VI, Septembre 2001.

[87] G. Pellerin. *Etude du haut-parleur aux forts déplacements : application à la tuyère acoustique et optimisation*. PhD thesis, Université Paris VI, 2007.

[88] G. Pellerin, J.D. Polack, and J.P. Morkerken. Sound source design in the very low frequency domain. In *Proceeding of the 116th AES Convention*, May 2004.

[89] P. Perz. Holographic visualization of vibration distribution on a loudspeaker membrane in the growth and decay of the excitation signal. *Journal of sound and vibration*, 197(5) :589–600, June 1996.

[90] M. Petyt and P.N. Gélat. Vibration of loudspeaker cones using the dynamic stiffness method. *Applied acoustics*, 53(4) :313–332, April 1998.

[91] A.D. Pierce. *Acoustics- an introduction to its physical principles and applications*. Acoustical Society of America, 1989.

[92] B. Piwalowski and B. Delannoy. Method for computing spatial pulse response : time-domain approach. *Journal of the Acoustical Society of America*, 86(6) :2422–2432, December 1989.

[93] S.M. Portakis, G.E. Alexakis, M.C. Tsilis, and P.J. Xeniditis. Time-domain nonlinear modeling of practical electroacoustic transducers. *Journal of the Audio Engineering Society*, 47(6) :447–468, June 1999.

[94] N. Quaegebeur. Non-linéarités et rôle du matériau dans la reproduction sonore par un haut-parleur électrodynamique. Master's thesis, Université Paris VI, Septembre 2004.

[95] N. Quaegebeur and A. Chaigne. Influence of shape and geometry on sound radiation by an electrodynamic loudspeaker. In *Proceeding of the 118th AES Convention, Barcelona*, May 2005.

[96] N. Quaegebeur and A. Chaigne. Modélisation du champ de pression sonore généré par un haut-parleur électrodynamique soumis à de grandes amplitudes de vibration. In *Actes du 8ème Congrès Francais d'Acoustique, Tours*, May 2006.

[97] P.N. Raju. Vibrations of annular plates. *Journal of Aeronautical Society of India*, 14 :37–52, 1962.

[98] V. Ranjan and M.K. Ghosh. Transverse vibration of thin solid and annular circular plates with attached discrete masses. *Journal of Sound and Vibration*, 292(3-5) :999–1003, May 2006.

[99] J.W.S. Rayleigh. *The theory of sound.* General Publishing Company, Dover Publications, 1945.

[100] NB. Roozan, M. Bockholts, P.l Van Eck, and A. Hirschberg. Vortex sound in bass reflex ports of loudspeakers. part i : observation of response to harmonic excitation and remedial measures. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104(4) :1914–1918, October 1998.

[101] T. Scello. Champ acoustique créé par un disque en oscillations forcées sans écran. Master's thesis, Université du Maine, 2000.

[102] H. Schurer. *Linearization of Electroacoustic Transducers.* PhD thesis, University of Twente Enschede, November 1997.

[103] J. Scott, J. Kelly, and G. Leembruggen. New method of charaterizing driver linearity. *Journal of the Audio Engineering Society*, 44(4) :258–265, April 1996.

[104] A.F. Seybert, D.A. Hamilton, and P.A. Hayes. Prediction of radiated noise from machine components using the bem and the rayleigh integral. *Noise Control Engineering Journal*, 46(3) :77–82, June 1998.

[105] E.B. Skrodzka and A.P. Sek. Comparison of modal parameters of loudspeakers in different working conditions. *Applied Acoustics*, 60(3) :267–277, July 2000.

[106] E.J. Skudrzyk. The thin, spherical shell as the prototype of a vibrator with coupled modes, exact solution, modal response, and mean-value prediction. *Journal of the Acoustical Society of America*, 70(1) :1–9, July 1981.

[107] R.H. Small. Closed-box loudspeaker systems, part 1 : analysis. *Journal of the Audio Engineering Society*, 20(10) :798–808, December 1972.

[108] R.H. Small. Closed-box loudspeaker systems, part 2 : large-signal analysis. *Journal of the Audio Engineering Society*, 21(1) :11–18, January 1973.

[109] S.V. Sorokin. Non-linear oscillations of a baffled elastic plate in heavy fluid loading conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 232(3) :619–643, January 2000.

[110] S.V. Sorokin and S.G. Kadyrov. Modeling of non-linear oscillations of elastic structures in heavy fluid loading conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 222(3) :425–451, March 1999.

[111] S. Sridhar, D.T. Mook, and A.H. Nayfeh. Non-linear resonances in the forced responses of plates. part 1 : symetric responses of circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 41 :359–373, 1975.

[112] P.R. Stepanishen. The time dependent force and radiation impedance on a piston in a rigid infinite planar baffle. *Journal of the Acoustical Society of America*, 49(3) :841–849, September 1971.

[113] P.R. Stepanishen. Transient radiation and scattering from fluid-loaded oscillators, membranes and plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 88(1) :374–385, July 1990.

[114] P.R. Stepanishen. Acoustic axisymetric radiation and scattering from bodies of revolution using the internal source density and fourier methods. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102(2) :726–732, August 1997.

[115] P.R. Stepanishen. Acoustic transient radiation and scattering from fluid-loaded elastic shells using convolution methods. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102(1) :110–119, July 1997.

[116] P.R. Stepanishen. A generalized modal impulse response and fourier transform approach to investigate acoustic transient bessel beams and bessel bullets. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(3) :1493–1502, March 1999.

[117] P.R. Stepanishen and D.D. Ebenezer. Transient vibratory response of fluid-loaded shells with axisymmetric excitations. *Journal of the Acoustical Society of America*, 82(5) :1811–1817, November 1987.

[118] J. Sun and P.R. Stepanishen. Modal impulse response and wave vector-time domain methods to evaluate transient radiation from axisymetric planar radiators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102(2) :979–988, August 1997.

[119] H. Suzuki. Vibration and sound radiation of a piano soundboard. *Journal of the Acoustical Society of America*, 80(6) :1573–1582, December 1573.

[120] H. Suzuki and J. Tichi. Sound radiation from convex and concave domes in an infinite baffle. *Journal of the Acoustical Society of America*, 69(1) :41–49, January 1981.

[121] O. Thomas. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques : application aux instruments de percussion.* PhD thesis, Université Paris VI, Octobre 2001.

[122] O. Thomas. Vibrations non-linéaires de coques minces. Technical report, Convention DGA, 2001-2003.

[123] O. Thomas, C. Touzé, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. part 2 : experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 265(5) :1075–1101, August 2003.

[124] F.E. Toole. Subjective measurements of loudspeaker sound quality and listener performance. *Journal of the Audio Engineering Society*, 33(1) :2–32, January 1985.

[125] F.E. Toole. Loudspeaker measurements and their relashionship to listener preferences : part 1. *Journal of the Audio Engineering Society*, 34(4) :227–23, April 1986.

[126] F.E. Toole. Loudspeaker measurements and their relashionship to listener preferences : part 2. *Journal of the Audio Engineering Society*, 34(5) :323–348, May 1986.

[127] C. Touzé. *Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques : application aux instrumens de percussion non-linéaires.* PhD thesis, Université Paris VI, Novembre 2000.

[128] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. part 1 : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4) :649–676, January 2002.

[129] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Hardening / softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273(5) :77–101, July 2004.

[130] S.A. Vera, M.D. Sanchez, P.A.A. Laura, and D.A. Vega. Transverse vibrations of circular, annular plates with several combinations of boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 213(4) :757–762, June 1998.

[131] W.A. Verhoef, M.J.T.M. Cloostermans, and J.M. Thijssen. The impulse response of a focused source with an arbitrary axisymmetric surface velocity distribution. *Journal of the Acoustical Society of America*, 75(6) :1716–1721, June 1984.

[132] A. White. *On loudspeaker implementation for feedback control, open-air, active noise reduction headset*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute, November 1999.

[133] J.R. Wright. A software investigation of the radiation impedance of disc, cone and dome piston. *Applied Acoustics*, 35(3) :179–202, Mars 1992.

[134] S.F. Wu and Q. Hu. An alternative formulation for predicting sound radiation from a vibrating object. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(4) :1763–1774, April 1998.

[135] Z.L. Zhang and Q.T. Tao. Experimental study of non-linear vibrations in a loudspeaker cone. *Journal of Sound and Vibration*, 248(1) :1–8, November 2001.

Annexes

Annexe A

Calcul des déformées modales et des pulsation propres pour le problème à deux structures

Déformées modales

Dans cette section, les termes non linéaires de l'équation (2.13) sont négligés. Ainsi, la fonction de force F est supposée nulle et on suppose qu'il n'y a aucune force extérieure appliquée à la structure. Les équations générales pour le déplacement de la structure globale (A+B) s'écrivent alors, pour $0 < r < s$:

$$\frac{\delta}{\sigma}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\Delta\Delta\Phi_p(r)\right)q_p(t)+\sum_{p=0}^{\infty}\Phi_p(r)\ddot{q}_p(t)=\frac{\varepsilon}{\sigma}\left(-2\sigma\mu_B\sum_{p=0}^{\infty}\dot{q}_p(t)\Phi_p(r)\right), \tag{A.1}$$

et pour $s < r < 1$:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\Delta\Delta\Phi_p(r)\right)q_p(t)+\sum_{p=0}^{\infty}\Phi_p(r)\ddot{q}_p(t)=\varepsilon\left(-2\mu_A\sum_{p=0}^{\infty}\dot{q}_p(t)\Phi_p(r)\right). \tag{A.2}$$

Recherchons alors une solution sous forme harmonique telle que $q_p(t) \propto cos(\Omega t)$, et ainsi après projection sur le p_{ieme} mode, on se ramène à, pour $s < r < 1$:

$$\Delta\Delta\Phi_p(r)+\Omega^2\Phi_p(r)=-\varepsilon(2\mu_A j\Omega\Phi_p(r)), \tag{A.3}$$

et pour $0 < r < s$:

$$\frac{\delta}{\sigma}\Delta\Delta\Phi_p(r)+\Omega^2\Phi_p(r)=-\varepsilon(2\mu_B j\Omega\Phi_p(r)). \tag{A.4}$$

Ces équations sont résolues par projection sur les 4 premiers fonctions de Bessel de première et deuxième espèce [1], c'est-à-dire pour $0 < r < s$:

$$\Phi_p(r)=P_{1p}J_0(\zeta r)+P_{2p}Y_0(\zeta r)+P_{3p}I_0(\zeta r)+P_{4p}K_0(\zeta r), \tag{A.5}$$

et pour $0 < r < s$, la solution se doit d'être bornée en $r = 0$, ce qui suppose que la solution est projetable sur uniquement deux fonctions de Bessel (les fonctions Y_0 et K_0 divergent à l'origine) :

$$\Phi_p(r)=P_{5_p}J_0(\zeta\mathcal{L}r)+P_{6p}I_0(\zeta\mathcal{L}r), \tag{A.6}$$

où l'on a introduit $\zeta^2 = \Omega$ et le paramètre adimensionné $\mathcal{L}$ qui représente le rapport masse/rigidité du système global :

$$\boxed{\mathcal{L} = \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}} \tag{A.7}$$

Ensuite les déformées modales sont édimensionnées en utilisant la condition suivante :

$$\iint_S \Phi_p^2 dS = 1 \tag{A.8}$$

Pulsations propres

En utilisant les conditions aux limites du problème linéarisé, on reformule les équations sous forme matricielle en introduisant :

$$\mathbf{P}_p = \begin{pmatrix} P_{1p} & P_{2p} & P_{3p} & P_{4p} & P_{5p} & P_{6p} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_p = \begin{pmatrix} J_0(\zeta) & Y_0(\zeta) & I_0(\zeta) & K_0(\zeta) & 0 & 0 \\ J_1(\zeta) & Y_1(\zeta) & -I_1(\zeta) & K_1(\zeta) & 0 & 0 \\ J_0(\zeta s) & Y_0(\zeta s) & I_0(\zeta s) & K_0(\zeta s) & -J_0(\zeta L s) & -I_0(\zeta L s) \\ J_1(\zeta s) & Y_1(\zeta s) & -I_1(\zeta s) & K_1(\zeta s) & -J_1(\zeta L s) & I_1(\zeta L s) \\ F_1(\zeta s) & F_2(\zeta s) & -F_3(\zeta s) & F_4(\zeta s) & -\delta L F_5(\zeta L s) & \delta L F_6(\zeta L s) \\ J_1(\zeta s) & Y_1(\zeta s) & I_1(\zeta s) & -K_1(\zeta s) & -\delta L^3 J_1(\zeta L s) & -\delta L^3 I_1(\zeta L s) \end{pmatrix},$$

où :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta s J_0 - (1-\nu_A^2) J_1 \\ \zeta s Y_0 - (1-\nu_A^2) Y_1 \\ \zeta s I_0 - (1-\nu_A^2) I_1 \\ \zeta s K_0 - (1-\nu_A^2) K_1 \\ \zeta L s J_0 - (1-\nu_B^2) J_1 \\ \zeta L s I_0 - (1-\nu_B^2) I_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi le problème avec conditions aux limites s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{C}_p.\mathbf{P}_p = 0. \tag{A.9}$$

qui ne possède de solutions non nulles que si le déterminant de $\mathbf{C}_p$ est nul :

$$det(\mathbf{C}_p) = 0.$$

Cette équation a une infinité de solutions notées $\zeta_p = \Omega_p^4$ et dans ce cas, les pulsations propres f_p du problème global sont définies par :

$$\boxed{f_p = \frac{\Omega_p^2}{2\pi a^2}\sqrt{\frac{D_A}{\rho_A h_A}}}. \tag{A.10}$$

Ensuite, les déformées modales sont solutions des équations (A.5) et (A.6) en substituant ζ par ζ_p.

Annexe B

Equilibrage harmonique pour l'estimation des paramètres mécaniques non linéaires

En considérant que l'excursion de la bobine est faible, les paramèters électriques du haut-parleur peuvent êter consiérés constants et dans ce cas, le système incluant les non-linéarités géométriques peut se réduire à l'équation (B.1), en se plaçant dans le cadre défini au chapitre 7 :

$$\begin{cases} u(t) & = Re\ i(t) + L\ \dfrac{di}{dt} + Bl\ \sum T_a q_a \\ \dfrac{Bl}{Mm} T_a i & = -\omega_a^2 q_a - 2\mu_a \dot{q_a} - \ddot{q_a} + \Gamma_a q_a^3 + \beta_a q_a^2 \end{cases} \tag{B.1}$$

de plus, en hautes fréquences, l'impédance électrique est purement inductive (la partie résistive de la bobine devient négligeable), de telle sorte que la force contre-électromotrice peut êter négligée dans la partie électrique de l'équation (B.1), ce qui revient à négliger le terme $Bl\ \sum T_a q_a$. Dans cette annexe, nous nous intéressons aux solutions d'un tel système en utilisant la méthode de l'équilibrage harmonique, afin de déterminer par une mesure expérimentale les coefficients non linéaires Γ_a et β_a.

En supposant que l'on excite la structure autour d'une fréquence propre, nous pouvons émettre l'hypothèse qu'un unique mode de résonance est excité de telle sorte que :

$$w(r,t) = \Phi(r) q(t) \tag{B.2}$$

cette hypothèse n'est généralement pas valide expérimentalement dès lors que les modes de vibration sont très rapprochés mais permet d'obtenir une formulation très simplifiée et de remonter simplement aux coefficeints non linéaires. Supposons maintenant que la tension aux bornes $u(t)$ est un signal harmonique de pulsation Ω :

$$u(t) = U\ e^{j\Omega t} + U^\star\ e^{-j\Omega t} \tag{B.3}$$

et le courant $i(t)$ qui est une fonction linéaire de la tension aux bornes s'exprime alors de manière identique :

$$i(t) = I\ e^{j\Omega t} + I^\star\ e^{-j\Omega t} \tag{B.4}$$

où le symbole $(.)^\star$ désigne le complexe conjugué associé à une valeur complexe. En insérant la décomposition de l'équation (B.4) dans l'équation (B.1), on obtient :

$$U = I\,(Re + jL\Omega) \tag{B.5}$$

Ensuite, la fonction de déplacement $q(t)$ est décomposée comme une somme de sinusoïdes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} q(t) = Q_0 &+ \left(Q_1\, e^{j\Omega t} + Q_1^\star\, e^{-j\Omega t}\right) \\ &+ \left(Q_2\, e^{2j\Omega t} + Q_2^\star\, e^{-2j\Omega t}\right) + \left(Q_3\, e^{3j\Omega t} + Q_3^\star\, e^{-3j\Omega t}\right) \end{aligned} \tag{B.6}$$

où Q_0 représente le déplacement statique de la structure, et Q_1, Q_2 et Q_3 désignent respectivement le niveau contenu dans le fondamental, l'harmonique 2 et l'harmonique 3 du signal de déplacement. Dans toute la suite, on s'efforce de relier les facteurs Q_2 et Q_3 mesurables directement (par évaluation expérimentale de la distortion harmonique) aux coefficient non linéaire cubique Γ_a et quadratique β_a. en supposant que le système est faiblement non linéaire, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} |Q_1| & \gg |Q_0|, \\ |Q_1| & \gg |Q_2|, \\ |Q_1| & \gg |Q_3|, \end{cases} \tag{B.7}$$

on montre en première approximation que les taux d'harmoniques 2 et 3 sont directement reliés aux coefficients quadratiques et cubiques par les expressions suivantes :

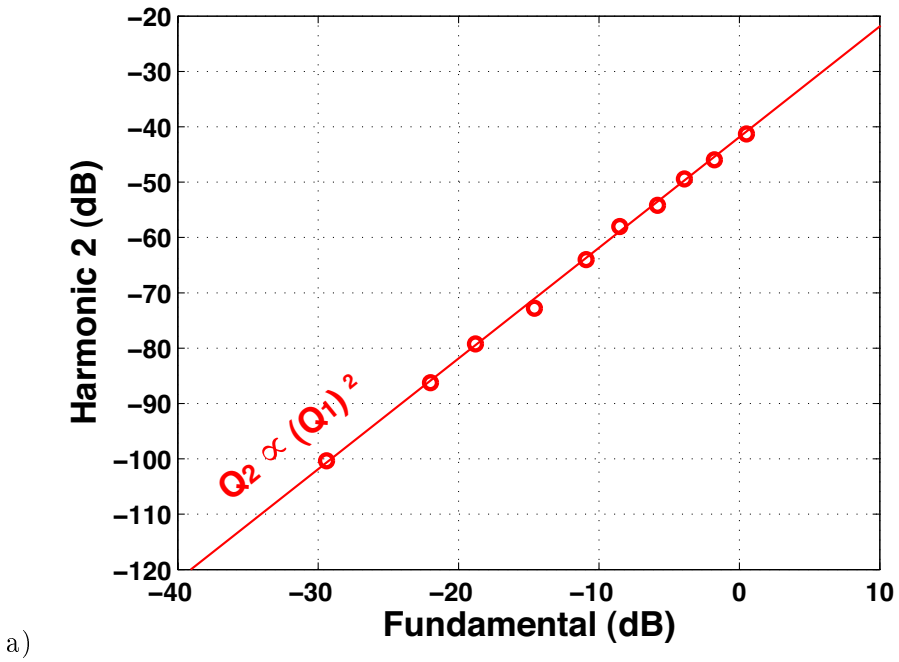
$$\begin{cases} Q_2 & \simeq \beta_a \left(\dfrac{Q_1^2}{\omega^2 - 4\Omega^2 + 4j\mu_a\Omega}\right) \\ \\ Q_3 & \simeq \Gamma_a \left(\dfrac{Q_1^3}{\omega^2 - 9\Omega^2 + 6j\mu_a\Omega - 6\Gamma_a Q_1^2}\right) \end{cases} \tag{B.8}$$

L'équation (B.8) dévoile ainsi qu'en première approximation, le taux d'harmonique n augmente dans deux cas bien distincts :

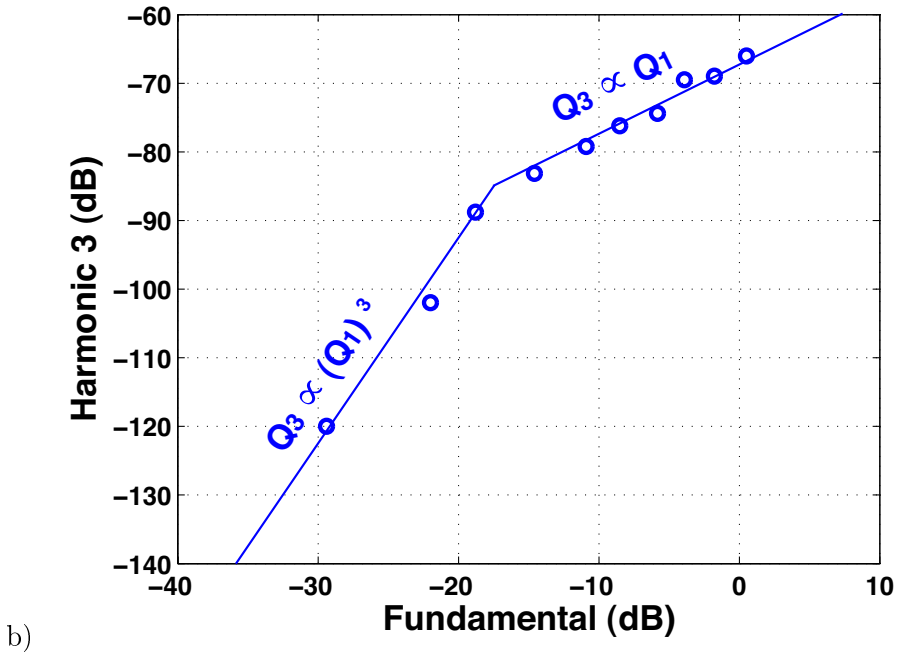
• lorsque le niveau du fondamental Q_1 augmente alors le niveau de l'harmonique n augmente également,

• lorsque la fréquence d'excitation Ω avoisine le sous-multiple d'ordre n (ce qui signifie que $\Omega = \omega/n$), alors le dénominateur des équations (B.8) atteint un minimum et donne ainsi naissance à une augmentation du taux d'harmonique n.

De cette façon, en mesurant les taux d'harmoniques 2 et 3 (Q_2 et Q_3) par rapport au niveau du fondamental Q_1 autour de la résonance mécanique, on peut se ramener à une évaluation des coefficients non linéaires cubiques et quadratiques. La figure B.1 représente les évolutions respectives des harmoniques 2 et 3 par rapport au niveau de fondamental mesurées autour de la fréquence de résonance du 6ème mode axisymétrique du haut-parleur considéré au chapitre 7. Ainsi les tendance observés expérimentalement confirment bien la formulation adoptée et les approximations successives effectuées.



a)



b)

FIG. B.1 – Evolution des harmoniques 2 (a) et 3 (b) par rapport au niveau de fondamental dans le signal de vitesse au centre de la structure pour une fréquence d'excitation de 5280 Hz (correspondant au 6ème mode axisymétrique du haut-parleur SP165PA décrit au chapitre 7. La référence (0 dB) correspond à 125 mm/s. Les points représentent les niveaux mesurés et les lignes renvoient aux interpolations polynomiales des équations (B.8). Le niveau de l'harmonique 2 Q_2 varie ainsi comme le carré du niveau du fondamental Q_1^2 et le niveau de l'harmonique 3 comme Q_1^3 pour des faibles excursions puis comme Q_1 pour de plus grandes excitations, comme prévu par l'équation (B.8).

Annexe C

Calcul de l'intégrale de Rayleigh

Changement de variables

Dans cette partie, on cherche à expliquer de manière rigoureuse le changement de variables exprimé au chapitre 7 Le but est de transformer l'intégrale sur une surface S en une intégrale sur deux nouvelles variables ϕ et $|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|$. La surface d'intégration S est paramétriseé dans le repère cylindrique (r', θ) par rapport à l'origine O par :

$$\begin{cases} x' &= r' \cos\theta \\ y' &= r' \sin\theta \\ z' &= h_0(r') \end{cases} \tag{C.1}$$

et ainsi on définit les vecteurs tangents à S par rapport aux variables (r', θ) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T_{r'}} &= \frac{\partial x'}{\partial r'}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial y'}{\partial r'}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial z'}{\partial r'}\overrightarrow{u_z} \\ T_\theta &= \frac{\partial x'}{\partial \theta}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial y'}{\partial \theta}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial z'}{\partial \theta}\overrightarrow{u_z} \end{aligned} \tag{C.2}$$

Dans ce cas, on peut appliquer le changement de variable à l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_S \overrightarrow{f}.\overrightarrow{dS} \\ &= \int_{r'}\int_{\theta} \overrightarrow{f}.\left(\overrightarrow{T_{r'}} \times \overrightarrow{T_\theta}\right) d\theta dr' \end{aligned} \tag{C.3}$$

L'idée du changement de variable exprimé dans le chapitre 7 est de'utiliser ce même principe de changement de variables dans la nouvelle base $\mathcal{B}_i$ définie à l'équation (7.8). On paramétrise ainsi les variables (r', θ) par les nouvelles coordonnées $(|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|, \phi)$ et on exprimer ainsi les nouveaux vecteurs tangents :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}} &= \frac{\partial x'}{\partial |\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial y'}{\partial |\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial z'}{\partial |\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|}\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{T_\phi} &= \frac{\partial x'}{\partial \phi}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial y'}{\partial \phi}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial z'}{\partial \phi}\overrightarrow{u_z} \end{aligned} \tag{C.4}$$

Dans noter cas, il est impératif de repasser par les variables de la base cylindrique (r', θ) afin de pouvoir exprimer simplement les dépendances des variables (x', y', z') en fonction de $|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|$ et Φ car aucune expression analytique directe n'existe dans le cas d'un profil quelconque. On aboutit finalement au changement de variables voulu :

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \iint_S \overrightarrow{f}.\overrightarrow{dS} \\ &= \int_{r'}\int_{\theta} \overrightarrow{f}.\left(\overrightarrow{T_{r'}} \times \overrightarrow{T_\theta}\right) d\theta dr' \\ &= \int_{\phi}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|} \overrightarrow{f}.\left(\overrightarrow{T_\phi} \times \overrightarrow{T_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}}\right) d|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|d\phi\end{aligned} \tag{C.5}$$

Théorème de convolution

Le changement de variables exprimé plus haut sert à simplifier l'expression de l'intégrale de Rayleigh après utilisation du théorème de convolution. En effet, une fois le changement de variables opéré, l'intégrale de Rayleigh se ramène à une expression du type :

$$\mathcal{R}_n = \int_\tau \int_\phi \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|} \delta\left(\tau - |\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|/c\right) \overrightarrow{F(\phi, |\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|)}.\left(\overrightarrow{T_\phi} \times \overrightarrow{T_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}}\right) d|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|d\phi q(\tau)d\tau \tag{C.6}$$

où F et q sont détaillés au chapitre 7 et δ la distribution de Dirac. L'idée est de réaliser l'intégration selon $|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|$ en premier afin d'éliminer la distribution de Dirac qui n'est pas évidente à intégrer directement. La propriété fondamentale de la fonction de Dirac nous permet d'affirmer que :

$$\mathcal{R}_n = \frac{1}{c}\int_\tau \int_\phi \left(\overrightarrow{F(\phi, |\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|)}.\left(\overrightarrow{T_\phi} \times \overrightarrow{T_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|}}\right)\right)_{|\mathbf{x}-\mathbf{x_S}|=c\tau} d\phi q(\tau)d\tau \tag{C.7}$$

où la notation $|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}| = c\tau$ désigne que le calcul est effectué en remplaçant $|\mathbf{x} - \mathbf{x_S}|$ par $c\tau$ dans l'expression de F. Dans ce cas, les bornes d'intégration par rapport à ϕ dépendent explicitement de $c\tau$ et sont définies dans la suite de cette annexe.

Bornes d'intégration

En fonction de la zone de calcul (les zones sont définies dans le chapitre 7) et du temps d'intégration τ, les bornes d'intégration varient. La section suivante récapitule les différentes possibilités selon la position du récepteur et le temps d'intégration.

Zone I

Le point d'impact $\mathbf{x_0}$ est le premier éclairé. Ensuite, on a une partie de contour fermé (intégration sur $[0 : 2\pi]$), puis une partie de contour ouvert (intégration sur $[\phi_{max} : 2\pi - \phi_{max}]$). La figure C.1 représente les deux types de contour.

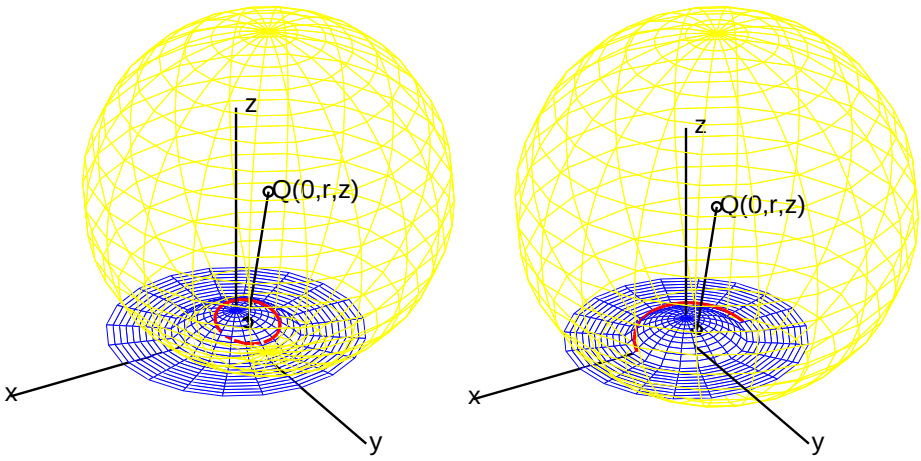


FIG. C.1 – Définition du contour d'intégration dans le cas d'un observateur situé dans la zone I. Le contour d'intégration est représenté en rouge. La figure de gauche représente le cas d'un contour fermé et celle de droite le cas d'un contour ouvert.

	Définition	*Contour*	ϕ_{max}
$\tau \in [t_i : t_h]$	$\lvert\mathbf{x} - \mathbf{x_i}\rvert < \lvert\mathbf{x} - \mathbf{x_S}\rvert = c\tau < \lvert\mathbf{x} - \mathbf{x_h}\rvert$	*Fermé*	0
$\tau \in [t_h : t_b]$	$\lvert\mathbf{x} - \mathbf{x_h}\rvert < \lvert\mathbf{x} - \mathbf{x_S}\rvert = c\tau < \lvert\mathbf{x} - \mathbf{x_b}\rvert$	*Ouvert*	cf C.8

où t_h et t_b sont définis comme le temps de trajet du bord supérieur et du bord inférieur au récepteur.

Zone II

Le point d'impact est sur l'écran, c'est-à-dire $r_i = r$. $\mathbf{x_i}$ est le premier éclairé mais ne vibre pas. Dans ce cas, le seul signal reçu correspond à une partie de contour ouvert (intégration sur $[\phi_{max} : 2\pi - \phi_{max}]$) comme représenté figure C.2.

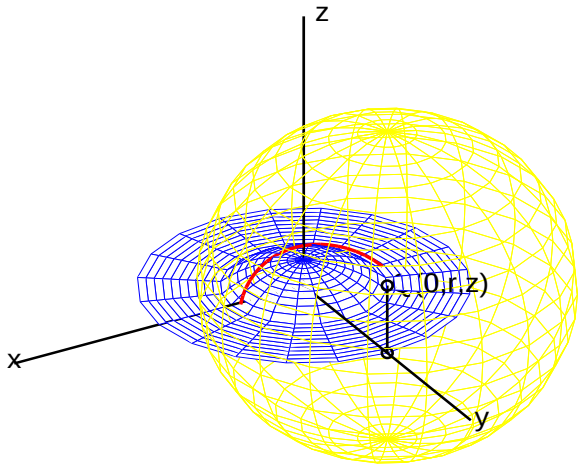


FIG. C.2 – Définition du contour d'intégration dans le cas d'un observateur situé dans la zone II. Le contour d'intégration est représenté en rouge.

	Définition	*Contour*	ϕ_{max}
$\tau \in [t_h : t_b]$	$\lvert\mathbf{x} - \mathbf{x_h}\rvert < \lvert\mathbf{x} - \mathbf{x_S}\rvert = c\tau < \lvert\mathbf{x} - \mathbf{x_b}\rvert$	*Ouvert*	cf C.8

où t_h et t_b sont définis comme le temps de trajet du bord supérieur et du bord inférieur au récepteur.

Zone III

Dans ce cas, on va inverser le problème et raisonner dans le sens des τ décroissants. Cela revient à rechercher les points d'intersection de la sphère centrée en $\mathbf{x}$ et de rayon $c\tau$ pour $\tau \in [t_b : t_i]$. Dans ce cas, il existe deux solutions à notre problème : l'intégration sur ϕ prend en compte deux contours : un cercle intersection avec l'écran (contribution nulle au rayonnement) et un contour quelconque (intersection avec le profil) le point d'impact est choisi comme le point de l'écran le plus éloigné du récepteur noté $\mathbf{x_i}$. Dans ce cas, on a $r_i < 0$. Le point d'impact $\mathbf{x_i}$ est le premier éclairé. Ensuite, on a une partie de contour fermé (intégration sur $[0 : 2\pi]$), puis une partie de contour ouvert (intégration sur $[-\phi_{max} : \phi_{max}]$). La figure C.3 représente les deux types de contour dans le cas d'une coque sphérique.

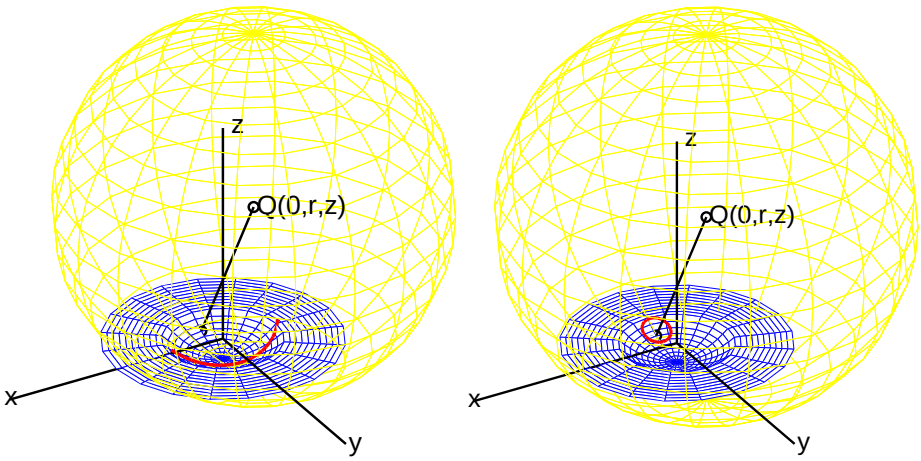


FIG. C.3 – Définition du contour d'intégration dans le cas d'un observateur situé dans la zone III . Le contour d'intégration est représenté en rouge. La figure de droite représente le cas d'un contour fermé et celle de gauche le cas d'un contour ouvert.

	Définition	*Contour*	ϕ_{max}
$\tau \in [t_h : t_b]$	$\lvert\mathbf{x}-\mathbf{x_h}\rvert < \lvert\mathbf{x}-\mathbf{x_S}\rvert = c\tau < \lvert\mathbf{x}-\mathbf{x_b}\rvert$	*Ouvert*	cf C.8
$\tau \in [t_h : t_i]$	$\lvert\mathbf{x}-\mathbf{x_b}\rvert < \lvert\mathbf{x}-\mathbf{x_S}\rvert = c\tau < \lvert\mathbf{x}-\mathbf{x_i}\rvert$	*Fermé*	0

Calcul de ϕ_{max}

Si le contour d'intégration est ouvert, ϕ_{max} est l'angle tel que l'intersection de la sphère centrée en $\mathbf{x}$ et de rayon $c\tau$ coupe le bord du profil, cad tel que $r' = a$. Il en résulte que :

$$\phi_{max} = \arccos\left(\left(1 + \frac{\left((c\tau)^2 - z^2 - (r-a)^2\right)\left((c\tau)^2 - z^2 - (r+a)^2\right)}{\cos^2\theta_0\left((c\tau)^2 - z^2 - r^2 - a^2 + 2rr_0 + 2r(h_0(r_0))\tan\theta_0\right)^2}\right)^{-1/2}\right) \tag{C.8}$$

Résumé

Si la forme et les matériaux utilisés dans la facture des membranes de haut-parleurs ont une influence notoire sur la qualité de restitution, leur étude reste majoritairement empirique. Cette thèse propose une modélisation du comportement vibratoire et acoustique de haut-parleurs en incluant les phénomènes non linéaires apparaissant en régime de grandes amplitudes.
Dans la première partie, l'influence de la forme et des matériaux sur le comportement vibratoire d'une structure de haut-parleur idéalisée est étudiée de manière théorique en utilisant les analogues dynamiques des équations de Von-Kármán et une approche modale.
La seconde partie propose une méthode de résolution du problème électromécanique incluant tous les types de non-linéarités connus. La formulation sous forme d'espace d'état est exprimée lorsque l'on prend en compte les modes de résonance de la structure.
Dans la troisième partie, le calcul du champ de pression rayonné par une structure axisymétrique est approché par l'intégrale de Rayleigh. La résolution temporelle se fonde sur la technique de Réponses Impulsionnelles Spatiales qui permet un gain de temps de calcul important.
Enfin la quatrième partie propose une analyse expérimentale sur un prototype de haut-parleur sans suspension développé au LAUM par Guy Lemarquand. Mesures et prédictions en régime linéaire et non linéaire sont comparées et l'influence des non-linéarités géométriques est discutée.

Mots-clés : haut-parleur, électroacoustique, reproduction sonore, vibrations non linéaires, rayonnement temporel, non-linéarités géométriques

Abstract

It has been experimentally shown that the shape and the materials of loudspeaker membranes have an influence on sound reproduction. From those observations the present thesis aims at modeling the nonlinear behavior of loudspeakers subjected to large amplitude motions over the audible bandwidth (including electrical and geometrical nonlinearities).
The first part describes a theoretical approach of the influence of materials and shape on the vibration pattern of an idealized loudspeaker. The dynamic analog of the Von-Kármán equations is used and the solutions are projected over the linear modes of the structure.
The second part proposes a resolution scheme of the electromechanical couplings using the state space formalism. The problem is first developed in the case of an unique mode of vibration and then extended including resonance modes and geometrical nonlinearities of the structure.
In the third part, a time-domain approach of the radiation problem based on the Rayleigh integral is proposed. The method uses the Spatial Impulse Response technique which allow to reduce calculation costs directly in the time-domain.
Finally, the present approach is applied in the case of a prototype developed at the LAUM by Guy Lemarquand. A good agreement between measurements and predictions using the present model can be achieved and the influence of geometrical nonlinearities on sound radiation is discussed.

Keywords : loudspeaker, electroacoustics, sound reproduction, nonlinear vibrations, time-domain radiation, geometrical nonlinearities

Imprimé à l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées - Paris -