

Sur la modélisation du comportement thermomécanique et métallurgique des aciers. Application au procédé de soudage et de traitements thermiques

Ngoc Thuy Trinh

▶ **To cite this version:**

Ngoc Thuy Trinh. Sur la modélisation du comportement thermomécanique et métallurgique des aciers. Application au procédé de soudage et de traitements thermiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Polytechnique X, 2008. Français. NNT : . pastel-00004738

HAL Id: pastel-00004738
https://pastel.hal.science/pastel-00004738

Submitted on 11 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique et Matériaux

par

Ngoc Thuy TRINH

Sujet de thèse :

Sur la Modélisation du Comportement Thermomécanique et Métallurgique des Aciers

Application au procédé de soudage et de traitements thermiques

Soutenue à Palaiseau le 16 Juin 2008

devant le jury composé de :

Président :	M. Jean-Baptiste LEBLOND
Rapporteurs :	M. Jean-François JULLIEN
	M. Saïd TAHERI
Examinateurs :	M. Jérôme GIUSTI
	M. Jean-François SIGRIST
Co-encadrants :	M. Ziad MOUMNI
	M. Frédéric ROGER
Directeur de thèse :	M. Ky DANG VAN

Cette thèse a été préparée à l'UME-MS de l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

Remerciements

Ce travail de thèse s'est déroulé dans le cadre d'une collaboration entre la Direction de la Construction Navale (DCN Propulsion) et l'Unité de Mécanique de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées (UME - ENSTA).

Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Mes remerciements vont, en premier lieu, à mes directeurs de thèse Messieurs Ky DANG VAN, Ziad MOUMNI et Frédéric ROGER. Leurs qualités tant scientifiques qu'humaines ont été pour moi un soutien inestimable.

Monsieur Jean-Baptiste LEBLOND m'a fait l'honneur de s'intéresser à ce travail et d'en présider le jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Messieurs Jean-François JULLIEN et Saïd TAHERI qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de cette thèse. Leurs critiques et suggestions m'ont été d'une grande utilité pour sa présentation finale.

Monsieur Jérôme GIUSTI m'a fait l'honneur d'en rejoindre le jury. Qu'il soit assuré de ma sincère reconnaissance.

Je tiens également à remercier Monsieur Jean-François SIGRIST pour sa participation au jury.

Monsieur Christian LAINE m'a beaucoup soutenu et encouragé. Je lui adresse mes sincères remerciements.

Ma reconnaissance s'adresse également à Madame Nizha CHATAR-MOUMNI pour sa lecture minutieuse de mon manuscrit et pour les nombreuses corrections qu'elle a suggérées.

Je voudrais remercier Monsieur Antoine CHAIGNE, directeur de l'Unité de Mécanique de l'ENSTA, qui a accepté de m'accueillir au sein de ses équipes.

En dernier lieu, j'aimerais adresser mes remerciements les plus chaleureux à mes parents, à mes frères, à mes soeurs, à tous les collègues et les amis qui m'ont accordé leur soutien tout au long de ce travail de thèse.

Ngoc Thuy TRINH

Table des matières

Introduction générale **5**

1 État de l'art **9**
1.1 Introduction . . . 9
1.2 Procédé de soudage . . . 9
1.2.1 Description d'une opération de soudage . . . 9
1.2.2 Procédé de soudage à l'arc . . . 10
1.3 Conséquences du procédé de soudage . . . 12
1.3.1 Conséquences thermiques du soudage . . . 12
1.3.2 Conséquences métallurgiques du soudage . . . 12
1.3.3 Conséquences mécaniques du soudage . . . 12
1.3.4 Couplage thermique, métallurgique et mécanique . . . 12
1.4 Etude bibliographique . . . 13
1.4.1 Modélisation thermique . . . 14
1.4.1.1 Equation de la chaleur . . . 14
1.4.1.2 Conditions aux limites . . . 16
1.4.1.3 Modélisation de la source de chaleur . . . 16
1.4.1.4 Conclusion . . . 19
1.4.2 Modélisation métallurgique . . . 19
1.4.2.1 Phases métallurgiques . . . 20
1.4.2.2 Transformation de phase . . . 21
1.4.2.3 Diagramme d'équilibre et transformation au chauffage . . . 21
1.4.2.4 Transformation au refroidissement . . . 23
1.4.2.5 Facteurs influençant les transformations . . . 24
1.4.2.6 Modélisation des transformations de phases . . . 27
1.4.2.7 Modèle de type Inoue . . . 30
1.4.2.8 Modèle de type I.N.P.L. . . . 30
1.4.2.9 Modèle de Leblond-Devaux . . . 33
1.4.2.10 Modèle de Giusti . . . 34
1.4.2.11 Modèle de Waeckel . . . 36
1.4.2.12 Conclusion . . . 38
1.4.3 Modélisation mécanique . . . 39
1.4.3.1 Problème mécanique en présence de transformations structurales 39
1.4.3.2 Conséquences mécaniques des transformations microstructurales 40
1.4.3.3 Déformations thermiques . . . 40
1.4.3.4 Phénomène de plasticité de transformation . . . 41
1.4.3.5 Comportement d'un matériau multiphasé . . . 46
1.4.3.6 Déformations plastiques et viscoplastiques . . . 47

1.4.3.7 Modèles viscoplastiques avec transformations structurales . . . 48
1.4.3.8 Conclusion . . . 53
1.5 Conclusions . . . 53

2 Nouvelle modélisation du comportement du matériau multiphasé 57
2.1 Introduction . . . 57
2.2 Méthode des deux potentiels . . . 58
2.2.1 Cas des variables d'état indépendantes . . . 58
2.2.2 Cas des variables d'état dépendantes . . . 59
2.2.3 Conclusion . . . 61
2.3 Modélisation du comportement du matériau multiphasé . . . 61
2.3.1 Cas de l'élastoplasticité . . . 62
2.3.1.1 Variables d'état et énergie libre . . . 62
2.3.1.2 Liaisons internes et lagrangien . . . 64
2.3.1.3 Lois d'état . . . 65
2.3.1.4 Evolutions des variables dissipatives . . . 66
2.3.1.5 Dissipation intrinsèque . . . 68
2.3.2 Cas de l'élastoplasticité avec la prise en compte de la plasticité de transformation . . . 69
2.3.2.1 Variables d'état et énergie libre . . . 69
2.3.2.2 Liaisons internes et lagrangien . . . 71
2.3.2.3 Lois d'état . . . 71
2.3.2.4 Evolutions des variables dissipatives . . . 72
2.3.2.5 Dissipation intrinsèque . . . 73
2.3.3 Cas de l'élastoviscoplasticité . . . 74
2.3.3.1 Variables d'état et énergie libre . . . 74
2.3.3.2 Liaisons internes et lagrangien . . . 75
2.3.3.3 Lois d'état . . . 76
2.3.3.4 Lois d'évolution des variables internes . . . 77
2.3.3.5 Dissipation intrinsèque . . . 78
2.3.3.6 La prise compte de la plasticité de transformation . . . 79
2.3.4 Modèle combiné de l'élastoplasticité et de l'élastoviscoplasticité . . . 82
2.3.4.1 Variables d'état et énergie libre . . . 82
2.3.4.2 Liaisons internes et lagrangien . . . 84
2.3.4.3 Lois d'état . . . 85
2.3.4.4 Lois d'évolution des variables internes . . . 85
2.3.4.5 Dissipation intrinsèque . . . 87
2.3.4.6 La prise compte de la plasticité de transformation . . . 87
2.3.4.7 Remarques . . . 90
2.3.5 Discussions . . . 90
2.3.6 Identification des paramètres . . . 92
2.4 Conclusion . . . 95

3 Simulations numériques 97
3.1 Introduction . . . 97
3.2 Description de l'essai . . . 97
3.3 Implantation numérique . . . 99
3.4 Propriétés thermomécaniques et métallurgiques du matériau . . . 101

3.4.1 Caractéristiques thermiques . . . 101
3.4.2 Caractéristiques métallurgiques . . . 102
3.4.3 Caractéristiques mécaniques . . . 104
3.5 Résultats des calculs numériques - Disque A . . . 106
3.5.1 Résultats thermiques . . . 106
3.5.2 Résultats métallurgiques . . . 109
3.5.3 Résultats mécaniques . . . 111
3.5.3.1 Cas de l'élastoplasticité . . . 111
3.5.3.2 Cas de l'élastoviscoplasticité . . . 114
3.5.3.3 Cas du modèle combiné . . . 117
3.6 Résultats des calculs numériques - Disque B . . . 120
3.6.1 Résultats thermiques . . . 121
3.6.2 Résultats métallurgiques . . . 123
3.6.3 Résultats mécaniques . . . 124
3.7 Conclusions . . . 127

Conclusions générales **129**

Bibliographie **132**

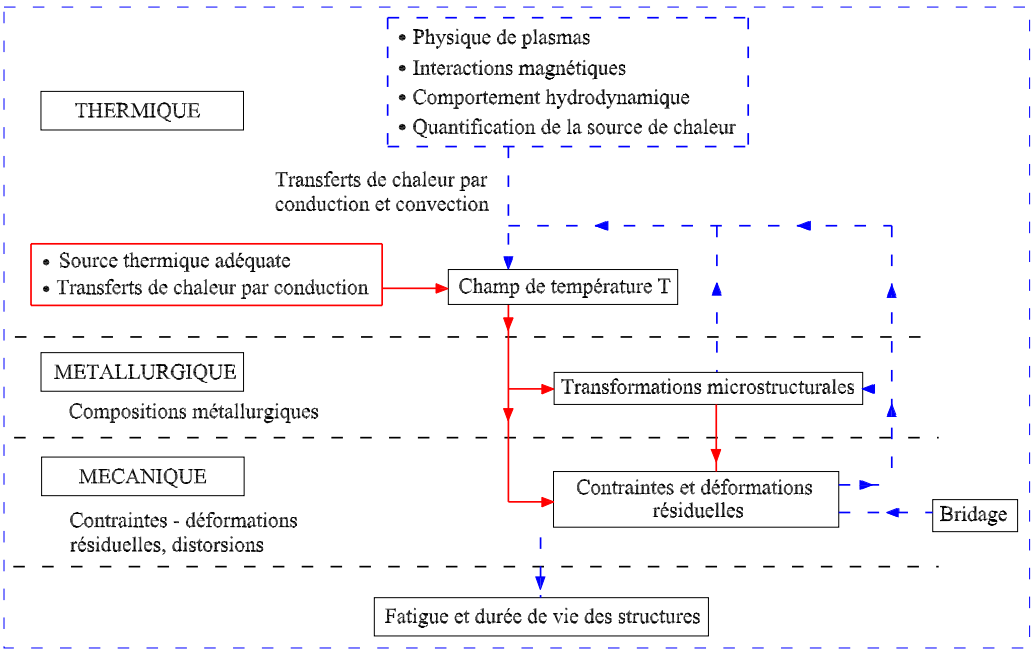
Introduction générale

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre la Direction de Construction Navale (DCN Propulsions) et l'Unité de Mécanique de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées (UME-ENSTA). L'objectif de ce travail consiste à prédire les contraintes et les déformations résiduelles dans les cuves de réacteurs nucléaires des sous-marins après une opération de soudage.

Le soudage est, aujourd'hui, le procédé d'assemblage le plus utilisé. Il joue un rôle très important dans tous les secteurs industriels. La tenue en service des assemblages soudés est une grande préoccupation industrielle avec des enjeux économiques importants.

L'étude des procédés de soudage apparaît actuellement comme un domaine de recherche à la fois ouvert et complexe car il demande de mettre en commun des connaissances issues de domaines distincts de la physique et de la mécanique. Ainsi, la description d'un des procédés le plus couramment utilisé, le soudage à l'arc, met en jeu des phénomènes physiques aussi variés que l'étude des plasmas, des interactions magnétiques et hydrodynamiques, la description et la quantification des transferts de chaleur, les modifications microstructurales des matériaux soudés, l'apparition de contraintes résiduelles, etc.

Le schéma suivant résume les différents phénomènes thermiques, métallurgiques et mécaniques qui peuvent être mis en jeu lors d'une opération de soudage.



Les opérations de soudage engendrent des gradients thermiques très importants dans le matériau. Ces gradients thermiques sont fortement localisés et entraînent des déformations incompatibles et, par conséquent, conduisent à l'apparition de champs de déformations et de contraintes résiduelles. D'autre part, les cycles thermiques du soudage peuvent engendrer des modifications microstructurales au sein du matériau. Ceci influence fortement le comportement mécanique du matériau et, en particulier, le niveau des contraintes résiduelles après soudage.

La distribution des contraintes résiduelles joue un rôle important sur la durée de vie des structures en favorisant les ruptures par fatigue, la fissuration et la corrosion tandis que les distorsions peuvent poser des problèmes de tolérances dimensionnelles des structures. Ainsi, une meilleure connaissance des contraintes résiduelles permet d'éviter l'emploi de coefficients de sécurité importants et donc d'optimiser le dimensionnement et l'allégement des structures soudées.

Dans cette optique, les simulations numériques par la méthode des éléments finis deviennent un outil particulièrement intéressant pour la prédiction des contraintes et des déformations résiduelles d'une opération de soudage. Cependant, la détermination des contraintes et des déformations résiduelles par simulation numérique présente des difficultés majeures car les phénomènes mis en jeu sont nombreux et complexes. Généralement, cela nécessite une modélisation du couplage des phénomènes thermiques, métallurgiques et mécaniques dans la zone affectée thermiquement des structures soudées, une modélisation de la source de la chaleur ainsi qu'une modélisation du bain de fusion.

La modélisation de la source de la chaleur et du bain de fusion d'une opération de soudage tient un rôle primordial dans la détermination de la quantité d'énergie mise en jeu ainsi que dans la prédiction de la forme du bain de fusion. Plusieurs travaux ont porté sur ce sujet : [Roger, 2000], [Roger, 2005], [Goldak *et al.*, 1984], [Fan et Shi, 1996], [Mahrle *et al.*, 2000], [Wu *et al.*, 1997], [Lu *et al.*, 2006], [Hu *et al.*, 2007].

La modélisation thermomécanique et métallurgique des matériaux intéresse particulèrement les chercheurs. Pour les aciers faiblement alliés, ([Giusti, 1981], [Denis *et al.*, 1985], [Denis *et al.*, 1987b], [Denis *et al.*, 1987a], [Waeckel, 1994], [Coret et Combescure, 2002]) ont proposé divers modèles qui rendent compte d'une partie de ces phénomènes (modèles de transformation de phase ou modèles de comportement mécanique du matériau multiphasé). Leblond *et al.* ([Leblond et Devaux, 1984], [Leblond *et al.*, 1986a], [Leblond *et al.*, 1986b], [Leblond *et al.*, 1989], [Leblond, 1989]) ont proposé des modèles complets permettant de prendre en compte tous les phénomènes mis en jeu lors du soudage ou du traitement thermique des aciers. Cependant, l'identification des paramètres du modèle semble difficile, le calcul du comportement mécanique du matériau multiphasé est possible uniquement dans certains cas particuliers et nécessite parfois des hypothèses contraignantes. De plus, l'extension du modèle pour le comportement mécanique d'un mélange de plusieurs phases (plus de deux phases) est difficile.

En ce qui concerne la modélisation du comportement du matériau, elle peut être réalisée suivant deux méthodes. La première s'appuie sur la connaissance de paramètres et de mécanismes de déformation microstructuraux. Ensuite, c'est par un passage micro-macro que les lois macroscopiques de comportement sont obtenues. La seconde s'inspire de la thermodynamique des processus irréversibles. Dans le cas où les variables d'état sont indépendantes, la méthode de deux potentiels est souvent utilisée [Germain, 1973]. Elle consiste principalement à introduire

deux potentiels : le potentiel thermodynamique $\mathcal{W}$ et le potentiel de dissipation $\mathcal{D}$, exprimés en fonction des variables d'état et de leurs vitesses.

Lorsque les variables d'état sont liées, la méthode des deux potentiels a été étendue en se basant sur le formalisme de Lagrange [Moumni, 1995]. Cela permet de prendre en compte des liaisons internes et de fournir des lois de comportement admissibles thermodynamiquement. Généralement, les équations d'état s'écrivent en fonction du lagrangien du système donné par :

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} - \lambda_i h_i, \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad h_i \geqslant 0 \quad \lambda_i h_i = 0 \tag{1}$$

Les λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux liaisons internes h_i.

La dissipation intrinsèque se réduit à :

$$\mathcal{D} = \mathcal{A}\dot{\alpha} \quad \mathcal{A} = -\mathcal{L}_{,\alpha} \tag{2}$$

A étant la force thermodynamique associée à sa variable duale α dans l'expression de l'énergie.

Dans ce cadre théorique, celui des matériaux standards généralisés avec des liaisons internes, des modèles unifiés pour des comportements thermomécaniques et de transformations de phase ont été récemment proposés pour les alliages à mémoire de forme ([Zaki et Moumni, 2007a], [Zaki et Moumni, 2007b], [Moumni *et al.*, 2008]). La solidité et la souplesse de cette approche, dans laquelle tous les phénomènes peuvent être pris en compte d'une manière unifiée, ont été démontrées. En outre, les résultats obtenus avec ces modèles sont tout à fait pertinents.

C'est dans ce cadre théorique que s'inscrit ma thèse. Nous proposons des modèles pour les structures métalliques sous chargements anisothermes avec la présence de transformations de phase à l'état solide au sein du matériau. Ces modèles permettent de décrire à la fois les cinétiques de transformations microstructurales ainsi que leurs effets sur le comportement thermomécanique des matériaux (matériaux multiphasés). Dans les modèles proposés, tous les phénomènes thermiques, mécaniques et métallurgiques ainsi que les interactions entre ces trois phénomènes lors d'une opération du soudage ou de traitement thermique des aciers peuvent être pris en compte. Cela permet, d'une part, une modélisation fine du comportement du matériau et d'autre part d'analyser l'influence de chaque phénomène sur le comportement du matériau. De plus, les modèles offrent la possibilité d'utiliser pour chaque phase métallurgique un comportement approprié. Par ailleurs, la mise en oeuvre numérique des modèles est simple. Tout cela constitue l'originalité de notre travail.

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre d'une étude globale de la modélisation du procédé de soudage, depuis la modélisation de l'arc jusqu'à la prévision des états mécaniques résiduels de soudage. Toutefois, nous nous focalisons ici sur les aspects montrés en traits pleins dans le diagramme précédent : la modélisation du comportement des matériaux multiphasés (modélisation de transformations microstructurales et de comportements mécaniques du mélange).

Ce travail s'articule en trois chapitres :

• Le premier chapitre présente un état de l'art de la modélisation numérique du soudage. Après un bref rappel sur les procédés de soudage, les conséquences thermiques, métallurgiques et mécaniques d'une opération du soudage sont présentées. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous faisons le point sur les modélisations thermiques, métallurgiques et mécaniques d'une opération de soudage. C'est aussi l'occasion de connaître les différentes voies utilisées

pour une modélisation complète d'une opération de soudage ainsi que les insuffisances des modèles présentés dans la littérature.

• Le deuxième chapitre est consacré à la présentation détaillée des modèles proposés pour les comportements thermomécaniques et métallurgiques des aciers. Cette présentation est précédée d'un rappel sur le cadre théorique dans lequel s'inscrit la modélisation, c'est à dire celui des matériaux standards généralisés avec des liaisons internes.

L'influence de différents phénomènes mis en jeu lors du soudage tels que la plasticité, la viscoplasticité et la plasticité de transformation (TRIP - **TR**ansformation **I**nduced **P**lasticity) sur le comportement mécanique du mélange est analysée selon une démarche séquentielle :

• d'abord, le comportement de chaque phase métallurgique dans le mélange est de type élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire,

• ensuite, un comportement élastoviscoplastique avec écrouissage cinématique et isotrope est utilisé pour chaque phase métallurgique,

• enfin, un modèle combiné est présenté. Dans ce modèle, le comportement des phases ferritiques est élastoplastique et celui de l'austénite est élastoviscoplastique.

Dans chaque cas, l'effet de la plasticité de transformation (TRIP) est pris en compte en ajoutant une variable macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$ présentant la déformation de plasticité de transformation.

• Le troisième chapitre présente la validation des modèles proposés par deux simulations numériques réalisées avec le code COMSOL Multiphysics. Ces deux simulations consistent à reproduire numériquement les deux essais représentatifs des phénomènes rencontrés lors d'une opération de soudage. Ces essais, publiés dans la littérature ([Cavallo, 1998], [Petit-Grostabussiat, 2000]), portent sur les disques en acier 16MND5 couramment utilisé dans la fabrication des cuves de réacteurs nucléaires. Les différences d'épaisseurs ainsi que d'apports de chaleur utilisés dans ces deux cas permettent de valider les modèles proposés dans diverses situations complexes. Les résultats obtenus pour différents cas nous permettent également d'analyser le rôle des phénomènes tels que la plasticité, la viscoplasticité et la plasticité de transformation sur la distribution finale des contraintes résiduelles.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Introduction

L'étude bibliographique réalisée tout au long de ce travail est exposée dans le premier chapitre de ce manuscrit. Elle a été rédigée dans la perspective de répondre à plusieurs questions inhérentes à ce travail de thèse : description d'une opération de soudage, conséquences thermomécaniques et métallurgiques du soudage, présentation des travaux existants.

Cette présentation s'articule en trois paragraphes.

Tout d'abord, une description générale du procédé de soudage à l'étude est présentée. Les principaux phénomènes mis en jeu lors d'une opération de soudage seront, ainsi, recensés.

Dans la deuxième partie, nous présentons les couplages entre les trois phénomènes thermiques, métallurgiques et mécaniques intervenant dans les opérations de soudage ou de traitement thermique.

La troisième partie est consacrée, quant à elle, à une étude bibliographique approfondie de la modélisation numérique du procédé de soudage, tant sur le plan thermique que sur les plans métallurgique et mécanique.

1.2 Procédé de soudage

1.2.1 Description d'une opération de soudage

Le soudage est un procédé qui permet de reconstituer la continuité métallique entre des éléments à assembler. Cette reconstitution implique le rétablissement des forces de liaison interatomiques de type métallique ce qui demande à la fois un rapprochement extrême des nœuds des réseaux cristallins et l'absence de tout corps étranger susceptible de constituer un défaut.

Théoriquement, l'installation de la liaison métallique consiste à rapprocher les surfaces à unir de telle sorte que les atomes superficiels parviennent à des distances de l'ordre de grandeur des distances internœuds de leur système cristallin propre.

Il existe trois types d'activation des surfaces permettant d'obtenir la liaison métallique [Blondeau, 2001]. Le premier type de processus d'activation, le plus efficace, est la fusion. La liaison métallique est crée par la solidification.

L'activation des surfaces peut aussi être obtenue par échauffement sans fusion. En général, elle est complétée par une action mécanique qui permet également le nettoyage et l'amélioration du contact des surfaces à assembler.

Enfin, l'activation des surfaces peut résulter d'une action mécanique sans échauffement global notable des pièces à assembler. Cette action mécanique provoque une plastification de l'extrême couche de chaque surface et engendre un échauffement très localisé permettant d'établir la liaison métallique.

Dans un processus de soudage, il y a plusieurs éléments qui peuvent influencer la qualité de la liaison. Parmi ces phénomènes, on peut citer : les irrégularités géométriques de la surface, la pollution de la surface et les éléments chimiques apportés par l'atmosphère ambiante.

Les irrégularités de la surface sont susceptibles de perturber l'installation de la liaison métallique. Dans ce cas, la fusion superficielle des pièces peut ne pas être obtenue et il sera alors nécessaire de procéder à une préparation des surfaces par action mécanique telle que le meulage ou l'usinage. Les pollutions des surfaces peuvent également être éliminées par action mécanique ou chimique.

Dans le cas d'un soudage à l'arc, l'oxygène, dans l'atmosphère ambiante, peut réagir avec les éléments vaporisés par l'arc et engendrer des fumées de soudage. Mais il peut surtout se dissoudre dans le métal fondu et contribuer, au cours de la solidification, à la formation d'oxydes métalliques dans le métal solidifié et de soufflures dans le métal fondu.

Lors du soudage, au voisinage du métal fondu, la surface du métal de base portée à haute température peut aussi réagir avec l'oxygène de l'air et se couvrir d'oxydes. Il est donc nécessaire d'utiliser des moyens de protection contre l'oxygène ambiant.

Les différents procédés de soudage se sont souvent différenciés par l'activation d'énergie, les modes d'action ou les moyens de protection contre l'atmosphère (*cf.* tableau 1.1).

Activation	Action complémentaire	Protection
Fusion	Sans	Impérative
	Compression	Facultative
Chauffage	Compression	Eventuelle
Frottement	Compression	Non

Tab. 1.1 : *Classement des procédés de soudage*

En réalité, les procédés de soudage peuvent également être classés soit par mode d'apport d'énergie nécessaire ou soit par mode de protection du métal chaud.

Dans notre étude, nous nous intéressons aux conséquences mécaniques du soudage de l'acier 16MND5 couramment utilisé dans la fabrication des cuves de réacteurs nucléaires. Dans ce cas, les technologies de soudage électrique à l'arc sont généralement utilisées. Afin de comprendre ce procédé, une brève description de ce procédé est présentée ci-dessous.

1.2.2 Procédé de soudage à l'arc

Le soudage à l'arc est un procédé d'assemblage par fusion de l'interface entre deux pièces conduisant à une continuité métallique. Dans ce procédé, la fusion du métal est assurée par une source d'énergie concentrée, constituée d'un plasma d'arc électrique. Le plasma est généré par collision d'électrons avec des molécules de gaz distribuées à travers une buse concentrique à l'électrode. La figure Fig.1.1 présente une configuration de soudage.

Le soudage à l'arc se décline en plusieurs catégories. Ces dernières se distinguent les unes des autres d'abord par le comportement de l'électrode qui peut être fusible ou non. Une électrode non-fusible, ou électrode réfractaire, est majoritairement composée de tungstène avec des

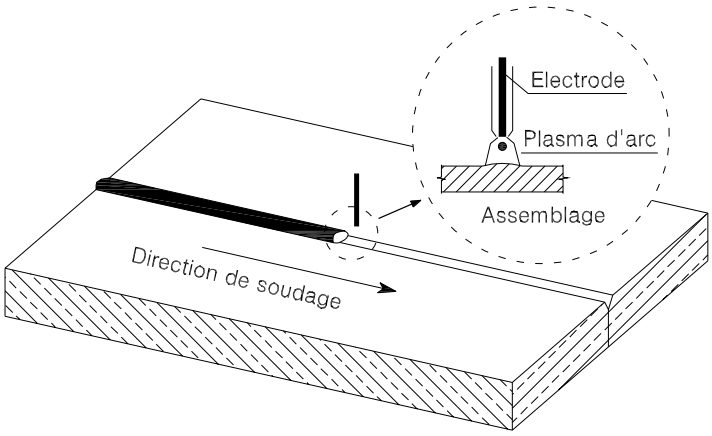


Fig. 1.1 : *Configuration de soudage à l'arc*

éléments d'addition tels que des oxydes métalliques. Elle alimente le plasma en électrons de façon continue et son extrêmité reste fixe par rapport au tube contact. Tandis que les électrodes fusibles sont des fils électrodes bobinés qui sont distribués de façon continue dans l'arc. La fusion de l'électrode alimente le bain de métal liquide qui réalise la jonction entres les pièces. La quantité d'énergie apportée à l'assemblage se partage entre le plasma et le dépôt du métal liquide.

Une autre distinction se fait par le type de protection du bain fondu. Elle est réalisée par le gaz de soudage qui isole la surface du bain fondu de la contamination par l'air ambiant. Le gaz de soudage peut être actif, s'il interagit chimiquement avec le bain de fusion (ex. CO_2), ou inerte, s'il n'y a pas d'échange chimique (ex. argon ou hélium). Il existe aussi des protections solides constituées de granulats qui recouvrent le bain de fusion et l'extrêmité de l'électrode. Une partie de ces granulats vont fondre et constituer une couche de laitier protecteur.

Le tableau 1.2 présente les procédés de soudage à l'arc répondant aux spécificités présentées ci-dessus [Roger, 2000].

Electrode fusible	Type de protection	Type de soudage	Signification	Autres notaions
non	gaz inerte	T.I.G	Tungsten Inert Gas	GTA - Gas Tungsten Arc
oui	gaz inerte	M.I.G	Metal Inert Gas	GMAW - Gas Metal Arc Welding
oui	gaz actif	M.A.G	Metal Active Gas	GMAW
oui	flux solide	Arc sous flux		SAW - Submerged Arc Welding

Tab. 1.2 : *Différents types de soudage à l'arc*

1.3 Conséquences du procédé de soudage

1.3.1 Conséquences thermiques du soudage

Les opérations de soudage engendrent des cycles thermiques qui conduisent à des changements de phase à l'état liquide et solide dans la zone soudée. Les cycles thermiques sont caractérisés par un chauffage suivi d'un refroidissement. L'amplitude et la durée de ce trajet thermique varie en fonction de la distance par rapport à la source de la chaleur qui peut être mobile (ex. soudage à l'arc) ou non (ex. soudage par résistance).

1.3.2 Conséquences métallurgiques du soudage

Les cycles thermiques du soudage conduisent à des modifications métallurgiques du matériau de base dans la zone où la température maximale obtenue au chauffage est suffisamment importante. Ces modifications métallurgiques dépendent de la composition chimique locale du matériau de base et des conditions de soudage telles que l'énergie de soudage, la vitesse de déplacement de la source de chaleur et les conditions de refroidissement.

1.3.3 Conséquences mécaniques du soudage

L'histoire thermique et les modifications de microstructures provoquées par le soudage s'accompagnent naturellement d'évolutions importantes des propriétés mécaniques par rapport au métal de base. D'autre part, la localisation de la source de chaleur ou autrement dit, les dilatations hétérogènes et les variations des propriétés mécaniques du matériau en fonction de la température et de la microstructure ainsi que les conditions de bridage des pièces engendrent les contraintes et les déformations résiduelles dans les structures après soudage.

1.3.4 Couplage thermique, métallurgique et mécanique

Lors d'une opération de soudage, les phénomènes physiques peuvent être répertoriés dans trois catégories :

- **thermique** : apport de chaleur, conduction et convection ;
- **métallurgie** : transformations allotropiques, évolutions microstructurales ;
- **mécanique** : contraintes et déformations résiduelles induites lors du soudage.

Les interactions entre ces trois phénomènes sont souvent représentées par la figure Fig.1.2 [Inoue et Wang, 1985].

Lors de la simulation numérique d'une opération de soudage, le calcul thermique permet de simuler le champ de température dans la pièce. Ce calcul nécessite la connaissance des caractéristiques thermiques, le comportement thermique du matériau ainsi que la quantification de l'apport de chaleur. Ce calcul est généralement à la base des calculs métallurgiques et mécaniques.

L'état métallurgique est ensuite obtenu à partir du champ de température, de l'état métallurgique du matériau de base et des cinétiques de transformation de phase pour chaque histoire thermique du soudage.

L'état mécanique est ensuite déterminé à partir de la loi de comportement et des chargements appliqués à la structure (bridage, chargement thermique, chargement mécanique). Il dépend très fortement des états thermiques et métallurgiques précédemment calculés. Le calcul mécanique fournit les champs de contraintes et déformations résiduelles.

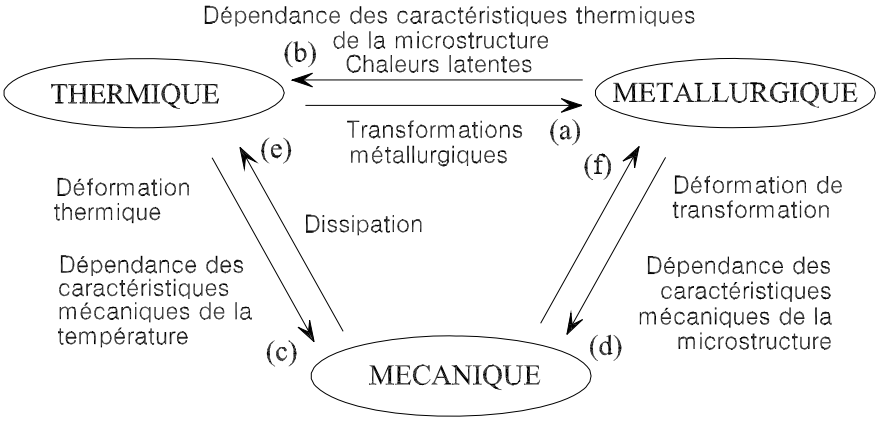


Fig. 1.2 : *Couplages entre les phénomènes thermique, métallurgique et mécanique induits lors d'une opération de soudage*

Généralement, les interactions entre ces différents phénomènes peuvent être classées en six catégories :

• a - Le premier type d'interaction représente l'influence de la température sur la microstructure de l'acier. Pour les aciers, il décrit l'effet de la température sur la cinétique de transformation de phase à l'état solide et le changement d'état liquide-solide.

• b - Le deuxième type d'interaction couvre l'influence de l'état métallurgique sur l'état thermique. Il est caractérisé par les chaleurs latentes de changement d'état liquide-solide et de transformations de phase à l'état solide et par la dépendance des caractéristiques thermiques de la microstructure.

• c - Le troisième type d'interaction représente l'influence de la température sur l'état mécanique du matériau. Il provient de la dépendance des caractéristiques mécaniques de la température et de la dilatation thermique du matériau.

• d - Le quatrième type d'interaction représente l'influence de l'état métallurgique sur l'état mécanique, il décrit la dépendance du comportement du matériau par rapport à l'évolution de la microstructure et permet d'obtenir une déformation de transformation (TRIP - **TR**ansformation **I**nduced **P**lasticity).

• e - Le cinquième type d'interaction décrit l'influence de l'état mécanique sur l'état thermique par la prise en compte des dissipations dues aux mécanismes irréversibles.

• f - Le sixième type d'interaction concerne l'influence de l'état mécanique sur les cinétiques de transformation métallurgique.

1.4 Etude bibliographique

L'objet de ce travail est l'évaluation des conséquences mécaniques du soudage des aciers avec la prise en compte des aspects métallurgiques. Nous avons donc orienté notre étude bibliographique sur les travaux réalisés dans un but similaire. Les modélisations étudiées concernent les matériaux présentant des transformations microstructurales lors des opérations de soudage. Il s'agit donc de la modélisation des phénomènes thermiques, métallurgiques et mécaniques ainsi que les interactions entre ces trois phénomènes dans la zone affectée thermiquement. C'est

pourquoi, pour la clarté de la présentation, nous avons choisi de scinder cette étude bibliographique en trois parties successives, respectivement consacrées à la modélisation thermique, métallurgique et mécanique.

1.4.1 Modélisation thermique

L'objectif du problème thermique est de trouver l'évolution du champ de température dans la pièce au cours du soudage jusqu'à refroidissement complet. Pour la plupart des procédés de soudage, l'apport de chaleur est utilisé pour fondre le métal des pièces à assembler et permet la formation d'un bain de métal fondu. Donc, dans le cas du soudage à l'arc, pour pouvoir prédire précisément la température dans la structure, la modélisation thermique nécessite, en plus d'une modélisation des transferts de chaleur par conduction dans la partie solide, la modélisation des transferts de chaleurs thermofluides dans l'arc électrique, la prise en compte des phénomènes électromagnétiques, la modélisation des mouvements convectifs dans le bain fondu en interaction avec le plasma de couverture.

La modélisation de l'arc électrique et du bain de fusion d'une opération de soudage joue un rôle prépondérant dans la détermination de la quantité d'énergie mise en jeu ainsi que dans la prédiction de la forme du bain de fusion. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce sujet, on peut citer entre autres les travaux de ([Goldak *et al.*, 1984], [Fan et Shi, 1996], [Li et Wu, 1997], [Wu *et al.*, 1997], [Kim et Na, 1998], [Mahrle *et al.*, 2000], [Roger, 2000], [Fan *et al.*, 2001], [Roger, 2005], [Lu *et al.*, 2006], [Hu *et al.*, 2007]). Dans le cadre de notre étude, nous avons focalisé notre attention sur une modélisation fine de la loi de comportement en vue de la détermination des états résiduels des structures soudées. Généralement, ces simulations numériques sont réalisées en utilisant les codes de calcul qui ne permettent pas de modéliser l'arc électrique et le bain de fusion. C'est pourquoi, l'arc électrique sera modélisé par une source de chaleur équivalente, par ailleurs, la fusion du métal sera prise en compte en modifiant les propriétés thermophysiques de façon adéquate. En définitive, dans la modélisation thermique, seule la conduction de la chaleur sera modélisée.

1.4.1.1 Equation de la chaleur

La figure Fig.1.3 représente les conditions aux limites du problème thermique. T_d et q_d sont respectivement la température et le flux de chaleur imposés sur les frontières $\partial_1\Omega$ et $\partial_2\Omega$ du domaine considéré Ω.

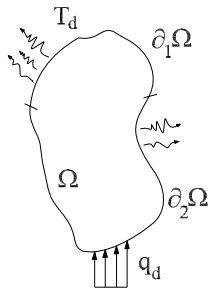


Fig. 1.3 : *Conditions aux limites thermiques*

Pour la modélisation thermique, il est nécessaire de résoudre l'équation de chaleur qui s'écrit sous la forme locale en adoptant la loi de Fourier :

$$\rho\dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - r - div(k.\nabla T) = 0 \tag{1.1}$$

T étant la température à calculer, ρ la masse volumique, e la densité massique d'énergie interne, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations, k la conductivité thermique et r une éventuelle source de chaleur volumique.

On se place dans le cadre de petites pertubations. Ceci permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{an} \tag{1.2}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{an}$ sont respectivement les tenseurs de déformations totale, élastique et anélastique.

On note χ les autres variables internes, χ peut par exemple caractériser la structure métallurgique. On suppose aussi que la densité massique d'énergie libre ψ est une fonction de la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, de la température T et de la variable interne χ, c'est-à-dire :

$$\psi \overset{\text{def}}{=} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \chi) \tag{1.3}$$

D'autre part, on a la relation suivante entre la densité massique d'énergie libre ψ et la densité massique d'énergie interne e, (s désigne l'entropie) :

$$\psi(t) = e(t) - T(t).s(t) \tag{1.4}$$

De plus, on a les deux lois d'état usuelles de la thermodynamique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad \text{et} \qquad s = -\frac{\partial\psi}{\partial T} \tag{1.5}$$

En utilisant l'équation (1.4) pour e avec la prise en compte des relations (1.5), l'équation de la chaleur (1.1) devient :

$$-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}T\dot{T} + \rho\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\chi} - T\frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial\chi}\Big)\dot{\chi} - \boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{an} - \rho T\frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = r + div(k\nabla T) \tag{1.6}$$

Dans le cas du soudage de l'acier, l'apport de chaleur est très élevé et donc, par rapport à cette quantité d'énergie, la puissance mécanique dissipée (le terme $\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{an}$ dans (1.6)) et l'énergie due au couplage thermo-mécanique (le terme $\rho T\frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ dans(1.6)) sont souvent négligées ([Giusti, 1981], [Karlsson et Lindgren, 1991], [Waeckel, 1994]).

Ainsi, l'équation de chaleur s'écrit :

$$-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}T\dot{T} + \rho\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\chi} - T\frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial\chi}\Big)\dot{\chi} = r + div(k\nabla T) \tag{1.7}$$

Dans le cas où χ représente la structure métallurgique du matériau (ex. la proportion volumique des phases), le terme $\big(\rho(\frac{\partial\psi}{\partial\chi} - T\frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial\chi})\big)$ correspond aux chaleurs latentes de changement de phase. Les chaleurs latentes de transformations microstructurales à l'état solide sont relativement faibles et leur effet est relativement limité [Waeckel, 1994], ils seront donc négligées.

Finalement, l'équation de chaleur peut s'écrire :

$$-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}T\dot{T} = r + div(k\nabla T) \tag{1.8}$$

Les caractéristiques thermiques du matériau, telles que la chaleur spécifique et la conductivité thermique, peuvent être fonction de la température et de la microstructure. Une façon

simple de déterminer les caractéristiques thermiques du mélange de différentes phases métallugiques est d'utiliser la loi de mélange linéaire ([Inoue et Wang, 1985], [Petit-Grostabussiat, 2000], [Chen *et al.*, 2008]).

$$Cr = \sum_i z_i Cr_i \tag{1.9}$$

Cr étant la caractéristique du mélange, z_i la proportion volumique de la phase i et Cr_i la caractéristique correspondante de la phase i.

1.4.1.2 Conditions aux limites

La pertinence d'un calcul thermique dépend principalement de la modélisation des transferts de chaleur entre la pièce à souder et le milieu extérieur ainsi que des apports de chaleur dans le cas de soudage. On distingue deux cas :

- Dans la zone d'action du plasma d'arc, l'action thermique de l'arc est représentée par une distribution de flux de chaleur normal entrant :

$$q(\underline{x}, t) = -k\nabla T = q_0(\underline{x}, t) \tag{1.10}$$

q_0 étant le flux de chaleur apporté par le plasma d'arc où le vecteur $\underline{x}$ représente les coordonnées du point considéré.

- Hors de la zone d'action du plasma d'arc, il est d'usage de considérer que les surfaces en contact avec l'air ambiant sont soumises à des conditions de convection naturelle et de rayonnement :

$$q(\underline{x}, t) = -k\nabla T = h(T - T_{ext}) + \hat{\sigma}\hat{\epsilon}(T^4 - T_{ext}^4) \tag{1.11}$$

h étant le coefficient de convection, $\hat{\sigma}$ la constante d'Helmoltz, $\hat{\epsilon}$ le facteur d'émissivité, T_{ext} la température ambiante prise égale à $293^{\circ}K$ et T la température à la surface de contact de la pièce.

L'apport de chaleur du plasma d'arc est considéré comme le chargement du problème thermique et sa quantification joue un rôle primordial dans la simulation numérique du soudage. Cependant, l'apport de chaleur nécessaire à la fusion des matériaux à assembler est très complexe et dépend fortement du procédé de soudage, par conséquent, la modélisation de l'apport de chaleur reste délicate. La modélisation de la source de chaleur est présentée dans le paragraphe suivant.

1.4.1.3 Modélisation de la source de chaleur

Pour les procédés de soudage mettant en jeu de fortes densités d'énergie, comme le soudage par faisceau d'électrons ou le soudage laser, l'énergie est déposée en profondeur dans un capillaire. Ce dernier est considéré comme une source volumique de chaleur tandis que, simultanément, la vaporisation d'une partie du métal et le plasma agissent comme une source surfacique de chaleur. Dans ce cas, la source de chaleur est souvent modélisée comme la superposition d'une source volumique et d'une source surfacique de chaleur ([Du *et al.*, 2004], [Tian *et al.*, 2007], [GouMing *et al.*, 2007]).

Dans le cas du soudage à l'arc (ex. soudage TIG, MIG, MAG), l'énergie provenant du plasma d'arc est déposée en surface. L'apport de chaleur peut ainsi être modélisé comme une source surfacique de chaleur. Parfois, pour le soudage TIG, le bain de fusion peut être considéré comme

une source interne de chaleur, on peut alors modéliser le plasma d'arc et le bain de métal fondu par une source volumique de chaleur de forme adéquate [Goldak *et al.*, 1984].

L'apport de chaleur dépend également de la présence ou non de métal d'apport ainsi que du type de procédé monopasse ou multipasse. Sans rentrer dans le détail de tous les modèles de sources de chaleur, nous présentons, dans ce paragraphe, quelques modèles simples de source de chaleur souvent utilisés dans la simulation numérique des procédés de soudage ou de traitement thermique des aciers.

1.4.1.3.1 Energie transmise par l'arc

Dans le cas du soudage à l'arc électrique, la puissance transmise à la surface de la pièce s'écrit :

$$Q = UI \qquad \text{(exprimée en } W \text{ ou en } J/s) \tag{1.12}$$

U étant la tension de soudage, exprimée en V et I le courant de soudage, exprimé en A.

En réalité, seule une fraction de cette énergie sert effectivement à chauffer et faire fondre la pièce, le reste étant échangé avec l'extérieur par convection et rayonnement autour de la colonne d'arc et du bain fondu. Etant donné que les phénomènes physiques complexes présents dans l'arc et les mouvements de convection dans le bain fondu ne sont pas modélisés, seul un paramètre η de rendement, inférieur à 1, est incorporé à la modélisation de l'apport de chaleur de façon à englober l'ensemble des pertes. La puissance nette utile transmise à l'assemblage s'écrit alors :

$$Q_{net} = Q_0 = \eta UI \tag{1.13}$$

Cette puissance nette absorbée peut être répartie soit en surface (source surfacique) soit en volume (source volumique). Nous présentons ici quelques modèles de sources surfaciques et volumiques souvent utilisés pour la simulation numérique en notant que les expressions sont écrites dans un repère lié à la source de chaleur.

1.4.1.3.2 Sources surfaciques

Si l'apport de chaleur est réparti en surface, la densité de flux surfacique est représentée par :

$$q(x, y) = Q_m.f(x, y) \tag{1.14}$$

$f(x, y)$ est la fonction de répartition surfacique et Q_m est le maximum de la densité de puissance exprimé en (W/m^2).

Lors du soudage à l'arc, le flux de chaleur atteint la plus grande densité dans la partie centrale de la zone d'action du plasma d'arc. Lorsqu'on s'éloigne de la zone centrale, la densité de flux calorifique diminue. On peut supposer que la densité de flux suit la loi de répartition des probabilités de Gauss. Pour la répartition surfacique, la fonction Gaussienne s'écrit souvent sous la forme :

$$Q(x, y) = Q(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} exp\Big(- \frac{r^2}{2\sigma^2}\Big) \tag{1.15}$$

$r^2 = x^2 + y^2$ et σ est l'écart type de la gaussienne caractérisant l'étalement spatial de la gaussienne.

Le flux de chaleur surfacique s'écrit donc :

$$q(x,y) = q(r) = Q_m.exp(-Kr^2) \qquad \text{avec} \qquad K = \frac{1}{2\sigma^2} \tag{1.16}$$

D'autre part, nous utilisons la relation suivante pour la puissance totale émise :

$$Q_0 = \eta UI = \int_0^\infty q(r).dS = \int_0^\infty q(r).2\pi r.dr = \frac{\pi Q_m}{K} \tag{1.17}$$

Enfin, nous obtenons :

$$Q_m = Q_0 \frac{K}{\pi} \tag{1.18}$$

L'expression (1.16) représente une répartition mathématique gaussienne infinie (*cf.* Fig.1.4). En pratique, on fixe souvent un rayon limite R_s de la tâche calorifique, tel que ce rayon définisse un flux thermique fini. Ce rayon est conventionnellement fixé de sorte que le flux q(R_s) soit égal à 5% du flux maximal situé au centre de la tâche calorifique $q(R_s) = 0.05Q_m$. Nous avons :

$$q(R_s) = Q_m.exp(-KR_s^2) = 0.05.Q_m \qquad \Leftrightarrow \qquad K \simeq 3/(R_s^2) \tag{1.19}$$

Et le flux de chaleur s'écrit :

$$q(x,y) = q(r) = \frac{3Q_0}{\pi R_s^2} exp\Big(-\frac{3r^2}{R_s^2}\Big) \tag{1.20}$$

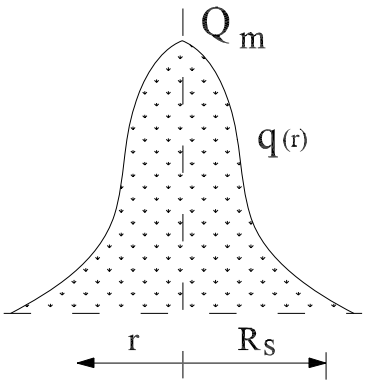


Fig. 1.4 : *Source surfacique*

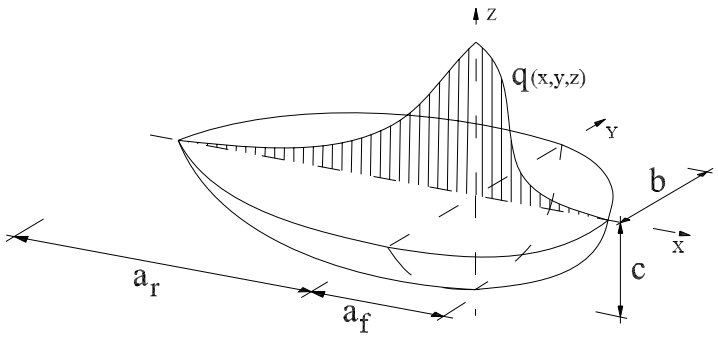


Fig. 1.5 : *Source volumique*

1.4.1.3.3 Sources volumiques

Si la puissance est répartie en volume, on modélise l'apport de chaleur comme une source interne de chaleur, c'est-à-dire une densité volumique de flux de chaleur appliquée au sein du matériau. Ce dernier type de modélisation est plus adapté lorsqu'on veut englober dans la formulation de l'apport de chaleur la contribution énergétique des phénomènes qui ont lieu dans le bain fondu. Le flux de chaleur, exprimé en W/m^3, s'écrit alors :

$$q(x,y,z) = Q_m.g(x,y,z) \tag{1.21}$$

$$\int_V q(x,y,z).dV = Q_0 \tag{1.22}$$

$g(x, y, z)$ étant la fonction de répartition volumique, maximale en ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$), c'est-à-dire au point situé directement sous la source.

La forme souvent utilisée par la fonction de répartition $g(x, y, z)$ peut être une demi-sphère, une ellipsoïde ou une double ellipsoïde.

Nous présentons ici un modèle de source volumique de chaleur très utilisé dans la simulation numérique de soudage ($cf.$ Fig.1.5). Cette source volumique adopte une forme double ellipsoïde pour le flux de chaleur et s'écrit [Goldak *et al.*, 1984] :

$$q_f(x, y, z) = Q_0 \frac{6\sqrt{3} f_f}{a_\xi b c \pi^{3/2}} exp(\frac{-3x^2}{a_\xi^2}) exp(\frac{-3y^2}{b^2}) exp(\frac{-3z^2}{c^2}) \tag{1.23}$$

$$q_r(x, y, z) = Q_0 \frac{6\sqrt{3} f_r}{a_\xi b c \pi^{3/2}} exp(\frac{-3x^2}{a_\xi^2}) exp(\frac{-3y^2}{b^2}) exp(\frac{-3z^2}{c^2}) \tag{1.24}$$

avec $\xi = f$ ou r selon que x est positif ou négatif (voir figure Fig.1.5)

$$f_f + f_r = 2 \tag{1.25}$$

et pour assurer la continuté en $x = 0$, on doit avoir :

$$f_f = \frac{2a_f}{a_f + a_r} \qquad \text{et} \qquad f_r = \frac{2a_r}{a_f + a_r} \tag{1.26}$$

1.4.1.4 Conclusion

En ce qui concerne la modélisation thermique d'une opération de soudage, on estime que les difficultés résident principalement dans la modélisation de la source de chaleur ainsi que dans l'estimation de la quantité d'énergie utile pour le chauffage des pièces métalliques. La modélisation de l'arc électrique et du bain de fusion joue un rôle très important dans la détermination de la quantité d'énergie mise en jeu ainsi que dans la prédiction de la forme de bain de fusion. Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes intéressés essentiellement à la loi de comportement thermomécanique et métallurgique afin de déterminer l'état résiduel des structures soudées. Généralement, ces simulations numériques sont réalisées en utilisant des codes de calcul qui ne permettent pas de modéliser l'arc électrique et le bain de fusion. C'est pourquoi, la physique de l'arc et du bain de fusion n'est pas traitée. Pour ces aspects, nous renvoyons le lecteur aux articles suivants ([Fan et Shi, 1996], [Li et Wu, 1997], [Wu *et al.*, 1997], [Kim et Na, 1998], [Mahrle *et al.*, 2000], [Roger, 2000], [Roger, 2005], [Gery *et al.*, 2005], [Lu *et al.*, 2006]). Dans ce cas, l'arc électrique sera modélisé par une source de chaleur équivalente. Par ailleurs, la fusion du métal sera prise en compte en modifiant des propriétés thermophysiques de façon adéquate. Ainsi, dans la modélisation thermique, seule la conduction de la chaleur sera modélisée.

1.4.2 Modélisation métallurgique

Pour les aciers faiblement alliés, les cycles thermiques induits par les procédés de soudage engendrent des modifications microstructurales dans le matériau. Ces modifications microstructurales influent fortement sur l'état résiduel mécanique des structures soudées. L'objectif de cette modélisation est de déterminer l'état métallurgique des structures, les facteurs influençant la transformation de phase ainsi que les cinétiques de transformation de phase à l'état solide.

1.4.2.1 Phases métallurgiques

On appelle phase métallugique la partie d'un matériau, physiquement distincte, mécaniquement séparable, dont la composition (nature et proportion) et l'organisation atomique (structure cristalline ou autre) des éléments qui la composent ne dépendent que de sa température et de son niveau de pression.

Pour le fer et plus généralement pour tous les corps purs, les différentes phases métallurgiques possibles sont l'état gazeux, l'état liquide ou les différentes variétés allotropiques (structures cristallines) sous lesquelles le corps pur considéré peut exister à l'état solide.

Pour les alliages Fer-Carbone, et plus généralement pour tous les aciers, à l'état solide, deux types de phases métallugiques peuvent être rencontrés : les solutions solides et les composés définis.

Les solutions solides sont caractérisées par le caractère métallique de leurs liaisons inter-atomiques. Elles ont, pour de faibles concentrations de soluté, la même structure cristalline que le solvant. Elles peuvent être de substitution ou d'insertion. En revanche, dans le cas des composés définis, les liaisons inter-atomiques perdent, plus ou moins selon les cas, leur caractère métallique au profit d'un caractère ionique. Leur structure cristalline est différente de celle du solvant et du soluté et, contrairement aux solutions solides pour lesquelles la proportion de soluté peut varier à l'intérieur d'un intervalle de solubilité, ils correspondent à une stœchiométrie fixée.

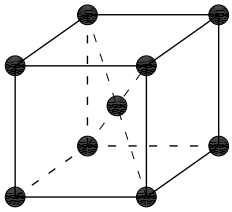


Fig. 1.6 : *Structure cubique centrée (α)*

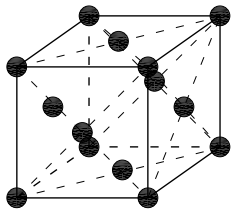


Fig. 1.7 : *Structure cubique à face centrée (γ)*

Selon la température et le niveau de pression, la structure métallurgique (variété allotropique) du fer peut être cubique centrée (fer α ou fer δ), cubique à face centrée (fer γ) ou hexagonale (fer ϵ) (*cf.* Fig.1.6 et Fig.1.7) .

Pour les alliages Fer–Carbone et plus généralement pour les aciers faiblement alliés, on distingue, à l'état solide, quatre phases métallurgique différentes :

• la ferrite qui est une solution solide d'insertion de carbone dans le fer α. Son réseau cristallin est cubique centré,

• la cémentite qui est un carbure de fer de type composé défini de formule stœchiométrique Fe_3C dont la maille est orthorhombique,

• la perlite, mélange hétérogène de ferrite et de cémentite à 0.85% en masse de carbone, peut être lamellaire ou globulaire. La perlite lamellaire est l'alternance de lamelles de ferrite et de cémentite dont l'épaisseur et les écarts dépendent de la vitesse de refroidissement tandis que la perlite globulaire est formée de petits globules blancs de Fe_3C de contour noir sur fond de ferrite,

• l'austénite qui est une solution solide d'insertion de carbone dans fer γ dont le réseau cristallin est cubique à face centrée. C'est le constituant intermédiaire de durcissement par trempe, après chauffage (austénitisation) et avant refroidissement (trempe). Si la vitesse de refroidissement est trop rapide, la diffusion de carbone vers l'extérieur de l'austénite n'a pas le temps de se produire, par conséquent le carbone reste emprisonné dans la ferrite. Lorsque

cette transformation intervient, la ferrite est sursaturée en carbone et donne la formation de structures bainitiques et martensitiques.

1.4.2.2 Transformation de phase

Les transformations de phases à l'état solide des aciers résultent de la combinaison du changement du réseau cristallin du fer et du déplacement des atomes de soluté (principalement le carbone), qui restent en solution ou précipitent sous forme de carbures ou d'autres composés définis (nitrures, sulfures...). La précipitation est l'apparition de particules ou de cristaux d'une nouvelle phase dans un alliage initialement homogène. Elle peut être considérée comme une transformation de phases.

D'une manière générale, les déplacements atomiques peuvent s'effectuer soit par diffusion soit par une déformation coordonnée d'une partie du réseau. Cette distinction permet de classer les transformations de phases en deux familles : transformations diffusionnelles et transformations martensitiques.

1.4.2.2.1 Transformation par diffusion

Pour ces transformations, le déplacement des atomes de soluté est assez important (de l'ordre de plusieurs distances inter-atomiques). La diffusion atomique étant plus facile à haute température, ces transformations ne se produisent que pour des vitesses de variation de température assez faibles pour que la diffusion ait le temps de se réaliser.

Les transformations par diffusion se déroulent toujours en deux étapes : la germination et la croissance. Dans la première, les nouvelles phases apparaissent sous la forme de germes engendrant des interfaces avec le cristal mère. La réaction se poursuit par progression de l'interface dans l'étape de la croissance.

Pour les aciers faiblement alliés, dans le cas du soudage ou de la trempe, les transformations au chauffage (austénitisation) ou transformation au refroidissement de l'austénite en ferrite sont, par exemple, des transformations diffusionnelles.

1.4.2.2.2 Transformation martensitique

Pour les aciers, lors d'un refroidissement rapide à partir des hautes températures où existe l'austénite, la diffusion n'a pas le temps de se produire et on obtient des solutions sursaturées en carbone. Ce changement de réseau cristallin se produit par cisaillement et sans variation locale de composition. On appelle cette transformation la transformation martensitique.

Il faut noter que certaines transformations hors d'équilibre peuvent procéder des deux types précédents. Elles débutent par le cisaillement du réseau cristallin et se poursuivent par la diffusion plus ou moins importante des atomes de soluté. Elles se produisent pour des vitesses de refroidissement intermédiaires et donnent naissance à un constituant hors d'équilibre. Pour les aciers faiblement alliés, ce constituant s'appelle *la bainite* et ces transformations sont dites *bainitiques*.

1.4.2.3 Diagramme d'équilibre et transformation au chauffage

Les diagrammes d'équilibre permettent de définir, pour un niveau de pression donné, la nature et la composition chimique des différentes phases en présence à l'état d'équilibre thermodynamique dans un alliage en fonction de sa température et de sa composition. Ce diagramme

n'est valable que pour des évolutions de température très lentes. Alors que les cycles thermiques industriels sont souvent rapides, donc, ces diagrammes ne sont plus applicables pour prévoir la nature exacte des différentes phases. Cependant il est commode d'utiliser ce type de diagramme pour interpréter qualitativement les modifications microstructurales au voisinage de la ligne de fusion des structures soudées [Easterling, 1983].

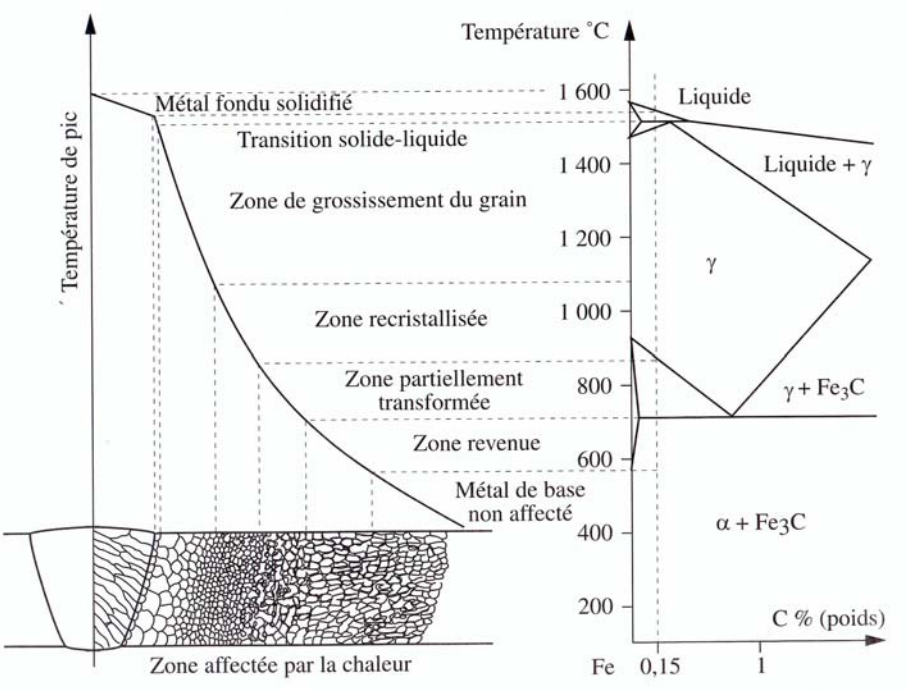


Fig. 1.8 : *Présentation schématique des différentes parties constitutives d'un joint soudé (Alliage Fe-0.15%C) [Easterling, 1983]*

Pour le soudage, le chauffage est fortement localisé et la température maximale atteinte est très hétérogène. En se rapprochant de la zone fondue, on rencontre successivement les zones suivantes (*cf.* Fig.1.8) :

• Le métal de base où les transformations de phase au chauffage (austénitisation) n'ont pas eu lieu et qui ne sera le siège d'aucune transformation microstructurale au refroidissement. La température maximale atteinte dans cette zone est inférieure à la température de début de l'austénitisation Ac_1.

• Une zone affectée thermiquement (ZAT) pour laquelle la température maximale atteinte en chaque point est supérieure à la température Ac_1. Elle se subdivise encore en deux zones : une où l'austénitisation n'a été que partielle et autre où elle a été totale. Dans la zone de transformation partielle, la température maximale en chaque point est inférieure à la température de fin de l'austénitisation Ac_3. Par conséquent, on trouve, en début de refroidissement, un mélange des phases ferritiques initiales et la phase austénique nouvellement formée. Dans la zone de transformation totale, la température maximale en chaque point est supérieure à la température Ac_3 et la nouvelle phase ainsi formée remplace et efface toutes traces des phases ferritiques antérieures. C'est au sein de cette zone qu'intervient un grossissement des grains austénitiques : de très petite taille à des températures légèrement supérieures à Ac_3, cette taille peut atteindre quelques centaines de microns pour les plus hautes températures [Easterling, 1983].

• Le métal fondu pour lequel la température maximale en chacun de ses points est supérieure à la température de fusion. Cette zone possède une structure totalement austénitisée et une composition différente de celle du métal de base en raison de la vaporisation de certains éléments, des réactions avec le milieu environnant et de la dilution avec le métal d'apport.

Outre ces modifications structurales, les opérations de soudage ont une influence remarquable sur les précipités présents dans le métal de base. Mais dans le calcul mécanique des structures soudées, ces phénomènes métallurgiques sont généralement négligés.

1.4.2.4 Transformation au refroidissement

Dans le cas des aciers de construction métallique, les microstructures observées dans les ZAT des joints soudés correspondent aux produits de décomposition de l'austénite et les structures métallurgiques obtenues sont éventuellement le mélange de phases ferritiques (ferrite-perlite, bainite et martensite). Ces transformations dépendent des cinétiques de refroidissement et pour une histoire thermique quelconque, il est difficile de prévoir la structure métallurgique finale obtenue à partir d'un état métallurgique initial. Il semble que seule une analyse micrographique minutieuse peut la révéler en détail [Giusti, 1981].

En général, les cycles thermiques des opérations de soudage ou de traitement thermique se sont simplement constitués des chauffages et des refroidissements. On peut donc utiliser les diagrammes préétablis pour prévoir les plages de température de transformation de phase ainsi que l'état métallurgique final obtenu à partir d'un état austénitique initial.

Pour les transformations isothermes, il s'agit des diagrammes T.T.T (**T**ransformation-**T**emps-**T**empérature) qui permettent de décrire la transformation de l'austénite en fonction du temps à une température donnée. Mais en réalité, la condition anisotherme est souvent dominante dans les opérations industrielles, les diagrammes T.R.C (**T**ransformation en **R**efroidissement **C**ontinu) sont ainsi très souvent utilisés pour décrire la décomposition de l'austénite au refroidissement. Ces diagrammes sont généralement établis à partir d'essais dilatométriques (dilatométrie absolue) pour différentes vitesses de refoidissement en s'appuyant sur les anomalies apparues sur les courbes dilatométriques dues aux changements de volume spécifique lors de transformations de phases. Par exemple, le diagramme T.T.T et le diagramme T.R.C de l'acier 41Cr4 sont présentés sur la Fig.1.9.

Sur le diagramme T.R.C, on observe que selon la vitesse de refroidissement, différents types de microstructures peuvent être obtenus lors de la décomposition de l'austénite :

• pour des vitesses de refroidissement très lentes, on obtient des structures ferrito-perlitiques,

• des structures martensitiques se forment pour des vitesses de refroidissement très rapides,

• pour des vitesses de refroidissement intermédiaires, des structures bainitiques se sont formées.

Conformément aux notions mentionnées dans le paragraphe 1.4.2.2, les transformations de l'austénite en ferrite, perlite ou bainite sont diffusionnelles et les transformations de l'austénite en martensite sont de type martensitique.

Il est à noter que les essais dilatométriques sont réalisés à des températures relativement basses (900-950°C) et pour de longs temps de maintien. Cette situation est effectivement contraire à celle rencontrée en ZAT des structures soudées. Afin de se placer dans des condi-

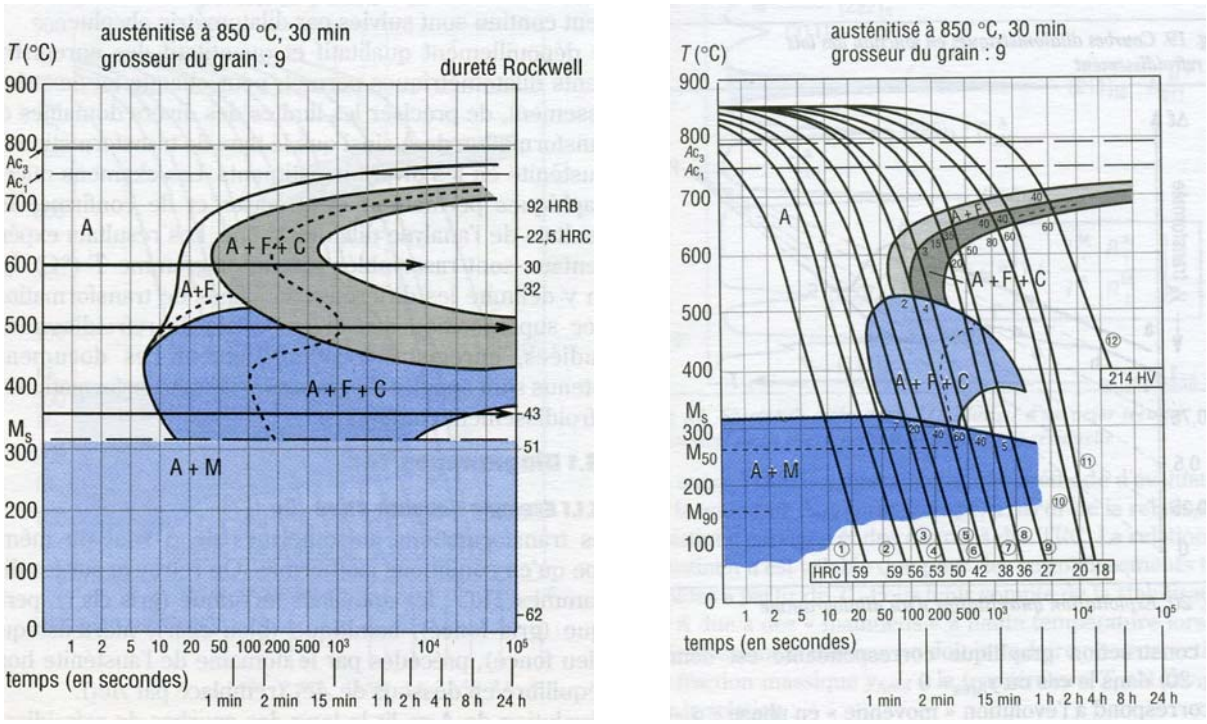


Fig. 1.9 : *Diagramme T.T.T (gauche) et T.R.C (droite) de l'acier 41Cr4 [Barralis et Maeder, 1988], (A : austénite, F : ferrite, C : cémentite, M : martensite).*

tions plus représentatives, on peut utiliser les diagrammes T.R.C établis à partir des essais dilatométriques réalisés avec des cycles thermiques proches de ceux rélévés dans les conditions de soudage.

1.4.2.5 Facteurs influençant les transformations

1.4.2.5.1 Influence de la taille de grain de l'austénite

Une fois austénitisé, la taille des grains austénitiques peut évoluer rapidement en fonction de la température. Comme les transformations par diffusion se déroulent toujours en deux étapes (germination et croissance) et que d'autre part, la germination se développe essentiellement aux joints des grains, par conséquent, l'augmentation de la taille des grains austénitiques conduit à une augmentation de la durée de germination des transformations diffusionnelles en refroidissement. Pour les transformations martensitiques, il semble que plus la taille de grain d'austénite est grande, plus la température de début de transformation M_s est élevée [Cavallo, 1998].

Il est à noter que les diagrammes T.T.T et T.R.C sont établis pour des conditions d'austénitisation données (la température maximale atteinte et le temps du maintien isotherme donné conduisent à une taille de grain correspondante) et ne devraient être utilisés en toute rigueur que pour des conditions d'austénitisation similaires.

1.4.2.5.2 Influence de la teneur en carbone

Les transformations de phases des aciers sont gouvernées par la possibilité de diffusion de carbone, toute variation de la concentration moyenne en carbone modifie donc les transformations

de phase. Le carbone stabilisant l'austénite, plus la teneur en carbone est forte, plus la ferrite a besoin de temps pour se former. Dans ce cas, les diagrammes T.T.T et T.R.C sont décalés vers les temps longs. Les autres éléments de l'alliage (molybdène, chrome...) jouent un rôle similaire, puisque leur solubilité est différente entre les deux phases. Des relations empiriques linéaires ont été établies définissant les températures de début et de fin de transformation en fonction de la teneur en carbone et en éléments d'alliage. Par exemple, les formules d'Andrews [Barralis et Maeder, 1982] donnent les températures de début (Ac_1) et de fin (Ac_3) de l'austénitisation et la température de début de transformation martensitique (M_s) pour des aciers faiblement alliés contenant moins de 0.6% de carbone (c_i étant la concentration massique en élément i) :

- Ac_1(°C)=727-10.7c_{Mn} -16.9c_{Ni}+29.1c_{Si}+16.9c_{Cr}+6.38c_W+290c_{As}
- Ac_3(°C)=912-203c_C-30c_{Mn} -15.2c_{Ni}+44.7c_{Si}+104c_V+13.1c_W+31.5c_{Mo}
- M_s(°C)=539-423c_C-30.4c_{Mn} -17.7c_{Ni}-12.1c_{Cr}-11c_{Si}-7.5c_{Mo}.

1.4.2.5.3 Influence des contraintes

Les mesures expérimentales montrent que les contraintes appliquées lors de la transformation de phases peuvent modifier la cinétique de transformation. D'autre part, une transformation de phases sous l'application d'une contrainte peut engendrer une déformation permanente même si la contrainte appliquée est inférieure à la limite élastique du matériau. Ce phénomène, appelé *plasticité de transformation*, sera détaillé dans la suite de ce manuscrit. Dans ce paragraphe, on s'intéresse uniquement aux influences des contraintes appliquées sur la cinétique de transformation de phases.

- Cas des contraintes hydrostatiques

En comprimant l'espace interatomique, les contraintes hydrostatiques rendent difficile le mouvement des atomes et ralentissent les transformations de phases.

Pour l'austénitisation, les études montrent que les températures de début A_{c1} et de fin A_{c3} de l'austénitisation du diagramme d'équilibre sont modifiées et que les cinétiques de transformation sont plus lentes.

Pour les transformations au refroidissement, les diagrammes T.T.T et T.R.C sont déplacés vers des températures plus basses et des temps plus longs [Denis *et al.*, 1985]. Par exemple, sur la figure Fig.1.10, on voit que la température de début de transformation martensitique diminue lorsque la pression hydrostatique augmente.

- Cas des contraintes uniaxiales

Les contraintes anisotropes (seul l'effet des contraintes uniaxiales a été observé) favorisent au contraire les transformations microstructurales.

La figure Fig.1.11 montre l'effet d'une contrainte constante de traction appliquée sur la transformation perlitique isotherme d'un acier eutectoïde à 663°C, la transformation est accélérée par la contrainte.

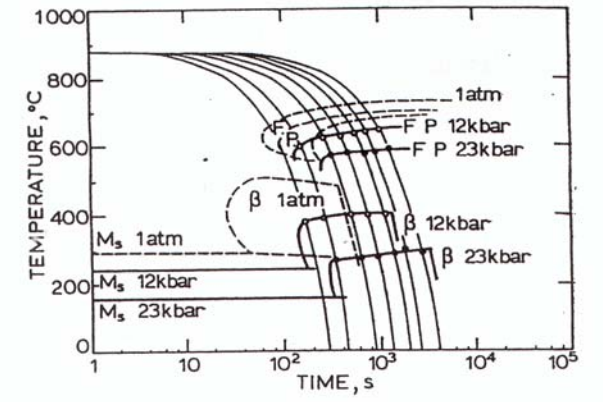


Fig. 1.10 : *Effet d'une contrainte hydrostatique sur les transformations de phases [Schmidtmann et al., 1977]*

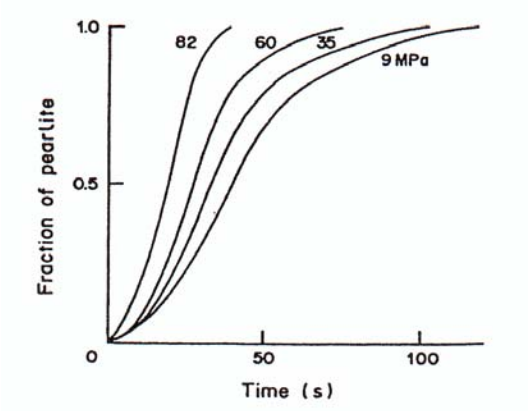


Fig. 1.11 : *Influence de la contrainte appliquée sur la transformation perlitique, acier eutectoïde [Denis et al., 1987b]*

La figure Fig.1.12 montre, pour une transformation isotherme, l'influence de la contrainte de traction appliquée sur les temps de début et de fin de transformation pour deux températures différentes. La contrainte joue un rôle d'autant plus important que l'on s'approche de la température de début de transformation.

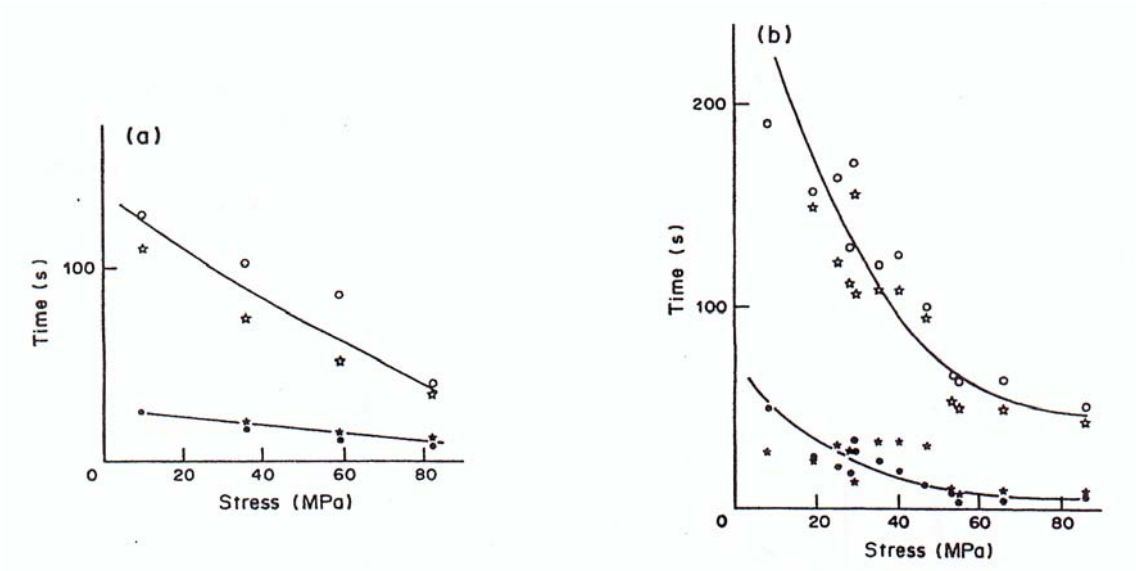


Fig. 1.12 : *Influence de la contrainte sur les temps de début (pleins) et de fin (creux) de transformation d'un acier euctectoïde. a) 663°C, b) 673°C [Denis et al., 1987b]*

L'écrouissage préalable de l'austénite avant transformation favorise également la transformation. La figure Fig.1.13 montre l'effet des déformations plastiques sur les temps de début et de fin de transformation isotherme d'un acier eutectoïde à 685°C et la figure Fig.1.14 présente l'effet complexe des déformations préalables sur l'avancement de la transformation bainitique [Bhadeshia, 1992].

Pour la transformation martensitique sous contrainte appliquée inférieure à la limite élastique de l'austénite (*cf.* Fig.1.15), on constate une augmentation de la température M_s aussi

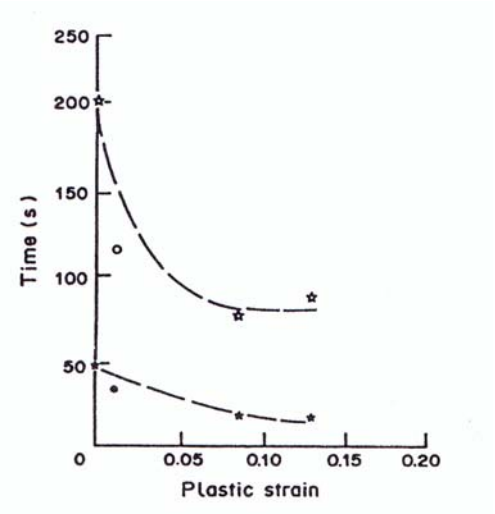


Fig. 1.13 : *Influence des déformations plastiques sur les temps de début (pleins) et de fin (creux) de transformation isotherme d'un acier eutectoïde à 685°C [Denis et al., 1987b]*

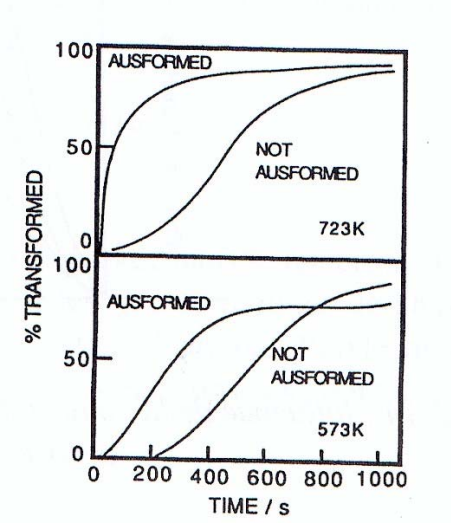


Fig. 1.14 : *Influence des déformations préalables (ausformed) sur la transformation bainitique d'un acier Fe-0.59C-2.01Si-1.02Mn, transformation isotherme [Bhadeshia, 1992]*

bien sous contraintes de traction que sous contraintes de compression. Une contrainte de compression a un effet plus faible qu'une contrainte de traction sur l'augmentation de M_s [Simon *et al.*, 1994].

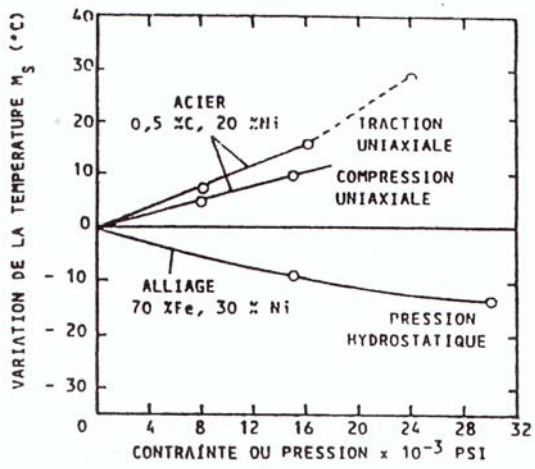


Fig. 1.15 : *Influence de la contrainte sur la température M_s [Martinez 1999]*

1.4.2.6 Modélisation des transformations de phases

Généralement, afin de déterminer l'état métallurgique des structures métalliques lors d'une opération de soudage ou de traitement thermique, il est nécessaire d'établir :

• un modèle de transformation de phases au chauffage. Ce modèle permet de prévoir la cinétique de l'austénitisation ainsi que les parties totalement et partiellement austénitisées de

la Z.A.T (Zone Affectée Thermiquement),

• un modèle de transformation de phases au refroidissement. Ce modèle permet de déterminer la cinétique de décomposition de l'austénite lors du refroidissement ainsi que les compositions métallurgiques obtenues après retour à la température ambiante,

• un modèle d'évolution de la taille de grain de l'austénite au chauffage aux points totalement austénitisés de la Z.A.T.

La figure Fig.1.16 présente un schéma de transformations de phases pour un cycle thermique industriel, avec un chauffage et un refroidissement, d'un acier Fer-carbone.

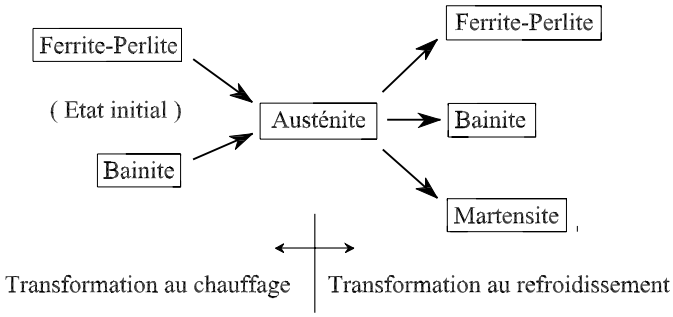


Fig. 1.16 : *Transformations de phases pour un cycle thermique*

Les différentes transformations de phases se produisent selon des mécanismes différents. D'autre part, la plage de température où les transformations de phases ont lieu est très large, les facteurs influençant les transformations sont nombreux et restent encore peu clairs. La modélisation des transformations de phases est donc un problème très complexe. C'est pourquoi la plupart des modèles aujoud'hui sont de types phénoménologiques.

D'un point de vue théorique, les modélisations des transformations de phases par diffusion reposent généralement sur l'hypothèse de l'existence d'un état d'activation intermédiaire entre des états d'énergie minimum de début et de fin de transformation (*cf.* Fig.1.17). Il est ensuite possible d'obtenir la vitesse de germination et de croissance en fonction de ΔGa et ΔGv ([Burke, 1968], [Barralis et Maeder, 1988]). Pour ce type de modèle, il est souvent difficile d'identifier les paramètres, en outre, ils ne sont applicables que pour des évolutions isothermes. Pour les transformations de phases dans des conditions anisothermes, à notre connaissance, il n'existe pas de modélisation théorique complète.

Dans le but de modéliser simplement l'ensemble des transformations de phases, il existe des modèles purement phénoménologiques ou des formules empiriques permettant de modéliser les cinétiques de transformations de phases lors des opérations industrielles de façon relativement simple mais solide.

1.4.2.6.1 Transformations isothermes, cinétique de Johnson-Mehl-Avrami

La cinétique isotherme de Johnson-Mehl-Avrami est décrite par l'expression suivante [Avrami, 1939,1940,1941] :

$$z = 1 - exp[-b(T)t^{n(T)}] \tag{1.27}$$

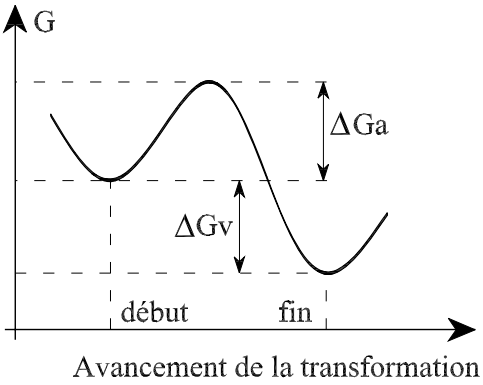


Fig. 1.17 : *Energie d'activation*

z étant la proportion d'austénite transformée à l'instant t, T la température de maintien isotherme, t le temps à partir duquel débute le maintien isotherme, $b(T)$ et $n(T)$ des paramètres identifiés expérimentalement.

Initialement, ce modèle a été proposé pour déterminer la cinétique de transformation de l'austénite en perlite [Johnson et Mehl, 1939]. Il est toutefois souvent utilisé pour d'autres transformations par diffusion à condition d'ajuster les valeurs de $b(T)$ et de $n(T)$.

1.4.2.6.2 Transformations anisothermes

Dans l'industrie, la plupart des transformations de phases se produisent sous température variable, il est donc nécessaire d'établir des modèles de transformations de phases dans des conditions anisothermes.

a. Transformations par diffusion

Les modèles de transformations de phases au refroidissement sont toujours phénoménologiques et identifiés à partir des diagrammes T.T.T et T.R.C.. On peut classer les trois grandes catégories de modèles utilisés pour la modélisation des transformations de phases par diffusion :

- les modèles de type Inoue,
- les modèles de type Fernandes,
- les modèles de type Leblond-Devaux et Giusti.

Les détails de ces modèles seront présentés dans la suite de ce manuscrit.

b. Transformations martensitiques

Dans ce cas, la cinétique empirique décrite par Koïstinen-Marbürger [Koistinen et Marburger, 1959] donne des résultats en bon accord avec les mesures expérimentales et ce modèle est très souvent utilisé pour la modélisation des transformations martensitiques. Voici l'équation associée :

$$z_m = z_a\big(1 - exp(-k\langle M_s - T\rangle^+)\big) \tag{1.28}$$

z_m étant la proportion de martensite formée, z_a la proportion d'austénite non-transformée avant la transformation martensitique, M_s la température de début de transformation martensitique et k est un paramètre du matériau. $\langle X \rangle^+$ désigne la partie positive de X.

Dans la suite, nous présentons quelques modèles anisothermes de transformations de phases. Ce sont les modèles souvent utilisés dans la simulation numérique des procédés de soudage ou de traitements thermiques des aciers.

1.4.2.7 Modèle de type Inoue

Le modèle d'Inoue ([Inoue et Wang, 1985], [Inoue *et al.*, 1985], [Wang et Inoue, 1985]) décrit les cinétiques de transformation de phase en prenant en compte l'influence de l'état de contraintes et de la teneur en carbone sur la transformation.

1.4.2.7.1 Austénitisation

La transformation au chauffage est considérée comme fonction uniquement de la température et son évolution est supposée linéaire en fonction de la température entre la température de début (Ac_1) et de fin (Ac_3) de l'austénitisation.

1.4.2.7.2 Transformation par diffusion

Dans ce cas, la cinétique de transformation perlitique est basée sur la cinétique de Johnson-Mehl-Avrami et le taux d'avancement de la transformation est donné sous la forme :

$$z = 1 - exp\left(\int_0^t f_T(T[\tau]) f_c(C[\tau]) f_\sigma(\sigma[\tau]) (t-\tau)^3 dt \right) \tag{1.29}$$

où $f_T(T)$, $f_c(C)$ et $f_\sigma(\sigma)$ sont des fonctions permettant de prendre en compte respectivement les influences de la température, de la teneur en carbone et de l'état de contraintes sur l'avancement de la transformation. Ces fonctions sont identifiées à l'aide des diagrammes T.T.T et T.R.C mais ces identifications ne sont pas présentées explicitement par l'auteur.

1.4.2.7.3 Transformation martensitique

En modifiant la cinétique empirique de Koïstinen-Marbürger pour tenir compte de l'influence de la teneur en carbone et de l'état de contraintes sur l'avancement de transformation, la cinétique de transformation martensitique s'écrit sous la forme :

$$z_m = (1 - z_p) exp\big(k(M_s - T) - g_c(C) - g_\sigma(\sigma)\big) \tag{1.30}$$

g_c et g_σ sont des fonctions permettant de prendre en compte l'influence de la teneur en carbone et de l'état de contraintes sur la cinétique de transformation martensitique.

1.4.2.8 Modèle de type I.N.P.L.

Ce type de modèle, dévéloppé à l'Institut National Polytechnique de Lorraine depuis une vingtaine d'années, se base principalement sur le concept d'additivité et le temps fictif. Ce

modèle permet de prendre en compte les influences de l'état de contraintes sur les cinétiques de transformations de phases.

1.4.2.8.1 Cinétique de transformations de phases

A partir des cinétiques isothermes, on peut obtenir des cinétiques anisothermes des transformations par diffusion en utilisant le principe d'additivité qui s'énonce comme suit :

Une transformation anisotherme est la somme de transformations isothermes élémentaires, autrement dit, si $\tau[T]$ est le temps nécessaire à la formation d'une fraction u de nouvelle phase en conditions isothermes, cette fraction de transformation sera atteinte en conditions anisothermes au bout du temps t défini par :

$$\int_0^t \frac{du}{\tau[T(u)]} = 1 \tag{1.31}$$

Dans ce cas, les transformations sont dites isocinétiques, c'est-à-dire que les transformations ne dépendent que de la composition en phase et de la température.

Fernandes ([Fernandes, 1985], [Fernandes *et al.*, 1986]) a dévéloppé ce type de modèle pour les transformations de phases par diffusion qui se déroulent toujours en deux étapes : la germination et la croissance. La période de germination (ou d'incubation) est la période où les germes stables de la nouvelle phase se forment dans la phase mère et le calcul du temps de germination est le calcul du temps au bout duquel une quantité notable de phase s'est transformée (le modèle de l'I.N.P.L. adopte l'instant correspondant à 1% de la phase nouvelle formée). Le temps de germination peut être déterminé à l'aide du principe d'additivité. En principe, on discrétise la courbe de refroidissement T(t) en une succession de paliers isothermes T_i de longueur Δt_i et on a :

$$\int_0^{t_j} \frac{dt}{\Pi(T)} \approx \sum_{i=1}^{j} \frac{\Delta t_i}{\Pi(T_i)} = 1 \tag{1.32}$$

où : $\Pi(T)$ est le temps de germination à la température T et t_j est le temps de germination recherché.

Pour prendre en compte le fait que les fractions d'incubation accumulées au-dessus d'une certaine température ne contribuent pas à l'incubation des transformations débutant en-dessous de cette température, [Manning et Lorig, 1946] font une remise à zéro de la somme de Scheil (équation (1.32)) lorsque l'on atteint cette température. [Fernandes *et al.*, 1986] a introduit un facteur correctif f_{inc} et multiplicatif de la somme de Scheil, f_{inc} varie de 0 à 1.

La croissance est la période où les germes des nouvelles phases se dévéloppent dans la phase mère. Dans le modèle de l'I.N.P.L, la croissance est déterminée par une loi de type Johnson-Mehl-Avrami (*cf.* eq(1.27)). En tenant compte que plusieurs transformations peuvent se produire, cette cinétique s'écrit :

$$z_k = z_{ad} z_{kmax} \Big(1 - exp(-b_k t^{n_k})\Big) \tag{1.33}$$

z_k étant la proportion de la phase k, z_{ad} la proportion de l'austénite restante en début de transformation de la phase k, z_{kmax} la proportion maximale de la phase k à la température T, b_k et n_k sont des coefficients de l'équation Johnson-Mehl-Avrami pour la transformation k.

Le calcul de la croissance en conditions anisothermes s'effectue suivant le principe d'additivité avec le temps fictif. Le principe de calcul est illustré sur la figure Fig.1.18 : à la fin du

palier T_{i-1}, la proportion de la phase formée est z_{i-1}. Sur le palier T_i, on calcule le temps fictif t_i^* qui correspond au temps nécessaire pour former la proportion z_{i-1} à cette température. La proportion volumique en fin de palier T_i est donnée par l'équation (1.33) exprimée au temps t_i ($=t_i^*+\Delta t_i$).

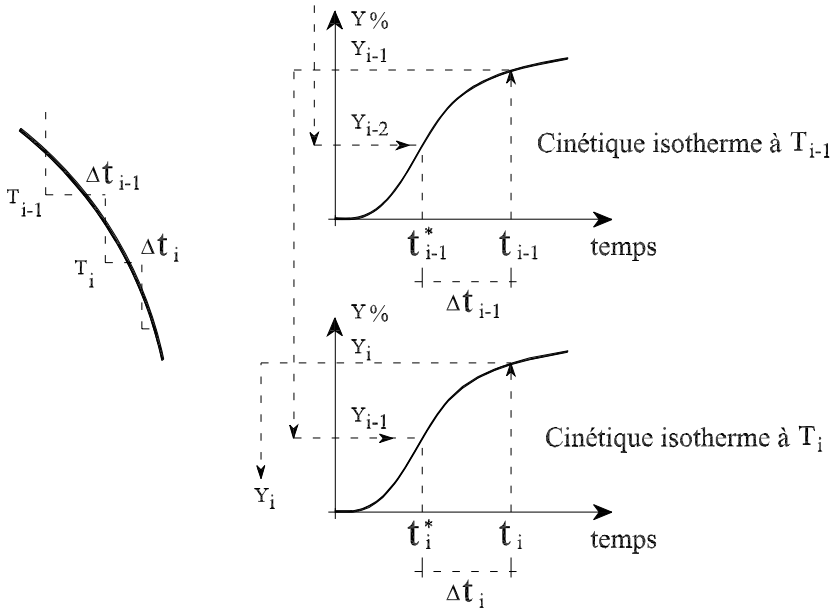


Fig. 1.18 : *Illustration du principe du temps fictif*

Ce modèle donne des résultats corrects pour les transformations ferritiques, perlitiques ou bainitiques seules. Il simule toutefois difficilement la succession des transformations ferritiques/perlitiques et bainitiques malgré les termes de correction. Le fait que le modèle soit identifié à partir des diagrammes T.T.T, où ce type de transformation ne se produit jamais, explique également ces difficultés. D'autre part, [Leblond et Devaux, 1984] montrent que ce type de modèle n'est pas valable, au moins qualitativememt, pour certaines histoires thermiques.

Pour la transformation martensitique, la loi empirique Koïstinen-Marbürger ($cf.$ eq(1.28)) est utilisée.

1.4.2.8.2 Effet des contraintes appliquées

a. Transformation martensitique

L'influence de l'état de contraintes sur la cinétique de transformation martensitique est prise en compte en faisant dépendre la température de début de transformation M_s de l'état de contraintes. La formule proposée par Inoue ($cf.$ 1.4.2.7.3) est reprise [Denis *et al.*, 1985] :

$$M_s = M_{s0} + A\sigma_m + B\sigma_e \tag{1.34}$$

où : M_{s0} étant la température de début de transformation martensitique en l'absence de contraintes appliquées, A et B sont des coefficients dépendants du matériau.

$$\sigma_m = \frac{1}{3}Tr(\sigma_i) \qquad \text{et} \qquad \sigma_e = \left(3/2Tr(\sigma_i)^2\right)^{1/2}$$

b. Transformation perlitique

La cinétique de transformations de phases est toujours donnée par la loi de type Johnson-Mehl-Avrami en modifiant des coefficients de ce modèle pour tenir compte de l'influence des contraintes appliquées [Denis *et al.*, 1987b]. Dans ce cas, l'influence de la partie sphérique du tenseur des contraintes est négligée.

$$\Pi_\sigma = (1-D)\Pi \qquad , \qquad n_\sigma = n \qquad \text{et} \qquad b_\sigma = \frac{b}{(1-D)^{n_\sigma}}$$

$D{=}g(\sigma_e)$ est une fonction déterminée expérimentalement.

1.4.2.9 Modèle de Leblond-Devaux

1.4.2.9.1 Principe du modèle

Ce modèle a été proposé par Leblond et Devaux [Leblond et Devaux, 1984] pour le cas où une seule transformation a lieu. La cinétique de transformations de phases se met sous la forme :

$$\dot{z} = \phi(T, z) \tag{1.35}$$

Ce modèle se fonde sur le fait que dans le cas d'une transformation isotherme de l'austénite, la transformation évolue vers une proportion d'équilibre de l'austénite notée z_{eq}, variant entre 0 et 1 en fonction de la température de maintien isotherme. Donc, $z_{eq}(T)$ doit être la solution stationnaire de l'équation suivante :

$$\phi(T, z_{eq}) = 0 \qquad \forall\ T \tag{1.36}$$

Les auteurs supposent que $z_{eq}(T)$ est peu différente de $z(T)$ et effectuent un développement limité à l'ordre un au voisinage de $z_{eq}(T)$:

$$\dot{z} \approx \phi(T, z_{eq}(T)) + (z - z_{eq}(T))\frac{\partial \phi}{\partial z}(T, z_{eq}(T)) \tag{1.37}$$

On obtient la cinétique de transformations de phases :

$$\dot{z} = \frac{z_{eq}(T) - z}{\tau(T)} \qquad \text{en posant} \qquad \tau(T) = -\frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial z}(T, z_{eq}(T))} \tag{1.38}$$

1.4.2.9.2 Identification des paramètres

a. Austénitisation

La proportion d'équilibre $z_{eq}(T)$ est déduite d'une courbe dilatométrique obtenue avec une faible vitesse de chauffage. Dans ces conditions, chaque état peut être considéré comme un état d'équilibre et z est toujours égale à $z_{eq}(T)$.

La constante $\tau(T)$ est déduite des courbes dilatométriques obtenues avec des vitesses de chauffage plus rapides de manière à retrouver les températures effectives de début et de fin de transformation.

b. Transformation martensitique

Dans ce cas, la fonction $z_{eq}(T)$ est remplacée par une fonction $z_{eff}(T)$ donnée par la relation de Koïstinen-Marbürger (cf. eq(1.28)) et $\tau(T)$ est choisi très petit car la transformation est très rapide. Donc, $z(T)$ est quasiment égale à $z_{eff}(T)$ à chaque instant.

c. Transformations ferritiques et perlitiques

La cinétique des transformations ferritiques et perlitiques est souvent trop lente pour atteindre $z_{eq}(T)$. La fonction $z_{eq}(T)$ est donc remplacée par une fonction $z_{eff}(T)$ déterminée par des courbes dilatométriques ou des diagrammes T.R.C. pour de très faibles vitesses de refroidissement et $\tau(T)$ est choisi grand.

d. Transformation bainitique

Dans certains cas de transformations bainitiques, un recalage raisonnable de $z_{eq}(T)$ et de $\tau(T)$ s'est avéré impossible. Un facteur λ multiplicatif de $\tau(T)$ a donc été introduit afin d'obtenir une simulation correcte de ces transformations. Concrètement, ce paramètre a été déterminé empiriquement en fonction uniquement de la vitesse de refroidissement à 700°C. Pour la transformation bainitique, le modèle utilisé est donc :

$$\dot{z} = \lambda(\dot{T}(T = 700^{\circ}C))\frac{z_{eq}(T) - z(T)}{\tau(T)} \tag{1.39}$$

Il est à noter que le modèle de Leblond-Devaux a été étendu pour le cas où n phases sont en présence avec de multiples transformations possibles en supposant qu'une transformation mettant en jeu deux phases n'est pas affectée par les autres phases. On obtient ainsi un système d'équations différentielles cumulant les effets des transformations deux à deux. De plus, un modèle d'évolution de la taille de grains austénitiques a également été proposé et permet de prévoir l'évolution de la taille de grains ainsi que son effet sur les cinétiques de transformations de phases [Leblond et Devaux, 1984].

1.4.2.10 Modèle de Giusti

En s'appuyant sur une approche thermodynamique, Giusti [Giusti, 1981] a initialement proposé un modèle pour la cinétique de transformations de phases, à l'échelle macroscopique et limité à deux phases, avec la prise en compte de l'influence de la teneur en carbone. Ce modèle est théoriquement acceptable mais son identification est très délicate. De la même façon, en négligeant l'influence de la teneur en carbone, il a proposé un modèle phénoménologique pour les transformations anisothermes. Dans ce modèle, l'influence de la pression hydrostatique sur la cinétique de transformations de phase est prise en compte et l'identification des paramètres du modèle peut être réalisée à partir des diagrammes T.R.C ou T.T.T..

1.4.2.10.1 Principe du modèle

Giusti a utilisé l'enthalpie libre qui a été changée de signe comme potentiel thermodynamique. L'enthalpie libre du mélange de deux phases s'écrit sous la forme :

$$G(T, p, z) = (1 - z)G_{\alpha}(T, p) + zG_{\gamma}(T, p) + \psi(T, p, z) \tag{1.40}$$

où :

- G_α et G_γ sont successivement les enthalpies libres spécifiques des phases α et γ,
- z est la proportion massique de la phase formée,
- ψ est l'énergie d'interaction qui présente les effets d'interaction dus au changement de phase.

Les potentiels G_α et G_γ s'écrivent (i=α,γ) :

$$\rho_i^0 G_i(T,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{K_i(T)} + 3pD_i(T)(T - T_i^0) + \rho_i^0 G_i^0(T) \tag{1.41}$$

ρ_i^0 étant la masse volumique dans un état de référence à contrainte nulle et à température T_i^0, $K_i(T)$ le module de compression, $D_i(T)$ le coefficient de dilatation thermique linéaire, $G_i^0(T)$ la partie purement thermique de G_i et p la pression.

Si on choisit comme état de référence commun, l'état α à contrainte nulle et à température T_0, les potentiels s'écrivent :

$$\rho_\alpha^0 G_\alpha(T,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{K_\alpha(T)} + 3pD_\alpha(T)(T - T_0) + \rho_\alpha^0 G_\alpha^0(T) \tag{1.42}$$

et

$$\rho_\gamma^0 G_\gamma(T,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{K_\gamma(T)} + 3p[D_\gamma(T)(T - T_0) - \delta] + \rho_\gamma^0 G_\gamma^0(T) \tag{1.43}$$

Ici, la grandeur -3δ représente la variation relative de volume entre l'état α et l'état γ à la température T_0 et sous contrainte nulle.

Alors, la dissipation intrinsèque, déduite de l'inégalité Clausius-Duhem, s'écrit :

$$\mathcal{D} = \frac{\partial G}{\partial z}\dot{z} = (G_\gamma - G\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial z})\dot{z} \tag{1.44}$$

Pour l'énergie d'interaction, Giusti propose la forme simple :

$$\psi(T,p,z) = (G\gamma - G_\alpha + \frac{3p\delta}{\rho})\phi(z) \tag{1.45}$$

avec $$\phi(0) = \phi(1) = 0$$

L'expression de la dissipation (*cf.* équation (1.44)) devient :

$$\mathcal{D} = \big(\Delta G_{\gamma-\alpha}(1 + \frac{d\phi}{dz}) + \frac{3p\delta}{\rho}\frac{d\phi}{dz}\big)\dot{z} = Z\dot{z} \tag{1.46}$$

où :

$$\Delta G_{\gamma-\alpha} = G_\gamma(T,p) - G_\alpha(T,p)$$

$$Z = \big(\Delta G_{\gamma-\alpha}(1 + \frac{d\phi}{dz}) + \frac{3p\delta}{\rho}\frac{d\phi}{dz}\big)$$

En utilisant pour le pseudo-potentiel de dissipation une forme quadratique et positive :

$$\Omega = \frac{1}{2}\lambda Z^2 \tag{1.47}$$

Giusti a obtenu l'évolution de la proportion de phase :

$$\dot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial Z} = \lambda Z = \lambda\Big(\Delta G_{\gamma-\alpha}(1 + \frac{d\phi}{dz}) + \frac{3p\delta}{\rho}\frac{d\phi}{dz}\Big) \tag{1.48}$$

En négligeant le terme en p dans l'équation (1.48), Giusti met la cinétique de transformations de phases sous la forme différentielle :

$$\dot{z} = \lambda f(T) g(z) \tag{1.49}$$

1.4.2.10.2 Identification du modèle

Ce modèle a été proposé pour les transformations par diffusion. Concernant les transformations martensitiques, Giusti a repris la cinétique empirique Koïstinen-Marbürger (*cf.* équation (1.28)) pour calculer l'avancement de transformation.

Pour les transformations par diffusion, la fonction $f(T)$ dans l'équation (1.49) peut s'interpréter comme la force motrice de la transformation considérée. Giusti a donné une méthode d'identification de cette fonction en utilisant les relations thermodynamiques entre l'enthalpie libre et les chaleurs calorifiques de chaque phase métallurgique.

En ce qui concerne la fonction $g(z)$, elle a été déterminée de façon à redonner en évolution isotherme la forme sigmoïdale des cinétiques du type Johnson-Mehl-Avrami :

$$g(z) = (1 - z + \eta)(z + \eta) \tag{1.50}$$

η étant un petit paramètre calé expérimentalement.

En ce qui concerne λ, ce paramètre est utilisé pour prendre en compte l'influence de l'histoire thermique sur les cinétiques de transformations de phases au refroidissement.

Pour chaque histoire thermo-métallurgique présente sur le diagramme T.R.C. de l'acier considéré, on considère que :

$$\dot{z} = \lambda_i f(T) g(z) = \frac{dz}{dT}\frac{dT}{dt} \approx \frac{dz}{dT} v_i \tag{1.51}$$

où v_i est la vitesse de refroidissement moyenne pendant la transformation.

On peut donc déterminer pour chaque histoire thermique la quantité :

$$\frac{\lambda_i}{v_i} = \frac{\int_{z_0}^{z_f} \frac{dz}{g(z)}}{\int_{T_d}^{T_f} f(T) dT} \tag{1.52}$$

En effectuant ce calcul avec plusieurs trajets de refroidissement, on obtient un ensemble de valeurs de λ_i/v_i permettant ensuite une approximation de la fonction $\lambda(v)/v$ pour un trajet quelconque par l'interpolation.

En ce qui concenent les températures de début et de fin de transformation (T_d et T_f), elles sont interpolées en fonction de la vitesse moyenne de refroidissement et à partir des températures de début et de fin de transformation figurant sur les diagrammes T.R.C. de l'acier considéré.

1.4.2.11 Modèle de Waeckel

1.4.2.11.1 Austénitisation

Dans ce cas, le modèle utilisé est celui de Leblond (*cf.* équation (1.38)). Le taux de l'austénite formée est donné par :

$$\dot{z}_\gamma(T, z_\gamma) = \frac{z_{eq}(T) - z_\gamma}{\tau(T)}$$

Waeckel garde la définition de Leblond pour les coefficients $z_{eq}(T)$ et $\tau(T)$. Cependant, Waeckel [Waeckel et Razakanaivo, 2001] a donné une formule simple pour déterminer ces coefficients.

$$z_{eq}(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T \leq A_{c1} \\ \frac{T-A_{c1}}{A_{c3}-A_{c1}} & \text{si } A_{c1} \leq T \leq A_{c3} \\ 1 & \text{si } T \geq A_{c3} \end{cases} \tag{1.53}$$

$$\tau(T) = \begin{cases} \tau_1 & \text{si } T \leq A_{c1} \\ \tau_1 + \frac{T-A_{c1}}{A_{c3}-A_{c1}}(\tau_3 - \tau_1) & \text{si } A_{c1} \leq T \leq A_{c3} \\ \tau_3 & \text{si } T \geq A_{c3} \end{cases} \tag{1.54}$$

où : A_{c1} et A_{c3} sont des températures de début et de fin de l'austénitisation. Les deux constantes positives τ_1 et τ_3 sont utilisées pour décrire correctement le début et la fin de transformations de phases et elles sont identifiées par des essais dilatométriques à vitesse de chauffage constante.

1.4.2.11.2 Transformation au refroidissement

Dans ce cas, le modèle de Waeckel ([Waeckel, 1994], [Waeckel et Razakanaivo, 2001]) se base principalement sur le fait que le comportement métallurgique des aciers en refroidissement continu est complètement caractérisé par les diagrammes T.R.C. et complété par la cinétique empirique de Koïstinen-Marbürger. Compte tenu de certaines hypothèses, la cinétique de transformations de phases s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z} = \phi(T, \dot{T}, z, d) \quad \text{avec } z = z_1, z_2, z_3 \\ z_4(T, z, M_s) = \left(1 - \sum_1^3 z_i\right)\left(1 - exp(\beta[M_s - T]^+)\right) \\ M_s(z, d) = M_{so}(d) + A(d).\left[\sum_1^3 z_i - z^s(d)\right]^+ \\ d = d^c \end{cases} \tag{1.55}$$

où : z_1, z_2, z_3 et z_4 sont respectivement la proportion de ferrite, perlite, bainite et martensite formée lors de transformations de phases,
d^c est la taille de grain de l'austénite,
$[X]^+$ est la partie positive de X.

Pour calculer la fonction $\phi(T, \dot{T}, z, d)$, on tient compte du fait que les histoires thermo-métallurgiques représentées sur le diagramme T.R.C sont des solutions particulières de l'équation différentielle d'évolution $\dot{z} = \phi(T, \dot{T}, z, d)$. Elles permettent donc de calculer pour chaque état thermo-métallurgique $(T, \dot{T}, z, d)$ figurant sur ces diagrammes T.R.C la valeur prise par la fonction $\phi(T, \dot{T}, z, d)$.

On note qu'avec ce modèle, l'identification des paramètres est simple et rapide mais nécessite une base de données lourde qui doit être préparée pour chaque acier. Des refroidissements à vitesse constante et des refroidissements de type "trempe" (la vitesse de refroidissement diminue progressivement) ont été simulés avec ce modèle. Cependant, si le modèle donne de bons résultats pour les refroidissements à vitesse constante, même pour des vitesses non comprises

dans le diagramme T.R.C., les résultats pour les autres refroidissements ne sont pas très bons. Seule l'introduction du refroidissement de type "trempe" dans sa base de données lui permet de produire des simulations correctes, mais ce modèle apparaît de ce fait limité à la reproduction d'histoires proches de sa base de données. On voit que les diagrammes T.R.C. sont établis pour des histoires thermiques bien particulières (les refroidissements sont généralement considérés comme constants). D'autre part, le calcul de la valeur prise par la fonction $\phi(T, \dot{T}, z, d)$ est basé sur les états métallurgiques figurant sur les diagrammes T.R.C par interpolation. Donc, dès que les histoires thermiques à simuler s'écartent du type de celles utilisées pour tracer les T.R.C., l'interpolation utilisée n'est pas précise. Dans la version de Martinez [Martinez, 1999], ce problème a été résolu en utilisant l'extrapolation pour calculer les valeurs de la fonction $\phi(T, \dot{T}, z, d)$. Dans ce cas, la cinétique de transformation ferrito-perlitique ou bainitique se met sous la forme :

$$\dot{z}_a / z_a = \phi(T, \dot{T}_{eff}, z_a) \tag{1.56}$$

z_a étant la proportion de l'austénite non transformée.

Martinez a utilisé pour la vitesse de refroidissement une valeur efficace $\dot{T}_{eff}$. Les influences de la teneur en carbone et de la taille de grains austénitiques sur la cinétique de transformation ont été prises en compte en faisant dépendre $\dot{T}_{eff}$ de la concentration en carbone et de la taille de grains. Les résultats des simulations montrent que ce modèle donne des résultats plus pertinents pour les cinétiques de transformations de phases dans les cas où les vitesses de refroidissement sont variées.

1.4.2.12 Conclusion

L'estimation des compositions métallurgiques et des cinétiques de transformations de phases jouent un rôle très important sur la prévision de la qualité mécanique des pièces soudées. Cependant, la modélisation du comportement métallurgique des aciers reste encore un problème discutable dans la mesure où les mécanismes mis en jeu sont nombreux et peuvent être complètement différents d'une transformation à l'autre. D'autre part, plusieurs facteurs influent sur les transformations de phases et posent également des problèmes complexes pour la modélisation. Dans ces conditions, une modélisation théorique s'appuyant sur les mécanismes physiques et pouvant recouvrir tous les types de transformations de phases dans les aciers nous semble difficile à atteindre. C'est pourquoi, les modèles de type phénoménologique sont souvent utilisés dans la simulation des procédés industriels.

Dans le cas de la transformation de l'austénite en martensite, la cinétique empirique de Koïstinen-Marbürger est souvent utilisée car elle donne des résultats en bon accord avec l'expérience. En revanche, la transformation par diffusion en refroidissement continu (transformations anisothermes) est encore mal décrite. Les modèles d'Inoue et de l'I.N.P.L. se basent sur la cinétique isotherme de Johnson-Mehl-Avrami qui est initialement proposée pour les transformations perlitiques et il semble difficile de l'adapter aux autres transformations. Le modèle de Leblond est assez simple et donne des résultats acceptables mais l'identification des paramètres est très compliquée. De même type phénoménologique, le modèle de Waeckel, étendu ensuite par Martinez, donne de bons résultats avec des identifications simples et rapides mais une base de données doit être lourdement préparée, ce qui entraîne une dépendance stricte de résultats vis-à-vis de cette base. Le modèle de Giusti est thermodynamiquement établi et les résultats donnés par ce modèle sont satisfaisants, de plus son identification est assez simple.

Pour les facteurs influençant les transformations, l'influence de la contrainte est parfois prise en compte dans la modélisation. Pour la transformation martensitique, cette influence

est prise en compte par la dépendance de la température de début de transformation martensitique avec la contrainte. En revanche, dans le cas de transformation par diffusion, Inoue a fait dépendre directement l'évolution de la transformation de la contrainte appliquée et de la teneur en carbone, mais l'identification des fonctions n'est pas explicitée. Quant à la taille de grains austénitiques, son influence sur les transformations est quelquefois modélisée ([Leblond et Devaux, 1984], [Waeckel et Razakanaivo, 2001]) mais ce point reste délicat.

1.4.3 Modélisation mécanique

La modélisation mécanique a pour but de déterminer l'état mécanique des structures sous chargements extérieurs. En effet, la détermination de l'état de contraintes et de déformations produit lors d'une opération de soudage ou de traitement thermique nécessite des lois de comportements thermomécaniques qui peuvent être généralement élastoplastiques ou élastoviscoplastiques. Les caractéristiques du matériau dépendent éventuellement de la température. Ces lois de comportement sont aujourd'hui assez classiques, elles sont implantées dans la plupart des codes de calcul permettant de simuler des structures sous chargements thermomécaniques.

Ce problème devient très compliqué lorsque les transformations de phases se produisent, on a donc un problème thermomécanique et métallurgique. Les conséquences mécaniques des transformations de phases ainsi que les modélisations proposées dans la littérature concernant le comportement mécanique du matériau multiphasé feront l'objet de ce paragraphe.

1.4.3.1 Problème mécanique en présence de transformations structurales

Les conditions aux limites du problème mécanique sont présentées par la figure Fig.1.19.

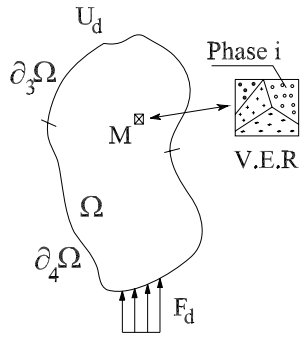


Fig. 1.19 : *Conditions aux limites mécaniques*

Les équations d'un problème mécanique classique sont les suivantes :

- Conditions aux limites

$$U = U_d \qquad \text{sur} \quad \partial_3\Omega \quad et \quad F_d = \boldsymbol{\sigma}\underline{\mathrm{n}} \qquad \text{sur} \quad \partial_4\Omega \tag{1.57}$$

- Equation d'équilibre

$$div\boldsymbol{\sigma}(M) = 0 \tag{1.58}$$

- Relation de comportement

$$\boldsymbol{\sigma} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.59}$$

- Compatibilité géométrique

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla^T u\right) \tag{1.60}$$

Les cycles thermiques des opérations de soudage ou de traitements thermiques peuvent engendrer dans le matériau des transformations microstructurales. Si c'est le cas, on peut obtenir, à certains temps en un point matériel, le mélange des différentes phases métallurgiques qui possèdent des caractéristiques thermomécaniques différentes. Donc, l'établissement des relations de comportement (équation (1.59)) devient un problème beaucoup plus complexe que celui du cas où le matériau est considéré comme homogène à l'échelle d'un V.E.R.. Ce problème sera détaillé dans la suite de ce paragraphe. Il est à noter aussi que dans ce cas, les contraintes résiduelles sont la somme de deux parties, une liée à la localisation de la source de chaleur et l'autre associée aux transformations microstructurales car ces dernières s'accompagnent toujours d'expansions volumiques et engendrent des incompatibilités de déformations.

1.4.3.2 Conséquences mécaniques des transformations microstructurales

Dans cette section, nous présentons l'influence des transformations microstructurales sur le comportement mécanique du matériau. Généralement, on peut les classer en quatres catégories :

• Lors de transformations microstructurales, on peut obtenir un mélange des différentes phases métallurgiques avec des proportions volumiques et des caractéristiques mécaniques différentes. Par conséquent, les transformations microstructurales modifient les caractéristiques du matériau. Plus précisément, les caractéristiques élastiques (module d'Young et coefficient de Poisson) sont peu affectées par les transformations de phases ([Leblond *et al.*, 1986a], [Waeckel, 1994]), tandis que les caractéristiques plastiques (la limite d'élasticité par exemple) et le coefficient de dilatation thermique sont fortement influencés.

• Les transformations microstructurales s'accompagnent d'expansions volumiques, celles-ci se traduisent par des déformations de transformation qui doivent être prises en compte dans la déformation totale du matériau.

• Les transformations microstructurales, sous contraintes, peuvent conduire à des déformations irréversibles même si ces contraintes sont inférieures à la limite d'élasticité du matériau. Ce phénomène est appelé la plasticité de transformation. Il sera étudié en détail dans la suite.

• La restauration d'écrouissage, lors d'une transformation microstructurale, se traduit éventuellement par la non transmission, de façon partielle ou totale, de l'écrouissage de la phase mère à la phase produite. Si ce phénomène a lieu, la phase produite naît avec un état plastique vierge ou non nul en héritant d'une partie ou de la totalité de l'écrouissage de la phase parente. On trouve que, lors des tranformations par diffusion, les mouvements d'atomes et les réorganisations de la structure cristalline des matériaux entraînent un certain réarrangement des dislocations et par conséquent une perte de mémoire de l'écrouissage de la phase mère. Cet effet serait moins marqué pour les transformations sans diffusion où les mouvements d'atomes sont beaucoup plus limités de sorte que les dislocations doivent être moins affectées par les transformations microstructurales.

Pour une simulation correcte des procédés de soudage ou de traitement thermique des aciers où les transformations de phases sont présentes, il est nécessaire de disposer de modèles permettant de rendre compte de chacune de ces conséquences mécaniques induites par des transformations microstructurales.

1.4.3.3 Déformations thermiques

• la déformation thermique des phases ferritiques (ferrite, perlite, bainite et martensite) s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}^{th}(T) = \alpha_{\alpha}(T - T_0^{\alpha}) \tag{1.61}$$

- la déformation thermique de l'austénite est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma}^{th}(T) = \alpha_{\gamma}(T - T_0^{\alpha}) - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\gamma}(T_0^{\alpha}) \tag{1.62}$$

où : α_{α} et α_{γ} sont successivement le coefficient de dilatation thermique des phases ferritiques (phase α) et de l'austénite (phase γ). En fait, les coefficients de dilatation thermique des phases ferritiques sont supposés identiques. Cette hypothèse peut être vérifiée expérimentalement par des courbes dilatométriques,

T_0^{α} la température de référence à laquelle la déformation thermique des phases ferritiques ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}^{th}$) est considérée comme nulle,

$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\gamma}$ la différence de compacité de deux phases α et γ à la température de référence T_0^{α}.

On note z_i, (i=1 à 4), les proportions respectives de ferrite, perlite, bainite et martensite présentes en un point matériel M à un instant t donné.

La proportion d'austénite s'écrit donc :

$$z_{\gamma} = (1 - \sum_{i=1}^{4} z_i)$$

La loi de mélange linéaire nous conduit à déterminer la déformation thermo-métallurgique du matériau multiphasé par l'expression :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th}(z,T) = \left(1 - \sum_{i=1}^{4} z_i\right)\boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma}^{th}(T) + \left(\sum_{i=1}^{4} z_i\right)\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}^{th}(T) \tag{1.63}$$

L'hypothèse d'une loi de mélange linéaire sur la déformation thermique a été vérifiée numériquement en simulant la déformation thermique d'un point matériel représenté par les éléments tridimensionnels et subissant une transformation microstructurale sans contraintes [Leblond *et al.*, 1986a].

1.4.3.4 Phénomène de plasticité de transformation

1.4.3.4.1 Caractérisation du phénomène de plasticité de transformation

Ainsi qu'on l'a évoqué au paragraphe 1.4.2.5.3, une transformation de phases est fortement influencée par l'état de contraintes. L'application de contraintes même inférieures à la limite d'élasticité du matériau peut provoquer une déformation irréversible (*cf.* Fig.1.20). On appelle plasticité de transformation ce phénomène et on note $\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$ la déformation irréversible correspondante.

1.4.3.4.2 Mécanismes explicatifs

On distingue deux mécanismes pour expliquer ce phénomène : mécanisme de Greenwood-Johnson et mécanisme de Magee.

- *Mécanisme de Greenwood-Johnson* [Greenwood et Johnson, 1965]

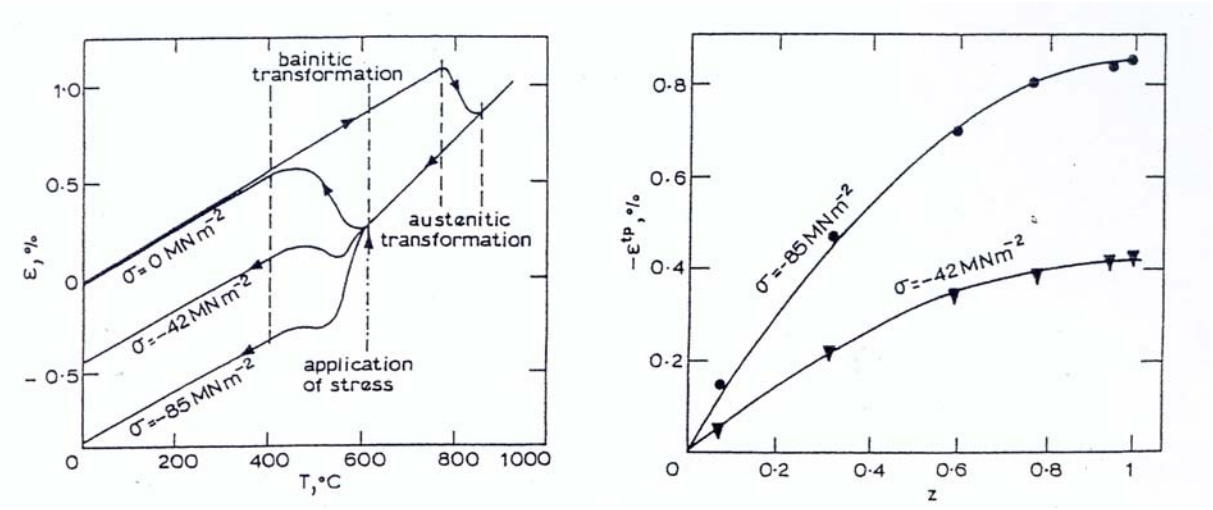


Fig. 1.20 : *Plasticité de transformation [Desalos, 1981]*

La différence de compacité entre la phase mère et la phase produite engendre des déformations plastiques, à l'échelle microscopique, dans la phase la plus molle. En absence de contraintes appliquées, les déformations plastiques microscopiques résultantes s'orientent de manière aléatoire, et seule la déformation correspondante au changement de volume est observée à l'échelle macroscopique. Par contre, l'application d'une contrainte externe oriente les déformations plastiques microscopiques, ce qui entraîne une déformation irréversible à l'échelle macroscopique.

- *Mécanisme de Magee* [Magee, 1966]

Le mécanisme de Magee est mis en évidence par les essais de dilatométrie avec transformation martensitique sous contraintes. En effet, la martensite se développe sous forme de plaquettes, orientées de manière aléatoire en l'absence de contraintes, ce qui conduit à une variation de volume globale et isotrope. Dans le cas d'une contrainte extérieure appliquée, les plaquettes se développent suivant une direction privilégiée, ce qui entraîne une déformation irréversible à l'échelle macroscopique.

L'importance relative de l'un ou de l'autre de ces mécanismes dépend de la transformation considérée et de l'acier étudié. Il est généralement admis que le mécanisme de Magee est présent pour les transformations martensitiques, tandis que le mécanisme de Greenwood-Johnson est dominant pour les transformations par diffusion.

Cependant, les résultats expérimentaux avec des contraintes constantes appliquées en cours de transformation martensitique pour deux types d'alliage Fe-Ni-C et un acier de type 60NCD11, [Gautier *et al.*, 1985] montrent que l'orientation des aiguilles de martensite est prépondérante au début de la transformation et pour des contraintes élevées. Pour des contraintes faibles, le mécanisme de Magee ne semble pas important. Alors qu'il est généralement considéré pour les alliages à memoire de forme, il ne l'est pas toujours pour les aciers. En effet, bien que certains auteurs, Fischer [Fischer *et al.*, 2000], prennent en considération les deux mécanismes, on note généralement que pour plusieurs modèles proposés, seul le mécanisme de Greenwood-Johnson est retenu. Ces modèles (par ex. [Greenwood et Johnson, 1965], [Leblond *et al.*, 1989], [Leblond, 1989]) sont généralement bien validés pour le cas des alliages ferreux [Taleb *et al.*, 2001], [Grostabussiat *et al.*, 2001], [Taleb et Petit, 2006].

1.4.3.4.3 Modélisation du phénomène de plasticité de transformation

Le phénomène de plasticité de transformation a été très étudié par les chercheurs tant sur le plan expérimental que sur le plan théorique. Pour les études expérimentales, les travaux de ([Abrassart, 1972], [Desalos, 1981][Denis *et al.*, 1987a], [Cavallo, 1998], [Taleb *et al.*, 2001], [Taleb et Petit, 2006]) présentent des essais de dilatométrie sous contraintes constantes uniaxiales. Des essais sous contraintes multiaxiales ou chargements non proportionnels sont réalisés dans ([Videau *et al.*, 1996], [Coret *et al.*, 2002], [Coret *et al.*, 2004]).

Sur le plan de la modélisation, en général, le comportement macroscopique d'un matériau peut être modélisé suivant deux méthodes. La première s'inspire de la thermodynamique des processus irréversibles. La seconde est basée sur la connaissance de paramètres et de mécanismes de déformation microstructuraux, c'est ensuite par un passage micro-macro que les lois macroscopiques de comportement sont obtenues. Plusieurs modèles micro-macro ont été proposés, par exemple par ([Leblond *et al.*, 1989], [Leblond, 1989], [Fischer, 1990], [Fischer *et al.*, 1996], [Fischer *et al.*, 2000], [Diani *et al.*, 1995], [Taleb et Sidoroff, 2003]).

On a vu que la plasticité de transformation est généralement expliquée par deux mécanismes liés soit à la déformation par cisaillement (mécanisme de Magee) soit à la différence de volume spécifique entre les phases (mécanisme de Greenwood-Johnson). Cependant, le mécanisme de Greenwood-Johnson est souvent considéré pour les alliages ferreux. Notre travail porte sur ce type de matériau, nous nous intéresserons donc essentiellement aux modèles qui tiennent compte du mécanisme de Greenwood-Johnson.

a. Structure générale des modèles

Les principaux modèles de plasticité de transformation prenant en compte le mécanisme de Greenwood-Johnson peuvent se mettre sous la forme d'un produit de trois fonctions. La première fonction, f_1, dépend des caractéristiques relatives des phases mère et fille. La deuxième fonction, f_2, exprime la dépendance vis-à-vis du taux d'évolution de la transformation. Et la troisième fonction, f_3, dépend des caractéristiques de la contrainte appliquée et de la limite d'élasticité du mélange.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} = f_1(\Delta V/V, \sigma_y^1).f_2(z, \dot{z}).f_3(\boldsymbol{S}, \sigma_y) \tag{1.64}$$

où :

$\Delta V/V$: la variation volumique relative entre les phases mère et produite,
σ_y^1 : la limite d'élasticité de la phase mère (austénite),
z : la proportion formée de la phase produite,
$\boldsymbol{S}$: la partie déviatorique du tenseur des contraintes,
σ_y : la limite d'élasticité du mélange.

La plasticité de transformation étant une déformation induite par la transformation sous contraintes, elle est donc nulle si la transformation n'a pas démarré, soit $z = 0$ et maximale si la transformation est complète, soit $z = 1$. Pour cette raison, la fonction f_2 est généralement normalisée : $f_2(0) = 0$ et $f_2(1) = 1$.

Dans le cas où le chargement appliqué est constant, l'intégration de l'expression précédente nous donne :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pt} = l_1(\Delta V/V, \sigma_y^1).l_2(z).l_3(\boldsymbol{S}) \tag{1.65}$$

b. Modèle de Greenwood-Johnson

Ce modèle repose sur les hypothèses principales suivantes [Greenwood et Johnson, 1965] :

- la transformation est supposée complète (donc $l_2 = 1$),
- chacune des phases est supposée parfaitement plastique,
- les critères classiques macroscopiques de plasticité sont applicables à l'échelle microscopique,
- la valeur de la plasticité de transformation finale est petite devant $\Delta V/V$,
- le rapport σ/σ_y^1 est petit.

Les auteurs aboutissent à une expression applicable à des cas de chargements uniaxiaux et constants :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{finale}^{pt} = \frac{5}{6\sigma_y^1}\frac{\Delta V}{V}\boldsymbol{\sigma} \qquad \text{avec} \qquad l_1 = \frac{5}{6\sigma_y^1}\frac{\Delta V}{V}, \qquad l_3 = \boldsymbol{\sigma} \tag{1.66}$$

Ce modèle prévoit une proportionnalité entre la plasticité de transformation finale et la valeur de contrainte appliquée. De plus, la direction d'écoulement de déformation est celle de la contrainte appliquée. Cette expression est valable pour de petites contraintes, en plus d'être valable pour des chargements uniaxiaux et constants.

b. Modèle de Abrassart

Abrassart [Abrassart, 1972] a proposé un modèle pour la plasticité de transformation en s'appuyant sur le modèle de Greenwood-Johnson où la déformation de transformation est une fonction de l'évolution de la transformation de phase z.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pt} = \frac{1}{4\sigma_y^1}\frac{\Delta V}{V}(3z - 2z^{\frac{3}{2}})\boldsymbol{\sigma} \tag{1.67}$$

d'où :

$$l_1 = (1/4\sigma_y^1).\Delta V/V, \qquad l_2 = 3z - 2z^{3/2}, \qquad l_3 = \boldsymbol{\sigma}.$$

Desalos aboutit à une expression similaire à celle d'Abrassart à partir d'essais expérimentaux sur l'acier A533 pour une transformation bainitique isotherme et anisotherme [Desalos, 1981]. Il détermine les fonctions suivantes :

$$l_1 \approx 10^{-4}, \qquad l_2 = 2(2 - z)\ , \qquad l_3 = \boldsymbol{\sigma}.$$

c. Modèle de Leblond et Giusti

Leblond et Giusti ([Giusti, 1981], [Leblond *et al.*, 1989]) ont dévéloppé un modèle tridimensionnel pour la déformation de plasticité de transformation. Ce modèle, qui ne rend compte que de l'effet de Greenwood-Johnson, relie la vitesse de déformation de plasticité de transformation au taux d'évolution des transformations et à l'état de contraintes par la relation :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} = \frac{3}{2}K\boldsymbol{S}_{ij}f'(z)\dot{z} \tag{1.68}$$

où :

K : constante homogène à l'inverse d'une contrainte,
$f'(z)$: fonction dérivée d'une fonction normalisée en z ($f(0) = 0$ et $f(1) = 1$),

z : proportion de phase formée,
$\boldsymbol{S}_{ij}$: déviateur des contraintes.

La valeur prise par la constante K est la même que celle prise par l_1 dans les modèles précédents.

La forme générale du modèle tridimensionnel est déduite des considérations heuristiques suivantes [Leblond *et al.*, 1989] :

• la relation doit être incrémentale et indépendante du temps physique, c'est-à-dire qu'elle doit relier linéairement le taux de déformation plastique au taux de transformation,

• la vitesse de déformation de plasticité de transformation doit être, comme pour la plasticité classique, proportionnelle à la partie déviatorique $\boldsymbol{S}_{ij}$ du tenseur des contraintes,

• le taux de déformation de plasticité de transformation doit être nul en dehors des plages de transformation.

En ce qui concerne la fonction normalisée $f(z)$ dans l'équation (1.68), cette fonction exprime la dépendance de la déformation de plasticité de transformation vis-à-vis de l'évolution de transformation. Le coefficient K quant à lui représente les incompatibilités des phases dans le mélange. Différentes études conduisent à des formes différentes de la fonction $f(z)$ et du coefficient K.

Par exemple, dans le cas de faibles contraintes appliquées, [Leblond *et al.*, 1989] ont proposé les formes suivantes :

$$f(z) = z(1 - lnz) \qquad \text{et} \qquad K = \frac{2\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{th}}{\boldsymbol{\sigma_y^1}} \tag{1.69}$$

$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{th}$ est la différence de compacité volumique de deux phases et σ_y^1 est la limite d'élasticité de l'austénite.

Les dilatométries sous contraintes élevées [Desalos, 1981] conduisent à un coefficient K compris entre 1.25 10^{-4} MPa^{-1} et 1.35 10^{-4} MPa^{-1}. La fonction $f(z)$ prend la forme :

$$f(z) = z(2 - z) \tag{1.70}$$

Il faut noter que toutes les expressions précédentes ne prévoient pas d'évolution non-linéaire quant aux niveaux des contraintes appliquées comme cela est décrit expérimentalement.

Leblond *et al.* ([Leblond *et al.*, 1989], [Leblond, 1989]) ont amélioré nettement le précédent modèle. Dans un premier temps, ils fournissent une base théorique à la plasticité de transformation par une approche micro-macro. Dans le cas de faibles contraintes appliquées, ils supposent que :

• la structure ferritique est une inclusion sphérique qui croit à l'intérieur d'une sphère austénitique,

• le comportement mécanique de deux phases est parfaitement plastique,

• pour l'austénite, la déformation élastique est très petite devant la déformation plastique,

• la phase produite reste élastique.

Puis, dans un deuxième temps, ils complètent leur approche théorique par une étude numérique, l'objectif étant :

• de vérifier la validité des hypothèses adoptées pour l'étude théorique,

• de chercher une expression de la loi d'écoulement dont le domaine de validité est plus large que celui de l'expression théorique. Autrement dit, une expression qui est également applicable aux cas des contraintes appliquées élevées et des proportions de phases produites faibles.

Suite à ces études théoriques et numériques, ils ont proposé une expression de la plasticité de transformation pour le cas où le comportement de l'austénite est de type élasto-plastique

parfait et ensuite, l'écrouissage isotrope et cinématique ont été pris en compte. Les détails de leurs modèles sont présentés dans [Leblond *et al.*, 1989] et [Leblond, 1989].

Il existe aussi quelques autres modèles pour la plasticité de transformation. En se basant sur le modèle de Leblond avec quelques hypothèses modifiées, Taleb et Sidoroff [Taleb et Sidoroff, 2003] ont proposé un modèle pour la plasticité de transformation dans lequel, ils ne négligent plus la déformation élastique de l'austénite. Tandis que Fischer [Fischer *et al.*, 2000] propose une analyse micromécanique en considérant non seulement le mécanisme de Greenwood-Johnson mais aussi le mécanisme de Magee pour la plasticité de transformation.

1.4.3.5 Comportement d'un matériau multiphasé

Pour les différents constituants métallurgiques qui peuvent coexister au même point matériel ayant des caractéristiques thermo-mécaniques différentes, la modélisation du comportement mécanique d'un matériau multiphasé est nécessaire à la modélisation mécanique. Le plus souvent, on considère que les caractéristiques thermomécaniques (coefficient de dilatation thermique, limite d'élasticité et module d'écrouissage, etc.) d'un point matériel multiphasé peuvent être déterminées par une loi de mélange linéaire des caractéristiques de chaque phase. On décrit ensuite le comportement mécanique du point matériel multiphasé de manière usuelle mais en lui affectant les propriétés obtenues par la loi de mélange linéaire.

$$CR = \sum_i z_i.CR_i \tag{1.71}$$

où : CR_i est une caractéristique de la phase i dont la proportion est z_i et CR est la caractéristique correspondante du matériau multiphasé.

Pour la limite d'élasticité, nous avons la loi de mélange suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \sum_i z_i.\boldsymbol{\sigma}_y^i \tag{1.72}$$

$\boldsymbol{\sigma}_y^i$ étant la limité d'élasticité de la phase i dans le mélange et $\boldsymbol{\sigma}_y$ étant la limité d'élasticité du mélange.

Cette loi de mélange linéaire est généralement utilisée pour les mélanges à température ambiante. En ce qui concerne les mélanges avec austénite, Leblond propose une loi de mélange non-linéaire suivante [Leblond *et al.*, 1986b] :

$$\boldsymbol{\sigma}_u = (1 - f(z))\boldsymbol{\sigma}_{y1} + f(z)\boldsymbol{\sigma}_{y2} \tag{1.73}$$

où :

- $\boldsymbol{\sigma}_u$: la contrainte ultime macroscopique,
- $\boldsymbol{\sigma}_{y1}$: la limite d'élasticité de l'austénite,
- $\boldsymbol{\sigma}_{y2}$: la limite d'élasticité de la phase produite,
- $f(z)$: une fonction déterminée numériquement en simulant un essai de traction.

On peut utiliser cette formule pour calculer les limites d'élasticité macroscopiques homogénéisées du mélange $\boldsymbol{\sigma}_y$:

$$\boldsymbol{\sigma}_y = (1 - f(z))\boldsymbol{\sigma}_{y1} + f(z)\boldsymbol{\sigma}_{y2} \tag{1.74}$$

Les lois de mélange linéaires et non-linéaires ont été validées expérimentalement par [Petit-Grostabussiat *et al.*, 2004] pour le comportement mécanique du matériau multiphasé.

1.4.3.6 Déformations plastiques et viscoplastiques

Dans le paragraphe précédent, la plasticité de transformation de phase a été déterminée de façon indépendante. La plupart des modèles considèrent que les transformations de phases génèrent des déformations indépendantes et qu'il s'agit ensuite de les intégrer au calcul mécanique de la même façon que les autres déformations. Le taux de déformation totale s'écrit donc dans le cas de petites déformations :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{thm} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} \tag{1.75}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{e}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{thm}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ sont respectivement des déformations élastiques, thermométallurgiques, de plasticité de transformation et plastiques ou viscoplastiques. La modélisation des $\boldsymbol{\varepsilon}^{e}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{thm}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$ a été présentée dans les sections prédédentes. Dans les sections suivantes, nous allons présenter quelques modèles pour la déformation plastique ou viscoplastique ainsi que les modèles permettant de prendre en compte l'influence des transformations microstructurales.

1.4.3.6.1 Déformations plastiques

Pour la plasticité indépendante du temps physique, le modèle le plus utilisé pour la simulation numérique de soudage est la plasticité utilisant le critère isotrope de Von-Mises, avec la loi d'écoulement associée. Cette modélisation considère des déformations plastiques incompressibles et la loi d'écoulement postule un écoulement plastique normal à la surface de charge. Le domaine élastique est défini par :

$$f = \boldsymbol{\sigma}_{eq} - \boldsymbol{\sigma}_{y} \leq 0 \tag{1.76}$$

où :

$\boldsymbol{\sigma}_{y}$: limite d'élasticité initial,
$\boldsymbol{\sigma}_{eq}$: contrainte équivalente de Von-Mises définie par

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X})(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X})} \tag{1.77}$$

$\boldsymbol{S}$ désignant le tenseur déviatorique des contraintes. Ici, on considère un modèle élasto-plastique avec écrouissage cinématique linéaire, dont la contrainte d'écrouissage est définie par :

$$\boldsymbol{X} = \frac{2}{3} H \boldsymbol{\alpha} \tag{1.78}$$

H est le module d'écrouissage identifié à partir d'essais mécaniques du type traction ou compression. Ce paramètre dépend éventuellement de la température et de la phase métallurgique. $\boldsymbol{\alpha}$ est une variable interne de l'écrouissage. Les évolutions de la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ et de la variable d'écrouissage $\boldsymbol{\alpha}$ sont données par la loi de normalité :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{S}} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}} \tag{1.79}$$

Le multiplicateur plastique λ est déterminé par les conditions de charge et décharge :

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f} = 0 \tag{1.80}$$

En outre, dans la simulation numérique du soudage, on utilise parfois le modèle de comportement élastoplastique avec écrouissage isotrope ou le modèle élastoplastique avec écrouissage

combiné (un écrouissage isotrope et un écrouissage cinématique). Les détails de ces modèles peuvent être consultés dans ([Lemaitre et Chaboche, 1996], [Nguyen, 2000], [Besson *et al.*, 2001]).

1.4.3.6.2 Déformations viscoplastiques

Pour les métaux et alliages, lorsque la température dépasse environ le tiers de la température absolue de fusion, l'influence des phénomènes visqueux sur la réponse mécanique du matériau est considérable. Elle se traduit par la dépendance du comportement du matériau vis-à-vis de la vitesse de sollicitation. Ce type de comportement est très souvent utilisé pour la simulation numérique du soudage ou de traitements thermiques.

Les détails des modèles élastoviscoplastiques peuvent être trouvés dans ([Lemaitre et Chaboche, 1996], [Nguyen, 2000], [Besson *et al.*, 2001], [Dominique *et al.*, 1993]). Ici, à titre d'exemple, nous présentons le modèle élastoviscoplastique avec écrouissage cinématique et isotrope (modèle de Chaboche [Lemaitre et Chaboche, 1996]). Les variables d'état utilisées pour la modélisation sont les variables de l'écrouissage isotrope (R, p) et de l'écrouissage cinématique ($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{\alpha}$).

Les évolutions de déformation viscoplastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et de l'écrouissage sont alors :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\boldsymbol{S}-\boldsymbol{X}}{J_2(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{X})} \tag{1.81}$$

$$\dot{p} = \left\langle \frac{J_2(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{X}) - R - \sigma_y}{k} \right\rangle^n \tag{1.82}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \frac{2}{3}C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma(p)\boldsymbol{X}\dot{p} \tag{1.83}$$

$$\dot{R} = b(Q-R)\dot{p} \qquad \text{avec} \qquad X(0) = R(0) = 0 \tag{1.84}$$

C, b, Q, k et n sont des caractéristiques du matériau, elles dépendent éventuellement de la température et de la phase métallurgique.

Ces modèles de déformations plastiques et viscoplastiques sont généralement utilisés pour des matériaux considérés comme homogènes (matériaux monophasés). Mais ils peuvent être aussi utilisés pour des matériaux multiphasés lorsque les transformations microstructurales sont mises en jeu. Dans ce cas, on considère le matériau multiphasé comme un matériau homogène dont les caractéristiques thermomécaniques sont déterminées à partir de celles de chaque phase dans le mélange en utilisant une loi de mélange linéaire ($cf.$ équation (1.71)) ou non-linéaire ($cf.$ équation (1.74)). Dans les paragraphes suivants, nous allons présenter quelques modèles viscoplastiques permettant de prendre en compte des transformations microstructurales et souvent utilisés dans la simulation numérique du soudage.

1.4.3.7 Modèles viscoplastiques avec transformations structurales

1.4.3.7.1 Modèle de Inoue

Dans ce modèle, [Inoue et Wang, 1985] n'isolent pas la plasticité de transformation de la déformation globale, mais ils font directement dépendre l'écrouissage des transformations de phases. Les équations du modèle :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{1.85}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \left(\sum_i \frac{1+\nu_i}{E_i} z_i \right) . \boldsymbol{\sigma} - \left(\sum_i \frac{\nu_i}{E_i} z_i \right) . Tr(\boldsymbol{\sigma}) . \mathbf{1} + \left(\int_{T_o}^{T} \sum_i \alpha_i z_i dT + \sum_i \beta_i (z_i - z_{io}) \right) . \mathbf{1} \tag{1.86}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{1}{2\eta} \left\langle 1 - \frac{K(T, \kappa, z_i)}{J_2(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X})} \right\rangle (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X}) \tag{1.87}$$

où :

$\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ sont respectivement la déformation élastique et la déformation plastique,
E_i et ν_i : coefficients élastiques de la phase i,
z_i : proportion de phase i,
z_{io} : proportion initiale de phase i,
α_i : coefficient de dilatation de phase i,
β_i : taux de variation de volume dû à la transformation i,
η : viscosité du matériau homogène,
κ : variable d'écrouissage isotrope,
K et $\boldsymbol{X}$: écrouissages isotrope et cinématique.

Le comportement est celui d'un fluide visqueux pour $K = 0$, quand η tend vers zéro, le comportement devient quasi-plastique (K tend alors vers $J_2(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X})$ pour éviter des déformations infinies). Dans ce cas, le taux de déformation plastique s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{9}{4HK^2} \left(Tr[(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X})\dot{\boldsymbol{\sigma}}] - \frac{2}{3} K \frac{\partial K}{\partial T} \dot{T} - \frac{2}{3} \sum K \frac{\partial K}{\partial z_i} z_i \right) (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X}) \tag{1.88}$$

où H est le coefficient d'écrouissage.

On constate que ce modèle permet de décrire à la fois un comportement élastoviscoplastique à haute température et un comportement élastoplastique à basse température en utilisant une valeur convenable pour le coefficient de viscosité.

1.4.3.7.2 Modèle de Videau

Dans ce modèle, Videau *et al.* [Videau *et al.*, 1994] supposent qu'il y a additivité de la déformation viscoplastique classique ($\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$) et de celle de plasticité de transformation ($\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$). La déformation inélastique du matériau se met sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{ine} = \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} \tag{1.89}$$

Pour définir les évolutions des déformations inélastiques, ils prennent deux surfaces d'écoulement, l'une relative à la déformation viscoplastique classique $f^{vp}(\boldsymbol{S})$, l'autre à la déformation de plasticité de transformation $f^{pt}(\boldsymbol{S})$:

$$\begin{cases} f^{vp}(\boldsymbol{S}) = J_2(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X}^{vp}) - R^{vp} \\ f^{pt}(\boldsymbol{S}) = J_2(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X}^{pt}) \end{cases} \tag{1.90}$$

Les lois d'écoulement s'écrivent à l'aide des lois de normalité :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \lambda^{vp} \frac{\partial f^{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda^{vp} \frac{\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X}^{vp}}{J_2(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X}^{vp})} \tag{1.91}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} = \lambda^{pt}\frac{\partial f^{pt}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda^{pt}\frac{\boldsymbol{S}-\boldsymbol{X}^{pt}}{J_2(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{X}^{pt})} \tag{1.92}$$

Les multiplicateurs λ^{vp} et λ^{pt} sont respectivement égaux aux déformations viscoplastiques cumulées et à la plasticité de transformation cumulée. Le premier est défini à partir du potentiel viscoplastique de Chaboche [Lemaitre et Chaboche, 1996] :

$$\lambda_{vp} = \left\langle \frac{J_2(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{X}^{vp}) - R^{vp}}{\eta} \right\rangle^{n} \tag{1.93}$$

où η et n sont des coefficients de viscosité du matériau.

Le second est donné par les expressions standards de la plasticité de transformation. Pour un matériau biphasé où z désigne la fraction volumique transformée :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{pt} = K.(1-z).\dot{z}.J_2(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{X}^{pt}) & \text{pour la transformation martensitique,} \\ \dot{\lambda}_{pt} = K.\dot{z}.J_2(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{X}^{pt}) & \text{pour la transformation par diffusion.} \end{cases} \tag{1.94}$$

Le couplage sur les variables cinématiques s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{vp} \\ \boldsymbol{X}^{pt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{vp} & C \\ C & C^{pt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{vp} \\ \boldsymbol{\alpha}^{pt} \end{pmatrix} \tag{1.95}$$

Les évolutions des variables d'écrouissage cinématique sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{vp} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - d^{vp}\boldsymbol{X}^{vp}\lambda^{vp} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{pt} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} - d^{pt}\boldsymbol{X}^{pt}\lambda^{pt} \end{cases} \tag{1.96}$$

et les évolutions des variables d'écrouissage isotrope :

$$\begin{cases} \dot{r}^{vp} = \lambda^{vp}\big(1 - b^{vp}(R^{vp} - R_o^{vp})\big) \\ \dot{r}^{pt} = \lambda^{pt}\big(1 - b^{pt}R^{pt}\big) \end{cases} \tag{1.97}$$

C, C^{vp}, C^{pt}, d^{vp}, d^{pt}, b^{vp} et b^{pt} sont les caractéristiques du matériau.

Les coefficients du matériau intervenant dans les lois d'état et d'évolution sont déterminés par une loi de mélange linéaire :

$$D(z_i, T) = \sum_i z_i D_i(T) \tag{1.98}$$

D_i est le coefficient du matériau de la phase i pure.

Finalement, le taux de déformation total s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{thm} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} \tag{1.99}$$

1.4.3.7.3 Modèle de Razakanaivo

Ce modèle élastoviscoplastique [Razakanaivo *et al.*, 2002] considère un écrouissage isotrope et un écrouissage cinématique avec la prise en compte des restaurations visqueuses de l'écrouissage.

- Cas de l'écrouissage isotrope : dans ce cas, la fonction d'écoulement s'écrit

$$f = \boldsymbol{S}^{vm} - R(r,T,z) - \boldsymbol{\sigma}_c(T,z) \tag{1.100}$$

Le taux de déformation viscoplastique est donc :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}^{vm}} \tag{1.101}$$

où :

$$\dot{p} = \left\langle \frac{\langle \boldsymbol{S}^{vm} - R(r,T,z) - \boldsymbol{\sigma}_c(T,z)\rangle}{\eta} \right\rangle^n \tag{1.102}$$

$\boldsymbol{\sigma}_c$ étant le seuil d'écoulement visqueux, η et n sont deux coefficients de viscosité de type Norton.

Concernant la restauration visqueuse de l'écrouissage isotrope, le modèle utilisé est le suivant :

$$\begin{cases} R = R_o.p \\ \\ \dot{r} = \dot{p} - (C.r)^m \end{cases} \tag{1.103}$$

C et m sont deux coefficients de restauration visqueuse de l'écrouissage.

- Cas de l'écrouissage cinématique linéaire : dans ce cas, la fonction d'écoulement s'écrit

$$f = (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X})^{vm} - \sigma_c(T,z) \tag{1.104}$$

Le taux de déformation viscoplastique est donné par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X}}{J_2(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X})} \tag{1.105}$$

où :

$$\dot{p} = \left\langle \frac{\langle J_2(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X}) - \sigma_c(T,z)\rangle}{\eta} \right\rangle^n \quad \text{et} \quad \boldsymbol{X} = \frac{2}{3}H_0\boldsymbol{\alpha} \tag{1.106}$$

$\boldsymbol{\alpha}$: tenseur variable d'écrouissage cinématique,
$\boldsymbol{X}$: tenseur d'écrouissage associé au tenseur variable d'écrouissage $\boldsymbol{\alpha}$,
H_0 : module d'écrouissage cinématique.

Ce modèle permet de considérer un comportement purement élastoplastique pour les faibles températures et un comportement de type fluide pour les hautes températures en utilisant une valeur convenable pour le viscosité η. Pour les matériaux multiphasés, les lois de mélange sont utilisées pour déterminer les coefficients de restauration visqueuse et la variable d'écrouissage cinématique.

1.4.3.7.4 Modèle de Coret

Le méso-modèle de Coret ([Coret, 2001], [Coret et Combescure, 2002]) utilise l'hypothèse de Taylor, il s'agit d'une hypothèse de déformations homogènes dans un milieu hétérogène au comportement non-linéaire. Autrement dit, ils ont adopté un arrangement en parallèle des phases dans le mélange. Donc, le taux de déformation totale $\dot{\boldsymbol{E}}^t$ est divisé en deux : le taux de déformation microscopique totale des phases $\dot{\boldsymbol{E}}$ et le taux de déformation de plasticité de transformation $\dot{\boldsymbol{E}}^{pt}$. Le taux de déformation totale macroscopique s'exprime :

$$\dot{\boldsymbol{E}}^t = \dot{\boldsymbol{E}} + \dot{\boldsymbol{E}}^{pt} \tag{1.107}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \dot{\boldsymbol{E}} \qquad \forall i \tag{1.108}$$

Les contraintes macroscopiques sont donc obtenues par la loi de mélange linéaire :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} z_i \boldsymbol{\sigma}_i \tag{1.109}$$

Ce modèle apporte une grande souplesse de calcul en permettant l'utilisation de comportements différents pour les différentes phases. Ceci est intéressant pour la simulation des procédés de soudage ou des traitements thermiques dans lesquels des phases métallurgiques peuvent apparaître avec des comportements mécaniques différents.

Une autre approche a été proposée par Leblond *et al.* ([Leblond *et al.*, 1986a], [Leblond *et al.*, 1986b], [Leblond *et al.*, 1989], [Leblond, 1989]). A partir des analyses micromécaniques et par un passage micro-macro, ils ont obtenu un modèle pour la déformation plastique macroscopique. Dans le cas de faibles contraintes appliquées, cette déformation est la somme d'une déformation de transformation (plasticité de transformation) et d'une déformation plastique classique. Quant à la déformation plastique classique, elle est divisée en deux parties, une liée à la variation de la température et l'autre liée à la variation de la contrainte. Les auteurs précisent aussi qu'il n'y a plus lieu de distinguer la plasticité classique de la plasticité de transformation lorsque les contraintes appliquées sont élevées.

Concernant la restauration d'écrouissage déjà évoquée au paragraphe 1.4.3.2, nous rappelons qu'il s'agit de transmission (partielle ou totale) ou non de l'écrouissage de la phase mère à la phase produite lors de transformations structurales. Leblond [Leblond, 1989] a introduit une nouvelle variable pour quantifier la transmission de l'écrouissage de la phase mère à la phase produite. Ils font dépendre les variables d'écrouissage de la phase produite en fonction des variables d'écrouissage de la phase mère et de cette nouvelle variable. En général, ils considèrent que les transformations bainitiques ont tendance à oublier ce qui s'est passé tandis que les transformations martensitiques ont tendance à se souvenir de l'écrouissage préalable de l'austénite. Cependant, les résultats expérimentaux obtenus par [Petit-Grostabussiat, 2000] ne semblent pas aller dans ce sens. Plus précisément, pour les transformations bainitiques, l'écrouissage de l'austénite est partiellement transmis à la bainite formée. Ceci peut être du au fait que les réarrangements dus aux transformations microstructurales ne semblent pas suffisants pour effacer les modifications engendrées dans la microstructure par l'écrouissage de l'austénite. Dans le cas des transformations martensitiques, il semble que l'écrouissage préalable de l'austénite n'a aucune incidence sur le comportement de la martensite formée.

1.4.3.8 Conclusion

La modélisation mécanique joue un rôle très important dans la simulation numérique des procédés de soudage ou de traitement thermique. Dans les cas où des transformations microstructurales se produisent, cette modélisation devient très complexe, et les principales difficultés résident dans la modélisation du comportement du matériau multiphasé. Dans ce cas, l'utilisation d'une simple loi de mélange linéaire pour déterminer les caractéristiques thermomécaniques du matériau ne peut pas rendre compte d'effets de morphologie pouvant être sensibles.

Dans ces conditions, l'approche proposée par [Coret et Combescure, 2002] présente des avantages pour les simulations numériques. Les modèles de Leblond *et al.* ([Leblond *et al.*, 1986a], [Leblond *et al.*, 1986b], [Leblond *et al.*, 1989], [Leblond, 1989]) présentent le couplage entre la plasticité classique et la plasticité de transformations et permettent de prendre en compte l'effet de la restauration d'écrouissage sur le comportement mécanique du matériau lors de transformations microstructurales.

En ce qui concerne la plasticité de transformation, le mécanisme de Magee [Magee, 1966] est généralement considéré pour les alliages à mémoire de forme et pour des alliages ferreux, seul le mécanisme de Greenwood-Johnson est considéré [Greenwood et Johnson, 1965]. Ainsi, pour la plupart des modèles existants, la modélisation de plasticité de transformation s'appuie uniquement sur le mécanisme de Greenwood-Johnson.

1.5 Conclusions

Dans le cas d'une opération de soudage, la détermination du niveau de contraintes résiduelles est primordiale pour la connaissance du comportement à la fatigue de la structure.

Les opérations de soudage des aciers engendrent des gradients thermiques très importants dans le matériau. Ces gradients thermiques sont très localisés et entraînent des déformations incompatibles et, par conséquent, conduisent à l'apparition de champs de déformations et de contraintes résiduelles. D'autre part, les cycles thermiques du soudage peuvent engendrer des modifications microstructurales au sein du matériau. Ceci influence fortement le comportement mécanique du matériau, en particulier le niveau des contraintes résiduelles après soudage.

Dans cette première partie, nous avons rappelé les travaux effectués et certains modèles existants, relatifs à la modélisation thermique, métallurgique et mécanique d'une opération de soudage.

En ce qui concerne la modélisation thermique du soudage, les difficultés résident principalement dans la modélisation de la source de chaleur ainsi que l'estimation de la quantité d'énergie utile pour le chauffage des pièces à assembler. Une modélisation véritable du problème thermique nécessite une modélisation de l'arc électrique et du bain de fusion. Ceci joue un rôle très important dans la détermination de la quantité d'énergie mise en jeu ainsi que la prédiction de la forme du bain de fusion. Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes intéressés essentiellement à la modélisation fine des lois de comportement thermomécaniques et métallurgiques afin de déterminer l'état résiduel des structures soudées. Ces simulations numériques sont généralement réalisées en utilisant des codes de calcul qui ne permettent pas de modéliser l'arc électrique et le bain de fusion. C'est pourquoi la physique de l'arc et du bain de fusion n'est pas considérée. Par conséquent, dans ce cas, l'arc électrique est modélisé par une source de chaleur équivalente. Par ailleurs, la fusion du métal sera prise en compte en modifiant des propriétés thermophysiques de façon adéquate. Pour la modélisation thermique, seule la conduction de la chaleur est donc modélisée.

Pour la modélisation des transformations de phases, ce problème reste encore un problème discutable du fait que les mécanismes en jeu sont nombreux et complètement différents d'une transformation à l'autre. D'autre part, plusieurs facteurs influent sur les transformations de phases et posent également des problèmes complexes pour la modélisation. Dans ces conditions, une modélisation théorique s'appuyant sur les mécanismes physiques et pouvant recouvrir tous les types de transformations de phases dans les aciers nous semble difficile à atteindre. Par conséquent, les modèles de type phénoménologique sont souvent utilisés dans la simulation des procédés industriels.

Dans le cas de la transformation martensitique, la cinétique empirique de Koïstinen-Marbürger [Koistinen et Marburger, 1959] est souvent utilisée dans la simulation numérique de soudage ou de traitements thermiques. En revanche, la transformation par diffusion est encore mal décrite. Les modèles d'Inoue [Inoue et Wang, 1985] et de l'I.N.P.L. ([Fernandes, 1985], [Fernandes *et al.*, 1986]) reposent sur la cinétique isotherme de Johnson-Mehl-Avrami qui est initialement proposée pour les transformations perlitiques et il semble dificile de l'adapter aux autres transformations. Le modèle de Leblond [Leblond et Devaux, 1984] est assez simple et donne des résultats acceptables mais l'identification des paramètres est compliquée. De même type phénoménologique, le modèle de Waeckel [Waeckel, 1994], étendu ensuite par Martinez [Martinez, 1999], donne de bons résultats avec des identifications simples et rapides mais une base de données doit être lourdement préparée. Le modèle de Giusti [Giusti, 1981] est thermodynamiquement établi et les résultats donnés par ce modèle sont satisfaisants, son identification est simple.

La détermination des contraintes et déformations résiduelles du soudage par la simulation numérique nécessite donc des lois de comportement thermomécaniques permettant également de prendre en compte les influences des transformations microstructurales.

En ce qui concerne la plasticité de transformation, le mécanisme de Greenwood-Johnson [Greenwood et Johnson, 1965] est généralement considéré pour des alliages ferreux. Selon ce mécanisme, la plasticité de transformation - TRIP (**TR**ansformation **I**nduces **P**lasticity) est liée aux incompatibilités volumiques des phases dans le mélange. Ainsi, pour la plupart des modèles existants, la modélisation de plasticité de transformation se fonde uniquement sur le mécanisme de Greenwood-Johnson.

La modélisation du comportement mécanique du matériau multiphasé reste un problème complexe. L'utilisation d'une simple loi de mélange pour déterminer les caractéristiques thermomécaniques du matériau semble insuffisante pour une bonne prévision de déformations inélastiques du matériau multiphasé. Dans ce cas, une même loi de comportement mécanique est utilisée pour les différentes phases métallurgiques.

Dans ces conditions, l'approche proposée par [Coret et Combescure, 2002] présente des avantages pour les simulations numériques. Les modèles de Leblond *et al.* ([Leblond *et al.*, 1986a], [Leblond *et al.*, 1986b], [Leblond *et al.*, 1989], [Leblond, 1989]) considèrent le couplage entre la plasticité classique et la plasticité de transformation et permettent de prendre en compte l'effet de la restauration d'écrouissage sur le comportement mécanique du matériau lors de transformations microstructurales. Cependant, l'application du modèle pour le mélange de plus de deux phases est difficile.

Dans le cadre de ce travail, nous nous focalisons sur la modélisation fine des lois de comportement thermomécaniques et métallurgiques des aciers en vue de la détermination des contraintes et déformations résiduelles de soudage. L'objectif de la thèse est d'établir des lois de comportement thermomécaniques et métallurgiques pour la simulation numérique des structures métalliques sous chargements thermomécaniques avec la présence de transformations microstructurales. Dans ces modèles, tous les couplages thermiques, métallurgiques et mécaniques

peuvent être pris en compte. Nous envisageons également que les différentes phases métallurgiques peuvent avoir des comportements individuels différents. Cela permet une souplesse dans la simulation numérique du comportement du matériau multiphasé. Un autre objectif est que l'identification des paramètres des lois de comportement soit simple et que la mise en oeuvre numérique conduise à des temps de calcul raisonnables pour l'industrie.

Dans le cadre des matériaux standards généralisés avec des liaisons internes, des modèles unifiés pour des comportements thermomécaniques et de transformations de phase ont été récemment proposés pour les alliages à mémoire de forme ([Zaki et Moumni, 2007a], [Zaki et Moumni, 2007b], [Moumni *et al.*, 2008]). La robustesse et la souplesse de cette approche, dans laquelle tous les phénomènes peuvent être pris en compte d'une manière unifiée, ont été démontrées. De plus, l'identification des paramètres du modèle est simple et les résultats obtenus avec ces modèles sont tout à fait pertinents. Pour toutes ces raisons, nous avons choisi de nous placer dans ce même cadre théorique pour la modélisation du comportement du matériau multiphasé (modélisation des transformations de phases et du comportement mécanique du mélange). Cette modélisation fait l'objet du deuxième chapitre qui commence par un rappel sur le cadre théorique dans lequel s'inscrit la modélisation, c'est-à-dire celui des matériaux standards généralisés avec des liaisons internes.

Chapitre 2

Nouvelle modélisation du comportement du matériau multiphasé

2.1 Introduction

Dans la suite de ce mémoire, nous abordons le problème de la modélisation du comportement mécanique des matériaux multiphasés et de la transformation de phase à l'état solide. La démarche adoptée utilise la méthode des deux potentiels en présence de variables d'état liées, ces liaisons internes sont prises en compte dans l'expression de l'énergie potentielle par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange ([Moumni, 1995], [Moumni *et al.*, 2008]). Nous avons donc trouvé intéressant de consacrer une partie de ce deuxième chapitre à un rappel du cadre théorique de cette méthode.

Ensuite, nous présenterons les modèles de comportement pour la cinétique de transformation de phase ainsi que pour le comportement mécanique du matériau multiphasé dévéloppés dans ce travail. L'originalité de notre modélisation réside dans le fait que chaque phase du mélange peut avoir individuellement un comportement non-linéaire : élastoplastique ou élastoviscoplastique. La plasticité de transformation peut également être prise en compte.

Le cadre théorique utilisé offre la possibilité de prendre en compte tous les phénomènes mis en jeu d'une manière couplée. Ainsi, afin d'analyser l'influence de différents phénomènes tels que la plasticité, la viscoplasticité et la plasticité de transformation sur la réponse mécanique des structures métalliques sous chargements thermomécaniques avec la présence de transformations microstructurales, nous avons opté pour la démarche séquentielle suivante :

• D'abord, nous présentons un modèle dans lequel le comportement mécanique de chaque phase est élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire,

• Ensuite, l'effet de la viscosité sera pris en compte en adoptant des comportements élastoviscoplastiques pour les phases du mélange,

• Enfin, un modèle dit "combiné" est présenté, dans lequel le comportement de la phase ferritique est élastoplastique et celui de l'austénite est élastoviscoplastique.

Dans chaque cas, l'effet de la plasticité de transformation sera pris en compte en ajoutant une nouvelle variable macroscopique ε^{pt} représentant la déformation de plasticité de transformation.

La robustesse et la souplesse de la démarche adoptée sont mises en évidence à travers ces cas. En effet, l'ensemble des phénomènes peuvent être pris en compte dans un seul modèle et de plus, les différentes phases métallurgiques peuvent présenter des comportements individuels différents.

2.2 Méthode des deux potentiels

La méthode de deux potentiels repose sur le postulat de l'état local. Ce dernier considère que l'état thermodynamique d'un point matériel est complètement défini à un instant donné par la donnée en ce point et à cet instant des valeurs d'un ensemble fini de variables indépendantes. Ces variables sont appelées "variables d'état" ou "variables thermodynamiques".

Dans le cadre de ce chapitre, l'ensemble des variables d'état inclut le tenseur de déformation macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}$, la température T, ainsi que des variables internes $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ décrivant respectivement des phénomènes dissipatifs et non dissipatifs.

La méthode des deux potentiels consiste à dériver les lois de comportement d'un matériau à partir des expressions d'une énergie libre $\mathcal{W}$ et d'un pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D}$.

$\mathcal{W}$ est fonction de l'ensemble des variables d'état, c'est-à-dire :

$$\mathcal{W} = W(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \tag{2.1}$$

tandis que $\mathcal{D}$ est fonction des variables dissipatives $\boldsymbol{\alpha}$ et de leurs dérivées $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$. Le pseudo-potentiel $\mathcal{D}$ est non négatif, convexe par rapport à $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, semi-continu inférieurement et nul en $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}$. Comme il sera rappelé plus tard, ces propriétés de $\mathcal{D}$ permettent de définir facilement des lois d'évolution qui satisfont automatiquement le deuxième principe de la thermodynamique.

2.2.1 Cas des variables d'état indépendantes

Une loi de comportement doit vérifier les principes de la thermodynamique. Si $\mathcal{W}$ est la densité d'énergie en un point matériel donné, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur de contrainte de Cauchy et s la densité d'entropie, l'inégalité de Clausius-Duhem traduisant le deuxième principe s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}.\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - s\dot{T} - \dot{\mathcal{W}} \geqslant 0 \tag{2.2}$$

ce qui donne, après dévéloppement

$$\Big(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\Big).\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Big(s + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T}\Big)\dot{T} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}.\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\beta}}.\dot{\boldsymbol{\beta}} \geqslant 0, \quad \forall\big(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{T}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}\big) \tag{2.3}$$

En supposant que :

- $\mathcal{W}$ dépend uniquement de la température T et des variables $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$,
- l'énergie interne $\mathcal{U}$ dépend uniquement de la densité d'entropie s et des variables $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$.

Le terme $\Big(s + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T}\Big)$ dans l'équation (2.3) devient nul à cause de la relation :

$$\mathcal{U} = \mathcal{W} + Ts \tag{2.4}$$

définissant l'énergie interne à partir de l'énergie libre. En faisant par ailleurs l'hypothèse que $\Big(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\Big)$, $\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$ et $\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\beta}}$ sont indépendantes de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ et $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, on déduit de (2.3) les lois d'état :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0 \tag{2.5}$$

Si on note $\mathcal{A}$ la quantité $-\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$, l'inégalité (2.2) se réduit à :

$$\mathcal{A}.\dot{\boldsymbol{\alpha}} \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Le comportement du matériau est complètement défini par l'adjonction de lois complémentaires liant les variations des variables dissipatives $\boldsymbol{\alpha}$ aux forces thermodynamiques associées $\mathcal{A}$ et ces relations doivent vérifier l'inégalité (2.6). L'adoption du formalisme des matériaux standards généralisés [Halphen et Nguyen, 1974] fondée sur l'hypothèse du mécanisme dissipatif normal est un moyen d'assurer le respect de l'inégalité Clausius-Duhem exprimant le second principe.

Un mécanisme dissipatif normal est défini en supposant l'existence d'une fonction $\mathcal{D}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$, définie pour tout $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, semi continue inférieurement, non négative, convexe par rapport à $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ et nulle en $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0$. La force généralisée $\mathcal{A}$ est choisie comme un sous-gradient de $\mathcal{D}$ par rapport à $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$:

$$\mathcal{A} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}} \mathcal{D} \tag{2.7}$$

La fonction dual $\mathcal{D}^*$ obtenue par la transformée de Legendre-Fenchel de $\mathcal{D}$ définie par

$$\mathcal{D}^* = \sup_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}} (\mathcal{A}.\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \mathcal{D}) \tag{2.8}$$

$\mathcal{D}^*$ est aussi une fonction convexe, positive et nulle pour $\mathcal{A} = 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\mathcal{A} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}} \mathcal{D} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\alpha}} \in \partial_{\mathcal{A}} \mathcal{D}^* \Leftrightarrow \mathcal{A}.\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{D} + \mathcal{D}^* \tag{2.9}$$

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^*$ étant positifs, la positivité de la dissipation $\mathcal{A}.\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ est donc assurée. L'inégalité de Clausius-Duhem est automatiquement vérifiée.

Finalement, le potentiel $\mathcal{D}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$, fonction éventuelle de l'état, définit le comportement irréversible du matériau alors que le comportement réversible est défini par le potentiel thermodynamique $\mathcal{W}$. Les équations (2.5) et (2.7) traduisent la loi de comportement suivant la méthode des deux potentiels.

2.2.2 Cas des variables d'état dépendantes

La méthode des deux potentiels s'applique aussi dans le cas où des liaisons existent entre les variables d'état ([Frémond, 1987], [Frémond, 1998], [Frémond, 2001], [Moumni, 1995], [Nguyen et Moumni, 1998], [Auricchio et Petrini, 2002], [Moumni *et al.*, 2008]). La méthode des multiplicateurs de Lagrange peut être utilisée pour prendre en compte ces liaisons. En effet, en supposant que les variables $\boldsymbol{\varepsilon}$, T, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ vérifient des liaisons parfaites bilatérale et unilatérale données respectivement par

$$g = 0 \quad \text{et} \quad h \geqslant 0 \tag{2.10}$$

où

$$g = g(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{et} \quad h = h(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \tag{2.11}$$

On démontre [Germain, 1973] qu'il existe un potentiel $\mathcal{W}_l$ duquel dérivent les relations (2.10). L'expression de $\mathcal{W}_l$ est donnée par

$$\mathcal{W}_l = -\lambda g - \mu h \quad \text{où} \quad \mu h = 0 \ \textit{et} \ \mu \geqslant 0 \tag{2.12}$$

λ et μ sont des multiplicateurs de Lagrange.

La densité d'énergie libre du matériau, qui représente le lagrangien associé, s'écrit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} + \mathcal{W}_l \tag{2.13}$$

Les lois d'état, définissant les forces thermodynamiques associées, sont données par

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad s = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \tag{2.14}$$

D'autre part, la force thermodynamque $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ associée à la variable dissipative $\boldsymbol{\alpha}$ est donnée par

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \mu \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \tag{2.15}$$

et la positivité de la dissipation est assurée, comme dans le cas des variables d'état indépendantes, en choisissant la force thermodynamque $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ parmi les sous-gradients d'un pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D}$.

Il est intéressant de noter que si les fonctions g et h ne dépendent que de la variable dissipative $\boldsymbol{\alpha}$ et si $\boldsymbol{\alpha}$ est scalaire ($\alpha = \boldsymbol{\alpha}$ et $\mathcal{A} = \boldsymbol{\mathcal{A}}$), la force thermodynamque $\mathcal{A}$ peut s'écrire indépendamment de g et de h quand α évolue, tant que g, h et μ restent dérivables. Dans ce cas, les équations

$$g = 0 \quad \text{et} \quad \mu h = 0 \tag{2.16}$$

donnent

$$\dot{g} = 0 \tag{2.17}$$

et

$$\dot{\mu} h + \mu \dot{h} = 0 \tag{2.18}$$

L'équation (2.17) s'écrit

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \tag{2.19}$$

ce qui entraîne $\frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0$ dans l'expression de $\mathcal{A}$ pour $\dot{\alpha} \neq 0$.

De la même manière, quand la liaison unilatérale définie par $h \geqslant 0$ est effective, c'est-à-dire quand $h = 0$, l'équation (2.18) se réduit à

$$\mu \frac{\partial h}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \tag{2.20}$$

L'expression $\mu \frac{\partial h}{\partial \alpha}$ est donc nulle pour $\dot{\alpha} \neq 0$ quand $h = 0$. Elle l'est aussi pour $h > 0$ car, dans ce cas, $\mu = 0$ d'après (2.16), d'où

$$\mu \frac{\partial h}{\partial \alpha} = 0 \quad \forall \dot{\alpha} \neq 0 \tag{2.21}$$

La force dissipative s'écrit donc

$$\mathcal{A} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \tag{2.22}$$

En conclusion, lorsque la variable dissipative évolue, si cette variable est scalaire, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les liaisons ne dépendant que de cette variable dans l'expression de la force thermodynamique associée tant que ces liaisons et les multiplicateurs de Lagrange associés sont dérivables.

2.2.3 Conclusion

La méthode des deux potentiels, dans le cas où des liaisons existent entre les variables d'état, offre un cadre théorique clair et robuste pour le développement des lois de comportement vérifiant les principes de la thermodynamique. Il permet d'étudier l'influence de plusieurs phénomènes par l'ajout des variables internes correspondantes. Cette méthode sera utilisée dans la suite de la thèse pour développer de nouveaux modèles pouvant décrire la cinétique de transformations de phases à l'état solide ainsi que le comportement mécanique des matériaux multiphasés et servant aux simulations numériques des procédés de soudage ou de traitement thermique des aciers.

2.3 Modélisation du comportement du matériau multiphasé

Nous allons présenter, dans cette section, la modélisation du comportement thermomécanique et métallurgique des matériaux avec une application pour des procédés de soudage ou de traitement thermique des aciers. La modélisation se place dans le cadre des matériaux standards généralisés avec des liaisons internes. Pour les phases présentes dans un volume représentatif élémentaire, nous adoptons un arrangement en série des phases dans le mélange (le modèle de Reuss). Il s'agit donc d'une hypothèse de contraintes homogènes dans un milieu hétérogène. Ce modèle a été également utilisé pour la modélisation des transformations de phase à l'état solide et du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme ([Moumni, 1995], [Zaki, 2006], [Zaki et Moumni, 2007a], [Zaki et Moumni, 2007b], [Moumni *et al.*, 2008]).

Afin de simplifier la présentation, nous considérons un mélange de deux phases métallurgiques dont le modèle rhéologique adopté est représenté par la figure Fig.2.1. Il s'agit d'un modèle de deux phases en série, l'une représente la structure cubique centrée α et l'autre représente la structure cubique à face centrée γ dont les proportions volumiques sont respectivement z_α et z_γ. Ainsi qu'on le montrera dans la suite, les deux phases peuvent avoir des comportements thermomécaniques différents. D'autre part, en réalité des procédés de soudage ou de traitement thermique des aciers, un mélange de trois phases différentes ou plus peuvent exister. Pour que la modélisation puisse encore s'appliquer dans ces cas, une extension de la modélisation pour le cas où il y a plus de deux phases dans le mélange sera également discutée à la fin de ce paragraphe.

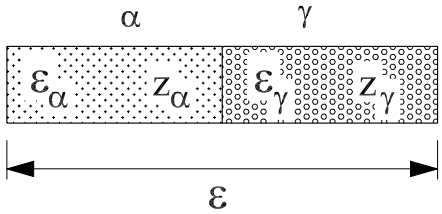


Fig. 2.1 : *Modèle rhéologique adopté pour la modélisation*

Ainsi que nous l'avons évoqué dans le premier chapitre, lors de la transformation de phases, on peut avoir éventuellement un mélange des différentes phases avec des caractéristiques thermomécaniques différents. D'autre part, pour les procédés de soudage ou de traitement thermique, la température est souvent élevée. Dans ces conditions, l'influence de la viscosité sur le comportement mécanique du matériau peut être considérable et on a donc tendance à utiliser

les modèles viscoplastiques pour les métaux ou les alliages à la température élevée. Afin d'analyser l'influence de différents phénomènes tels que la plasticité, la viscoplasticité et la plasticité de transformation sur la réponse en mécanique des structures métalliques sous chargements thermomécaniques avec la présence des transformations structurales, nous avons opté pour la démarche séquentielle suivante :

- d'abord, le comportement élastoplastique est adopté pour les deux phases du mélange,
- ensuite, nous utilisons pour chaque phase dans le mélange un comportement élastoviscoplastique,
- enfin, il s'agit du modèle "combiné", le comportement de la phase ferritique est élastoplastique et celui de l'austénite est élastoviscoplastique.

Dans chaque cas, l'effet de la plasticité de transformation sera également pris en compte.

A travers ces cas, on s'aperçoit visiblement la robustesse et la souplesse de cette approche dans laquelle tous les phénomènes peuvent être pris en compte dans un seul modèle avec différentes phases métallurgiques pouvant avoir les comportements individuels différents.

Dans la suite de la thèse, le terme "TRIP" désigne la plasticité de transformation de phase (**TR**ansformation **I**nduced **P**lasticity).

La figure Fig.2.2 récapitule les modèles présentés dans les paragraphes suivants.

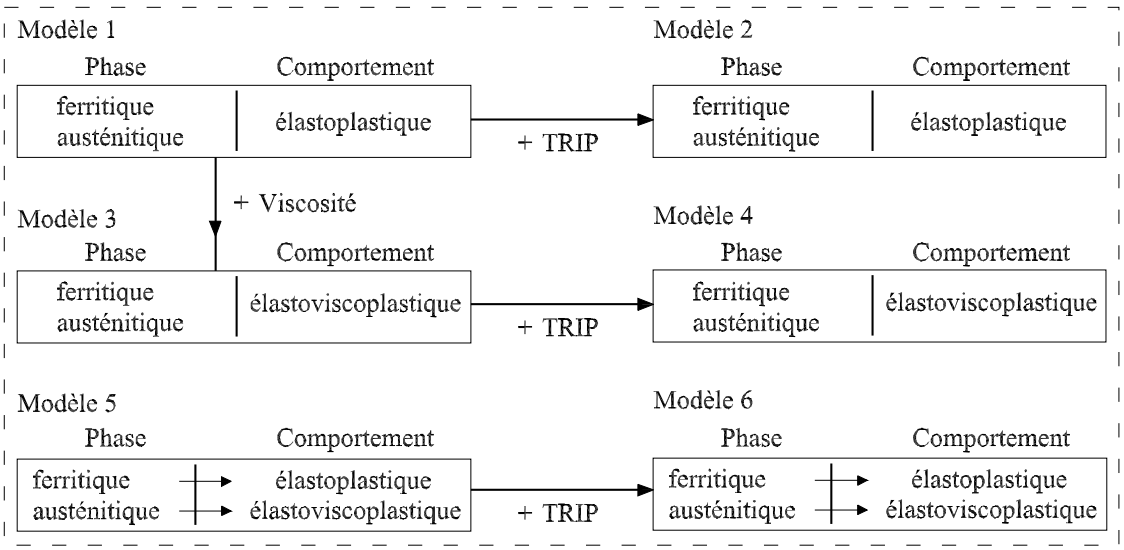


Fig. 2.2 : *Ensemble des modèles proprosés*

2.3.1 Cas de l'élastoplasticité

Nous présentons, dans ce paragraphe, le modèle de comportement, pour le mélange de deux phases, dans lequel le comportement mécanique de chaque phase est de type élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire.

2.3.1.1 Variables d'état et énergie libre

On suppose que l'état du matériau peut être décrit à l'aide de l'ensemble de variables d'état suivantes où les tenseurs sont représentés en caractère gras :

- $\boldsymbol{\varepsilon}$: la déformation totale macroscopique,
- T : la température,
- z_i : la proportion volumique de la phase i,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i$: la déformation totale individuelle de la phase i,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i^p$: la déformation plastique individuelle de la phase i,
- $\boldsymbol{\alpha}_i$: la variable d'écrouissage cinématique de la phase i.

On considère un mélange de deux phases métallurgiques, par conséquent, les proportions volumiques des phases sont $z_1 = z$ et $z_2 = (1 - z)$.

On se place dans le cadre des petites pertubations, ce qui permet de considérer la partition des déformations suivantes, $i = (1, 2)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i^e + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^p \tag{2.23}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_i^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{th}$ sont successivement les déformations élastique et thermique individuelles de la phase i.

La déformation thermique de la phase i est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{th} = k_i.(T - T_i^0).\mathbf{1} \tag{2.24}$$

k_i : coefficient de dilatation thermique de la phase i,
T_i^0 : température de référence de la phase i à laquelle la déformation thermique est considérée comme nulle.

En supposant un découplage entre le comportement élastique et l'écrouissage du matériau, la densité de l'énergie libre de la phase i s'écrit, $i = (1, 2)$:

$$\mathcal{W}_i \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, T) = \mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T) + \mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i) \tag{2.25}$$

$\mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T)$ et $\mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i)$ sont respectivement la partie thermoélastique et la partie associée à l'écrouissage de l'énergie libre de la phase i.

La partie thermoélastique de l'énergie libre de la phase i a été choisie sous la forme suivante, $i = (1, 2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i^{the} &\overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\lambda_i\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e)\big)^2 + 2\mu_i Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e)^2\Big) + \mathcal{W}_i^{th}(T) \end{aligned} \tag{2.26}$$

où

λ_i et μ_i : les coefficients de Lamé de la phase i,
$\mathcal{W}_i^{th}(T)$: la partie purement thermique de l'énergie libre de la phase i.

On utilise les formules classiques suivantes pour déterminer les coefficients de Lamé

$$\lambda_i = \frac{\nu_i E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \quad \text{et} \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \tag{2.27}$$

E_i et ν_i sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson de la phase i.

Concernant la partie purement thermique de l'énergie libre, cette quantité d'énergie est liée à la chaleur spécifique par la relation thermodynamique suivante :

$$c_i^{\varepsilon} = -T\frac{\partial_i^2 \mathcal{W}_i^{th}(T)}{\partial T^2} \tag{2.28}$$

c_i^{ε} étant la chaleur spécifique à déformation constante de la phase i et dépendant éventuellement de la température.

Quant à la partie associée à l'écrouissage de l'énergie libre, on a considéré le comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire pour chaque phase dans le mélange et cette quantité d'énergie est choisie sous la forme, $i = (1, 2)$:

$$\mathcal{W}_i^p \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i) = \frac{1}{3} H_i \boldsymbol{\alpha}_i^2 \tag{2.29}$$

H_i représente le module d'écrouissage cinématique de la phase i.

Puisque le milieu possède deux phases, il est naturel d'écrire que l'énergie libre du mélange est constituée par la fraction relative d'énergie libre de chaque phase, augmentée éventuellement, d'une énergie d'interaction $\mathcal{I} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{I}(z)$, $i = (1, 2)$:

$$\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, T) = z\mathcal{W}_1 + (1-z)\mathcal{W}_2 + \mathcal{I} \tag{2.30}$$

L'énergie $\mathcal{I}$ représente l'interaction entre les deux phases dans le mélange. Elle prend en compte les interactions qui ne manquent pas de se manifester à l'interface entre les phases, telles que les échanges de carbone ou les incompatibilités des déformations des phases. Dans le cadre de notre étude, cette énergie d'interaction est négligée et l'énergie libre du mélange s'écrit alors :

$$\mathcal{W} = z\mathcal{W}_1 + (1-z)\mathcal{W}_2 \tag{2.31}$$

2.3.1.2 Liaisons internes et lagrangien

Les variables d'état retenues pour la modélisation du comportement sont soumises à certaines contraintes physiques, notamment :

• le modèle rhéologique retenu est un modèle en série, la déformation macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}$ au niveau du volume élémentaire de référence est donc égale à la somme des déformations dues à chacune des phases, d'où :

$$z\boldsymbol{\varepsilon}_1 + (1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.32}$$

En reportant l'équation (2.23) dans l'équation (2.32), on obtient :

$$z\big(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p\big) + (1-z)\big(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p\big) - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.33}$$

• la fraction volumique ne peut pas être négative, ce qui donne des liaisons unilatérales :

$$z \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (1-z) \geqslant 0 \tag{2.34}$$

Si l'on admet que les liaisons précédentes, indépendantes du temps réel, sont parfaites au sens où la puissance virtuelle des efforts de liaison, pour tout mouvement virtuel compatible avec ces liaisons, est non négative [Germain, 1973]. On démontre [Moumni, 1995] que ces liaisons dérivent d'un potentiel $\mathcal{W}_l$ tel que :

$$\mathcal{W}_l = -\boldsymbol{\omega}\Big(z\big(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p\big) + (1-z)\big(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p\big) - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z) \tag{2.35}$$

$\boldsymbol{\omega}$, υ_1 et υ_2 sont des multiplicateurs de Lagrange. Les multiplicateurs υ_1 et υ_2 associés aux liaisons unilatérales doivent satisfaire les conditions [Germain, 1973] :

$$\upsilon_1 \geqslant 0, \upsilon_1 z = 0 \quad \text{et} \quad \upsilon_2 \geqslant 0, \upsilon_2(1-z) = 0 \tag{2.36}$$

Connaissant l'expression de l'énergie libre du mélange (*cf.* (2.31)) ainsi que l'expression du potentiel $\mathcal{W}_l$ duquel dérivent les liaisons entre les variables d'état (*cf.* (2.35)), on construit le lagrangien associé :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \mathcal{W} + \mathcal{W}_l &\overset{\text{def}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\varepsilon}_i^p, \boldsymbol{\alpha}_i, z_i) \qquad (2.37)\\
&= z\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) + \mathcal{W}_1^{th}(T) + \frac{1}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1^2\right)\\
&+ (1-z)\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2 + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \frac{1}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2^2\right)\\
&- \boldsymbol{\omega}\Big(z\big(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p\big) + (1-z)\big(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p\big) - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z)
\end{aligned}$$

2.3.1.3 Lois d'état

Seules les forces thermodynamiques associées aux mécanismes dissipatifs sont non nulles. Dans ce cas, les processus dissipatifs considérés sont les déformations plastiques et les évolutions de l'écrouissage de chaque phase ainsi que les transformations des phases. Les équations d'état s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.38}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_1} = \boldsymbol{X}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X}_1 = -z\frac{2}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1 \tag{2.39}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_2} = \boldsymbol{X}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X}_2 = -(1-z)\frac{2}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2 \tag{2.40}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1^p} = \boldsymbol{\sigma}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = z\boldsymbol{\omega} \tag{2.41}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2^p} = \boldsymbol{\sigma}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = (1-z)\boldsymbol{\omega} \tag{2.42}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e).\mathbf{1} + 2\mu_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^e \tag{2.43}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e).\mathbf{1} + 2\mu_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^e \tag{2.44}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z\big(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p\big) + (1-z)\big(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p\big) - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = A \quad \Rightarrow \quad A = &\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2 + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \frac{1}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2^2\right)\\
&- \left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) + \mathcal{W}_1^{th}(T) + \frac{1}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1^2\right)\\
&+ \boldsymbol{\omega}\Big(\big(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p\big) - \big(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p\big)\Big) + \upsilon_1 - \upsilon_2
\end{aligned} \tag{2.46}$$

L'équation d'état (2.38) montre que le multiplicateur $\boldsymbol{\omega}$ joue le rôle de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et les équations (2.43) et (2.44) permettent de retrouver logiquement la contrainte homogène dans le matériau multiphasé de façon conforme au modèle en série adopté.

De plus, l'inversion des équations (2.43) et (2.44) nous permet d'obtenir la déformation élastique de chaque phase en fonction de la contrainte homogène $\boldsymbol{\sigma}$, ($\boldsymbol{\sigma}$=$\boldsymbol{\omega}$) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^e = \frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.47}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^e = \frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.48}$$

Reportant ces deux équations dans l'équation (2.45), nous obtenons la loi de comportement du matériau multiphasé :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} = {} & z\Big(\frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) + (1-z)\Big(\frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) \\ & + z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p)\end{aligned} \tag{2.49}$$

2.3.1.4 Evolutions des variables dissipatives

Afin de définir complètement la loi de comportement, il est nécessaire de déterminer les lois complémentaires liant les variations des variables dissipatives aux forces thermodynamiques associées qui sont définies par les équations d'état ci-dessus. Dans le cadre des matériaux standards généralisés, ces lois complémentaires dérivent d'un potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ qui est une fonction convexe, positive, nulle à l'origine et semi-continue inférieurement.

Cependant, ces lois d'évolution des variables dissipatives sont également obtenues en utilisant un pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D}^*$ obtenu à partir du potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ par la transformation Legendre-Fenchel (*cf.* l'équation (2.8)).

2.3.1.4.1 Déformations plastiques et variables d'écrouissage

Pour chaque phase métallurgique, les taux d'évolution des déformations plastiques et des variables d'écrouissage sont définis à partir d'un pseudo-potentiel de dissipation $\Phi^*_{mécanique}$ qui est une fonction des forces thermodynamiques associées à ces variables internes. Ce pseudo-potentiel de dissipation $\Phi^*_{mécanique}$ est égal à la fonction indicatrice d'un convexe défini par $f_i(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{X}_i) \leqslant 0$. $f_i(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{X}_i)$ est la fonction de charge de la phase i et est donnée par, $i = (1,2)$:

$$f_i \overset{\text{def}}{=} f_i(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{X}_i) = \sqrt{\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i)} - z_i\sigma_i^y \tag{2.50}$$

où

σ_i^y est la limite d'élasticité de la phase i, cette quantité peut dépendre éventuellement de la température,

la notation $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}$ désigne la partie déviatorique du tenseur $\boldsymbol{M}$, d'où $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - (1/3)(Tr\boldsymbol{M}).\mathbf{1}$.

La règle de normalité nous permet d'obtenir les lois d'évolution pour les déformations plastiques des phases métallurgiques :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p = \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}_i} \qquad i = (1,2) \tag{2.51}$$

et pour les variables d'écrouissage :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{X}_i} \qquad i = (1,2) \tag{2.52}$$

λ_i est le multiplicateur plastique. Il est déterminé par des conditions de charge et décharge :

$$f_i = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}_i = 0 \qquad i = (1,2) \tag{2.53}$$

De plus, il est clair que l'utilisation d'une fonction de charge de type (2.50) permet de démontrer que pour chaque phase, la déformation plastique est égale à la variable interne d'écrouissage cinématique, d'où $\boldsymbol{\varepsilon}_i^p = \boldsymbol{\alpha}_i$.

Le développement de la fonction de charge (2.50) nous donne :

$$\begin{aligned} f_i &= \sqrt{\frac{3}{2}(z_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - z_i \frac{2}{3} H_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i) : (z_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - z_i \frac{2}{3} H_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i)} - z_i \sigma_i^y \\ &= z_i \left(\sqrt{\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{2}{3} H_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{2}{3} H_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i)} - \sigma_i^y \right) \overset{\text{def}}{=} z_i f_i^* \end{aligned} \tag{2.54}$$

On s'aperçoit que f_i^* est la fonction de charge dans le cas où une seule phase subsiste dans le mélange. Elle est également la fonction de charge de type Von-Mises souvent utilisée pour le comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire d'un matériau homogène ([Nguyen, 2000], [Lemaitre et Chaboche, 1996]).

Comme z_i est positive, l'équation (2.54) nous donne l'équivalence suivante :

$$f_i = 0 \Leftrightarrow f_i^* = 0 \tag{2.55}$$

De plus, nous avons la relation suivante, avec $f_i^* = 0$:

$$\dot{f}_i = \dot{z}_i f_i^* + z_i \dot{f}_i^* = z_i \dot{f}_i^* \tag{2.56}$$

Donc, nous obtenons également l'équivalence :

$$\dot{f}_i = 0 \Leftrightarrow \dot{f}_i^* = 0 \tag{2.57}$$

Les deux équations (2.55) et (2.57) montrent que la condition de l'écoulement plastique d'un matériau homogène peut s'appliquer de manière équivalente pour déterminer l'écoulement plastique d'une phase de proportion volumique z_i dans le matériau multiphasé.

2.3.1.4.2 Variable métallurgique

La variable métallurgique z utilisée pour la modélisation représente la proportion volumique d'une phase dans le mélange. L'évolution de cette variable est également définie à partir d'un pseudo-potentiel de dissipation $\Phi^*_{métallurgie}$. Dans notre étude, ce potentiel est choisi sous la forme :

$$\Phi^*_{métallurgie} = \frac{1}{2} A^2 \delta_1 (\delta_2 - z) \tag{2.58}$$

δ_1 et δ_2 sont des paramètres du matériau. Ces coefficients positifs seront identifiés de sorte que la positivité de ce pseudo-potentiel de dissipation soit assurée.

L'évolution de la proportion volumique des phases s'écrit donc :

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi^*_{métallurgie}}{\partial A} = A\delta_1(\delta_2 - z) \tag{2.59}$$

Dans ce cas, nous avons utilisé, comme Giusti [Giusti, 1981], le paramètre δ_1 pour tenir compte de l'influence des histoires thermiques sur les cinétiques de transformations de phases. Pour les cinétiques isothermes, on peut réécrire l'évolution précédente sous la forme suivante [Giusti, 1981] :

$$\dot{z} = \delta(\delta_2 - z) \tag{2.60}$$

δ est un paramètre qui dépend de la température considérée.

L'intégration de cette équation nous permet de retrouver la cinétique isotherme de type Johnson-Mehl-Avrami (*cf.* équation (1.27) du chapitre 1)

$$z = \delta_2 - exp(-\delta(T)t + c) \tag{2.61}$$

c est une constante d'intégration qui peut être déterminée par des conditions aux limites métallurgiques.

Effectivement, on peut considérer que la cinétique proposée (2.59) se base sur les cinétiques de transformations de phases dans les conditions isothermes. Pour les cinétiques anisothermes, nous avons utilisé un paramètre δ_1 permettant de prendre en compte des effets des histoires thermiques sur les transformations de phases.

Dans le modèle proposé, la force thermodynamique A associée à la variable métallurgique z est définie par l'équation d'état (2.46). Il est clair que, théoriquement, notre approche permet d'établir le modèle de comportement thermomécanique et métallurgique dans lequel l'influence de l'état mécanique sur la cinétique de transformations de phases peut être prise en compte. A la lumière de l'étude bibliographique sur ce point, il semble que seules les influences des pressions ou des contraintes uniaxiales sur la cinétique de transformations de phases sont expérimentalement obtenues et les effets des contraintes multiaxiales ou de l'écrouissage sont encore mal connus. Pour la plupart des cas, on a tendance à négliger ces influences et le problème de la cinétique de transformations de phases est donc traité indépendamment du problème mécanique. Dans le cadre de notre étude, l'influence de l'état de contraintes sur l'évolution de fractions volumiques est également négligée.

La force thermodynamique A associée à la variable métallurgique z s'écrit alors :

$$A = \mathcal{W}_2^{th}(T) - \mathcal{W}_1^{th}(T) \tag{2.62}$$

$\mathcal{W}_i^{th}(T)$ est la partie purement thermique de l'énergie libre de la phase i.

2.3.1.5 Dissipation intrinsèque

La dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{2}(\boldsymbol{\sigma}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p + \boldsymbol{X}_i : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i) + A.\dot{z} \tag{2.63}$$

En reportant les lois d'évolution des variables internes ((2.51), (2.52) et (2.59)) dans l'expression de dissipation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \sum_{i=1}^{2}(\boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{X}_i) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^p + A.\dot{z} \\ &= \sum_i \left(\lambda_i(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i) : \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}\right) + A^2\delta_1(\delta_2 - z)\end{aligned} \tag{2.64}$$

L'utilisation des fonctions de charge de type (2.50) nous permet finalement d'obtenir la dissipation intrinsèque :

$$\mathcal{D} = \sum_i \left(\lambda_i \sqrt{\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i)}\right) + A^2\delta_1(\delta_2 - z) \tag{2.65}$$

Il est à noter que, dans la suite, l'identification des paramètres δ_1 et δ_2 sera effectuée en assurant une positivité du potentiel $\Phi^*_{métallurgie}$ (l'équation (2.58)). De plus, comme la valeur prise par le multiplicateur plastique λ_i est non négative, cela nous conduit à obtenir la positivité de la dissipation intrinsèque, autrement dit, l'inégalité de Clausius-Duhem est vérifiée.

2.3.2 Cas de l'élastoplasticité avec la prise en compte de la plasticité de transformation

Comme nous avons évoqué dans le premier chapitre, la transformation de phases sous une contrainte, même si cette contrainte est inférieure à la limite d'élasticité du matériau, provoque une déformation irréversible, il s'agit de la plasticité de transformation. Dans ce paragraphe, nous allons améliorer le modèle précédent en ajoutant l'effet de la plasticité de transformation. Le mélange de deux phases est considéré et le comportement mécanique de chaque phase est élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire.

Nous rappelons qu'il existe deux mécanismes explicatifs pour cette plasticité de transformation (*cf.* 1.4.3.4.2. de chapitre 1). Le mécanisme de Magee est généralement considéré pour les alliages à mémoire de forme, alors que pour les alliages ferreux, c'est celui de Greenwood-Johnson qui est souvent utilisé.

Dans notre étude, pour la plasticité de transformation, nous nous appuyons sur le mécanisme de Greenwood-Johnson. Selon Greenwood-Johnson [Greenwood et Johnson, 1965], la plasticité de transformation est liée aux incompatibilités volumiques des phases présentes dans le mélange. Il est naturel de considérer l'existence de cette déformation à l'échelle macroscopique. Afin de tenir compte de cette déformation dans notre modèle, nous proposons d'ajouter une nouvelle variable d'état macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$ représentant la plasticité de transformation.

2.3.2.1 Variables d'état et énergie libre

Les variables d'état retenues pour la modélisation sont les suivantes :

- $\boldsymbol{\varepsilon}$: la déformation totale macroscopique et la température T,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$: la plasticité de transformation,
- z_i : la proportion volumique de la phase i,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i$: la déformation totale individuelle de la phase i,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i^p$: la déformation plastique individuelle de la phase i,

- $\boldsymbol{\alpha}_i$: la variable d'écrouissage cinématique de la phase i.

On considère un mélange de deux phases métallurgiques, les proportions volumiques des phases sont respectivement $z_1 = z$ et $z_2 = (1 - z)$. L'hypothèse de partition de la déformation permet d'écrire la déformation totale individuelle de la phase i :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i^e + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^p \tag{2.66}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_i^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{th}$ sont respectivement les déformations élastiques, thermiques individuelles de la phase i.

La déformation thermique de la phase i est donnée par l'équation (2.24).

Comme dans le cas précédent, on sépare la partie thermoélastique $\mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T)$ et la partie associée à l'écrouissage $\mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i)$, la densité de l'énergie libre de la phase i peut alors s'écrire :

$$\mathcal{W}_i \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, T) = \mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T) + \mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i) \qquad i = (1, 2) \tag{2.67}$$

La partie thermoélastique de l'énergie libre de la phase i est choisie sous la forme suivante, $i = (1, 2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i^{the} &\overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\lambda_i\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e)\big)^2 + 2\mu_i Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e)^2\Big) + \mathcal{W}_i^{th}(T) \end{aligned} \tag{2.68}$$

où

λ_i et μ_i : les coefficients de Lamé de la phase i,

$\mathcal{W}_i^{th}(T)$: la partie purement thermique de l'énergie libre de la phase i. Cette quantité d'énergie est liée à la chaleur spécifique par la relation thermodynamique suivante :

$$c_i^{\varepsilon} = -T\frac{\partial_i^2 \mathcal{W}_i^{th}(T)}{\partial T^2} \tag{2.69}$$

c_i^{ε} étant la chaleur spécifique à déformation constante de la phase i et dépendant éventuellement de la température.

Concernant la partie associée à l'écrouissage de l'énergie libre, on a considéré le comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire pour chaque phase dans le mélange, cette quantité d'énergie prend ainsi la forme, $i = (1, 2)$:

$$\mathcal{W}_i^p \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i) = \frac{1}{3} H_i \boldsymbol{\alpha}_i^2 \tag{2.70}$$

H_i représente le module d'écrouissage cinématique de la phase i.

L'énergie libre du matériau multiphasé s'écrit naturellement en négligeant l'énergie d'interaction :

$$\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, T) = z\mathcal{W}_1 + (1 - z)\mathcal{W}_2 \qquad i = (1, 2) \tag{2.71}$$

2.3.2.2 Liaisons internes et lagrangien

Les variables d'état proposées pour la description du comportement du matériau sont soumises à certaines contraintes physiques :

• le modèle rhéologique retenu étant en série, la déformation macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}$ est donc égale à la somme des déformations dues à chacune des phases et de la plasticité de transformation, d'où :

$$z\boldsymbol{\varepsilon}_1 + (1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.72}$$

En reportant l'équation (2.66) dans l'équation (2.72), on obtient :

$$z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.73}$$

• la fraction volumique ne peut pas être négative, ce qui donne les liaisons unilatérales :

$$z \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (1-z) \geqslant 0 \tag{2.74}$$

Ces liaisons sont supposées parfaites. Par conséquent, elles dérivent d'un potentiel $\mathcal{W}_l$ tel que :

$$\mathcal{W}_l = -\boldsymbol{\omega}\Big(z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z) \tag{2.75}$$

$\boldsymbol{\omega}$, υ_1 et υ_2 sont des multiplicateurs de Lagrange. Les multiplicateurs υ_1 et υ_2 associés aux liaisons unilatérales doivent obéir aux conditions :

$$\upsilon_1 \geqslant 0, \upsilon_1 z = 0 \qquad \text{et} \qquad \upsilon_2 \geqslant 0, \upsilon_2(1-z) = 0 \tag{2.76}$$

Le lagrangien est la somme de la densité d'énergie libre du matériau (2.71) et du potentiel duquel dérivent les liaisons (2.75) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \mathcal{W} + \mathcal{W}_l &\stackrel{\text{def}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\varepsilon}_i^p, \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\varepsilon}^{pt}, z_i) \qquad (2.77)\\
&= z\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) + \mathcal{W}_1^{th}(T) + \frac{1}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1^2\right)\\
&\quad + (1-z)\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2 + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \frac{1}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2^2\right)\\
&\quad - \boldsymbol{\omega}\Big(z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z)
\end{aligned}$$

2.3.2.3 Lois d'état

Les mécanismes dissipatifs considérés, dans ce cas, sont les déformations plastiques avec les évolutions de l'ecrouissage de chaque phase, les transformations des phases et la plasticité de transformation. Les forces thermodynamiques associées à ces mécanismes dissipatifs sont donc

non nulles et les équations d'état qui découlent de l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.78}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_1} = \boldsymbol{X}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X}_1 = -z\frac{2}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1 \tag{2.79}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_2} = \boldsymbol{X}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X}_2 = -(1-z)\frac{2}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2 \tag{2.80}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1^p} = \boldsymbol{\sigma}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = z\boldsymbol{\omega} \tag{2.81}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2^p} = \boldsymbol{\sigma}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = (1-z)\boldsymbol{\omega} \tag{2.82}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pt}} = \boldsymbol{X} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.83}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e).\mathbf{1} + 2\mu_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^e \tag{2.84}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e).\mathbf{1} + 2\mu_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^e \tag{2.85}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = A \quad \Rightarrow \quad A = &\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2 + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \frac{1}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2^2\right) \\ &- \left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) + \mathcal{W}_1^{th}(T) + \frac{1}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1^2\right) \\ &+ \boldsymbol{\omega}\Big((\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) - (\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p)\Big) + \upsilon_1 - \upsilon_2 \end{aligned} \tag{2.87}$$

Comme pour le cas précédent, l'inversion des équations (2.84) et (2.85) nous permet d'obtenir la déformation élastique de chaque phase en fonction de la contrainte homogène $\boldsymbol{\sigma}$, ($\boldsymbol{\sigma}$=$\boldsymbol{\omega}$) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^e = \frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.88}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^e = \frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.89}$$

Reportant ces deux équations dans l'équation (2.86), nous obtenons la loi de comportement du matériau multiphasé :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} &+ z\Big(\frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) + z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) \\ &+ (1-z)\Big(\frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^p) \end{aligned} \tag{2.90}$$

2.3.2.4 Evolutions des variables dissipatives

Les lois d'évolution des variables dissipatives sont définies en utilisant un pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D}^*$ obtenu à partir du potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ par la transformation Legendre-Fenchel (*cf.* l'équation (2.8)).

Pour chaque phase métallurgique, les taux d'évolution des déformations plastiques et des variables d'écrouissage sont obtenus à partir d'un pseudo-potentiel de dissipation $\Phi^*_{mécanique}$ qui est une fonction des forces thermodynamiques associées à ces variables internes. Ce pseudo-potentiel de dissipation $\Phi^*_{mécanique}$ est égal à la fonction indicatrice d'un convexe défini par $f_i(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{X}_i) \leqslant 0$. $f_i(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{X}_i)$ est la fonction de charge de la phase i et est donnée par l'équation (2.50).

En utilisant la loi de normalité, nous obtenons les lois d'évolution de la déformation plastique (*cf.* équation (2.51)) et de la variable d'écrouissage (*cf.* équation (2.52)) pour chaque phase métallurgique. Les conditions de charge et décharge (*cf.* équation (2.53)) permettent de déterminer le multiplicateur plastique λ_i de la phase i.

Dans notre étude, la modélisation de la plasticité de transformation (TRiP - **TR**ansformation **I**nduced **P**lasticity) repose sur le mécanisme Greenwood-Johnson, généralement, considéré pour les alliages ferreux (voir le paragraphe 1.4.3.4). Selon Greenwood-Johnson [Greenwood et Johnson, 1965], la plasticité de transformation est liée aux incompatibilités volumiques des phases dans le mélange. La structure générale des modèles se basant sur ce mécanisme (*cf.* équation (1.64) du premier chapitre) nous permet de proposer un pseudo-potentiel de dissipation Φ^*_{pt} pour le taux d'évolution de la déformation de plasticité de transformation :

$$\Phi^*_{pt} = \frac{3}{2} K(1-z)\dot{z}\underset{\sim}{\boldsymbol{X}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{X}} \tag{2.91}$$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}$ désigne la partie déviatorique du tenseur $\boldsymbol{X}$, d'où $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} - (1/3)(Tr\boldsymbol{X}).\mathbf{1}$.

K est une constante du matériau. Elle peut être associée à la différence de compacité entre la phase mère et la phase produite dans le mélange.

Ce pseudo-potentiel de dissipation nous permet de retrouver le modèle de type Leblond-Giusti pour l'évolution de la plasticité de transformation (*cf.* l'équation (1.68) du premier chapitre) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} = \frac{\partial \Phi^*_{pt}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}} = 3K(1-z)\dot{z}\underset{\sim}{\boldsymbol{X}} \tag{2.92}$$

Pour l'évolution de la variable métallurgique, nous utilisons un pseudo-potentiel de dissipation $\Phi^*_{métallurgie}$ donné par l'équation (2.58) et l'équation (2.59) représente l'évolution de la proportion volumique de la phase formée.

2.3.2.5 Dissipation intrinsèque

La dissipation intrinsèque s'exprime :

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{2} (\boldsymbol{\sigma}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_i + \boldsymbol{X}_i : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i) + \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} + A.\dot{z} \tag{2.93}$$

On considère la dissipation associée à la plasticité de transformation, celle-ci s'exprime par :

$$\boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} = 3K(1-z)\dot{z}\underset{\sim}{\boldsymbol{X}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{X}} \tag{2.94}$$

Il est clair que la positivité de la constante K assure la positivité de cette partie de la dissipation intrinsèque. D'autre part, on a montré dans le paragraphe 2.3.1.5 que la partie restante de la dissipation intrinsèque (2.93) est positive, la positivité de la dissipation intrinsèque est donc vérifiée.

2.3.3 Cas de l'élastoviscoplasticité

Pour les procédés de soudage ou de traitement thermique, la plage de température est souvent très large et la température maximale atteinte dans la structure est souvent élevée. Dans ces conditions, pour les métaux et les alliages, le rôle de la viscosité est considérable, il est nécessaire d'en tenir compte pour le comportement mécanique du matériau. Le comportement élastoviscoplastique est donc souvent considéré dans ce cas. En effet, ce comportement se traduit par sa dépendance vis-à-vis de la vitesse de sollicitation.

Afin d'estimer les influences de la viscosité sur le comportement du matériau lorsque la température est élevée et, plus loin, sur la distribution finale des contraintes et des déformations résiduelles des structures soudées, nous allons présenter, dans ce paragraphe, un modèle de comportement dans lequel le comportement mécanique de chaque phase est de type élastoviscoplastique avec écrouissage cinématique et écrouissage isotrope. Les démarches sont identiques à celles présentées dans les cas précédents. Le modèle rhéologique adopté est toujours le modèle en série, modèle de Reuss (*cf.* figure Fig.2.1). On considère un mélange de deux phases dont les proportions volumiques sont respectivement $z_1 = z$ et $z_2 = (1 - z)$. L'énergie d'interaction est toujours négligée. Enfin, l'effet de la plasticité de transformation sera considéré dans la dernière section de ce paragraphe.

2.3.3.1 Variables d'état et énergie libre

On suppose que l'état du matériau peut être décrit par l'ensemble des variables d'état suivantes :

- $\boldsymbol{\varepsilon}$: la déformation totale macroscopique et la température T,
- z_i : la proportion volumique de la phase i,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i$: la déformation totale individuelle de la phase i,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp}$: la déformation viscoplastique individuelle de la phase i,
- r_i : la variable d'écrouissage isotrope de la phase i,
- $\boldsymbol{\alpha}_i$: la variable d'écrouissage cinématique de la phase i.

Ici, la déformation viscoplastique cumulée est utilisée comme variable d'écrouissage isotrope pour chaque phase, d'où $r_i = p_i$. p_i désigne la déformation viscoplastique cumulée de la phase i et est donnée par :

$$p_i = \int_0^t \left(\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp}(t)\right)^{1/2} dt \tag{2.95}$$

L'hypothèse de partition de la déformation nous permet d'écrire la déformation totale individuelle de la phase i :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i^e + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp} \qquad i = (1, 2) \tag{2.96}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_i^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{th}$ sont respectivement les déformations élastique et thermique individuelles de la phase i.

La déformation thermique de la phase i est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{th} = k_i.(T - T_i^0).\mathbf{1} \tag{2.97}$$

k_i : coefficient de dilatation thermique de la phase i,
T_i^0 : température de référence de la phase i à laquelle la déformation thermique est considérée comme nulle.

La densité de l'énergie libre de la phase i peut s'écrire en considérant séparément une partie thermoélastique $\mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T)$ et une partie associée à l'écrouissage $\mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i, p_i)$:

$$\mathcal{W}_i \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, p_i, T) = \mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T) + \mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i, p_i) \qquad i = (1,2) \tag{2.98}$$

Comme pour les cas précédents, la partie thermoélastique de l'énergie libre de la phase i prend la forme suivante, $i = (1,2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i^{the} &\overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\lambda_i\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e)\big)^2 + 2\mu_i Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e)^2\Big) + \mathcal{W}_i^{th}(T) \end{aligned} \tag{2.99}$$

λ_i et μ_i sont les coefficients de Lamé de la phase i. $\mathcal{W}_i^{th}(T)$ est la partie purement thermique de l'énergie libre de la phase i. Cette partie d'énergie est liée à la chaleur spécifique par l'équation(2.28).

Pour la partie associée à l'écrouissage de l'énergie libre, on considère un comportement élastoviscoplastique avec un écrouissage cinématique et un écrouissage isotrope pour chaque phase dans le mélange. Nous avons donc utilisé pour cette quantité d'énergie la forme suivante, $i = (1,2)$ [Lemaitre et Chaboche, 1996] :

$$\mathcal{W}_i^p \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i, p_i) = \Big(\frac{1}{3}H_i\boldsymbol{\alpha}_i^2\Big) + \Big(Q_i p_i - \frac{Q_i}{b_i}\big(1 - exp(-b_i p_i)\big)\Big) \tag{2.100}$$

H_i, Q_i, b_i sont respectivement les coefficients d'écrouissage cinématique (H_i) et isotrope (Q_i et b_i) de la phase i. Ils peuvent dépendre de la température.

Finalement, l'énergie libre du matériau multiphasé s'écrit en négligeant l'énergie d'interaction de deux phases dans le mélange :

$$\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, p_i, T) = z\mathcal{W}_1 + (1-z)\mathcal{W}_2 \qquad i = (1,2) \tag{2.101}$$

2.3.3.2 Liaisons internes et lagrangien

Comme dans le cas de l'élastoplasticité, les variables d'état sont soumises aux contraintes physiques suivantes :

- le modèle rhéologique retenu est un modèle en série, ce qui nous permet d'écrire :

$$z\boldsymbol{\varepsilon}_1 + (1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.102}$$

En reportant l'équation (2.96) dans l'équation (2.102), on obtient :

$$z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.103}$$

- la fraction volumique ne peut pas être négative, ce qui donne des liaisons unilatérales :

$$z \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (1-z) \geqslant 0 \tag{2.104}$$

Le potentiel duquel dérivent ces liaisons supposées parfaites est défini par :

$$\mathcal{W}_l = -\boldsymbol{\omega}\Big(z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z) \tag{2.105}$$

$\boldsymbol{\omega}$, υ_1 et υ_2 sont des multiplicateurs de Lagrange. Nous utilisons les conditions suivantes pour les multiplicateurs υ_1 et υ_2 associés aux liaisons unilatérales :

$$\upsilon_1 \geqslant 0, \upsilon_1 z = 0 \qquad \text{et} \qquad \upsilon_2 \geqslant 0, \upsilon_2(1-z) = 0 \tag{2.106}$$

La somme de l'énergie libre $\mathcal{W}$ et du potentiel $\mathcal{W}_l$ fournit l'expression du lagrangien $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{W} + \mathcal{W}_l \overset{\text{def}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp}, \boldsymbol{\alpha}_i, p_i, z_i) \qquad (2.107)\\ &= z\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) + \mathcal{W}_1^{th}(T) + \frac{1}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1^2 + \Big(Q_1 p_1 - \frac{Q_1}{b_1}\big(1 - exp(-b_1 p_1)\big)\Big)\right)\\ &\quad + (1-z)\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2 + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \Big(Q_2 p_2 - \frac{Q_2}{b_2}\big(1 - exp(-b_2 p_2)\big)\Big)\right.\\ &\quad \left. + \frac{1}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2^2\right) - \boldsymbol{\omega}\Big(z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z)\end{aligned}$$

2.3.3.3 Lois d'état

Les déformations viscoplastiques, les évolutions de l'écrouissage et les transformations de phases sont supposées être les seuls processus dissipatifs. Par conséquent, si l'on note $\boldsymbol{X}_i$, R_i, $\boldsymbol{\sigma}_i$ et A les forces thermodynamiques associées aux variables internes $\boldsymbol{\alpha}_i$, r_i, $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp}$ et z respectivement, seules ces forces peuvent être non nulles et les équations d'état s'écrivent alors, (i=(1,2)) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.108}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_i} = \boldsymbol{X}_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X}_i = -z_i \frac{2}{3} H_i \boldsymbol{\alpha}_i \tag{2.109}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = R_i \quad \Rightarrow \quad R_i = -z_i Q_i\big(1 - exp(-b_i p_i)\big) \tag{2.110}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp}} = \boldsymbol{\sigma}_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_i = z_i \boldsymbol{\omega} \tag{2.111}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e).\mathbf{1} + 2\mu_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^e \tag{2.112}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e).\mathbf{1} + 2\mu_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^e \tag{2.113}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = A \quad \Rightarrow \quad A &= \left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2 + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \Big(\frac{1}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2^2\Big)\right.\\ &\quad \left. + \Big(Q_2 p_2 - \frac{Q_2}{b_2}\big(1 - exp(-b_2 p_2)\big)\Big)\right) - \left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big)\right.\\ &\quad \left. + \mathcal{W}_1^{th}(T) + \Big(\frac{1}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1^2\Big) + \Big(Q_1 p_1 - \frac{Q_1}{b_1}\big(1 - exp(-b_1 p_1)\big)\Big)\right)\\ &\quad + \boldsymbol{\omega}\Big((\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) - (\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp})\Big) + \upsilon_1 - \upsilon_2 \qquad (2.115)\end{aligned}$$

Les équations (2.108), (2.112) et (2.113) nous permettent d'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^e = \frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.116}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^e = \frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.117}$$

Reportant ces deux équations dans l'équation (2.114), nous obtenons la loi de comportement du matériau multiphasé :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} = {} & z\Big(\frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) + (1-z)\Big(\frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) \\ & + z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp})\end{aligned} \tag{2.118}$$

2.3.3.4 Lois d'évolution des variables internes

La loi de comportement sera complétée par la définition des lois d'évolution des variables dissipatives. Ces dernières sont obtenues à l'aide d'un pseudo-potentiel de dissipation qui est une fonction convexe, positive, nulle à l'origine et semi-continue inférieurement.

Pour les variables de la déformation viscoplastique et de l'écrouissage, le pseudo-potentiel de dissipation suivant a été utilisé, $i = (1, 2)$ [Lemaitre et Chaboche, 1996] :

$$\Phi_{vp}^{*i} = \frac{1}{(\eta_i+1)z_i^{\eta_i}\kappa_i^{\eta_i}}\left(J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i) + R_i - z_i\sigma_i^y + \frac{3\gamma_i}{4H_iz_i}\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i - \frac{z_i\gamma_iH_i}{3}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i\right)^{\eta_i+1} \tag{2.119}$$

où :

- $J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i) = \sqrt{\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i)} \overset{\text{def}}{=} J_{2i}$,
- la notation $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}$ désigne la partie déviatorique du tenseur $\boldsymbol{M}$, d'où $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - (1/3)(Tr\boldsymbol{M}).\mathbf{1}$,
- σ_i^y est la limite d'élasticité de la phase i, γ_i est le coefficient d'écrouissage cinématique de la phase i, κ_i et η_i sont des coefficients de viscosité de la phase i. Ces paramètres du matériau peuvent dépendre de la température.

Les lois d'évolution des déformations viscoplastiques et des variables d'écrouissage s'écrivent :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp} = \frac{\partial\Phi_{vp}^{*i}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_i} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp} = \frac{3}{2}\dot{p}_i\frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i}{J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i)} \tag{2.120}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = \frac{\partial\Phi_{vp}^{*i}}{\partial\boldsymbol{X}_i} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp} - \gamma_i\boldsymbol{\alpha}_i\dot{p}_i \tag{2.121}$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial\Phi_{vp}^{*i}}{\partial R_i} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p}_i = \left(\frac{J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i) + R_i - z_i\boldsymbol{\sigma}_i^y}{z_i\kappa_i}\right)^{\eta_i} \tag{2.122}$$

Il est à noter que le développement de l'expression (2.119), en reportant les équations d'état ((2.108) à (2.111)), nous donne :

$$\begin{aligned}\Phi_{vp}^{*i} = {} & \frac{z_i}{(\eta_i+1)\kappa_i^{\eta_i}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{2}{3}H_i\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{2}{3}H_i\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i)} - Q_i\big(1 - exp(-b_ip_i)\big) - \sigma_i^y\right. \\ & \left. + \frac{\gamma_iH_i}{3}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i - \frac{\gamma_iH_i}{3}\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i\right)^{\eta_i+1} \\ = {} & z_i\frac{1}{(\eta_i+1)\kappa_i^{\eta_i}}\Big(J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{2}{3}H_i\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i) - Q_i\big(1 - exp(-b_ip_i)\big) - \sigma_i^y\Big)^{\eta_i+1} \overset{\text{def}}{=} z_i\Phi_{vp}^*\end{aligned} \tag{2.123}$$

Il est clair que le potentiel Φ^*_{vp} est exactement le potentiel de Chaboche [Lemaitre et Chaboche, 1996] proposé pour le comportement élastoviscoplastique d'un matériau monophasé (une seule phase subsiste dans le mélange). De plus, les développements simples des équations d'évolution ((2.120) à (2.122)) nous montrent que les évolutions des déformations viscoplastiques et des variables d'écrouissage de la phase i dans le mélange sont identiques à celles des déformations viscoplastiques et des variables d'écrouissage d'un matériau monophasé. En effet, le modèle rhéologique en série adopté nous permet d'obtenir une contrainte homogène dans le mélange et cette contrainte peut provoquer éventuellement une déformation viscoplastique dans chacune des phases du mélange. Pour chaque phase, cette déformation viscoplastique est considérée comme une déformation inélastique propre à la phase et elle est identiquement déterminée comme dans le cas où le matériau est monophasé.

Comme pour les cas précédents, le taux d'évolution de la variable métallurgique est défini par un pseudo-potentiel de dissipation $\Phi^*_{métallurgie}$ qui est toujours choisi sous la forme :

$$\Phi^*_{métallurgie} = \frac{1}{2}A^2\delta_1(\delta_2 - z) \tag{2.124}$$

δ_1 et δ_2 sont des paramètres du matériau.

On obtient alors la cinétique de transformation de phase :

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi^*_{métallurgie}}{\partial A} = A\delta_1(\delta_2 - z) \tag{2.125}$$

Comme pour le cas de l'élastoplasticité, l'influence de l'état de contraintes et de déformations sur la cinétique de transformations de phases n'est pas prise en compte dans notre étude, la force thermodynamique A associée à la variable métallurgique z s'écrit donc :

$$A = \mathcal{W}_2^{th}(T) - \mathcal{W}_1^{th}(T) \tag{2.126}$$

$\mathcal{W}_i^{th}(T)$ est la partie purement thermique de l'énergie libre de la phase i.

2.3.3.5 Dissipation intrinsèque

La dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{2}\left(\boldsymbol{\sigma}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp} + \boldsymbol{X}_i : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i + R_i\dot{p}_i\right) + A.\dot{z} \tag{2.127}$$

En reportant les lois d'évolution ((2.120), (2.121), (2.122) et (2.125)) dans l'expression de la dissipation (2.127), nous obtenons :

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{2}\left(\boldsymbol{\sigma}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp} + \boldsymbol{X}_i : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp} - \gamma_i\boldsymbol{\alpha}_i\dot{p}_i\right) + R_i\dot{p}_i\right) + A.\dot{z} \tag{2.128}$$

Or, la force $\boldsymbol{X}_i = -z_i \frac{2}{3} H_i \boldsymbol{\alpha}_i$, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \sum_{i=1}^{2} \Big(\big(\boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{X}_i\big) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp} + R_i \dot{p}_i + z_i \frac{2}{3} H_i \gamma_i \boldsymbol{\alpha}_i : \boldsymbol{\alpha}_i \dot{p}_i \Big) + A.\dot{z} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \Big(\big(\boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{X}_i\big) : \frac{3}{2} \dot{p}_i \frac{\boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{X}_i}{J_2(\boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{X}_i)} + R_i \dot{p}_i + z_i \frac{4}{9} H_i \gamma_i J_2^2(\boldsymbol{\alpha}_i) \dot{p}_i \Big) + A.\dot{z} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \Big(\big(J_2(\boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{X}_i) \dot{p}_i + R_i \dot{p}_i - z_i \sigma_i^y \dot{p}_i\big) + z_i \sigma_i^y \dot{p}_i + z_i \frac{4}{9} H_i \gamma_i J_2^2(\boldsymbol{\alpha}_i) \dot{p}_i \Big) + A.\dot{z} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \Big(\big(J_2(\boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{X}_i) + R_i - z_i \sigma_i^y\big) \dot{p}_i + \big(z_i \sigma_i^y + z_i \frac{4}{9} H_i \gamma_i J_2^2(\boldsymbol{\alpha}_i)\big) \dot{p}_i \Big) + A.\dot{z}
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Il est clair que le premier terme est positif ou nul puisque $\dot{p}_i$ est nul dès que le terme entre crochets est négatif, le second est positif puisque σ_i^y, H_i et γ_i le sont. Le troisième terme est la dissipation associée au changement de phase, comme on l'a montré dans le paragraphe 2.3.1.5, ce terme est positif. La positivité de la dissipation intrinsèque est donc assurée.

2.3.3.6 La prise compte de la plasticité de transformation

Comme dans le cas de l'élastoplasticité, la plasticité de transformation peut être également prise en compte dans ce modèle en introduisant une variable interne marcroscopique ε^{pt} représentant la déformation permanente produite lors d'une transformation de phases sous contrainte.

2.3.3.6.1 Variables d'état et énergie libre

Les variables d'état retenues pour la modélisation sont les suivantes :

- $\boldsymbol{\varepsilon}$: la déformation totale macroscopique et la température T,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$: la plasticité de transformation,
- z_i : la proportion volumique de la phase i,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i$: la déformation totale individuelle de la phase i,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp}$: la déformation viscoplastique individuelle de la phase i,
- r_i : la variable d'écrouissage isotrope de la phase i,
- $\boldsymbol{\alpha}_i$: la variable d'écrouissage cinématique de la phase i.

La déformation viscoplastique cumulée représente la variable d'écrouissage isotrope et est donnée par :

$$r_i = p_i = \int_0^t \Big(\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp}(t) \Big)^{1/2} dt \tag{2.130}$$

La déformation totale individuelle de la phase i s'écrit comme la somme de la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}_i^e$, de la déformation thermique $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{th}$ et de la déformation viscoplastique $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i^e + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp} \qquad i = (1,2) \tag{2.131}$$

La déformation thermique de la phase i est donnée par l'équation (2.97).

Le modèle rhéologique en série est toujours considéré, nous avons donc des conditions suivantes pour les variables d'état :

$$z\boldsymbol{\varepsilon}_1 + (1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.132}$$

En reportant l'équation (2.131) dans l'équation (2.132), nous obtenons :

$$z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.133}$$

avec les liaisons unilatérales $\quad z \geqslant 0 \quad$ et $\quad (1-z) \geqslant 0$

Le potentiel duquel dérivent ces liaisons est défini par :

$$\mathcal{W}_l = -\boldsymbol{\omega}\Big(z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z) \tag{2.134}$$

$\boldsymbol{\omega}$, υ_1 et υ_2 sont des multiplicateurs de Lagrange. Nous avons les conditions suivantes pour les multiplicateurs υ_1 et υ_2 associés aux liaisons unilatérales :

$$\upsilon_1 \geqslant 0, \upsilon_1 z = 0 \qquad \text{et} \qquad \upsilon_2 \geqslant 0, \upsilon_2(1-z) = 0 \tag{2.135}$$

En négligeant l'énergie d'interaction entre les deux phases dans le mélange, l'énergie libre du matériau multiphasé s'écrit :

$$\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, p_i, T) = z\mathcal{W}_1 + (1-z)\mathcal{W}_2 \qquad i = (1,2) \tag{2.136}$$

La densité de l'énergie libre $\mathcal{W}_i$ de la phase i est la somme d'une partie thermoélastique $\mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T)$ et une partie associée à l'écrouissage $\mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i, p_i)$:

$$\mathcal{W}_i \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, p_i, T) = \mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T) + \mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i, p_i) \qquad i = (1,2) \tag{2.137}$$

Les expressions de la partie thermoélastique et de la partie associée à l'écrouissage de l'énergie libre sont respectivement données par les équations (2.99) et (2.100).

Nous obtenons enfin l'expression du lagrangien $\mathcal{L}$ en connaissant l'énergie libre $\mathcal{W}$ et le potentiel $\mathcal{W}_l$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \mathcal{W} + \mathcal{W}_l &\overset{\text{def}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}^{pt}, \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp}, \boldsymbol{\alpha}_i, p_i, z_i) \qquad (2.138)\\
&= z\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) + \mathcal{W}_1^{th}(T) + \frac{1}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1^2 + \Big(Q_1 p_1 - \frac{Q_1}{b_1}\big(1 - exp(-b_1 p_1)\big)\Big)\right)\\
&\quad + (1-z)\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2 + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \Big(Q_2 p_2 - \frac{Q_2}{b_2}\big(1 - exp(-b_2 p_2)\big)\Big)\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2^2\right) - \boldsymbol{\omega}\Big(z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z)
\end{aligned}$$

2.3.3.6.2 Lois d'état

Les équations d'état sont définies à l'aide du lagrangien ci-dessus :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.139}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_i} = \boldsymbol{X}_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X}_i = -z_i \frac{2}{3} H_i \boldsymbol{\alpha}_i \tag{2.140}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = R_i \quad \Rightarrow \quad R_i = -z_i Q_i \big(1 - exp(-b_i p_i)\big) \tag{2.141}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp}} = \boldsymbol{\sigma}_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_i = z_i \boldsymbol{\omega} \tag{2.142}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pt}} = \boldsymbol{X} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.143}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e).\mathbf{1} + 2\mu_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^e \tag{2.144}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e).\mathbf{1} + 2\mu_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^e \tag{2.145}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.146}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = A \quad \Rightarrow \quad A = & \left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2 \big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2 + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \Big(Q_2 p_2 - \frac{Q_2}{b_2}\big(1 - exp(-b_2 p_2)\big)\Big) \right. \\ & \left. + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \Big(\frac{1}{3} H_2 \boldsymbol{\alpha}_2^2\Big) \right) - \left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1 \big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) \right. \\ & \left. + \mathcal{W}_1^{th}(T) + \Big(\frac{1}{3} H_1 \boldsymbol{\alpha}_1^2\Big) + \Big(Q_1 p_1 - \frac{Q_1}{b_1}\big(1 - exp(-b_1 p_1)\big)\Big) \right) \\ & + \boldsymbol{\omega}\Big((\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) - (\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp})\Big) + \upsilon_1 - \upsilon_2 \end{aligned} \tag{2.147}$$

Les équations (2.139), (2.144) et (2.145) nous permettent d'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^e = \frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.148}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^e = \frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.149}$$

Reportant ces deux équations dans l'équation (2.146), nous obtenons la loi de comportement du matériau multiphasé :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} & + z\Big(\frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) + z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{vp}) \\ & + (1-z)\Big(\frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) \end{aligned} \tag{2.150}$$

2.3.3.6.3 Les lois complémentaires

Les lois complémentaires sont obtenues à partir des pseudo-potentiels de dissipation. Pour

les déformations viscoplastiques, les variables d'écrouissage et la variable métallurgique, nous retenons ici la définition des pseudo-potentiels de dissipation déjà donnée dans le paragraphe 2.3.3.4 par les équations ((2.119) et (2.124)). Les lois d'évolution pour ces variables internes sont inchangées et sont donneés par les équations (2.120), (2.121), (2.122) et (2.125).

Concernant la plasticité de transformation, le taux d'évolution de cette déformation est déduit à partir du pseudo-potentiel de dissipation Φ^*_{pt} présenté par l'équation (2.91). L'équation (2.92) représente l'évolution de déformation de plasticité de transformation.

La loi de comportement est complètement définie par les équations d'état (de (2.139) à (2.147)) et les équations d'évolution des variables internes. Finalement, nous pouvons exprimer la dissipation intrinsèque comme suit :

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{2} \left(\boldsymbol{\sigma}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{vp} + \boldsymbol{X}_i : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i + R_i \dot{p}_i \right) + \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} + A.\dot{z} \tag{2.151}$$

Ainsi que nous l'avons montré au paragraphe 2.3.2.5, le produit $\boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt}$ est positif. Tandis que la positivité de la somme restante dans l'équation (2.151) a été vérifiée dans le paragraphe 2.3.3.5, la positivité de la dissipation intrinsèque est donc assurée.

2.3.4 Modèle combiné de l'élastoplasticité et de l'élastoviscoplasticité

A la lumière de la partie bibliographique concernant les transformations de phases des aciers fer-carbone lors des opérations de soudage ou de traitement thermique, les phases ferritiques (ferrite, bainite et martensite) sont dominantes pour des basses températures tandis que l'austénite est présente à des températures élevées. Dans ces conditions, il est intéressant de considérer un comportement élastoviscoplastique pour l'austénite et un comportement élastoplastique pour les phases ferritiques.

Dans ce paragraphe, nous présentons le modèle de comportement du matériau multiphasé dans lequel le comportement des phases ferritiques est élastoplastique et celui de l'austénite est élastoviscoplastique.

A travers ce modèle, la souplesse de notre approche est révélée par le fait que différentes phases métallurgiques du mélange peuvent avoir des comportements individuels différents.

La démarche est identique à celle présentée dans les cas précédents. Le modèle rhéologique adopté est le modèle en série, modèle de Reuss (*cf.* figure Fig.2.1). On considère toujours un mélange de deux phases, la proportion volumique de la phase ferritique est z et celle de l'austénite est $(1 - z)$. La plasticité de transformation (TRIP) sera également prise en compte en fin de paragraphe.

2.3.4.1 Variables d'état et énergie libre

L'ensemble des variables d'état retenues pour la modélisation sont les suivantes :

- $\boldsymbol{\varepsilon}$: la déformation totale macroscopique et la température T,
- z : la proportion volumique de la phase ferritique,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$: respectivement la déformation totale individuelle de la phase ferritique et de l'austénite,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_1^p$: la déformation plastique individuelle de la phase ferritique,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}$: la déformation viscoplastique individuelle de l'austénite,
- $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$: respectivement la variable d'écrouissage cinématique de la phase ferritique et de l'austénite,

- r_2 : la variable d'écrouissage isotrope de l'austénite.

Pour l'austénite, la déformation viscoplastique cumulée p_2 est utilisée comme la variable d'écrouissage isotrope et est donnée par :

$$r_2 = p_2 = \int_0^t \left(\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{vp}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{vp}(t)\right)^{1/2} dt \tag{2.152}$$

L'hypothèse de partition de la déformation nous permet d'écrire la déformation totale individuelle :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p \qquad \text{pour les phases ferritiques} \tag{2.153}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp} \qquad \text{pour l'austénite} \tag{2.154}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_i^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{th}$ sont respectivement les déformations élastique et thermique individuelles de la phase ferritique ($i = 1$) et de l'austénite ($i = 2$).

La déformation thermique de la phase i est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{th} = k_i.(T - T_i^0).\mathbf{1} \tag{2.155}$$

k_i : coefficient de dilatation thermique de la phase i,
T_i^0 : température de référence de la phase i à laquelle la déformation thermique est considérée comme nulle.

La densité de l'énergie libre de la phase i peut s'écrire comme la somme d'une partie thermoélastique $\mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T)$ et d'une partie associée à l'écrouissage, $\mathcal{W}_1^p(\boldsymbol{\alpha}_1)$ pour la phase ferritique et $\mathcal{W}_2^p(\boldsymbol{\alpha}_2, p_2)$ pour l'austénite :

$$\mathcal{W}_i \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, r_i, T) = \mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T) + \mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i, p_i) \tag{2.156}$$

Comme pour les cas précédents, la partie thermoélastique de l'énergie libre de la phase i prend la forme suivante, ($i = 1$) pour la phase ferritique et ($i = 2$) pour l'austénite :

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_i^{the} &\overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\lambda_i\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e)\big)^2 + 2\mu_i Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e)^2\Big) + \mathcal{W}_i^{th}(T)\end{aligned} \tag{2.157}$$

λ_i et μ_i sont les coefficients de Lamé de la phase i. $\mathcal{W}_i^{th}(T)$ est la partie purement thermique de l'énergie libre de la phase i. Cette partie de l'énergie est liée à la chaleur spécifique par l'équation(2.28).

Pour la partie associée à l'écrouissage, nous distinguons deux cas :

- les phases ferritiques sont élastoplastiques avec écrouissage cinématique linéaire, la forme suivante est choisie pour cette quantité d'énergie :

$$\mathcal{W}_1^p \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_1^p(\boldsymbol{\alpha}_1) = \frac{1}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1^2 \tag{2.158}$$

H_1 représente le module d'écrouissage cinématique de la phase ferritique.

• pour l'austénite, le comportement adopté est élastoviscoplastique avec écrouissage cinématique et isotrope, cette quantité d'énergie prend la forme :

$$\mathcal{W}_2^p \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_2^p(\boldsymbol{\alpha}_2, p_2) = \Big(\frac{1}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2^2\Big) + \Big(Q_2 p_2 - \frac{Q_2}{b_2}\big(1 - exp(-b_2 p_2)\big)\Big) \tag{2.159}$$

H_2, Q_2, b_2 sont les coefficients de l'écrouissage cinématique (H_2) et isotrope (Q_2 et b_2) de l'austénite. Ils peuvent dépendre de la température.

Finalement, l'énergie libre du matériau multiphasé s'écrit en négligeant l'énergie d'interaction des deux phases dans le mélange :

$$\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, p_2, T) = z\mathcal{W}_1 + (1-z)\mathcal{W}_2 \qquad i = (1,2) \tag{2.160}$$

2.3.4.2 Liaisons internes et lagrangien

Comme dans les cas précédents, le modèle rhéologique retenu pour la modélisation est un modèle en série, ce qui nous permet d'obtenir la liaison bilatérale :

$$z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.161}$$

avec des liaisons unilatérales : $z \geqslant 0$ et $(1-z) \geqslant 0$

Le potentiel duquel dérivent ces liaisons supposées parfaites est défini par :

$$\mathcal{W}_l = -\boldsymbol{\omega}\Big(z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z) \tag{2.162}$$

$\boldsymbol{\omega}$, υ_1 et υ_2 sont des multiplicateurs de Lagrange. Nous utilisons les conditions suivantes pour les multiplicateurs υ_1 et υ_2 associés aux liaisons unilatérales :

$$\upsilon_1 \geqslant 0, \upsilon_1 z = 0 \qquad \text{et} \qquad \upsilon_2 \geqslant 0, \upsilon_2(1-z) = 0 \tag{2.163}$$

La somme de l'énergie libre $\mathcal{W}$ et du potentiel $\mathcal{W}_l$ duquel dérivent les liaisons internes fournit l'expression du lagrangien $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{W} + \mathcal{W}_l \overset{\text{def}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\varepsilon}_1^p, \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}, \boldsymbol{\alpha}_i, p_2, z) \qquad (2.164)\\
&= z\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) + \mathcal{W}_1^{th}(T) + \frac{1}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1^2\right) + (1-z)\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2\right.\\
&\quad \left. + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \Big(\frac{1}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2^2\Big) + \Big(Q_2 p_2 - \frac{Q_2}{b_2}\big(1 - exp(-b_2 p_2)\big)\Big)\right)\\
&\quad - \boldsymbol{\omega}\Big(z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z)
\end{aligned}$$

2.3.4.3 Lois d'état

Les équations d'état sont définies à l'aide du lagrangien ci-dessus, $i = (1, 2)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.165}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_i} = \boldsymbol{X}_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X}_i = -z_i \frac{2}{3} H_i \boldsymbol{\alpha}_i \tag{2.166}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} = R_2 \quad \Rightarrow \quad R_2 = -(1-z) Q_2 \big(1 - exp(-b_2 p_2)\big) \tag{2.167}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1^p} = \boldsymbol{\sigma}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = z\boldsymbol{\omega} \tag{2.168}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}} = \boldsymbol{\sigma}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = (1-z)\boldsymbol{\omega} \tag{2.169}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e).\mathbf{1} + 2\mu_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^e \tag{2.170}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e).\mathbf{1} + 2\mu_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^e \tag{2.171}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.172}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = A \quad \Rightarrow \quad A = & \left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2 \big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2 + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \Big(Q_2 p_2 - \frac{Q_2}{b_2}\big(1 - exp(-b_2 p_2)\big)\Big) \right. \\ & \left. + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \Big(\frac{1}{3} H_2 \boldsymbol{\alpha}_2^2\Big) \right) - \left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1 \big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) + \mathcal{W}_1^{th}(T) \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} H_1 \boldsymbol{\alpha}_1^2 \right) + \boldsymbol{\omega}\Big((\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) - (\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp})\Big) + \upsilon_1 - \upsilon_2 \end{aligned} \tag{2.173}$$

Les équations (2.165), (2.170) et (2.171) nous permettent d'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^e = \frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.174}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^e = \frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.175}$$

Reportant ces deux équations dans l'équation (2.172), nous obtenons la loi de comportement du matériau multiphasé :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = & z\Big(\frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) + (1-z)\Big(\frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) \\ & + z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) \end{aligned} \tag{2.176}$$

2.3.4.4 Lois d'évolution des variables internes

La loi de comportement sera complétée par des lois d'évolution des variables dissipatives. Ces dernières sont obtenues à l'aide d'un pseudo-potentiel de dissipation qui est une fonction convexe, positive, nulle à l'origine et semi-continue inférieurement.

Pour la phase ferritique, les évolutions de la déformation plastique et de l'écrouissage sont déduites d'un pseudo-potentiel de dissipation $\Phi^*_{mécanique}$ qui est une fonction des forces thermodynamiques associées à ces variables internes. Ce pseudo-potentiel de dissipation $\Phi^*_{mécanique}$ est égal à la fonction indicatrice d'un convexe défini par $f_1(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{X}_1) \leqslant 0$. $f_1(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{X}_1)$ est la fonction de charge de la phase ferritique et est donnée par :

$$f_1 \overset{\text{def}}{=} f_1(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{X}_1) = \sqrt{\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_1) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_1)} - z\sigma_1^y \tag{2.177}$$

- σ_1^y qui est la limite d'élasticité de la phase ferritique,
- la notation $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}$ désigne la partie déviatorique du tenseur $\boldsymbol{M}$, d'où $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - (1/3)(Tr\boldsymbol{M}).\mathbf{1}$.

Les lois d'évolution de la déformation plastique et de l'écrouissage de la phase ferritique s'écrivent à l'aide de la loi de normalité :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^p = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}_1} \tag{2.178}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{X}_1} \tag{2.179}$$

λ_1 est le multiplicateur plastique, il est déterminé par des conditions de charge et décharge :

$$f_1 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}_1 = 0 \tag{2.180}$$

En ce qui concerne les évolutions de la déformation viscoplastique et de l'écrouissage de l'austénite, le pseudo-potentiel de dissipation suivant a été utilisé [Lemaitre et Chaboche, 1996] :

$$\begin{aligned}\Phi^{*2}_{vp} =& \frac{1}{(\eta_2+1)(1-z)^{\eta_2}\kappa_2^{\eta_2}} \Bigg(J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_2) + R_2 - (1-z)\sigma_2^y \\ &+ \frac{3\gamma_2}{4H_2(1-z)} \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_2 : \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_2 - (1-z)\frac{\gamma_2 H_2}{3} \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_2 : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_2 \Bigg)^{\eta_2+1}\end{aligned} \tag{2.181}$$

où

- $J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_2) = \sqrt{\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_2) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_2)} \overset{\text{def}}{=} J_{22}$,
- σ_2^y est la limite d'élasticité de l'austénite, γ_2 est le coefficient d'écrouissage cinématique de l'austénite, κ_2 et η_2 sont des coefficients de viscosité de l'austénite. Ces paramètres du matériau peuvent dépendre de la température.

Les évolutions de la déformation viscoplastique et des variables d'écrouissage de l'austénite s'écrivent alors :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{vp} = \frac{\partial \Phi^{*2}_{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_2} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{vp} = \frac{3}{2}\dot{p}_2 \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_2}{J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_2)} \tag{2.182}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \frac{\partial \Phi^{*2}_{vp}}{\partial \boldsymbol{X}_2} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{vp} - \gamma_2 \boldsymbol{\alpha}_2 \dot{p}_2 \tag{2.183}$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\partial \Phi^{*2}_{vp}}{\partial R_2} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p}_2 = \left(\frac{J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_2) + R_2 - (1-z)\boldsymbol{\sigma}_2^y}{(1-z)\kappa_2} \right)^{\eta_2} \tag{2.184}$$

Pour l'évolution de la variable métallurgique, comme dans les cas précédents, nous avons utilisé le pseudo-potentiel de dissipation $\Phi^*_{métallurgie}$ sous la forme :

$$\Phi^*_{métallurgie} = \frac{1}{2}A^2\delta_1(\delta_2 - z) \tag{2.185}$$

δ_1 et δ_2 sont des paramètres du matériau.

Nous obtenons alors la cinétique de transformations de phases :

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi^*_{métallurgie}}{\partial A} = A\delta_1(\delta_2 - z) \tag{2.186}$$

L'influence de l'état de contraintes sur la cinétique de transformations de phases est toujours négligée, la force thermodynamique A associée à la variable métallurgique z s'écrit donc :

$$A = \mathcal{W}_2^{th}(T) - \mathcal{W}_1^{th}(T) \tag{2.187}$$

$\mathcal{W}_i^{th}(T)$ est la partie purement thermique de l'énergie libre de la phase i.

2.3.4.5 Dissipation intrinsèque

La dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\mathcal{D} = (\boldsymbol{\sigma}_1 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^p + \boldsymbol{X}_1 : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1) + (\boldsymbol{\sigma}_2 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{vp} + \boldsymbol{X}_2 : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + R_2\dot{p}_2) + A.\dot{z} \tag{2.188}$$

Puisque la positivité de chaque membre a été respectivement démontrée dans les sections (2.3.1.5) et (2.3.3.5), la positivité de la dissipation intrinsèque est également assurée dans ce cas.

2.3.4.6 La prise compte de la plasticité de transformation

Dans cette section, nous allons améliorer le modèle précedent en prenant en compte la plasticité de transformation. Comme dans les cas précédents, cela s'effectue par l'ajout d'une variable interne marcroscopique ε^{pt} représentant la déformation de la plasticité de transformation.

2.3.4.6.1 Variables d'état et énergie libre

On suppose que l'état du matériau peut être décrit par les variables d'état suivantes :

- $\boldsymbol{\varepsilon}$: la déformation totale macroscopique et la température T,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$: la plasticité de transformation,
- z : la proportion volumique de la phase ferritique,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$: respectivement la déformation totale individuelle de la phase ferritique et de l'austénite,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_1^p$: la déformation plastique individuelle de la phase ferritique,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}$: la déformation viscoplastique individuelle de l'austénite,
- $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$: respectivement la variable d'écrouissage cinématique de la phase ferritique et de l'austénite,
- r_2 : la variable d'écrouissage isotrope de l'austénite.

Pour l'austénite, la déformation viscoplastique cumulée est utilisée comme variable d'écrouissage isotrope et son expression est donnée par l'équation (2.152).

Les déformations totales individuelles des phases sont respectivement présentées par l'équation (2.153) pour la phase ferritique et par l'équation (2.154) pour l'austénite.

La déformation thermique de chaque phase est donnée par l'équation (2.155).

Le modèle rhéologique en série est toujours considéré, nous utilisons donc des conditions suivantes pour les variables d'état :

$$z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.189}$$

avec les liaisons unilatérales $\quad z \geqslant 0 \quad$ et $\quad (1-z) \geqslant 0$

Le potentiel duquel dérivent ces liaisons est défini par :

$$\mathcal{W}_l = -\boldsymbol{\omega}\Big(z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z) \tag{2.190}$$

$\boldsymbol{\omega}$, υ_1 et υ_2 sont des multiplicateurs de Lagrange. Nous avons les conditions suivantes pour les multiplicateurs υ_1 et υ_2 associés aux liaisons unilatérales :

$$\upsilon_1 \geqslant 0, \upsilon_1 z = 0 \qquad \text{et} \qquad \upsilon_2 \geqslant 0, \upsilon_2(1-z) = 0 \tag{2.191}$$

En négligeant l'énergie d'interaction entre les deux phases dans le mélange, l'énergie libre du matériau multiphasé s'écrit :

$$\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, p_i, T) = z\mathcal{W}_1 + (1-z)\mathcal{W}_2 \qquad i = (1,2) \tag{2.192}$$

La densité de l'énergie libre $\mathcal{W}_i$ de la phase i est la somme d'une partie thermoélastique $\mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T)$ et une partie associée à l'écrouissage, $\mathcal{W}_1^p(\boldsymbol{\alpha}_1)$ pour la phase ferritique et $\mathcal{W}_2^p(\boldsymbol{\alpha}_2, p_2)$ pour l'austénite :

$$\mathcal{W}_i \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\alpha}_i, p_2, T) = \mathcal{W}_i^{the}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^e, T) + \mathcal{W}_i^p(\boldsymbol{\alpha}_i, p_2) \qquad i = (1,2) \tag{2.193}$$

L'expression de la partie thermoélastique a été donnée par l'équation (2.157). Nous reprenons également l'équation (2.158) pour la partie associée à l'écrouissage de la phase ferritique et l'équation (2.159) pour la partie associée à l'écrouissage de l'austénite.

Nous obtenons enfin l'expression du lagrangien $\mathcal{L}$ en connaissant l'énergie libre $\mathcal{W}$ du mélange et le potentiel $\mathcal{W}_l$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{W} + \mathcal{W}_l \overset{\text{def}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}^{pt}, \boldsymbol{\varepsilon}_i^e, \boldsymbol{\varepsilon}_1^p, \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp} \boldsymbol{\alpha}_i, p_2, z) \qquad (2.194)\\
&= z\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) + \mathcal{W}_1^{th}(T) + \frac{1}{3}H_1\boldsymbol{\alpha}_1^2\right) + (1-z)\left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2\right.\\
&\quad \left. + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \Big(\frac{1}{3}H_2\boldsymbol{\alpha}_2^2\Big) + \Big(Q_2 p_2 - \frac{Q_2}{b_2}\big(1 - exp(-b_2 p_2)\big)\Big)\right)\\
&\quad - \boldsymbol{\omega}\Big(z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon}\Big) - \upsilon_1 z - \upsilon_2(1-z)
\end{aligned}$$

2.3.4.6.2 Lois d'état

Les équations d'état définissant les forces thermodynamiques associées aux variables d'état s'écrivent, $(i = 1)$ pour la phase ferritique et $(i = 2)$ pour l'austénite :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.195}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_i} = \boldsymbol{X}_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X}_i = -z_i \frac{2}{3} H_i \boldsymbol{\alpha}_i \tag{2.196}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} = R_2 \quad \Rightarrow \quad R_2 = -(1-z)Q_2\big(1 - exp(-b_2 p_2)\big) \tag{2.197}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1^p} = \boldsymbol{\sigma}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = z\boldsymbol{\omega} \tag{2.198}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}} = \boldsymbol{\sigma}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = (1-z)\boldsymbol{\omega} \tag{2.199}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pt}} = \boldsymbol{X} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.200}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e).\mathbf{1} + 2\mu_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^e \tag{2.201}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2^e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \lambda_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e).\mathbf{1} + 2\mu_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^e \tag{2.202}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.203}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = A \quad \Rightarrow \quad A = & \left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_2\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)\big)^2 + 2\mu_2 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2\Big) + \Big(Q_2 p_2 - \frac{Q_2}{b_2}\big(1 - exp(-b_2 p_2)\big)\Big)\right. \\ & + \mathcal{W}_2^{th}(T) + \Big(\frac{1}{3} H_2 \boldsymbol{\alpha}_2^2\Big)\Big) - \left(\frac{1}{2}\Big(\lambda_1\big(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)\big)^2 + 2\mu_1 Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2\Big) + \mathcal{W}_1^{th}(T)\right. \\ & \left. + \frac{1}{3} H_1 \boldsymbol{\alpha}_1^2\right) + \boldsymbol{\omega}\Big((\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) - (\boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp})\Big) + \upsilon_1 - \upsilon_2 \end{aligned} \tag{2.204}$$

Les équations (2.195), (2.201) et (2.202) permettent d'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^e = \frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.205}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^e = \frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{2.206}$$

Reportant ces équations dans l'équation (2.203), la loi de comportement du matériau multiphasé s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} + z\Big(\frac{1+\nu_1}{E_1}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_1}{E_1} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) + z(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) \\ + (1-z)\Big(\frac{1+\nu_2}{E_2}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_2}{E_2} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}\Big) + (1-z)(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{vp}) \end{aligned} \tag{2.207}$$

2.3.4.6.3 Les lois d'évolution

Les lois d'évolution des variables internes sont définies à partir des pseudo-potentiels de dissipation.

Pour la phase ferritique, la fonction de charge exprimée par l'équation (2.177) est reprise et les évolutions de la déformation plastique et de l'écrouissage sont données par les équations

((2.178) et (2.179)). Les conditions de charge et décharge (*cf.* équation (2.180)) permettent de déterminer le multiplicateur plastique.

Les équations ((2.182), (2.183) et (2.184)) représentent les évolutions de la déformation viscoplastique et de l'écrouissage de l'austénite en utilisant un pseudo-potentiel de dissipation donné par l'équation (2.181).

L'équation (2.185) exprime le pseudo-potentiel de dissipation métallurgique et la cinétique de transformations de phases est donnée par l'équation (2.186). L'effet de l'état de contraintes sur la cinétique de transformations de phases est toujours négligé, la force thermodynamique A associée à la variable métallurgique z s'écrit comme l'équation (2.187).

Concernant la plasticité de transformation, le taux d'évolution de cette déformation est déduit à partir du pseudo-potentiel de dissipation Φ^*_{pt} qui est présenté par l'équation (2.91) et l'équation (2.92) représente l'évolution de déformation de plasticité de transformation.

La loi de comportement est complètement définie par les équations d'état (de (2.195) à (2.204)) et les équations d'évolution des variables dissipatives. Finalement, nous pouvons exprimer la dissipation intrinsèque dans ce cas comme suit :

$$\mathcal{D} = (\boldsymbol{\sigma}_1 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^p + \boldsymbol{X}_1 : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1) + (\boldsymbol{\sigma}_2 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{vp} + \boldsymbol{X}_2 : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + R_2\dot{p}_2) + \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} + A.\dot{z} \tag{2.208}$$

Comme nous l'avons démontré dans les sections ((2.3.1.5), (2.3.2.5) et (2.3.3.5)), la positivité de chaque terme à droite assure la positivité de la dissipation intrinsèque.

2.3.4.7 Remarques

Dans ce paragraphe 2.3.4, nous avons présenté le modèle de comportement pour un matériau multiphasé dans lequel le comportement de la phase ferritique est élastoplastique et celui de l'austénite est élastoviscoplastique. La plasticité de transformation a également été prise en compte.

Le mélange de deux phases a été considéré et la variable z représente la proportion volumique de la phase ferritique. Ainsi que nous le verrons dans le paragraphe suivant, l'identification des paramètres du modèle métallurgique s'effectuera en assurant la positivité de $\dot{z}$, c'est-à-dire que nous avons considéré une transformation de l'austénite en phase ferritique (ferrite, bainite ou martensite) pour ce modèle. Pour les transformations de la phase ferritique en austénite (austénitisation au chauffage par exemple), les démarches pour établir le modèle sont tout à fait identiques à celles présentées ci-dessus, mais avec modification du rôle de la variable z. Concrètement, z représente ici la proportion volumique de l'austénite formée. Effectivement, les formes des équations d'état et des lois d'évolution restent inchangées par rapport au cas précédent.

2.3.5 Discussions

1- Dans les modèles proposés, la cinétique de transformation s'écrit :

$$\dot{z} = A\delta_1(\delta_2 - z) \tag{2.209}$$

Nous avons utilisé cette même cinétique pour différentes transformations de phases : transformations par diffusion et transformations martensitiques.

Pour les aciers au carbone, les transformations martensitiques possèdent une propriété atherme : la proportion de la martensite formée à une température donnée ne dépend que de celle-ci et ne s'accroît que si la température diminue. Donc, l'utilisation de la cinétique de

type (2.209) pour les transformations martensitiques peut parfois poser problème ; par exemple dans le cas où il y a un maintien isotherme au cours de la transformation martensitique. En ce qui nous concerne, les cycles thermiques de soudage se composent généralement d'un chauffage suivi d'un refroidissement continus sans maintiens isothermes, le modèle proposé est donc valable dans ces cas.

Ainsi, la cinétique de transformations de phases proposée est valable pour les chauffages et les refroidissements continus sans maintiens isothermes. La cinétique de transformations de phases au chauffage s'écrit :

$$\dot{z} = A\delta_1(\delta_2 - z)\frac{\langle T - T_d\rangle^+}{T - T_d} \tag{2.210}$$

$\langle X\rangle^+$ désigne la partie positive de X, T_d est la température de début de l'austénitisation.

La cinétique de transformations au refroidissement (transformations de l'austénite en ferrite-perlite, en bainte ou en martensite) s'écrit généralement :

$$\dot{z} = A\delta_1(\delta_2 - z)\frac{\langle T_d - T\rangle^+}{T_d - T} \tag{2.211}$$

T_d est la température de début de la transformation considérée.

2- Dans les modèles présentés ci-dessus, nous avons considéré un mélange de deux phases avec une seule transformation. Cependant, une situation plus complexe peut être rencontrée dans le cas d'un mélange de plusieurs phases (plus de deux phases) avec plusieurs transformations simultanées.

Pour les transformations au refroidissement (transformation de l'austénite en ferrite, en bainite ou en martensite), à partir de l'austénite formée en fin de chauffage, on peut obtenir éventuellement différentes phases ferritiques selon la vitesse de refroidissement. A la lumière de l'étude bibliographique et conformément à ce qui figure sur les diagrammes T.R.C. (Transformation en Refroidissement Continu), il est évident que pour la grande majorité des refroidissements usuels, les intervalles de température où ces transformations peuvent se produire sont différents l'un de l'autre. Cela nous permet d'obtenir pour chaque température en phase de refroidissement une seule transformation de phase. Nous supposons donc pour nos modèles qu'à une température donnée au refroidissement, une seule transformation de phases est possible. Les modèles proposés pour la cinétique de transformations de phases sont donc toujours valables.

En revanche, pour les transformations au chauffage, à partir des phases ferritiques initiales (état métallurgique de départ) et lorsque la température atteint la température de début d'austénitisation, plusieurs transformations des phases ferritiques en austénite peuvent se produire simultanément. Dans ce cas, pour que les modèles proposés restent encore valables, nous supposons qu'une transformation mettant en jeu deux phases n'est pas affectée par les autres phases. Cette hypothèse a été également utilisée par [Leblond et Devaux, 1984] pour la généralisation de leur modèle métallurgique dans le cas où plusieurs transformations peuvent avoir lieu simultanément. La cinétique de transformations de phases proposée dans les modèles présentés s'applique donc pour chaque transformation d'une phase ferritique en austénite et nous obtenons un ensemble de transformations de phases deux à deux (une phase ferritique et une phase austénitique).

En ce qui concerne le comportement mécanique du mélange de plusieurs phases (plus de deux phases), notre approche peut également s'appliquer en écrivant la déformation totale du matériau multiphasé $\boldsymbol{\varepsilon}$ sous la forme (mélange de i phases) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_i z_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{2.212}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ est la déformation totale individuelle de la phase i, z_i est la proportion volumique de la phase i.

Si la plasticité de transformation est considérée, nous écrivons :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_i z_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} \tag{2.213}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$ désigne la déformation de plasticité de transformation.

De la même manière que pour les modèles présentés ci-dessus, les équations d'état, ainsi que les lois d'évolution des variables dissipatives de chaque phase métallurgique, sont identiques à l'écriture précédente et les formes de ces équations restent inchangées par rapport aux cas précédents.

2.3.6 Identification des paramètres

La loi de comportement élastoplastique nécessite la connaissance des paramètres suivants pour différentes températures :

- module de Young E et coefficient de Poisson ν,
- coefficient de dilatation thermique k,
- limite d'élasticité σ^y,
- module d'écrouissage cinématique H.

Ces paramètres peuvent être obtenus à partir des essais uniaxiaux de traction et de compression effectués à différentes températures et pour différentes phases métallurgiques.

Pour le comportement élastoviscoplastique, il nous faut identifier les paramètres suivants pour différentes températures :

- module de Young E et coefficient de Poisson ν,
- coefficient de dilatation thermique k,
- limite d'élasticité σ^y,
- termes relatifs à la viscosité κ et η,
- modules d'écrouissage H, γ, Q et b.

L'identification de ces paramètres nécessite des essais uniaxiaux cycliques en traction et compression, des essais de relaxation et de fluage ou des essais d'écrouissage simples à différentes vitesses de déformation. Ces essais doivent être réalisés à différentes températures et pour différentes phases métallurgiques.

Le modèle métallurgique de transformations microstructurales nécessite la connaissance des trois paramètres : δ_1, δ_2 et la force A.

Ainsi que nous l'avons évoqué dans les paragraphes ci-dessus, l'influence de l'état de contraintes et de déformations sur la cinétique de transformations de phases est négligée dans ce travail. La force thermodynamique A associée à la variable métallurgique z s'écrit alors :

$$A = \mathcal{W}_2^{th}(T) - \mathcal{W}_1^{th}(T) \tag{2.214}$$

$\mathcal{W}_i^{th}(T)$ est la partie purement thermique de l'énergie libre de la phase i. Nous rappelons que cette quantité d'énergie est liée à la chaleur spécifique par la relation :

$$c_i^{\varepsilon} = -T\frac{\partial_i^2 \mathcal{W}_i^{th}(T)}{\partial T^2} \tag{2.215}$$

c_i^{ε} est la chaleur spécifique à déformation constante de la phase i et dépend éventuellement de la température. Nous supposons que la chaleur spécifique est une fonction linéaire de la température, cela permet d'écrire :

$$c_i^{\varepsilon} = a_i T + b_i \qquad i = (1,2) \tag{2.216}$$

La connaissance des valeurs de chaleur spécifique en fonction de la température permet de déterminer les coefficients a_i et b_i pour chaque phase métallurgique. D'autre part, reportons la relation (2.216) dans l'équation (2.215), son intégration donne :

$$\mathcal{W}_i^{th}(T) = -\frac{1}{2}a_i T^2 - b_i T lnT + c_i T + d_i \qquad i = (1,2) \tag{2.217}$$

c_i et d_i sont des constantes d'intégration.

La force thermodynamique A devient alors :

$$A(T) = \beta_1 T lnT + \beta_2 T^2 + \beta_3 T + \beta_4 \tag{2.218}$$

où

$$\beta_1 = b_1 - b_2 \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = (a_1 - a_2)/2 \tag{2.219}$$

Si T_d désigne la température de début de transformation, on doit avoir :

$$A(T_d) = \beta_1 T_d lnT_d + \beta_2 T_d^2 + \beta_3 T_d + \beta_4 = 0 \tag{2.220}$$

Pour une transformation isotherme, la cinétique peut s'écrire :

$$\dot{z} = A(T)(\delta_2 - z) \tag{2.221}$$

L'intégration de l'équation (2.221) nous donne :

$$\delta_2 = z + exp(-A(T)t + e) \tag{2.222}$$

e est une constante d'intégration.

De par le manque de données pour les transformations isothermes de l'acier étudié (le diagramme T.T.T (**T**ransformation-**T**emps-**T**empérature) de l'acier 16MND5 - acier des cuves de réacteurs nucléaires), nous avons dû identifier les paramètres de l'équation (2.222) avec des données des transformations anisothermes.

L'observation des courbes de transformations isothermes ainsi que des courbes dilatométriques avec des vitesses de refroidissement constantes nous permet de supposer que :

- les courbes de transformations de phases sont de formes sigmoïdales,

- les vitesses de transformations de phases sont deux fois plus lentes en début et en fin de transformation qu'au milieu de la transformation.

Ces deux hypothèses nous permettent d'utiliser les conditions suivantes :

• à l'instant $t = 0$, la proportion volumique de la phase produite est fixée à $z = 0$,

• à l'instant $t = t_1 = |T_f - T_d|/(\dot{T})$, la proportion volumique de la phase produite est fixée à $z = z_{max}$, où z_{max} est la proportion volumique maximale atteinte de la phase produite et $\dot{T}$ est la vitesse moyenne de variation de la température. Dans ce travail, cette vitesse moyenne est déterminée à la température de début de l'austénitisation pour les transformations au chauffage et à la température de début de transformation bainitique pour les transformations au refroidissement.

• à l'instant $t = t_2 = |T_f - T_d|/2(\dot{T})$, la proportion volumique de la phase produite est fixée à $z = z_{max}/2$.

$|X|$ désigne la valeur absolue de X, T_d et T_f sont respectivement les températures de début et de fin de chaque transformation considérée.

Les deux premières conditions nous permettent d'obtenir le coefficient δ_2, $\delta_2 = exp(e)$:

$$\delta_2 = \frac{z_{max}}{1 - exp(-A(T_f)t_1)} \tag{2.223}$$

La dernière condition permet d'écrire :

$$\delta_2 = \frac{z_{max}}{2} + \delta_2.exp\big(-A(T_m)t_2\big) \tag{2.224}$$

où T_m=$(T_f + T_d)/2$.

Regardons l'équation (2.223), les valeurs élevées de $(A(T_f)t_1)$ permettent d'obtenir l'approximation δ_2=z_{max} et l'équation (2.224) devient alors :

$$z_{max} = \frac{z_{max}}{2} + z_{max}.exp(-A(T_m)t_2) \tag{2.225}$$

Cette dernière équation nous donne :

$$A(T_m) = -\frac{1}{t_2}.ln(1/2) \tag{2.226}$$

Les deux équations (2.220) et (2.226) permettent donc d'identifier les deux coefficients β_3 et β_4.

En ce qui concerne l'identification du coefficient δ_1 qui représente l'influence de l'histoire thermique sur la cinétique de transformations de phases, cette dernière peut être réécrite sous la forme :

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = A(T)\delta_1(\delta_2 - z) \tag{2.227}$$

Nous avons la relation équivalente :

$$\frac{\partial z}{\partial T}\dot{T} = A(T)\delta_1(\delta_2 - z) \tag{2.228}$$

Cette équation nous permet d'identifier δ_1 comme suit :

$$\delta_1 = \dot{T}\frac{\int_0^{z_{max}} \frac{dz}{(\delta_2 - z)}}{\int_{T_d}^{T_f} A(T)dT} \tag{2.229}$$

Pour les transformations de phases au chauffage, la vitesse de chauffage $\dot{T}$ est déterminée à la température de début de l'austénitisation. Pour le refroidissement, $\dot{T}$ est déterminée à la température de début de transformation bainitique. Dans le cas de transformations au refroidissement, pour chaque histoire thermique figurant sur le diagramme T.R.C, nous calculons la valeur correspondante de δ_1. Ensuite, pour une histoire thermique quelconque, la valeur de δ_1 est déterminée par interpolation.

2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les modèles de comportement utilisés dans la simulation des structures sous chargements thermomécaniques sévères avec des transformations microstructurales à l'état solide. Ces modèles entrent dans le cadre des matériaux standards généralisés avec des liaisons internes présentant des relations entre les variables d'état. Le cadre théorique utilisé offre la possibilité de prendre en compte tous les phénomènes mis en jeu d'une manière couplée.

Pour la clarté de la présentation, un mélange de deux phases avec une seule transformation a été considéré. Dans les modèles proposés, nous avons supposé de connaître le comportement mécanique propre à chacune des phases présentes dans le mélange. Ces modèles ne donnent pas explicitement le comportement du mélange car celui-ci est obtenu par une homogénéisation basée sur l'hypothèse de Reuss (modèle en série). L'originalité de notre modélisation réside dans le fait que chaque phase du mélange peut avoir individuellement un comportement non-linéaire : élastoplastique ou élastoviscoplastique. La plasticité de transformation (TRiP) peut également être prise en compte en ajoutant une nouvelle variable macroscopique ε^{pt} représentant la déformation de plasticité de transformation.

A travers des modèles présentés, la généralité de la démarche adoptée est mise en évidence. En effet, l'ensemble des phénomènes peuvent être pris en compte dans un seul modèle, de plus, les différentes phases métallurgiques peuvent présenter des comportements individuels différents.

Pour un mélange de trois phases métallurgiques ou plus avec plusieurs transformations simultanées, les modèles précédents peuvent être étendus pour qu'ils restent valables. Pour cela, nous avons supposé qu'une transformation mettant en jeu deux phases n'est pas affectée par les autres phases.

Le chapitre suivant sera consacré à la validation numérique des modèles proposés avec le logiciel COMSOL Multiphysics. Deux essais seront simulés. Ces essais sont représentatifs des phénomènes rencontrés lors d'une opération de soudage ou de traitement thermique. Tous les couplages thermiques, mécaniques et métallurgiques peuvent être mis en jeu. Les comparaisons entre nos résultats de calculs et les résultats expérimentaux permettent d'estimer la performance de notre approche.

Chapitre 3

Simulations numériques

3.1 Introduction

Les modèles présentés dans le chapitre précédent sont consacrés à la modélisation du comportement des aciers servant à simuler des structures sous chargements thermomécaniques sévères avec des transformations microstructurales à l'état solide. Concrètement, ils peuvent être utilisés pour simuler les procédés de soudage ou de traitement thermique des aciers.

L'objectif de ce troisième chapitre est de valider numériquement la pertinence des modèles proposés. Pour cela, deux simulations numériques ont été réalisées. Elles consistent à modéliser numériquement des essais issus de la littérature ([Cavallo, 1998], [Petit-Grostabussiat, 2000]). Ces essais sont représentatifs des phénomènes rencontrés dans opération de soudage ou de traitement thermique, tous les couplages thermiques, mécaniques et métallurgiques peuvent être mis en jeu.

Les résultats relatifs à chaque modèle seront successivement présentés. Ces résultats seront comparés aux mesures expérimentales ainsi qu'aux résultats des calculs numériques issus de la littérature. Cela permettra d'abord de montrer la performance des modèles proposés pour le calcul des structures soumises à des chargements thermomécaniques en présence de transformations microstructurales et ensuite, d'analyser l'influence des différentes lois de comportement sur les réponses finales des structures. Enfin, des résultats de calcul dans le cas où la plasticité de transformation est prise en compte seront comparés aux résultats issus du cas sans plasticité de transformation. Ces comparaisons nous permettront de mettre en évidence le rôle de la plasticité de transformation sur la distribution finale des contraintes résiduelles dans la structure.

3.2 Description de l'essai

Ces essais ont été réalisés à L'INSA de Lyon et une description complète sur ces essais peut être consultée dans ([Cavallo, 1998], [Petit-Grostabussiat, 2000]).

Brièvement, ces essais portent sur des disques de $160mm$ de diamètre en acier 16MND5 couramment utilisé dans la fabrication des cuves de réacteurs nucléaires. Les disques reposent sur trois tiges en alumine situées à $72mm$ du centre du disque et positionnées à $120^{\circ}C$ les unes des autres. Ces disques sont chauffés par un spot laser et refroidis ensuite à l'air ambiant par convection naturelle et rayonnement.

Les deux essais retenus dans notre étude se différencient par l'épaisseur des disques. Ce choix est dicté par le fait que la zone totalement austénitisée au chauffage sera entièrement

ou partiellement transversante dans l'épaisseur. Dans le cas où cette zone est transversante, les contraintes sont quasiment inexitantes dans la direction axiale, ce qui entraîne un état de contrainte biaxial. En revanche, si cette zone est non transversante, l'état de contraintes est plus complexe, il s'agit d'un état multiaxial. Pour répondre à ces deux objectifs, les épaisseurs choisies sont respectivement $5mm$ pour le cas transversant et $10mm$ pour le cas non transversant. La puissance thermique du laser est choisie ensuite en fonction de l'épaisseur du disque.

En ce qui concerne le matériau, l'acier 16MND5 est un acier faiblement allié à faible taux de carbone. Comme tous les aciers faiblement alliés, il est très sensible aux cycles thermiques du soudage ou du traitement thermique : il possède une structure austénitique à haute température et, au refroidissement, il peut présenter une structure ferritique, bainitique ou martensitique en fonction de la vitesse de refroidissement.

La figure Fig.3.1 schématise l'essai réalisé, e désigne l'épaisseur du disque.

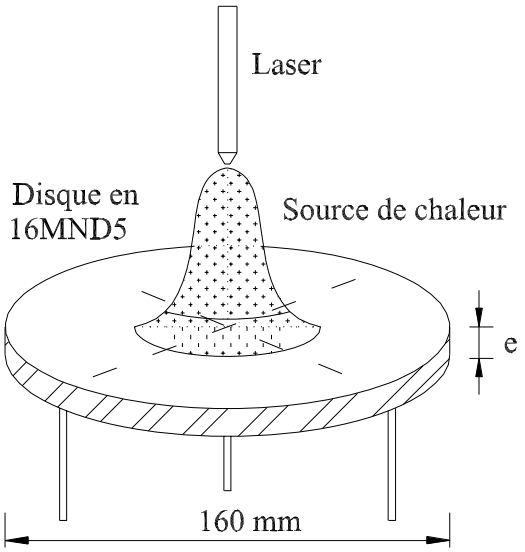


Fig. 3.1 : *Disque chauffé par laser*

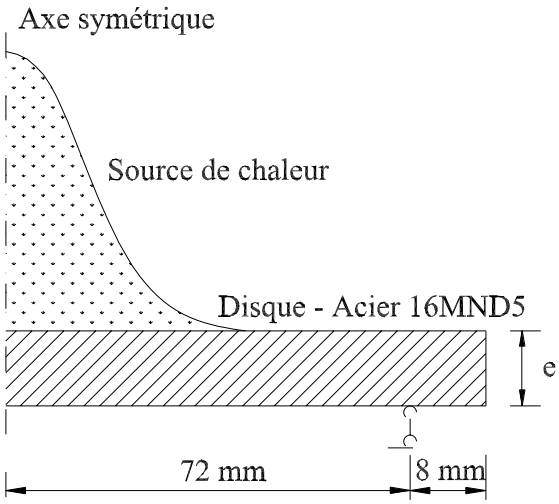


Fig. 3.2 : *Schéma de calcul*

Les conditions expérimentales sont symétriques, cela nous permet de considérer le problème comme axisymétrique et le schéma adopté pour le calcul est représenté par la figure Fig.3.2. Les supports du disque sur trois tiges sont considérés comme des appuis simples.

La figure Fig.3.3 représente les maillages utilisés pour les calculs. Dans la suite de ce manuscrit, le disque de l'essai dans lequel la zone totalement austénitisée au chauffage n'est pas transversante sera nommé "disque A" et le disque utilisé pour l'essai où la zone totalement austénitisée au chauffage est transversante sera nommé "disque B". Le maillage du disque A ($10mm$ d'épaisseur) comporte 296 éléments à quatres noeuds (éléments quadratiques) alors que celui du disque B ($5mm$ d'épaisseur) comporte 258 éléments.

Les chargements thermiques imposés sont présentés sur la figure Fig.3.4. Le flux de la chaleur de chauffage est maintenu $55s$ pour le disque A et $69.5s$ pour le disque B. La durée de chaque essai est de $300s$, le chauffage se termine à l'instant $t = 55s$ pour le disque A et à l'instant $t = 85.5s$ pour le disque B.

Les calculs thermiques et métallurgiques se sont d'abord effectués en même temps. Les résultats obtenus en température et en proportion volumique de phases dans cette étape seront utilisés pour le calcul mécanique.

Il est à noter que l'état métallurgique initial est un mélange de 61% de ferrite et 39%

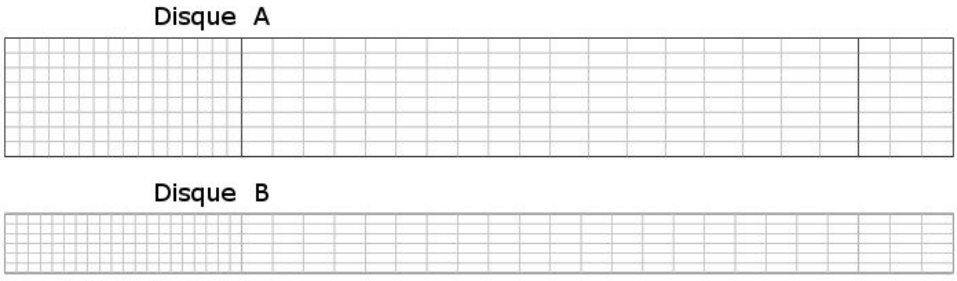


Fig. 3.3 : *Maillages utilisés dans les simulations*



Fig. 3.4 : *La source imposée : (a) Disque A, (b) Disque B*

de bainite pour le disque A alors que le disque B possède une structure initiale totalement bainitique.

Au cours de l'essai, les températures en faces inférieures sont mesurées par des thermocouples, les mesures de déplacements axiaux et radiaux sont effectuées à l'aide de capteurs latéraux et de capteurs inductifs. Enfin, la méthode de diffraction par rayon X a été utilisée pour mesurer les contraintes résiduelles des disques ([Cavallo, 1998], [Petit-Grostabussiat, 2000]).

3.3 Implantation numérique

Les modèles présentés ci-dessus ont été implantés dans COMSOL Multiphysics. Ce dernier offre la possibilité de programmer directement des équations aux dérivées partielles (EDPs) qui peuvent ensuite être résolues en utilisant des solveurs génériques intégrés au logiciel.

Dans COMSOL Multiphysics, généralement, les équations aux dérivées partielles (EDPs) peuvent être déclarées directement sous les trois formes suivantes ([com, n.d.b], [com, n.d.a]) :

- la *Forme Coefficient* est souvent considérée pour les EDPs linéaires,
- la *Forme Générale* est souvent considérée pour les EDPs non-linéaires,
- la *Forme Faible* utilise la formulation faible des EDPs, cela nous donne une grande flexibilité pour la description des équations aux dérivées partielles dans ce code.

Les détails des équations de *Forme Coefficient* et de *Forme Faible* sont présentés dans ([com, n.d.b], [com, n.d.a]). Dans ce paragraphe, nous présentons la *Forme Générale* qui correspond aux équations de nos modèles.

La *Forme Générale* des équations aux dérivées partielles est décrite dans COMSOL Multiphysics sous la forme suivante avec l'option d'*analyse temporelle* :

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.\Gamma = F \qquad \text{sur} \quad \Omega \tag{3.1}$$

$$-\boldsymbol{n}\Gamma = G + \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^T \mu \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{3.2}$$

$$0 = R \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{3.3}$$

où :

Ω est le domaine dans lequel les EDPs seront résolues,

$\partial\Omega$ est la frontière du domaine considéré Ω,

u est le vecteur des variables dépendantes qui est également la solution du problème,

$\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire normal extérieur à la $\partial\Omega$,

μ est le multiplicateur de Lagrange,

e_a, d_a, Γ, F, G, R sont des coefficients de l'équation, ils peuvent être éventuellement fonctions des coordonnées spatiales, des solutions u et les dérivées de u.

L'équation (3.1) représente les équations aux dérivées partielles utilisées dans COMSOL Multiphysics (*Forme Générale*) et les deux dernières équations ((3.2) et (3.3)) expriment respectivement les conditions aux limites de Neumann (conditions aux limites naturelles) et Dirichlet (conditions aux limites essentielles).

L'utilisation appropriée des coefficients des équations ci-dessus ((3.1), ((3.2) et(3.3)) nous permet d'obtenir la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \qquad \text{sur} \quad \Omega \tag{3.4}$$

$$-\boldsymbol{n}\Gamma = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{3.5}$$

L'équation (3.4) a été utilisée pour décrire des équations d'évolution des variables dissipatives dans nos modèles de comportement. Dans ce cas, le vecteur u des variables dépendantes représente le vecteur des variables dissipatives (déformations plastiques ou la proportion volumique des phases, par exemple).

Lorsque la description des équations d'évolution est terminée, COMSOL Multiphysics collecte toutes les équations ainsi que les conditions aux limites déclarées par l'utilisateur dans un système d'équations. Ces équations sont ensuite discrétisées et on obtient un système d'équations algébriques (DAE system - Differential Algebraic Equations system). Dans COMSOL Multiphysics, la résolution du système d'équations algébriques est réalisée par la méthode BDF (Backward Differentiation Formula). Le schéma implicite en temps est utilisé, ce qui conduit éventuellement à résoudre un système non-linéaire d'équations à chaque pas de temps. Dans ce cas, la méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée, le logiciel résoud ensuite le système résultant avec un solveur du système linéaire. Dans COMSOL Multiphysic, pour la résolution du système linéaire , en fonction du problème traité, on peut choisir un solveur approprié qui peut être solveur direct (UMFPACK, SPOOLES, TAUCS), solveur GMRES, Gradients Conjugués ou Géometrique Multigrille [com, n.d.b].

Les tolérances relatives et absolues définies par l'utilisateur permettent de déterminer le critère de convergence pour chaque pas de temps.

La figure Fig.3.5 présente les équations à résoudre dans COMSOL Multiphysics. Les équations aux dérivées partielles de type (3.4) ont été ajoutées pour décrire l'évolution des proportions volumiques des phases, des variables des déformations inélastiques ainsi que des variables d'écrouissage des phases métallurgiques.

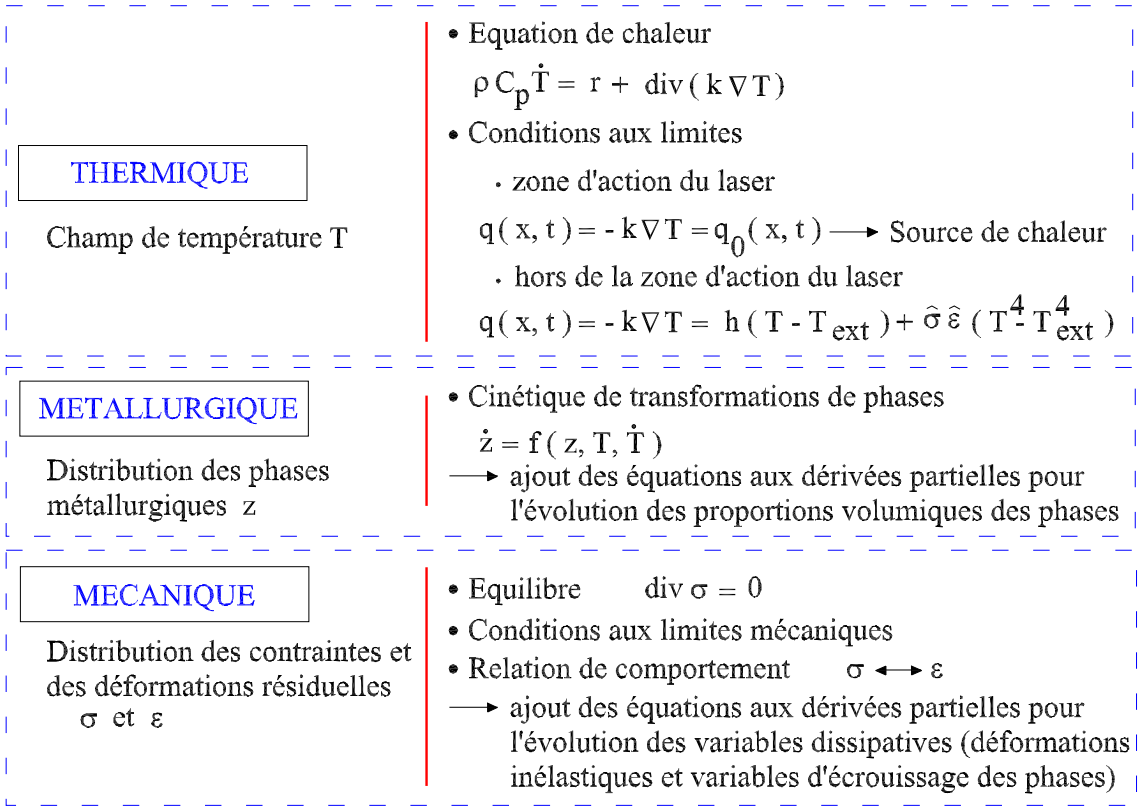


Fig. 3.5 : *Equations à résoudre avec COMSOL Myltiphysics*

3.4 Propriétés thermomécaniques et métallurgiques du matériau

3.4.1 Caractéristiques thermiques

La résolution du problème thermique nécessite la connaissance des caractéristiques thermiques telles que la chaleur calorifique, la conductivité thermique et les coefficients d'échanges thermiques avec l'extérieur. De plus, comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe 1.4.1 du premier chapitre, la précision dans l'estimation de la quantité d'énergie transmise par la source de chaleur joue un rôle primordial pour la performance de la modélisation thermique des procédés de soudage ou de traitement thermique.

Le tableau 3.1 présente la chaleur calorifique et la conductivité thermique en fonction de la température pour l'acier 16MND5.

$T\ (^{\circ}C)$	20	200	300	400	600	750	900	1000
$\rho c\ (10^6 J/m^3 K)$	3.49	4.09	4.42	4.8	6.1	10.13	5.88	4.76
$k\ (W/mK)$	37.7	40.5	39.5	37.7	33	29.3	25.3	26.9

Tab. 3.1 : *Caractéristiques thermiques [Coret et Combescure, 2002]*

Les coefficients décrivant les échanges thermiques par convection naturelle et rayonnement (*cf.* équation (1.11)) présentent les valeurs suivantes :

- le coefficient de convection h :
  - pour les faces inférieures et latérales, $h = 5\ Wm^{-2}K^{-1}$,
  - pour la face supérieure pendant le refroidissement, $h = 10\ Wm^{-2}K^{-1}$.
- la constante d'Helmoltz, $\hat{\sigma} = 5.67.10^{-8}$.
- le facteur d'émissivité, $\hat{\epsilon} = 0.7$.

En ce qui concerne la source de chaleur, nous avons utilisé une source surfacique décrite par l'équation 1.16. Les paramètres de la source thermique sont déterminés à partir des paramètres des essais effectués (puissance du laser, taille de la tâche focale du laser).

3.4.2 Caractéristiques métallurgiques

L'identification du modèle métallurgique nécessite la connaissance de la partie purement thermique de l'énergie libre de chaque phase. En effet, cette quantité d'énergie est liée aux chaleurs calorifiques des phases correspondantes (*cf.* équation 2.28). Les tableaux 3.2 et 3.3 donnent respectivement les valeurs de la chaleur calorifique en fonction de la température des phases ferritiques et de la phase austénitique [Costantini, 1996].

$T(^\circ C)$	20	100	200	300	400	500	600	650	700
$c\ (J.kg^{-1}.K^{-1})$	470	490	525	565	615	680	770	815	850

Tab. 3.2 : *Chaleurs spécifiques des phases ferritiques*

$T(^\circ C)$	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200
$c\ (J.kg^{-1}.K^{-1})$	530	545	560	570	580	590	600	620	630	650

Tab. 3.3 : *Chaleurs spécifiques de l'austénite*

La figure Fig.3.6 représente le diagramme T.R.C (Transformation en Refroidissement Continu) de l'acier 16MND5. Ce diagramme est utilisé pour déterminer les proportions finales des phases produites lors des transformations de l'austénite au refroidissement en fonction de la vitesse de refroidissement.

Le tableau 3.4 donne les proportions maximales obtenues pour les phases ferritiques lors des transformations de phases au refroidissement. Ces valeurs sont déduites directement à partir du diagramme T.R.C (*cf.* Fig.3.6). z_f, z_b et z_m désignent respectivement la proportion finale atteinte de la ferrite, bainite et martensite après refroidissement et Vr désigne la vitesse de refroidissement.

Concernant les températures de début et de fin de transformations, ces valeurs peuvent être obtenues directement à partir du diagramme T.R.C ou on peut les déterminer à partir des

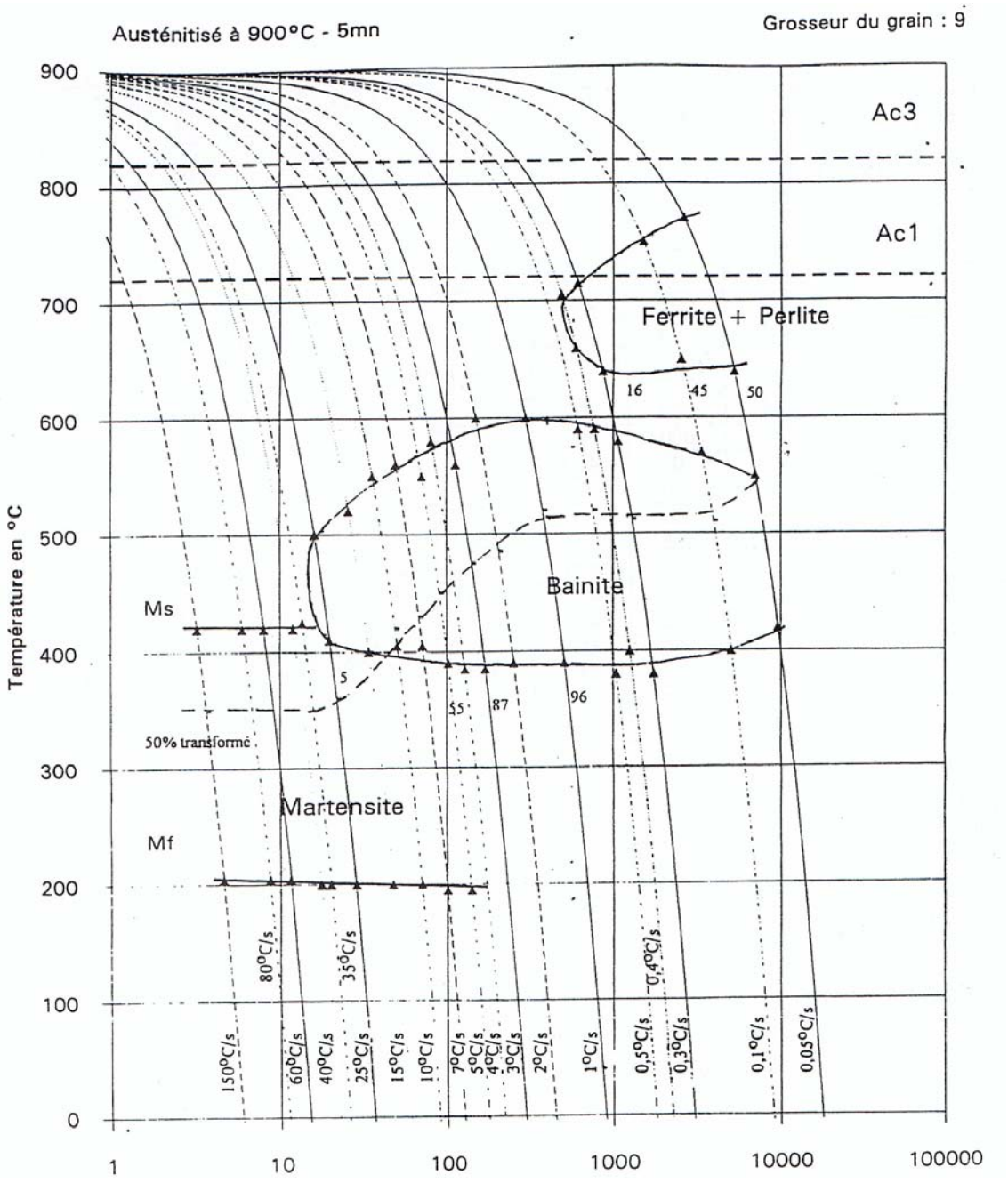


Fig. 3.6 : *Diagramme T.R.C de l'acier 16MND5*

$Vr(^\circ C/s)$	0.05	0.1	0.3	0.4	0.5	1	2	3	4	5	7	10	15	25	35	$\geqslant 40$
z_f	50	45	16	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z_b	50	55	84	94	100	96	91	87	69	55	46	34	22	5	0	0
z_m	0	0	0	0	0	4	9	13	31	45	54	66	78	95	100	100

Tab. 3.4 : *Données correspondantes au diagramme T.R.C (Figure 3.6)*

essais dilatométriques. Pour nos calculs, les valeurs suivantes sont retenues ([Martinez, 1999], [Coret *et al.*, 2004]), (T_d et T_f désignent respectivement les températures de début et de fin de transformations) :

- $T_d = 700^\circ C$ et $T_f = 840^\circ C$ pour l'austénitisation au chauffage,
- $T_d = 550^\circ C$ et $T_f = 400^\circ C$ pour la transformation bainitique au refroidissement,
- $T_d = 400^\circ C$ et $T_f = 200^\circ C$ pour la transformation martensitique au refroidissement.

Bien que les températures de début et de fin de transformations dépendent de la vitesse de température tant au chauffage qu'au refroidissement, nous avons choisi des valeurs constantes pour ces températures de transformations de phases. Cela s'appuie sur le fait que les vitesses de température utilisées dans les essais dilatométriques permettant d'obtenir ces valeurs appartiennent à la plage de vitesses de température de la plupart des cycles thermiques industriels. De plus, ces valeurs sont également conformes aux valeurs données par le diagramme T.R.C. (*cf.* Fig.3.6), surtout pour les transformations martensitiques.

3.4.3 Caractéristiques mécaniques

Comme nous l'avons justifié dans les deux premiers chapitres de ce mémoire, les influences de l'état mécanique sur l'évolution thermique et sur la cinétique de transformations microstructurales n'ont pas été prises en compte, par conséquent, la résolution du problème mécanique est découplée des problèmes thermiques et métallurgiques. Dans nos calculs, ces deux problèmes sont résolus en même temps et les résultats de ce calcul sont les données d'entrée pour le calcul mécanique ultérieur.

Concernant les coefficients de dilatation thermique des phases, ils sont déduits à partir des courbes dilatométriques libres. Conformément aux résultats expérimentaux ([Taleb *et al.*, 2001], [Coret *et al.*, 2002], [Alberg et Berglund, 2003], [Coret *et al.*, 2004], [Vincent *et al.*, 2005]), les coefficients de dilatation thermique des phases ferritiques (ferrite, bainite et martensite) sont choisis identiques et nous retenons les valeurs suivantes pour nos calculs ([Taleb *et al.*, 2001], [Coret *et al.*, 2002]), (*cf.* équations (1.61) et (1.62)) :

- phases ferritiques : $\alpha_\alpha = 15 \text{ x } 10^{-6^\circ} C^{-1}$,
- phase austénitique : $\alpha_\gamma = 23.5 \text{ x } 10^{-6^\circ} C^{-1}$,
- différence de compacités volumiques entre les phases ferritiques et austénique à la température $T_{ref} = 20\ ^\circ C$: $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\gamma}(T_{ref}) = 1.06 \text{ x } 10^{-2}$.

Pour la plasticité de transformation, un seul coefficient K doit être déterminé (*cf.* équation 2.92). Les essais dilatométriques sous contraintes permettent de l'identifier. Les différents niveaux de contraintes appliquées conduisent à des valeurs différentes de K ([Taleb *et al.*, 2001], [Taleb et Petit, 2006]). Parmi ces valeurs de K, nous retenons pour nos calculs une valeur moyenne $K = 0.7 \text{ x } 10^{-4}\ MPa^{-1}$, cette même valeur est prise pour les transformations bainitiques et martensitiques.

Finalement, les calculs mécaniques seront réalisés en introduisant des caractéristiques élastiques (module de Young E et coefficient de Poisson ν) ainsi que les caractéristiques plastiques ou viscoplastiques de chaque phase métallurgique. Nous rappelons ici, pour les caractéristiques plastiques ou viscoplastiques de chaque phase, qu'il s'agit des limites d'élasticité, des modules d'écrouissage et des coefficients de viscosité pour les comportements viscoplastiques (*cf.* le paragraphe 2.3.6).

Le tableau 3.5 présente les modules de Young E et les caractéristiques plastiques de chaque phase en fonction de la température. σ_{ym}, σ_{yb}, σ_{yf}, σ_{ya} et H_m sont respectivement les limites d'élasticité de la martensite, de la bainite, de la ferrite, de l'austénite et le module d'écrouissage de la martensite.

T(°C)	20	100	200	400	600	700	800	900	1000
$E(Gpa)$	208	204	200	180	135	80	50	32	30
σ_{ym}(MPa)	1200	1170	1100	980	680	350	100	50	20
σ_{yb}(MPa)	480	450	430	390	270	140	70	30	20
σ_{yf}(MPa)	320	300	275	230	170	100	60	30	20
σ_{ya}(MPa)	140	130	120	110	100	70	60	30	20
H_m(MPa)	10000	10000	10000	10000	9000	8000	7000	6000	5000

Tab. 3.5 : *Module de Young et caractéristiques plastiques de chaque phase en fonction de la température, [Martinez, 1999]*

Les tableaux 3.6, 3.7 et 3.8 représentent successivement les caractéristiques du comportement viscoplastique de la bainite, de la martensite et de l'austénite en fonction de la température.

T(°C)	E (MPa)	ν	σ_{yb} (MPa)	Q (MPa)	b	H (MPa)	γ (MPa)	κ	η (MPa $s^{1/n}$)
20	204000	0.3	254	65	0.38	529830	949	30	10
300	185000	0.3	254	65	0.38	529830	949	30	10
550	160000	0.3	15	4	2	236325	952	1140	6.72
650	105000	0.3	2.1	0	2	61630	958	1112	5.68

Tab. 3.6 : *Caractéristiques viscoplastiques de la bainite et de la ferrite, [Martinez, 1999]*

T(°C)	E (MPa)	ν	σ_{ym} (MPa)	Q (MPa)	b	H (MPa)	γ (MPa)	κ	η (MPa $s^{1/n}$)
20	204000	0.3	550	110	0.38	947445	946	30	10
400	176000	0.3	500	110	0.38	877200	946	30	10

Tab. 3.7 : *Caractéristiques viscoplastiques de la martensite, [Martinez, 1999]*

Dans les paragraphes suivants, nous présentons les résultats des calculs avec les modèles proposés et les paramètres présentés ci-dessus. Nos résultats numériques seront analysés et comparés aux résultats expérimentaux ainsi qu'aux résultats d'un calcul numérique issu de la littérature ([Cavallo, 1998], [Petit-Grostabussiat, 2000]). En ce qui concerne les calculs mécaniques dans les simulations de la littérature, un comportement élastoplastique avec écrouissage

T(°C)	E (MPa)	ν	σ_{ya} (MPa)	Q (MPa)	b	H (MPa)	γ (MPa)	κ	η (MPa $s^{1/n}$)
300	185000	0.3	110	65	0.38	102900	940	30	10
550	160000	0.3	15	0	0.38	74250	950	390	6.72
650	105000	0.3	2.1	0	0.38	58950	957	600	5.68
750	64000	0.3	1	0	0.38	44355	955	820	4.75
900	33000	0.3	0.33	0	0.38	2940	778	770	2.97
1000	20000	0.3	0.31	0	0.38	396	0	472	2.95
1100	11000	0.3	0.29	0	0.38	150	0	234	2.86

Tab. 3.8 : *Caractéristiques viscoplastiques de l'austénite, [Martinez, 1999]*

isotrope a été utilisé et la plasticité de transformation (TRIP) a été prise en compte. Dans ces calculs, pour la modélisation du comportement du matériau multiphasé lors des transformations microstructurales, des lois de mélange linéaires ou non-linéaires ont été utilisées pour déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau multiphasé à partir des caractéristiques de chaque phase ([Cavallo, 1998], [Petit-Grostabussiat, 2000]). Pour la présentation des résultats, nous avons choisi de présenter d'abord ceux du disque A et ensuite, ceux du disque B.

3.5 Résultats des calculs numériques - Disque A

Nous présentons dans ce paragraphe des résultats du calcul numérique relatif au disque A. Les résultats thermiques, métallurgiques et mécaniques sont respectivement exposés. Les courbes expérimentales ainsi que les résultats numériques issus de la litérature utilisés dans cette section peuvent être consultés dans [Petit-Grostabussiat, 2000].

3.5.1 Résultats thermiques

Les figures Fig.3.7 et Fig.3.8 présentent les évolutions de la température calculées et mesurées expérimentalement en fonction du temps à différents rayons du centre de la face inférieure du disque au chauffage (Fig.3.7) et au refroidissement (Fig.3.8). Les comparaisons entres les courbes calculées et expérimentales montrent une très bonne corrélation entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience.

Sur la figure Fig.3.8, on constate un léger écart entre les deux courbes calculées et mesurées au point situé à $2mm$ du centre de la face inférieure. En ce point, le calcul prévoit une vitesse de refroidissement légèrement plus rapide que l'essai. D'autre part, au centre de la face inférieure, le calcul donne une température maximale atteinte au chauffage de l'ordre de $774^{\circ}C$. Cette température dépasse la température de début d'austénitisation ($T_d = 700^{\circ}C$) et est inférieure à la température de fin d'austénitisation ($T_f = 840^{\circ}C$). Par conséquent, une austénitisation partielle a eu lieu en face inférieure.

Les températures calculées en fonction du rayon de la face supérieure et de la face inférieure sont exprimées dans la figure Fig.3.9 pour le chauffage et dans la figure Fig.3.10 pour le refroidissement. Ces résultats montrent que le gradient thermique dans l'épaisseur croît au cours du chauffage. En effet, à l'instant $t = 10$s, notre calcul donne un gradient thermique d'environ

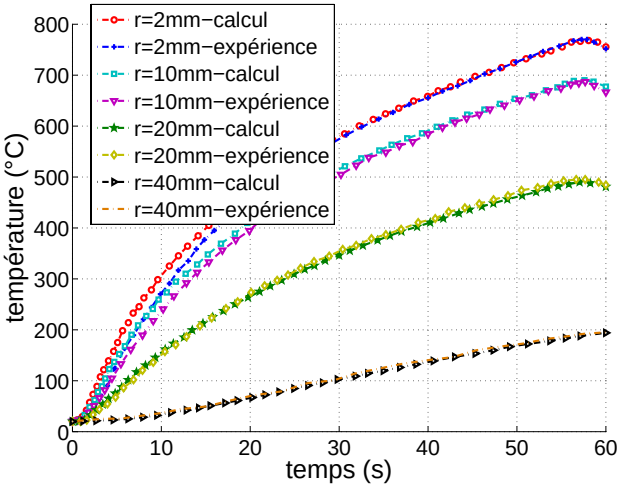


Fig. 3.7 : *Evolutions de la température en face inférieure pour différents rayons au chauffage*

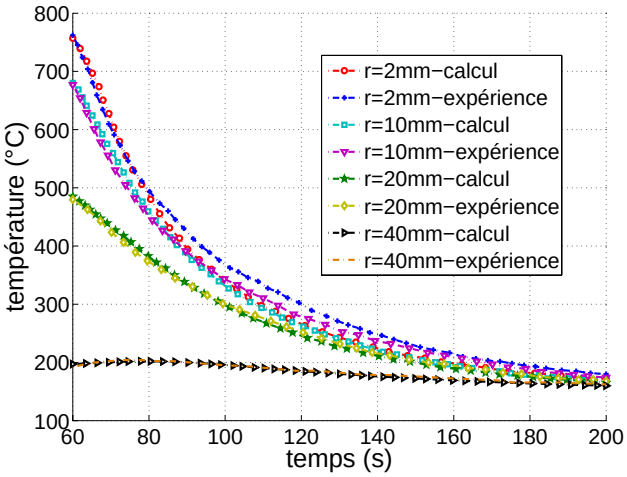


Fig. 3.8 : *Evolutions de la température en face inférieure pour différents rayons au refroidissement*

$200^{\circ}C$ au centre du disque. A $t = 50s$, le gradient thermique au centre est supérieur à $300^{\circ}C$. Il est à noter que le chargement thermique se termine à l'instant $t = 55s$.

Au refroidissement (*cf.* Fig.3.10), la température a tendance à s'homogénéiser dans l'épaisseur du disque. En effet, après l'instant $t = 70s$, on observe que le gradient de la température dans l'épaisseur est quasiment nul pour tous les rayons et seul un gradient thermique radial est présent dans le disque.

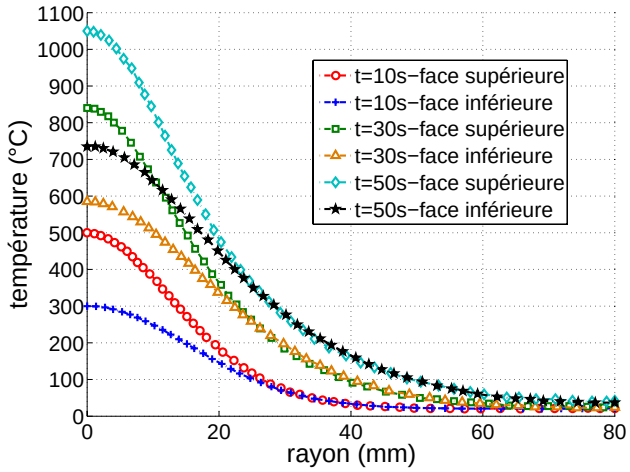


Fig. 3.9 : *Evolutions calculées des températures en fonction du rayon à différents instants au chauffage*

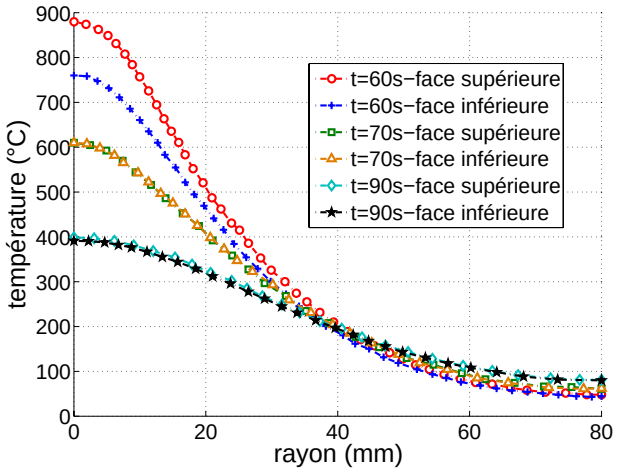


Fig. 3.10 : *Evolutions calculées des températures en fonction du rayon à différents instants au refroidissement*

La figure Fig.3.11 représente la carte thermique du disque à différents instants de calcul au cours du chauffage ou du refroidissement. Ces isovaleurs présentent visiblement une évolution du gradient thermique dans le disque. Le gradient thermique croît rapidement au chauffage et diminue au refroidissement. A partir de l'instant $t = 70s$, on observe une homogénéisation de la température dans l'épaisseur et seul le gradient thermique radial subsiste dans le disque.

La figure Fig.3.12 donne une évolution temporelle de la vitesse de variation de la température

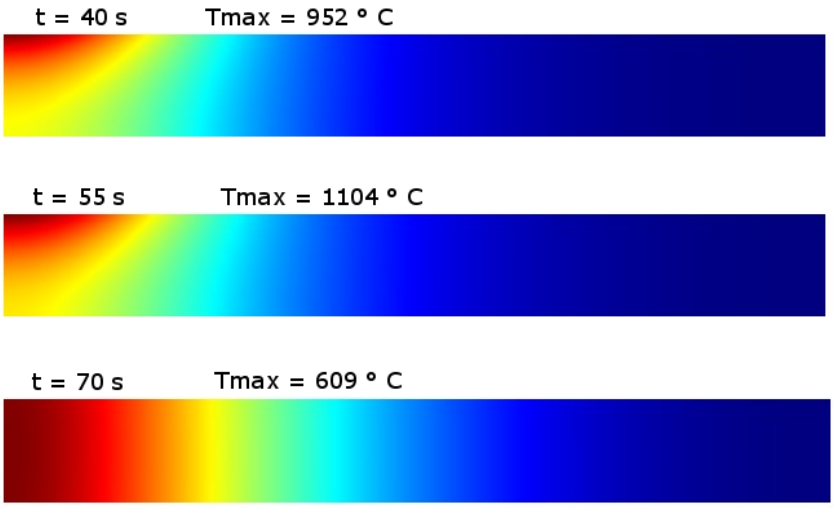


Fig. 3.11 : *Cartes de températures à différents instants*

au point situé au $2mm$ du centre de la face inférieure. On constate un léger écart entre la courbe calculée et la courbe expérimentale tant au chauffage qu'au refroidissement, notre calcul prévoit donc une vitesse de chauffage légèrement inférieure à celle de l'essai et une vitesse de refroidissement légèrement supérieure à celle de l'essai. De plus, en ce point, le refroidissement débute effectivement à l'instant t=$58s$ alors que le spot laser est terminé à l'instant t=$55s$. Cela montre que sur la face inférieure, le chauffage continue par la conduction après l'arrêt du flux de chaleur.

Dans ce paragraphe, l'ensemble des résultats du calcul thermique sont présentés et nous montrons que notre simulation thermique corrèle bien les résultats expérimentaux. En effet, ce calcul a été réalisé en même temps que le calcul métallurgique. Les résultats de ce dernier seront présentés dans le paragraphe suivant.

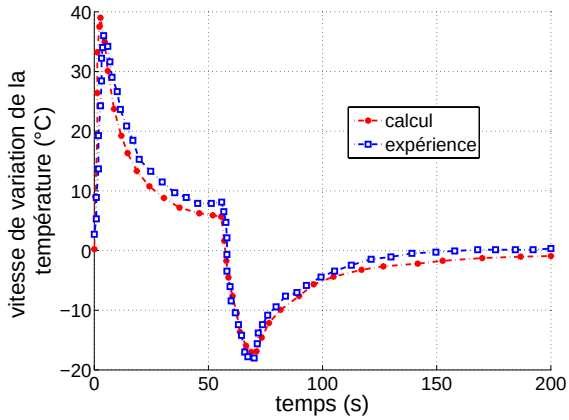


Fig. 3.12 : *Vitesse de la température à r=2mm en face inférieure*

3.5.2 Résultats métallurgiques

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats du calcul métallurgique : cinétiques de transformations de phase et distributions des phases dans le disque. Nous rappelons que l'état métallurgique initial du disque est un mélange de 61% de ferrite et 39% de bainite, le refroidissement débute à $t = 55s$.

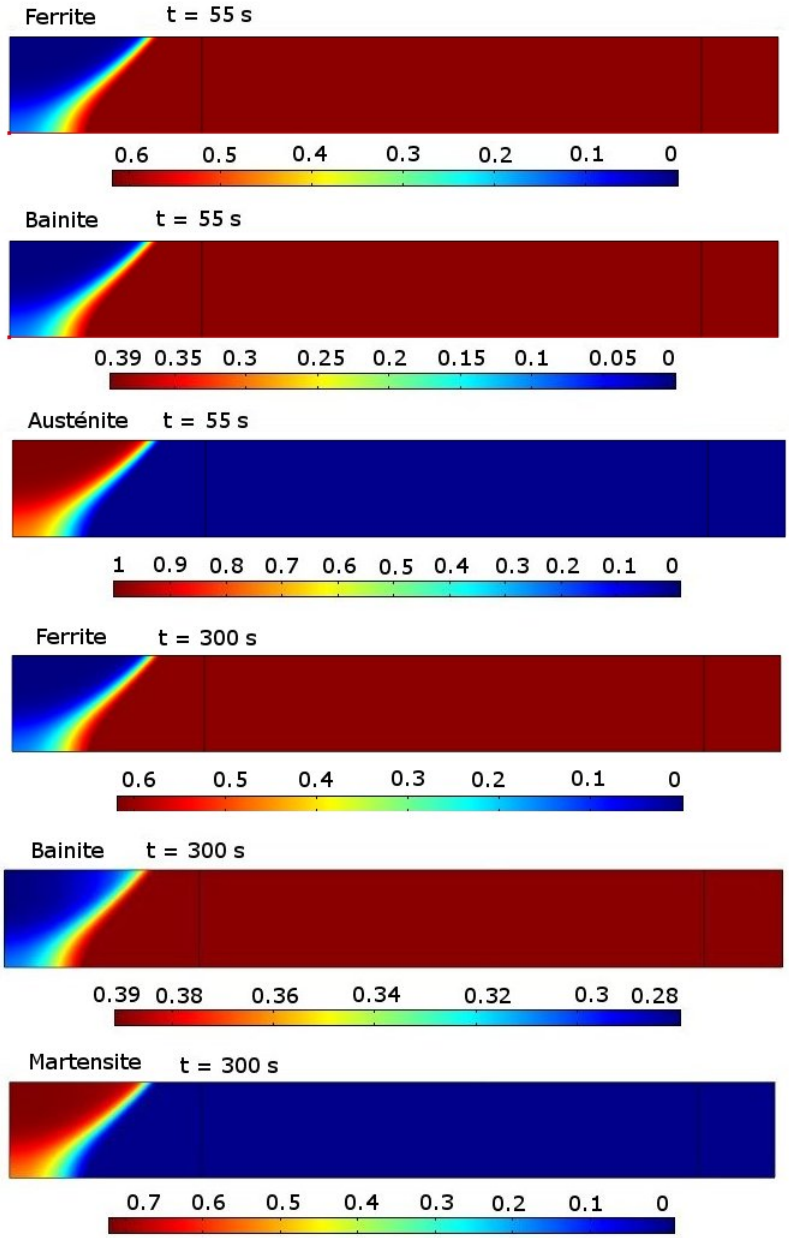


Fig. 3.13 : *Distributions calculées de proportions volumiques des phases métallurgiques en fin de chauffage et de refroidissement*

La figure Fig.3.13 présente les distributions des phases métallurgiques en fin de chauffage ($t = 55s$) et en fin du calcul. On constate visiblement qu'à partir de l'état métallurgique de départ (mélange de ferrite et de bainite), après le chauffage, on obtient une zone affectée thermiquement (Z.A.T) qui se compose de deux parties :

- une partie est totalement austénitisée. Cette zone se trouve au centre de la face supérieure.

Dans cette zone, la température maximale atteinte au chauffage en chaque point est supérieure à la température de fin d'austénitisation. Les phases ferritiques sont totalement transformées en austénite, on obtient donc une proportion volumique de 100% d'austénite en fin de chauffage.

• une partie est partiellement austénitisée. Cette zone se situe au centre de la face inférieure. La température maximale atteinte au chauffage est supérieure à la température de début d'austénitisation mais inférieure à la température de fin d'austénitisation. Les phases métallurgiques initiales sont partiellement transformées en austénite et en fin de chauffage, on obtient un mélange des trois phases ferritiques, bainitiques et austénitiques dans cette zone.

De plus, cette carte des isovaleurs métallurgiques montre bien que la zone complètement austénitisée au chauffage n'est pas transversante dans l'épaisseur du disque.

Selon notre calcul, en face inférieure du disque, on obtient en fin de chauffage une proportion volumique de 76% en austénite (valeur prise au centre de la face inférieure). Ce résultat est satisfaisant par rapport aux mesures expérimentales qui donnent une valeur de 70% à 80% pour l'austénite formée [Petit-Grostabussiat, 2000].

Considérons maintenant les isovaleurs métallurgiques à l'instant $t = 300s$. On trouve qu'une transformation totale de l'austénite formée au chauffage en bainite et en martensite a eu lieu au refroidissement. En fin de refroidissement, on obtient alors un mélange de trois phases dans la Z.A.T : la ferrite non-transformée au chauffage, la bainite et la martensite.

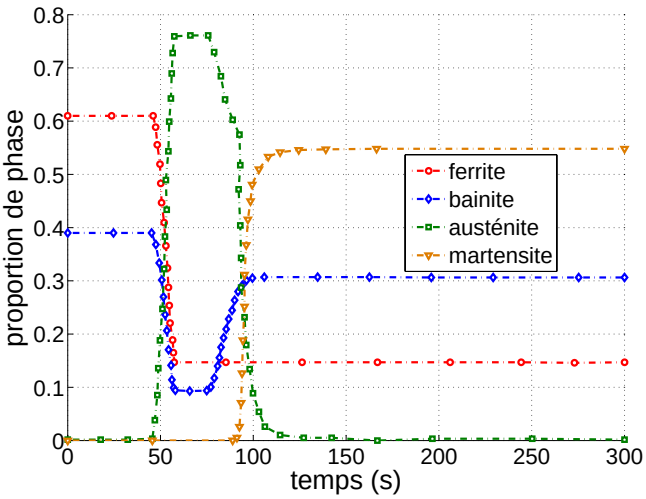


Fig. 3.14 : *Evolutions des proportions de phases au centre de la face inférieure*

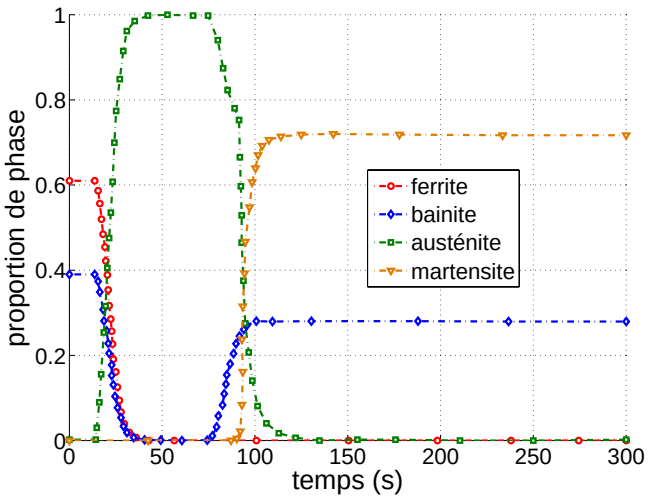


Fig. 3.15 : *Evolutions des proportions de phases au centre de la face supérieure*

Les figures Fig.3.14 et Fig.3.15 présentent respectivement les évolutions temporelles des phases métallurgiques au centre de la face inférieure et de la face supérieure. Sur la figure Fig.3.14, on constate visiblement une proportion volumique de 76% de l'austénite formée au chauffage, et un mélange de 15% de ferrite, de 30% de bainite et de 55% de martensite formé en fin de refroidissement au centre de la face inférieure. Notre calcul prévoit un mélange de 28% de bainite et de 72% de martensite au centre de la face supérieure après le refroidissement (*cf.* Fig.3.15).

La figure Fig.3.16 présente une image de la Z.A.T obtenue par notre calcul et une coupe macrographique expérimentale issue de littérature [Petit-Grostabussiat, 2000]. Cette figure montre que la forme de la Z.A.T a été bien décrite par notre calcul avec des dimensions de la zone totalement austénitisée en bonne concordance avec l'expérience.

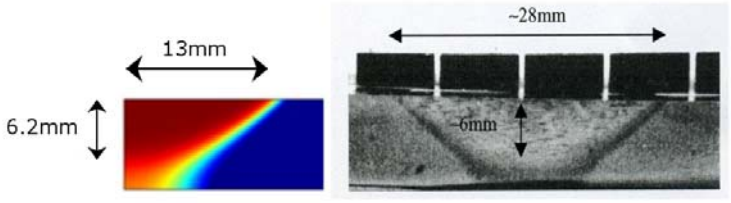


Fig. 3.16 : *Comparaison entre les isovaleurs calculées de la proportion austénitique formée en fin de chauffage (à gauche) et une macrographie issue de l'expérience*

3.5.3 Résultats mécaniques

Le calcul thermo-métallurgique a fourni l'évolution de la température et de la proportion de phases métallurgiques au cours de l'essai. Ces résultats sont pris comme données d'entrée du calcul mécanique. Les résultats de ce dernier seront décrits en déplacement et en contrainte résiduelle comme suit :

• Premièrement, nous présentons les résultats du modèle dans lequel le comportement mécanique de chaque phase dans le mélange est de type élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire. Dans le premier cas, nous n'avons pas pris en compte la plasticité de transformation, l'effet de cette dernière sera pris en compte dans le second cas.

• Deuxièmement, nous donnons les résultats du cas où le comportement mécanique de chaque phase est de type élastoviscoplastique avec écrouissage cinématique et isotrope. L'influence de la plasticité de transformation est également prise en compte.

• Enfin, nous présentons les résultats obtenus par le modèle combiné dans lequel le comportement des phases ferritiques est de type élastoplastique et le comportement de l'austénite est élastoviscoplastique. La plasticité de transformation est également prise en compte.

Pour chacun de ces trois cas, les résultats des calculs avec et sans plasticité de transformation sont comparés avec les résultats expérimentaux et les résultats d'un calcul numérique issu de la littérature [Petit-Grostabussiat, 2000]. Ces comparaisons nous permettent d'analyser l'influence de la plasticité de transformation ainsi que de la viscosité sur la distribution finale des contraintes résiduelles dans la structure. D'autre part, la performance et la souplesse de notre approche sont aussi mises en évidence à travers les résultats présentés, notamment avec le modèle combiné.

3.5.3.1 Cas de l'élastoplasticité

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats du calcul avec un modèle dans lequel le comportement mécanique de chaque phase est de type élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire. La plasticité de transformation (TRIP) est prise en compte.

Les évolutions du déplacement axial au point situé à 1mm du centre de la face inférieure du disque sont représentées par la figure Fig.3.17.

Au début du chauffage, la zone centrale de la face supérieure se dilate, cette dilatation est bloquée par la partie périphérique et cela provoque une élévation de la face supérieure. Par conséquent, on constate une élévation de la face inférieure qui suit la déformation globale de la

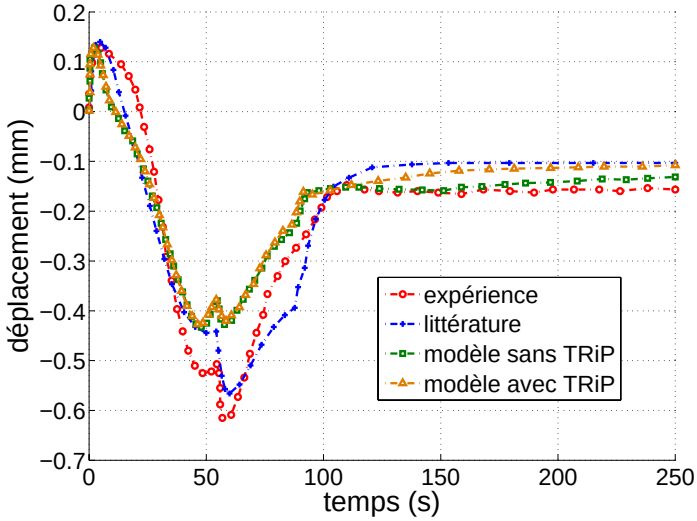


Fig. 3.17 : *Déplacement axial à 1mm de la face inférieure*

face supérieure. Ensuite, le disque s'affaisse, cela est lié au chauffage de la face inférieure par conduction. Au cours du mouvement de descente, l'austénitisation a lieu premièrement en face supérieure, puis en face inférieure (à l'instant $t \simeq 46s$ en un point situé à $1mm$ du centre de la face inférieure). Le début de l'austénitisation s'exprime par un inversement du déplacement et le disque remonte légèrement. Cela peut s'expliquer par le fait que l'austénitisation s'accompagne d'une contraction volumique. Le refroidissement débute en face supérieure, puis se poursuit en face inférieure, les contractions entraînent donc une élévation du disque jusqu'à la fin de l'essai. Pour la comparaison de la figure Fig.3.17, on constate que les courbes ont la même allure et qu'il y a un écart entre les valeurs du calcul et les mesures expérimentales en fin de chauffage et en début de refroidissement. Cependant, les déplacements résiduels sont généralement bien estimés par nos calculs.

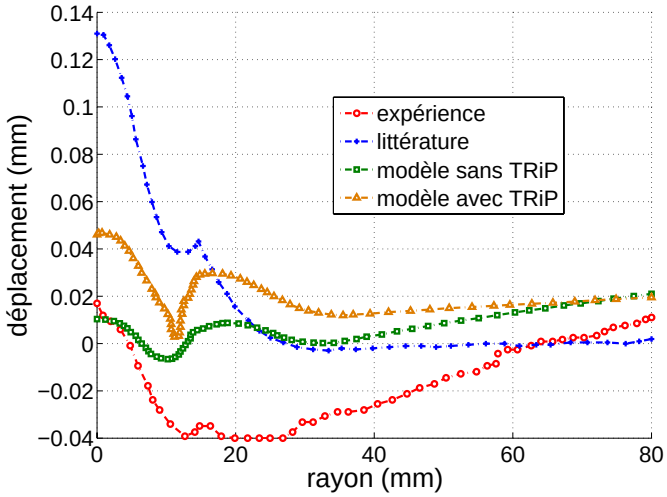


Fig. 3.18 : *Déplacement résiduel de la face supérieure*

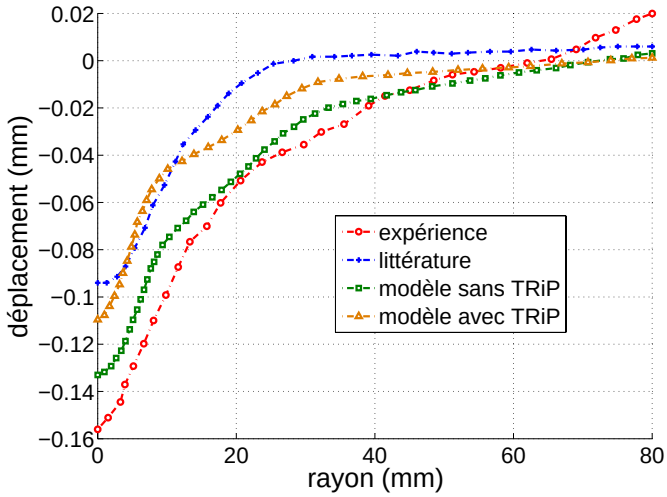


Fig. 3.19 : *Déplacement résiduel de la face inférieure*

Les figures Fig.3.18 et Fig.3.19 représentent respectivement les déplacements résiduels en fonction du rayon du disque de la face supérieure et de la face inférieure. Les déplacements

résiduels en face supérieure ont sensiblement la même allure que ceux observés expérimentelement et celui obtenu par le calcul numérique issu de la littérature mais les amplitudes sont différentes. Pour la face inférieure, nos résultats du calcul numérique sont plus proches de la courbe expérimentale. D'autre part, on constate que le calcul où la plasticité de transformation n'est pas prise en compte donne les résultats plus proches de l'expérience que le calcul avec la plasticité de transformation. Cette constatation a été également faite par [Petit-Grostabussiat, 2000].

La déformée résiduelle du disque obtenue par notre calcul avec la prise en compte de la plasticité de transformation est présentée par la figure Fig.3.20. On observe un gonflement du disque au centre et une contraction entre la zone totalement et partiellement austénitisée. Ce résultat est tout à fait semblable à celui de [Petit-Grostabussiat, 2000].

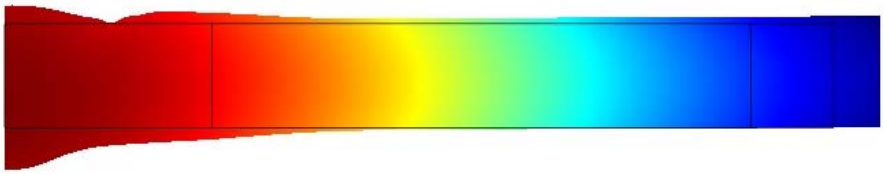


Fig. 3.20 : *Déformée résiduelle du disque - calcul avec prise en compte de l'effet TRiP*

Les figures (Fig.3.21 à Fig.3.24) représentent les contraintes résiduelles radiales et circonférentielles en face supérieure et inférieure du disque, les résultats du calcul avec et sans TRiP sont comparés avec les mesures expérimentales et ceux d'un calcul numérique donné par [Petit-Grostabussiat, 2000]. Le terme TRiP (**TR**ansformation **i**nduced **P**lasticity) désigne la plasticité de transformation et sera fréquemment utilisé dans la suite.

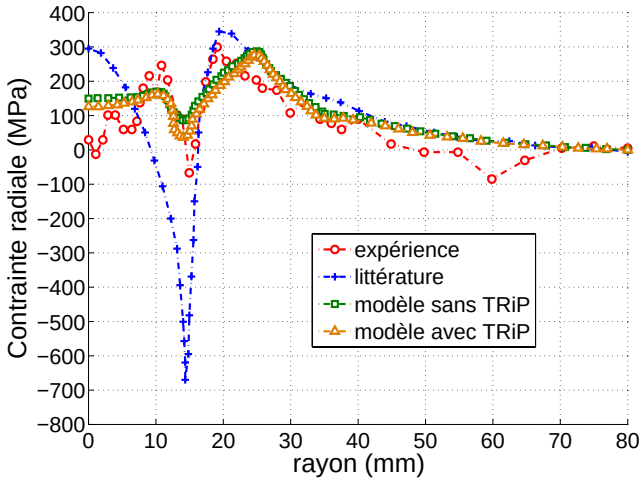


Fig. 3.21 : *Contraintes résiduelles radiales en face supérieure*

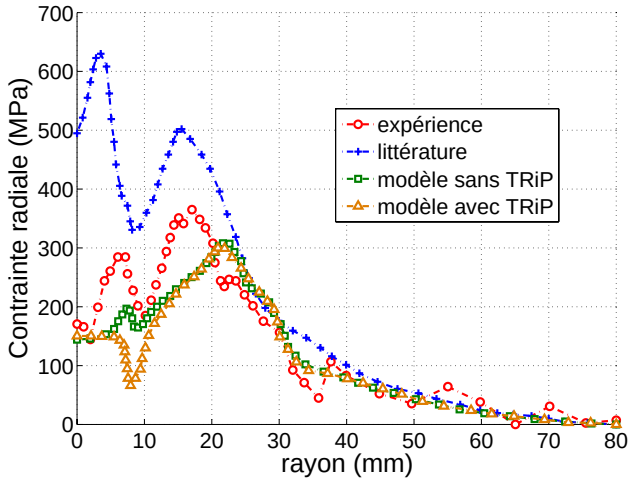


Fig. 3.22 : *Contraintes résiduelles radiales en face inférieure*

Pour les contraintes résiduelles radiales en faces supérieure et inférieure (*cf.* Fig.3.21 et Fig.3.22), les courbes estimées par nos calculs avec et sans TRiP sont très satisfaisantes par rapport à celles obtenues expérimentalement, pour ce qui est des allures, des maxima et des signes des contraintes. On constate que des valeurs maximales des contraintes radiales se trouvent expérimentalement à côté de la Z.A.T et cela est bien restitué par nos calculs. Toutefois, il y a un décalage de 6mm environ sur la position des maxima. Les contraintes radiales maximales

obtenues par l'expérience sont successivement de $300MPa$ et $370MPa$ pour les faces supérieure et inférieure, nos calculs avec TRiP donnent respectivement les valeurs de $297Mpa$ et $308MPa$ pour les deux faces. De plus, on trouve qu'en dehors de la Z.A.T, les courbes calculées suivent bien celles obtenues par l'expérience.

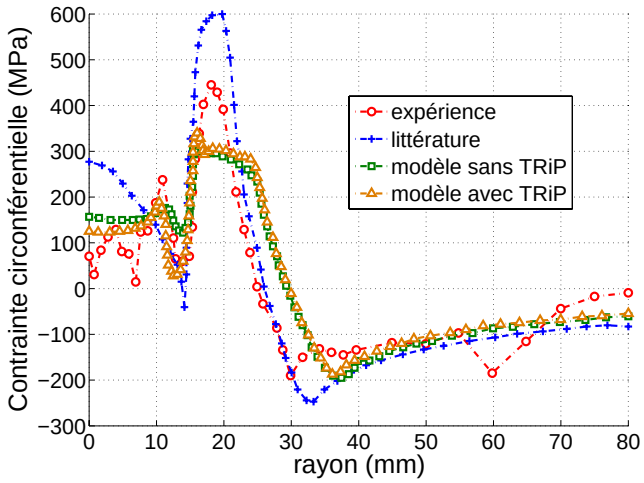


Fig. 3.23 : *Contraintes résiduelles circonférentielles en face supérieure*

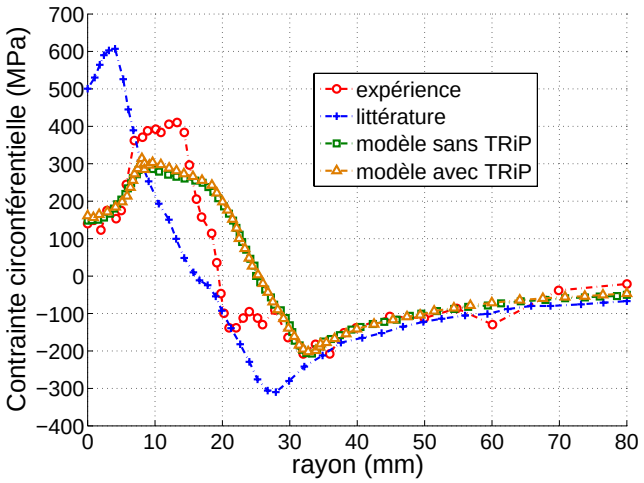


Fig. 3.24 : *Contraintes résiduelles circonférentielles en face inférieure*

En terme de contraintes résiduelles circonférentielles (*cf.* Fig.3.23 et Fig.3.24), les résultats de nos calculs sont très proches de ceux de l'expérience. Les contraintes de traction au centre mesurées expérimentalement sont bien restituées par nos simulations, notamment dans le cas du calcul avec TRiP. Cependant, les calculs prévoient des valeurs plus petites que celles de l'expérience concernant les maxima atteints des contraintes résiduelles circonférentielles tant en face supérieure qu'en face inférieure.

A travers des comparatifs présentés ci-dessus, nos calculs mécaniques fournissent des résultats satisfaisants par rapport aux mesures expérimentales concernant les contraintes et déformations résiduelles. De plus, la prise en compte de la plasticité de transformation apparaît comme nécessaire pour une simulation correcte des contraintes résiduelles.

3.5.3.2 Cas de l'élastoviscoplasticité

Les résultats des calculs où le comportement de chaque phase est élastoviscoplastique avec écrouissage cinématique et isotrope (voir le paragraphe 2.3.3) sont présentés dans ce paragraphe. Comme dans le cas précédent, la plasticité de transformation (TRiP) est également prise en compte. Nous présentons successivement les évolutions des déplacements et des contraintes résiduelles du disque. Les résultats des calculs avec et sans TRiP sont comparés à ceux de l'expérience et à ceux d'un calcul numérique issu de la littérature [Petit-Grostabussiat, 2000].

Sur la figure Fig.3.25, on peut voir les évolutions du déplacement axial du point situé à 1mm du centre de la face inférieure en fonction du temps. Les courbes calculées et expérimentales ont sensiblement la même allure et on constate une bonne concordance entre nos résultas des calculs avec l'expérience, notamment pendant la phase de refroidissement.

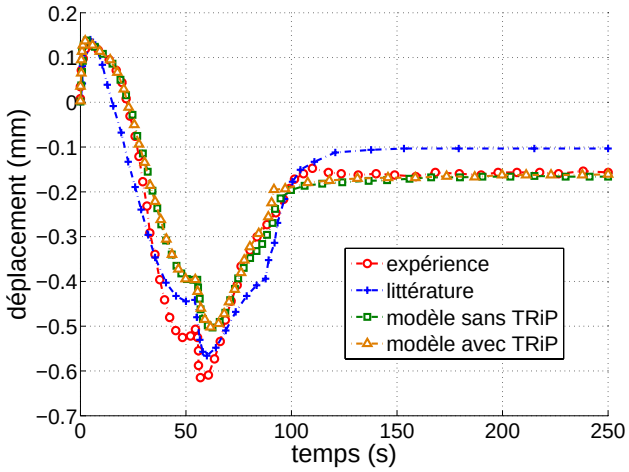


Fig. 3.25 : *Déplacement axial à 1mm de la face inférieure*

Les déplacements résiduels de la face supérieure et de la face inférieure sont respectivement présentés sur la figure Fig.3.26 et la figure Fig.3.27. On observe que nos courbes calculées et celles obtenues expérimentalement sont très proches, voire se superposent dans la zone centrale du disque. Pour nos calculs avec et sans plasticité de transformation, ces deux résultats sont quasiment confondus. On peut dire que la prise en compte de l'influence de la viscosité sur le comportement du matériau a permis d'obtenir une bonne estimation en terme de déplacements résiduels.

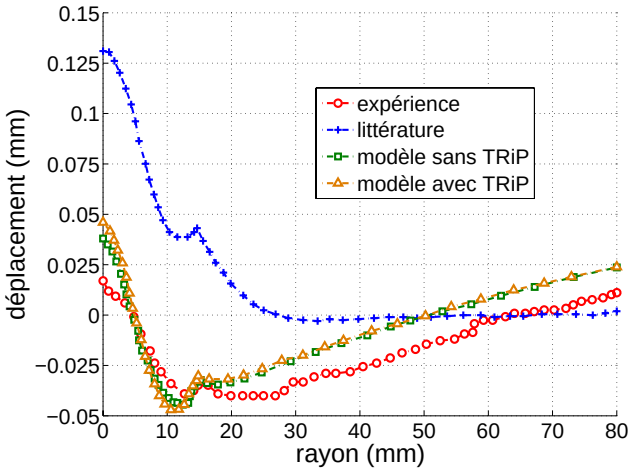


Fig. 3.26 : *Déplacement résiduel de la face supérieure*

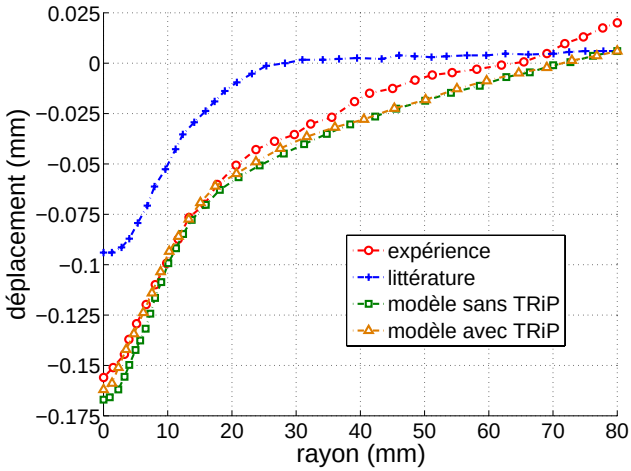


Fig. 3.27 : *Déplacement résiduel de la face inférieure*

La figure Fig.3.28 présente la déformée résiduelle obtenue par le calcul avec la prise en compte de la plasticité de transformation. Comme pour le cas précédent, un gonflement du disque au centre et une contraction entre la zone totalement et partiellement austénitisée sont observés.

Les comparaisons des contraintes résiduelles radiales et circonférentielles en face supérieure et en face inférieure entre les calculs et l'expérience sont présentées dans les figures (Fig.3.29 à Fig.3.32).

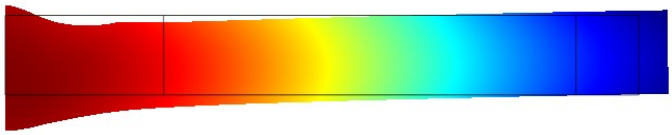


Fig. 3.28 : *Déformée résiduelle du disque - calcul avec prise en compte de l'effet TRiP*

En ce qui concerne les contraintes résiduelles radiales (*cf.* Fig.3.29 et Fig.3.30), les allures des courbes sont semblables mais les amplitudes sont moins bien estimées par nos calculs dans la zone centrale du disque par rapport au cas élastoplastique présenté précédemment. Cependant, nos modèles sont plus performants que le modèle utilisé dans la littérature. De plus, nous remarquons que la prise en compte de la plasticité de transformation permet d'obtenir les bonnes valeurs des contraintes résiduelles radiales au centre du disque.

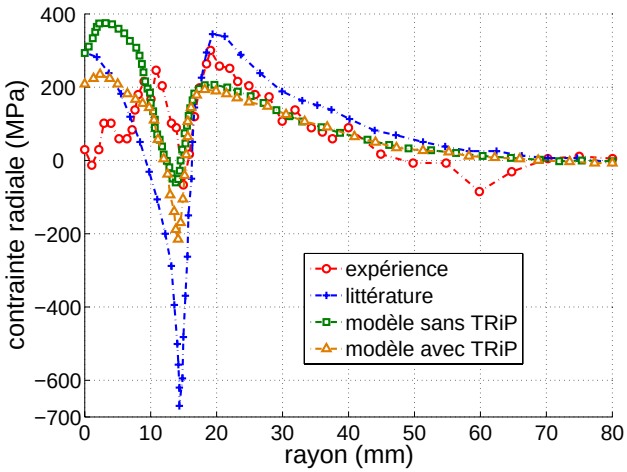


Fig. 3.29 : *Contraintes résiduelles radiales en face supérieure*

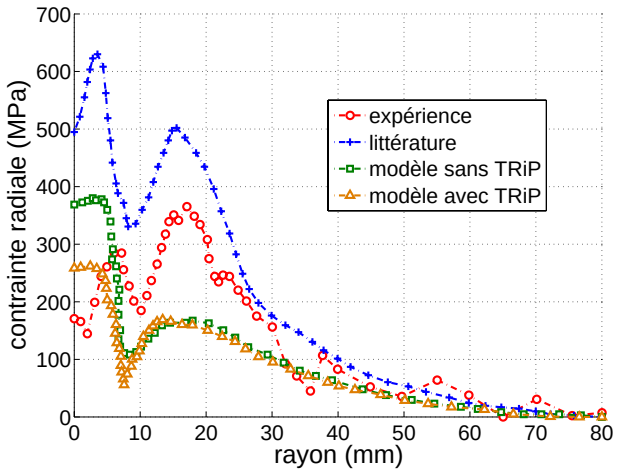


Fig. 3.30 : *Contraintes résiduelles radiales en face inférieure*

Les figures Fig.3.31 et Fig.3.32 présentent les évolutions des contraintes résiduelles circonférentielles en fonction du rayon de la face supérieure et de la face inférieure. On constate que les courbes calculées et expérimentales ont sensiblement la même allure, mais qu'il y a un écart entre les valeurs calculées et celles de l'expérience au centre du disque. Les contraintes résiduelles circonférentielles maximales en compression de la face supérieure et en traction de la face inférieure obtenues par l'expérience ont été retrouvées par nos calcul.

Globalement, par rapport au cas de l'élastoplasticité présenté auparavant, les contraintes résiduelles sont moins bien simulées dans ce cas. Nous rappelons que nous avons utilisé les mêmes comportements élastoviscoplastiques pour toutes les phases métallurgiques même à basse température. Alors que dans ces conditions, le comportement mécanique des phases métallurgiques est plutôt élastoplastique. Ceci sera confirmé par les résultats présentés ci-après pour le modèle combiné dans lequel nous utilisons le comportement élastoplastique pour les phases ferritiques et le comportement élastoviscoplastique pour l'austénite. Cela repose sur le fait que les phases ferritiques sont souvent présentes à basse température où le comportement est élastoplastique tandis que l'austénite se présente à la température élevée et son comportement est élastoviscoplastique.

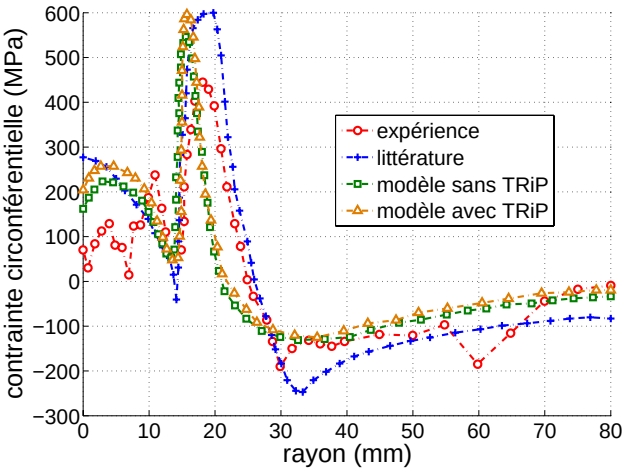


Fig. 3.31 : *Contraintes résiduelles circonférentielles en face supérieure*

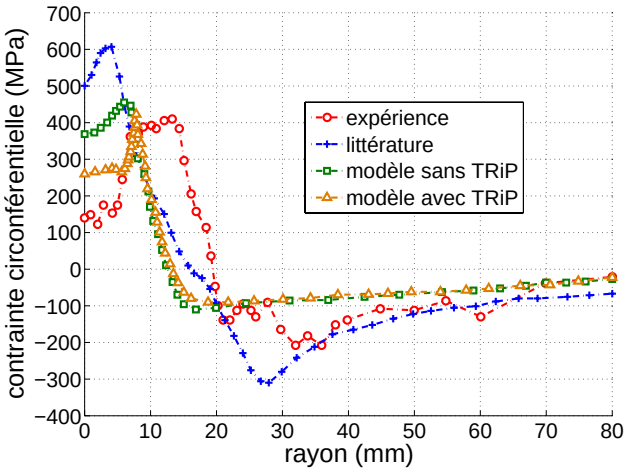


Fig. 3.32 : *Contraintes résiduelles circonférentielles en face inférieure*

3.5.3.3 Cas du modèle combiné

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats du calcul réalisé avec le modèle "combiné" dans lequel un comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire est utilisé pour les phases ferritiques (ferrite, bainite et martensite) et le comportement de l'austénite est élastoviscoplastique avec écrouissage cinématique et isotrope (voir paragraphe 2.3.4). La plasticité de transformation est également prise en compte. Pour chaque résultat présenté, nous réalisons la comparaison entre nos résultats (avec ou non prise en compte de la plasticité de transformation (TRiP)) et les résultats expérimentaux et ceux d'un calcul numérique issu de la littérature [Petit-Grostabussiat, 2000].

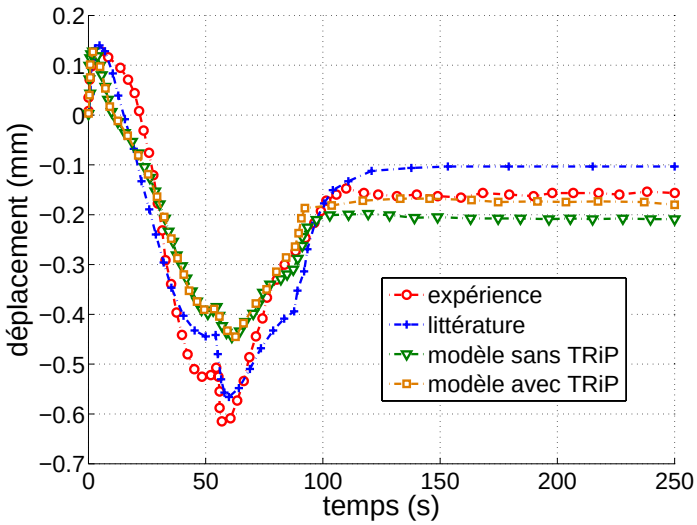


Fig. 3.33 : *Déplacement axial à 1mm de la face inférieure*

La figure Fig.3.33 représente les évolutions en fonction du temps du déplacement axial au point situé à $1mm$ du centre de la face inférieure. Les courbes calculées et expérimentales ont sensiblement la même allure. Comme pour les deux cas précédents, il existe un écart entre nos résultats et ceux de l'expérience en fin du chauffage et au début du refroidissement. Toutefois,

le déplacement résiduel a été bien estimé par nos calculs, notamment avec la prise en compte de la plasticité de transformation.

Ls figures Fig.3.34 et Fig.3.35 expriment respectivement les déplacements résiduels en fonction du rayon de la face supérieure (*cf.* Fig.3.34) et de la face inférieure (*cf.* Fig.3.35). Nos résultats de calcul apparaissent très satisfaisants et la courbe calculée avec TRiP est plus proche de la courbe expérimentale que celle du calcul sans TRiP. La déformée résiduelle du disque obtenue par notre calcul avec TRiP est représentée par la figure Fig.3.36. Comme pour les cas précédents, on observe toujours un gonflement du disque au centre et une contraction entre la zone totalement et partiellement austénitisée.

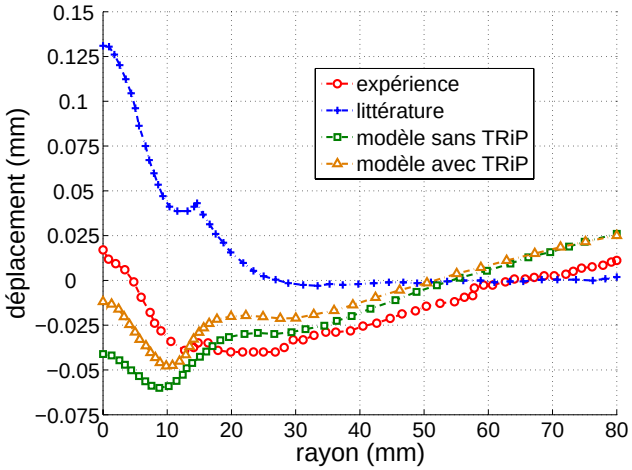


Fig. 3.34 : *Déplacement résiduel de la face supérieure*

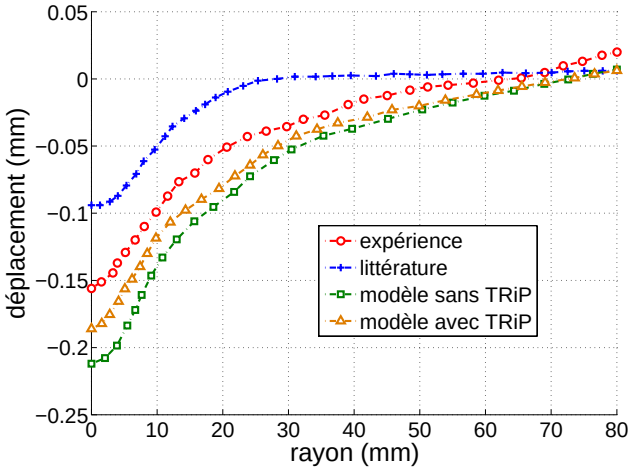


Fig. 3.35 : *Déplacement résiduel de la face inférieure*

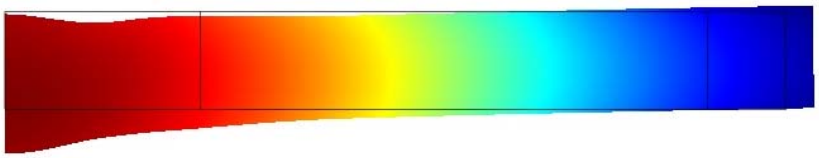


Fig. 3.36 : *Déformée résiduelle du disque - calcul avec la prise en compte de TRiP*

Les évolutions des contraintes résiduelles en fonction du rayon de la face supérieure et de la face inférieure du disque sont présentées par les figures (Fig.3.37 à Fig.3.40).

En ce qui concerne les contraintes résiduelles radiales de la face supérieure (*cf.* Fig.3.37) et de la face inférieure (*cf.* Fig.3.38), nos résultats de calculs sans TRiP et avec TRiP sont comparés aux résultats expérimentaux ainsi qu'aux résultats d'un calcul issu de la littérature. Les comparaisons montrent que les contraintes résiduelles radiales sont bien restituées par nos calculs pour les maxima, leurs positions ainsi que les allures des courbes. De plus, le calcul dans lequel la plasticité de transformation a été prise en compte donne des résultats plus proches des résultats expérimentaux que celui où elle est négligée. Pour les maxima des contraintes résiduelles radiales en face supérieure, l'expérience donne une valeur de $300MPa$ et nos calculs sans TriP et avec TRiP donnent respectivement les valeurs $294MPa$ et $291MPa$. En face inférieure, la contrainte résiduelle radiale maximale atteinte est de $370MPa$ et nos calculs

estiment une valeur de $311MPa$ pour le cas sans TRiP et une valeur de $347MPa$ pour le cas avec TRiP.

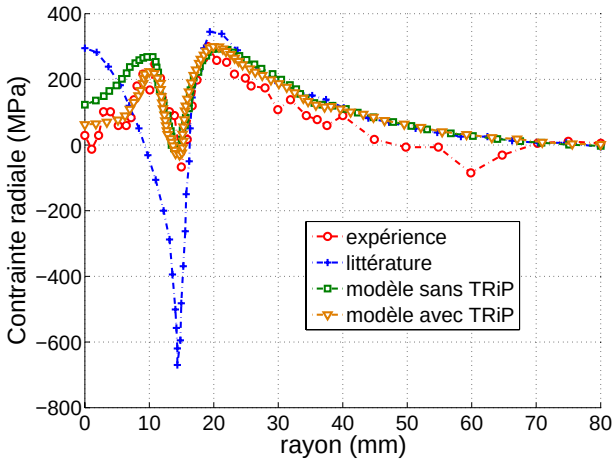


FIG. 3.37 : *Contraintes résiduelles radiales en face supérieure*

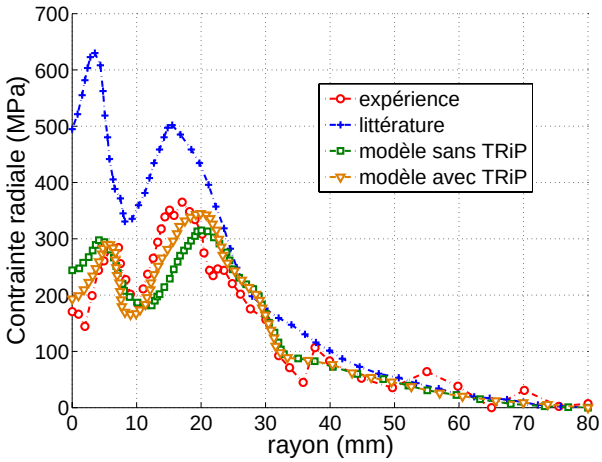


FIG. 3.38 : *Contraintes résiduelles radiales en face inférieure*

Quant aux contraintes résiduelles circonférentielles (*cf.* FIG.3.39 et FIG.3.40), les comparaisons montrent que les courbes calculées et les courbes expérimentales ont sensiblement les mêmes allures et les positions des maxima sont bien prévues par nos calculs. Les valeurs maximales sont atteintes hors de la zone affectée thermiquement. Pour les maxima des contraintes résiduelles circonférentielles en traction de la face supérieure et de la face inférieure, les mesures présentent respectivement des valeurs de $450MPa$ et de $400MPa$, notre calcul sans TRiP prévoit respectivement des valeurs de $322MPa$ et de $300MPa$. Tandis que notre calcul avec TRiP donne respectivement des valeurs de $374MPa$ et de $362MPa$.

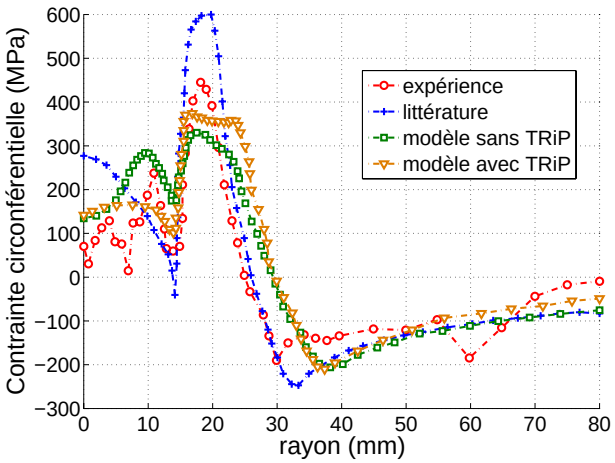


FIG. 3.39 : *Contraintes résiduelles circonférentielles en face supérieure*

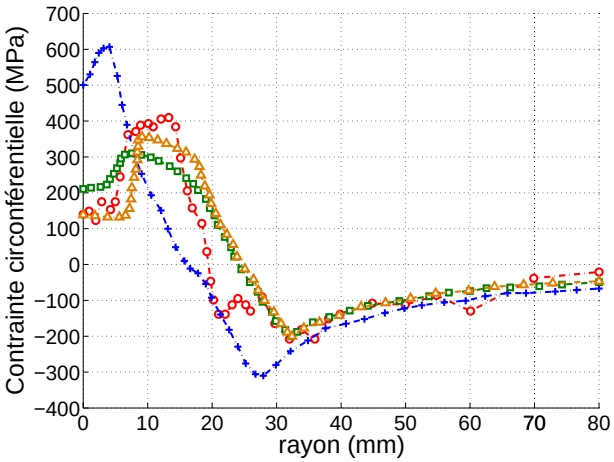


FIG. 3.40 : *Contraintes résiduelles circonférentielles en face inférieure*

Pour la face supérieure et la face inférieure du disque, une valeur maximale d'environ $200MPa$ des contraintes résiduelles circonférentielles en compression est déterminée par l'expérience. Cette valeur a également été retrouvée par nos calculs.

Les comparaisons des contraintes résiduelles montrent un rôle important de la plasticité de transformation sur la distribution finale des contraintes résiduelles lors des procédés de soudage ou de traitement thermique des aciers.

La figure Fig.3.41 exprime les isovaleurs calculées des contraintes résiduelles du disque dans le cas où la plasticité de transformation n'a pas été prise en compte. Sur cette figure, on confirme que les valeurs maximales des contraintes résiduelles sont trouvées hors de la zone affectée thermiquement. Cela est conforme aux résultats obtenus par [Petit-Grostabussiat, 2000], [Vincent *et al.*, n.d.], [Coret et Combescure, 2002].

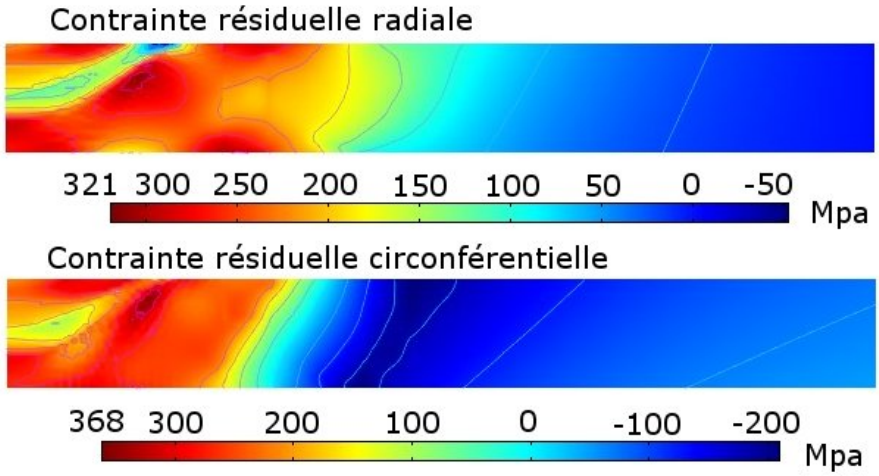


Fig. 3.41 : *Isovaleurs calculées des contraintes résiduelles du disque - calcul sans TRiP*

L'ensemble des comparatifs des résultats des calculs mécaniques relatifs au disque A avec les résultats expérimentaux et les résultats d'un calcul numérique issu de la litérature montrent que :

• la prise en compte de la plasticité de transformation est nécessaire pour une simulation correcte des contraintes et des déformations résiduelles lors des procédés de soudage ou de traitement thermique des aciers,

• en ce qui concerne la plasticité classique, l'utilisation d'un modèle de comportement simple reposant sur des lois de mélange pour déterminer les caractéristiques des matériaux multiphasés semble insuffisante pour une bonne simulation du comportement des matériaux multiphasés,

• l'utilisation des lois de comportement appropriées pour chaque phase métallurgique joue un rôle très important dans la détermination des contraintes et des déformations résiduelles. La prise en compte de l'influence de la viscosité sur le comportement mécanique des aciers à température élevée, en adoptant un comportement élastoviscoplastique pour l'austénite, permet d'obtenir de bons résultats en termes de distribution de contraintes résiduelles dans la structure.

3.6 Résultats des calculs numériques - Disque B

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats du calcul numérique relatif au disque B dont l'épaisseur est de $5mm$. Un flux approprié du laser a été utilisé pour obtenir une zone totalement austénitisée transversante dans l'épaisseur du disque.

En ce qui concerne le calcul mécanique, à travers des résultats présentés dans les paragraphes précédents relatifs au disque A, la performance du modèle combiné a été montrée dans la simulation des contraintes résiduelles dans la structure. Pour le disque B, dans le calcul mécanique, seul le calcul avec le modèle combiné a été effectué. Nous rappelons que pour le modèle combiné, nous avons utilisé les modèles élastoplastiques pour les phases ferritiques qui sont dominantes à basses températures, un comportement élastoviscoplastique a été utilisé pour l'austénite présente à hautes températures.

Deux calculs sont réalisés : dans le premier, nous négligeons l'influence de la plasticité de transformation. L'effet de cette dernière sera pris en compte dans le second calcul. Les résultats thermiques, métallurgiques et mécaniques sont respectivement exposés. Dans chaque cas, nos résultats de calcul seront comparés aux résultats expérimentaux et aux résultats d'un calcul numérique issu de la littérature [Cavallo, 1998]. Le modèle utilisé dans ce dernier cas est de type élastoplastique avec écrouissage isotrope [Cavallo, 1998]. Dans ce modèle, lorsque le matériau est multiphasé, les caractéristiques plastiques du matériau multiphasé (limite d'élasticité et module de l'écrouissage) sont déterminées à partir des caractéristiques de chaque phase en utilisant les lois de mélange (*cf.* équations 1.71 et 1.74). Dans ce calcul, la plasticité de transformation a été prise en compte.

Nous rappelons que l'état métallurgique initial du disque est totalement bainitique et que le chauffage se termine à l'instant t=85.5s. Les courbes expérimentales ainsi que les résultats numériques issus de la litérature utilisés dans cette section sont détaillés dans [Cavallo, 1998].

3.6.1 Résultats thermiques

Les évolutions temporelles de la température en quatre points situés en face inférieure sont présentées sur la figure Fig.3.42 où les résultats du calcul sont comparés aux résultats expérimentaux. La comparaison apparaît très satisfaisante, même si un léger écart de température a été remarqué en fin de chauffage au centre de la face inférieure (r=0mm).

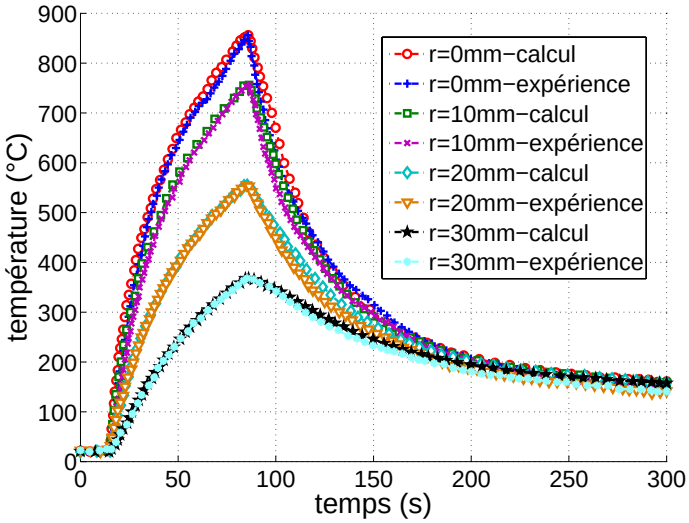


Fig. 3.42 : *Evolutions de la température en fonction du temps pour différents rayons en face inférieure*

La température maximale mesurée sur la face inférieure est de 858°C tandis que notre calcul prévoit une température de 855°C au même point. D'autre part, il est clair que cette température

maximale dépasse la température de fin d'austénitisation ($T_f = 840^{\circ}C$), cela confirme donc une austénitisation totale au centre de la face inférieure et on obtient alors une zone complètement austénitisée transversante dans l'épaisseur du disque.

En un point situé à $10mm$ du centre de la face inférieure, une température maximale de $756^{\circ}C$ a été identifiée. Cette température se trouve dans l'intervalle de températures de début et de fin d'austénitisation [$700^{\circ}C$-$840^{\circ}C$], on a donc une austénitisation partielle à ce point au chauffage. Au point situé à $20mm$ du centre de la face inférieure, la température maximale de $555^{\circ}C$ (valeur donnée par notre calcul) est inférieure à la température de début d'austénitisation, ce point se trouve donc hors de la zone affectée thermiquement.

Les températures en fonction du rayon en face inférieure sont données par la figure Fig.3.43 pour certains instants au chauffage et par la figure Fig.3.44 pour certains instants au refroidissement. On observe une bonne concordance entre nos résultats de calcul et les résultats expérimentaux.

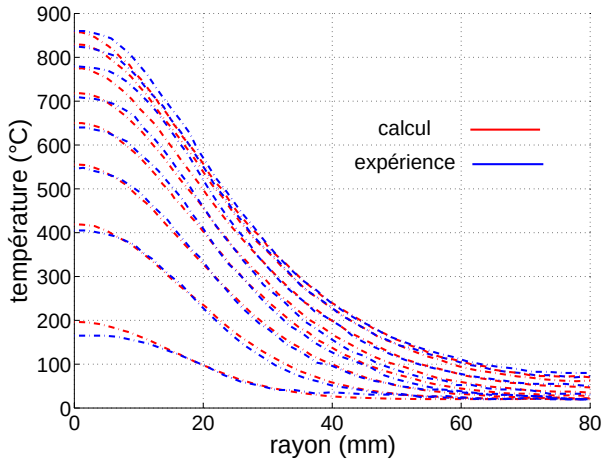


Fig. 3.43 : *Evolutions de la température en fonction du rayon en face inférieure pour certains instants au chauffage : t=20s, 30s, 40s, 50s, 60s, 70s, 80s et 85.5s*

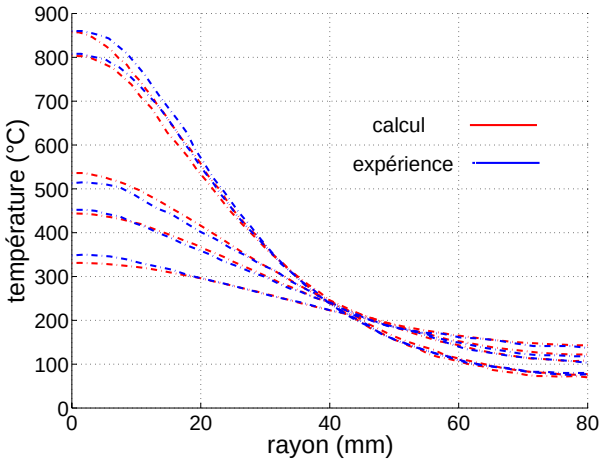


Fig. 3.44 : *Evolutions de la température en fonction du rayon en face inférieure pour certains instants au refroidissement : t=85.5s, 90s, 110s, 120s et 140s*

La figure Fig.3.45 représente les cartes thermiques calculées du disque relatives aux instants t=60s, t=85.5s et t=90s. Le refroidissement débute à l'instant t=85.5s et à l'instant t=90s on observe que le gradient thermique axial est quasiment nul et que seul le gradient thermique axial subsiste dans le disque.

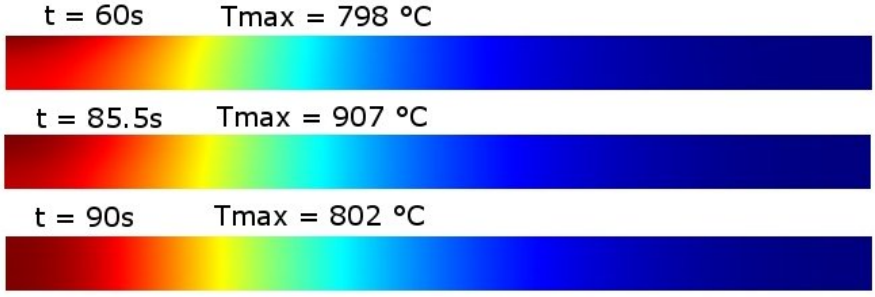


Fig. 3.45 : *Cartes de températures à différents instants*

L'ensemble des comparaisons entre nos résultats du calcul thermique et les résultats expérimentaux montrent bien que les résultats du calcul sont satisfaisants et que le champ de température dans le disque a été bien estimé par nos calculs.

3.6.2 Résultats métallurgiques

Les résultats du calcul métallurgique qui détermine les cinétiques de transformations de phases ainsi que les distributions de phases métallurgiques sont présentés ci-après. En effet, ce calcul a été effectué en même temps que le calcul thermique ci-dessus.

Les distributions de phases métallurgiques dans le disque en fin de chauffage (t=85.5s) et en fin de calcul (t=300s) sont présentées sur la figure Fig.3.46. Comme dans le cas du disque A, lors du chauffage, on obtient une zone affectée thermiquement qui se divise en deux parties :

• Une partie totalement austénitisée au centre du disque. Dans cette zone, la température maximale atteinte au chauffage en chaque point est supérieure à la température de fin d'austénitisation. La bainite initiale est totalement transformée en austénite et on obtient donc une proportion volumique de 100% en austénite en fin de chauffage. Ainsi que nous l'avons mentionné pour le calcul thermique, on obtient, dans ce cas, une zone complètement austénitisée transversante dans l'épaisseur du disque ;

• Une partie partiellement austénitisée dans laquelle la température maximale atteinte au chauffage est supérieure à la température de début d'austénitisation mais inférieure à celle de fin d'austénitisation. La bainite initiale est partiellement transformée en austénite et en fin de chauffage, on obtient un mélange de deux phases : bainitique et austénitique.

Le refroidissement commence à l'instant t=85.5s, l'austénite formée au chauffage se transforme totalement en bainite et en martensite. En fin du calcul, on obtient dans la Z.A.T un mélange de bainite et de martensite.

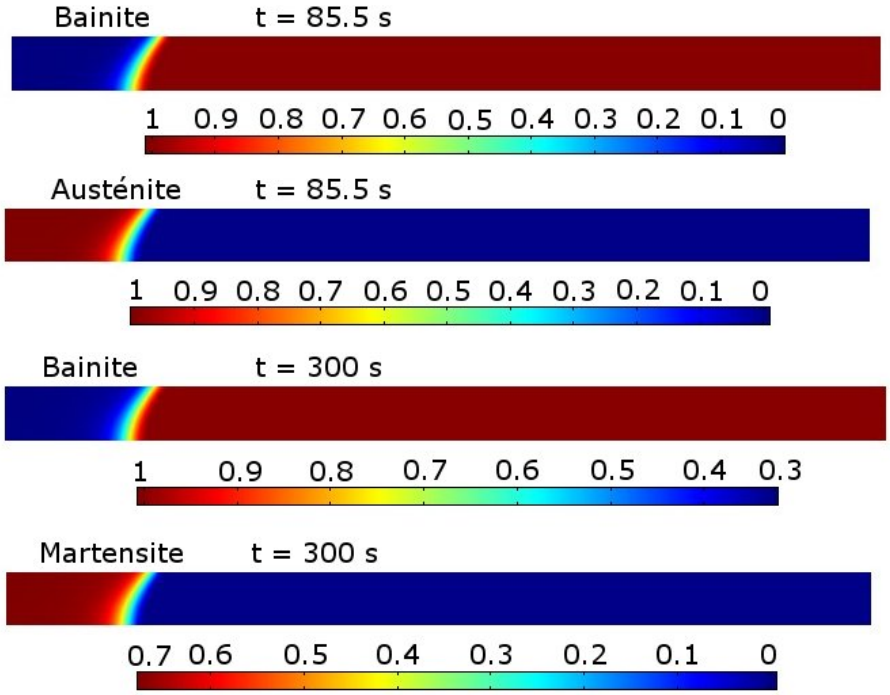


Fig. 3.46 : *Distribution calculée de proportions volumiques des phases métallurgiques en fin de chauffage et en fin de refroidissement*

La figure Fig.3.47 présente les évolutions des proportions volumiques des phases en fonction du temps au centre de la face inférieure. On trouve une proportion austénitique de 100% en fin de chauffage et un mélange de 32% de bainite et de 68% de martensite en fin de refroidissement. Ce résultat correspond bien au résultat obtenu par le calcul de [Cavallo, 1998] dans lequel les proportions de bainite et de martensite formées en fin de refroidissement sont successivement de 33% et 67%.

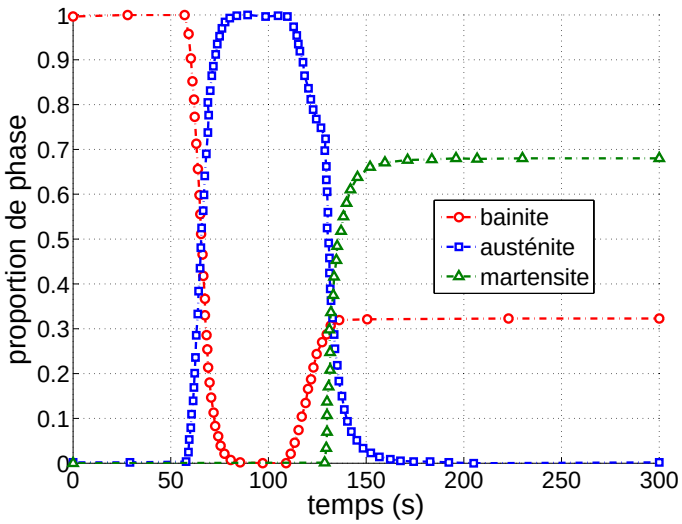


Fig. 3.47 : *Evolutions des proportions de phase au centre de la face inférieure*

Les résultats thermiques et métallurgiques apparaissent très satifaisants et sont pris comme données d'entrée pour le calcul mécanique présenté dans le paragraphe suivant.

3.6.3 Résultats mécaniques

Les résultats mécaniques relatifs au disque B en déplacements et en contraintes résiduelles sont exposés dans ce paragraphe. Des comparaisons entre les résultats obtenus par le modèle combiné avec et sans plasticité de transformation (TRiP), les résultats expérimentaux et les résultats d'un calcul numérique issu de la littérature sont présentées.

Les figures Fig.3.48 et Fig.3.49 donnent respectivement les évolutions de déplacement en fonction du temps des points situés à $10mm$ et à $30mm$ du centre de la face inférieure. Les courbes calculées et expérimentales ont sensiblement la même allure. Il existe un écart entre ces courbes en fin de chauffage. Les comparaisons montrent que les calculs prévoient un déplacement plus important que celui de l'essai pour ces deux points de la face inférieure.

Comme dans le cas du disque A, en début de chauffage, le disque se dilate dans la partie centrale. Cette dilatation est bloquée par la partie périphérique. Par conséquent, on observe une élévation de la face inférieure en début de chauffage. Le gradient thermique se réduit ensuite dans l'épaisseur du disque et la zone centrale de la face inférieure se dilate, le disque se déplace alors vers en bas. Au cours de la descente, l'austénitisation a lieu d'abord en face supérieure, puis en face inférieure. En un point situé à $10mm$ du centre de la face inférieure, l'austénitisation débute à l'instant t = $72s$, cette valeur est donnée par notre calcul. Le début de l'austénitisation se traduit par un inversement du déplacement et le disque remonte légèrement. Cela peut s'expliquer par le fait que l'austénitisation s'accompagne d'une contraction volumique.

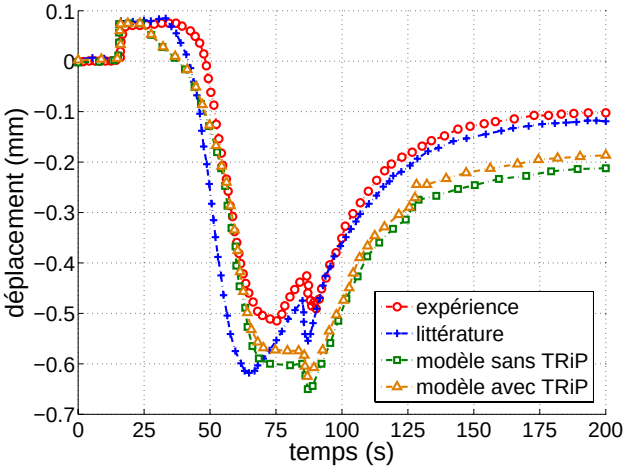


Fig. 3.48 : *Déplacement axial à 10mm de la face inférieure*

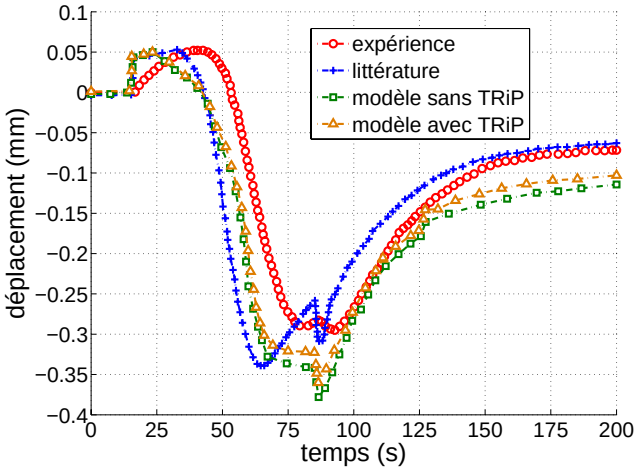


Fig. 3.49 : *Déplacement axial à 30mm de la face inférieure*

Le refroidissement débute en face supérieure puis en face inférieure, les contractions provoquent donc une élévation du disque jusqu'à la fin.

Le point situé à $30mm$ du centre de la face inférieure se trouve en dehors de la zone affectée thermiquement. Les évolutions du déplacement en ce point ont sensiblement des allures identiques à celles du point situé dans la Z.A.T. Cela montre que les points situés en dehors de la Z.A.T subissent eux aussi les effets de la zone transformée.

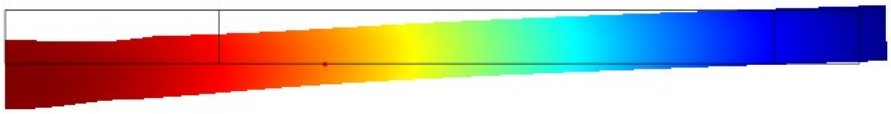


Fig. 3.50 : *Déformée résiduelle du disque - calcul avec prise en compte de l'effet TRiP*

La figure Fig.3.50 représente la déformée finale du disque. Cette déformée est obtenue par notre calcul avec la prise en compte de la plasticité de transformation. Comme pour la déformée résiduelle obtenue avec le disque A, on observe un gonflement au centre du disque et une contraction entre les zones complètement et partiellement austénitisées.

Les contraintes résiduelles radiales et circonférentielles de la face supérieure et de la face inférieure sont respectivement données par les figures (Fig.3.51 à Fig.3.54). Nous remarquons ici que les courbes expérimentales ont tendance à augmenter près du bord extérieur qui est un bord libre. Conformément aux résultats thermiques obtenus précédemment ainsi que les conditions aux limites en mécanique imposées pour le disque, les contraintes résiduelles devraient plutôt s'annuler lorsqu'on se rapproche de la périphérie du disque. Cette incorrection peut être liée soit à l'imprécision dans la mesure des contraintes résiduelles (méthode de diffraction par rayon X) soit au champ de contraintes résiduelles initiales lié à la fabrication du disque.

En ce qui concerne les contraintes résiduelles radiales de la face supérieure (*cf.* Fig.3.51) et de la face inférieure (*cf.* Fig.3.52), on observe une bonne concordance entre nos résultats de calculs et les mesures expérimentales dans la zone centrale du disque. Les amplitudes, les maxima ainsi que leurs positions sont bien estimés par nos calculs, notamment dans le calcul avec la plasticité de transformation (TRiP). Pour les maxima des contraintes résiduelles radiales en traction favorisant les rutures par fatigue, notre calcul avec TRiP donne respectivement une

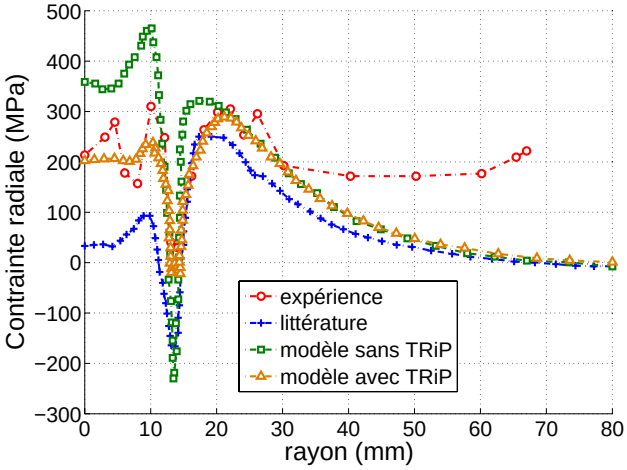


Fig. 3.51 : *Contraintes résiduelles radiales en face supérieure*

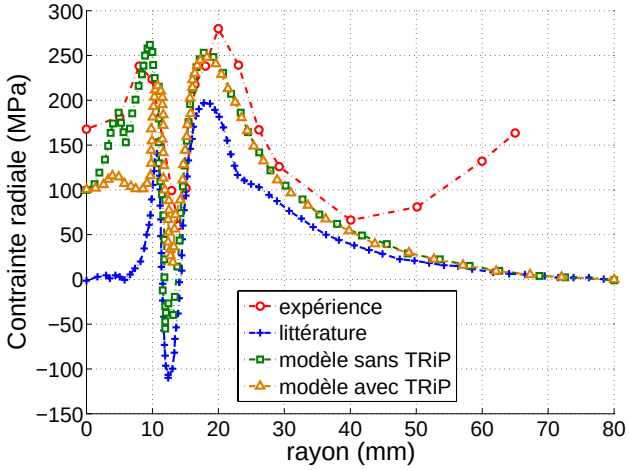


Fig. 3.52 : *Contraintes résiduelles radiales en face inférieure*

valeur de $300MPa$ en face supérieure et une valeur de $250MPa$ en face inférieure.

Les contraintes résiduelles circonférentielles en face supérieure et en face inférieure sont respectivement représentées par les figures Fig.3.53 et Fig.3.54. On observe que les courbes expérimentales sont bien restituées par nos calculs et que les courbes obtenues par le calcul avec la plasticité de transformation sont très proches de celles issues de l'expérience. Les maxima des contraintes résiduelles circonférentielles en traction sont de l'ordre de $500MPa$ pour les deux faces du disque. Cette valeur est obtenue par notre calcul avec la prise en compte la plasticité de transformation.

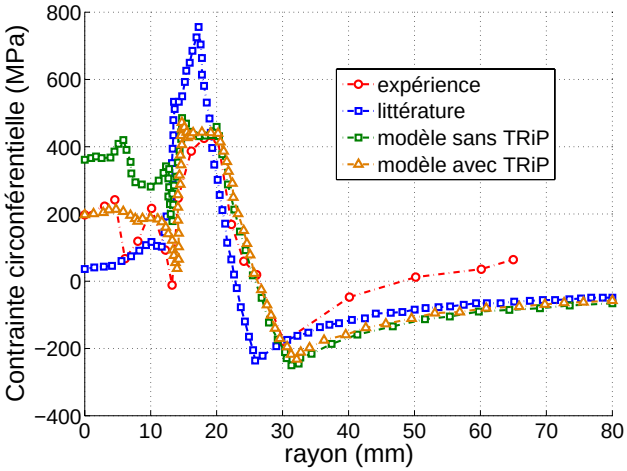


Fig. 3.53 : *Contraintes résiduelles circonférentielles en face supérieure*

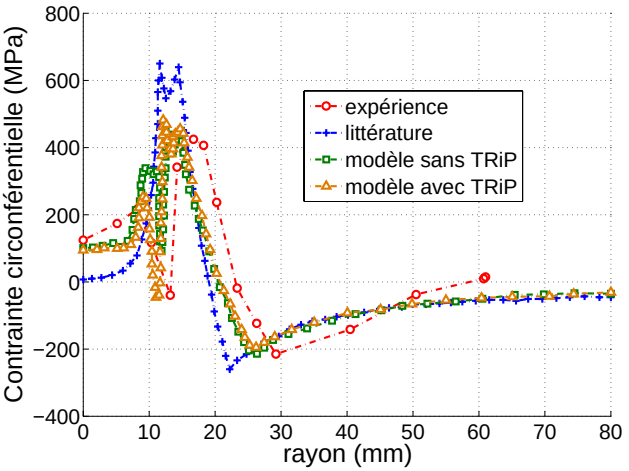


Fig. 3.54 : *Contraintes résiduelles circonférentielles en face inférieure*

Comme pour le disque A, nous remarquons que les maxima des contraintes résiduelles se situent à côté de la zone affectée thermiquement.

Pour l'ensemble des résultats thermiques, métallurgiques et mécaniques présentés pour le disque B, les comparaisons sont très satisfaisantes. Cela confime la performance de nos modèles dans les simulations numériques des comportements thermomécaniques et métallurgiques des aciers. Nous avons également montré le rôle important de la plasticité de transformation sur la

distribution des contraintes résiduelles dans la structure.

3.7 Conclusions

Nous avons présenté dans ce troisième chapitre la validation numérique des modèles proposés dans le chapitre précédent.

Le matériau utilisé est l'acier 16MND5 utilisé dans la fabrication des cuves de réacteurs nucléaires. En effet, le 16MND5 est un acier faiblement allié à bas taux de carbone et son état métallurgique est très sensible aux cycles thermiques de soudage ou de traitement thermique. Il possède une structure austénitique à hautes températures et au refroidissement, il peut présenter une structure ferritique, bainitique ou martensitique suivant la vitesse de refroidissement.

Dans le cadre de notre étude, nous n'avons pas réaliser d'essais afin d'identifier les paramètres du matériau. Par conséquent, notre identification repose sur des données existantes dans la littérature concernant l'acier 16MND5.

Pour la validation numérique des modèles proposés, les deux simulations ont été réalisées avec COMSOL Multiphysics. Elles consistent à modéliser numériquement les deux essais représentatifs des phénomènes rencontrés lors d'une opération de soudage ou de traitement thermique. Ces essais portent sur le disque en acier 16MND5. Ils sont chauffés par un spot laser et ensuite refroidis par convection naturelle et rayonnement ([Cavallo, 1998], [Petit-Grostabussiat, 2000]).

Dans le premier cas, le disque de $10mm$ d'épaisseur, nommé disque A, est considéré. L'objectif de l'essai est de produire une zone totalement austénitisée non transversante dans l'épaisseur du disque. Dans le deuxième cas, le disque B de $5mm$ d'épaisseur est considéré et une zone complètement austénitisée transversante dans l'épaisseur a été produite. La simulation de ces deux cas avec les différents états de contraintes permet d'estimer la capacité et la performance des modèles proposés dans les cas complexes.

Afin d'analyser l'influence des différentes lois de comportement, le rôle de la viscosité et de la plasticité de transformation sur la réponse en mécanique des structures, différents calculs ont été réalisés pour le disque A :

- dans un premier temps, nous avons utilisé pour chaque phase métallurgique dans le mélange un comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire ;
- dans un second temps, un comportement élastoviscoplastique avec écrouissage cinématique et isotrope a été utilisé pour chaque phase métallurgique ;
- enfin, en ce qui concerne le modèle combiné, le comportement des phases ferritiques est élastoplastique, celui de l'austénite est élastoviscoplastique.

Dans chaque cas, l'effet de la plasticité de transformation (TRiP) a également été pris en compte.

Pour le disque B, seul le modèle combiné a été utilisé pour le calcul et le rôle de la plasticité de transformation a également été analysé.

Les résultats thermique, métallurgique et mécanique relatifs à chaque disque sont présentés en les comparant aux résultats expérimentaux. De plus, pour les résultats mécaniques, nos courbes calculées sont comparées à celles d'un calcul numérique issu de la littérature. Ces comparaisons montrent que les évolutions thermiques, métallurgiques et mécaniques sont bien simulées par nos calculs. D'autre part, à travers les résultats mécaniques, nous avons montré que l'utilisation des lois de comportement mécanique appropriées pour les différentes phases métallurgiques joue un rôle important sur les résultats mécaniques obtenus et que la viscosité joue un rôle considérable sur le comportement mécanique des aciers à hautes températures. De

plus, la prise en compte de la plasticité de transformation est nécessaire pour une simulation correcte des contraintes et des déformations résiduelles des procédés de soudage ou de traitement thermique des aciers. L'utilisation des lois de mélange pour déterminer les caractéristiques du matériau multiphasé semble insuffisante pour une bonne modélisation des déformations inélastiques du matériau multiphasé.

Les résultats donnés par nos modèles, notamment par le modèle combiné, révèlent la performance et la souplesse de notre approche dans la simulation numérique des structures métalliques sous chargements thermomécaniques anisothermes avec la présence de transformations microstructurales.

Conclusions et Perspectives

Bilan

Les opérations de soudage engendrent dans la structure des contraintes résiduelles qui dépendent de la puissance de la source de chaleur, de sa distribution, de la composition métallurgique des aciers, de la loi de comportement mécanique et des conditions de bridage. Ces contraintes résiduelles sont principalement liées à l'incompatibilité des champs de déformations imposés par les gradients thermiques et par les transformations microstructurales au sein du matériau.

Le travail présenté dans ce manuscrit a porté sur la modélisation fine des lois de comportement thermomécaniques et métallurgiques des aciers afin de déterminer l'état mécanique résiduel des structures lors d'une opération de soudage ou de traitement thermique. Il s'agit de définir les cinétiques de transformation de phases à l'état solide ainsi que le comportement mécanique du matériau multiphasé.

Dans un cadre théorique original [Moumni, 1995] - les matériaux standards généralisés avec des liaisons internes - nous avons proposé des modèles de comportement pour un matériau multiphasé pour lesquels le comportement mécanique propre à chaque phase est supposé connu. Le comportement macroscopique du mélange est ensuite obtenu via l'hypothèse de Reuss (modèle en série). Soulignons que chaque phase peut présenter un comportement spécifique, ce qui constitue l'originalité de cette thèse.

Afin d'analyser l'influence des phénomènes mis en jeu lors du soudage ou du traitement thermique sur la distribution des contraintes résiduelles dans la structure, nous avons écrit différents modèles. D'abord, le modèle dans lequel le comportement mécanique de chaque phase est élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire. Ensuite, l'adoption d'un comportement élastoviscoplastique pour chaque phase a permis de mettre en évidence l'effet de la viscosité. Enfin, nous avons considéré le cas du modèle combiné dans lequel la phase à basse température (ferrite, bainite ou martensite) est élastoplastique alors que la phase à haute température (austénite) est élastoviscoplastique. Notons que pour chacun de ces cas, l'effet de la plasticité de transformation (TRIP - **TR**ansformation **I**nduced **P**lasticity) a été pris en compte via une nouvelle variable macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$. La modélisation de la plasticité de transformation repose sur le mécanisme de Greenwood-Johnson.

L'identification des paramètres des modèles proposés est réalisée pour l'acier 16MND5 couramment utilisé pour les cuves de réacteurs nucléaires. Dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas réaliser d'essais pour cette identification. Elle repose, par conséquent, sur des données issues de la littérature.

Pour valider numériquement la pertinence des modèles proposés, nous avons implanté ces modèles dans le Code COMSOL Multiphysics. Deux simulations ont été effectuées dans but de reproduire deux essais représentatifs des phénomènes rencontrés lors d'une opération de soudage ou de traitement thermique des aciers. Ces essais, issus de la littérature, portent sur des disques en acier 16MND5. La différence d'épaisseur et d'apport de chaleur entre ces deux essais a permis de valider les modèles dans différentes situations.

Les résultats thermiques, métallurgiques et mécaniques pour chaque disque ont été présentés et comparés aux résultats expérimentaux. De plus, pour les résultats mécaniques, les courbes ont été confrontées à celles d'un calcul numérique issu de la littérature. On a pu ainsi montré que les évolutions thermiques, métallurgiques et mécaniques corrèlent de manière satisfaisante avec l'expérience. Par ailleurs, les résultats mécaniques obtenus ont montré que :

• l'utilisation des lois de comportement mécaniques appropriées pour les différentes phases métallurgiques joue un rôle important sur les résultats mécaniques, notamment sur la distribution des contraintes résiduelles dans la structure ;

• la viscosité joue un rôle considérable sur le comportement mécanique des aciers à haute température. Cela a été confirmé par les résultats mécaniques obtenus avec le modèle combiné ;

• la prise en compte de la plasticité de transformation (TRiP) dans le comportement du matériau multiphasé est nécessaire pour une simulation correcte des contraintes et des déformations résiduelles des procédés de soudage ou de traitement thermique des aciers ;

• l'utilisation des lois de comportement reposant sur des lois de mélange pour déterminer les caractéristiques du matériau multiphasé semble insuffisante pour une bonne simulation des contraintes et des déformations résiduelles lors d'une opération de soudage ou de traitement thermique.

Les résultats fournis par nos modèles, notamment par le modèle combiné, confirment la performance et la souplesse de notre approche dans la simulation numérique des structures métalliques sous chargements thermomécaniques anisothermes avec la présence de transformations microstructurales.

Perspectives

Sur le plan de la modélisation du comportement du matériau multiphasé, il serait utile de compléter notre modélisation par la prise en compte de l'effet de mémoire d'écrouissage lors des transformations microstructurales. Cela permettrait d'améliorer la performance des modèles proposés pour la prédiction des contraintes et des déformations résiduelles issues des procédés industrielles.

Afin de définitivement valider la capacité et la solidité des modèles proposés, il serait intéressant de les valider pour des configurations de soudage réelles.

Il est évident qu'une véritable modélisation thermique nécessite la prise en compte des interactions du plasma avec le bain de fusion, des mouvements convectifs et des phénomènes

physiques dans le bain fondu. Un calcul global, réalisé avec une telle modélisation thermique couplée à un calcul métallurgique et mécanique, est à envisager pour déterminer la géométrie du cordon de soudure, les champs de contraintes et de déformations résiduelles des structures soudées. Cela offrirait une bonne condition initiale à l'étude de la tenue en fatigue de l'assemblage.

Enfin, soulignons que notre travail vient compléter une modélisation globale d'un procédé de soudage dévéloppée au sein du groupe Matériaux et Structure de l'Unité de Mécanique de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées. L'objectif final est de simuler une opération du soudage depuis la modélisation de l'arc jusqu'à la prévision des états mécaniques résiduels et de la durée de vie des structures soudées.

La question qui se pose désormais peut être formulée ainsi : *quels sont les paramètres de soudage optimaux (puissance thermique, vitesse de soudage, etc.) qui permettent d'obtenir une durée de vie optimale de l'assemblage ?*

Bibliographie

[com, n.d.a] . *COMSOL Multiphysics Modeling Guide. Version : September 2005 - COMSOL 3.2.*

[com, n.d.b] . *COMSOL Multiphysics User's Guide. Version : September 2005 - COMSOL 3.2.*

[Abrassart, 1972] Abrassart, F. 1972. *Influences des transformations martensitiques sur les propriétés des alliages du système Fe-Ni-Cr-C.* Ph.D. thesis, Université de Nancy.

[Alberg et Berglund, 2003] Alberg, H., et Berglund, D. 2003. Comparison of plastic, viscoplastic, and creep models when modelling welding and stress relief heat treatment. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **Vol.192**, 5189–5208.

[Auricchio et Petrini, 2002] Auricchio, F., et Petrini, L. 2002. Improvements and algorithmical considerations on a recent three-dimensional model describing strees-induced solid phase transformations. *International Journal for numerical methods in engineering*, **Vol.55**, 1255–1284.

[Barralis et Maeder, 1982] Barralis, J., et Maeder, G. 1982. *Métallurgie - Tome I : métallurgie physique.* Collection Scientifique ENSAM.

[Barralis et Maeder, 1988] Barralis, J., et Maeder, G. 1988. *Métallurgie : Elaboration, Structures-Propriété, Normalisation.* Paris : AFNOR Nathan.

[Besson *et al.*, 2001] Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.L., et Forest, S. 2001. *Mécanique non linéaire des matériaux.*

[Bhadeshia, 1992] Bhadeshia, H.K.D.H. 1992. *Bainite in steels.* Institute of Materials.

[Blondeau, 2001] Blondeau, R. 2001. *Métallurgie et mécanique du soudage.* Traité Mécanique et Ingénierie des Matériaux, Hermès Sciences Puplications.

[Burke, 1968] Burke, J. 1968. *La cinétique des changements de phase dans les métaux.*

[Cavallo, 1998] Cavallo, N. 1998. *Contribution à la validation expérimentale de modèles décrivant la ZAT lors d'une opération de soudage.* Ph.D. thesis, INSA Lyon.

[Chen *et al.*, 2008] Chen, B., Peng, X.H., Fan, J.H., et Sun, S.T. 2008. A viscous-elastoplastic constitutive equation incorporating phase transformation with the application to the residual stress analysis for welding process. *Journal of Materials Processing Technology*, **xxx**, xxx.

[Coret, 2001] Coret, M. 2001. *Etude expérimentale et simulation de la plasticité de tranformation et du comportement multiphasé de l'acier de cuve 16MND5 sous chargement multiaxial anisotherme.* Ph.D. thesis, ENS Cachan.

[Coret et Combescure, 2002] Coret, M., et Combescure, A. 2002. A mesomodel for the numerical simulation of the multiphasic behavior of materials under anisothermal loading (application to two low-carbon steels). *International Journal of Mechanical Sciences*, **Vol.44**, 1947–1963.

[Coret *et al.*, 2002] Coret, M., Calloch, S., et Combescure, A. 2002. Experimental study of the phase transformation plasticity of 16MND5 low carbon steel under multiaxial loading. *International Journal of plasticity*, **Vol.18**, 1707–1727.

[Coret *et al.*, 2004] Coret, M., Calloch, S., et Combescure, A. 2004. Experimental study of the phase transformation plasticity of 16MND5 low-carbon steel induced by proportional and nonproportional biaxial loading paths. *European Journal of Mechinics A/Solids*, **Vol.23**, 823–842.

[Costantini, 1996] Costantini, M. 1996. *Simulation numérique du soudage par faisceau d'électrons. Contribution au dévéloppement d'un modèle prédictif de l'apport d'énergie.* Ph.D. thesis, Université Paris VI.

[Denis *et al.*, 1985] Denis, S., Gautier, E., Simon, A., et Beck, G. 1985. Stress phase transformations interaction, basics principle, modelling, and calculation of internal stresses. *Material Sciences and Technology*, **Vol.1**, 805–814.

[Denis *et al.*, 1987a] Denis, S., Sjöström, S., et Simon, A. 1987a. Coupled temperature, stress, phase transformation calculation model, numerical illustration of the internal stresses evolution during cooling of a eutectoide carbon steel cylonder. *Metall. Trans.*, **Vol.18A**, 1203–1212.

[Denis *et al.*, 1987b] Denis, S., Gautier, E., Sjöström, S., et Simon, A. 1987b. Influence of stresses on the kinetics of pearlitic transformation during continuous cooling. *Acta Matallugica*, **Vol.35 No.7**, 1621–1632.

[Desalos, 1981] Desalos, Y. 1981. *Comportement mécanique et dilatométrique de l'austénite métastable de l'acier A533.* Tech. rept. N° 95 34 94 01 IRSID.

[Diani *et al.*, 1995] Diani, J.M., Sabar, H., et Berveiller, M. 1995. Micromechanical modelling of the trnaformation induced plasticity (TRIP) phenomenon in steels. *Int. I. Eng. Sci.*, **Vol.33**, 1921–1934.

[Dominique *et al.*, 1993] Dominique, F., Pineau, A., et Zaoui, A. 1993. *Comportement mécanique des matériaux : viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact.*

[Du *et al.*, 2004] Du, H., Hu, L., Liu, J., et Hu, X. 2004. A study on the metal flow in full penetration laser beam welding for titanium alloy. *Computational Materials Science*, **Vol.29**, 419–427.

[Easterling, 1983] Easterling, K. 1983. *Introduction to the Physical Metallurgy of Welding.* Butterworths.

[Fan et Shi, 1996] Fan, H.G., et Shi, Y.W. 1996. Numerical simulation of the arc pressure in gas tungsten arc welding. *Journal of Materials Processing Technology*, **Vol.61**, 302–308.

[Fan *et al.*, 2001] Fan, H.G., Tsai, H.L., et Na, S.J. 2001. Heat transfert and fluid flow in a partially or fully penetrated weld pool in gas tungsten arc welding. *International Journal of Heat and Mass Transfert*, **Vol.44**, 417–428.

[Fernandes, 1985] Fernandes, F.B.M. 1985. *Modélisation et calcul de l'évolution de la température et de la micro-structure au cours du refroidissement continu des aciers.* Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.

[Fernandes *et al.*, 1986] Fernandes, F.B.M., Denis, S., et Simon, A. 1986. Prévision de l'évolution thermique et structurale des aciers au cours de leur refroidissement continu. *Mémoire et Etudes Scientifiques de la Revue de Métallurgie*, 355–366.

[Fischer, 1990] Fischer, F.D. 1990. A micromechanic model for transformation induced plasticity in steels. *Acta Metallurgica et Materialia*, **Vol.38**, 1535–1546.

[Fischer *et al.*, 1996] Fischer, F.D., Sun, Q.P., et Tanaka, K. 1996. Transformation induced plasticity (TRiP). *Appl. Mech. Rev.*, **Vol.49**, 317–364.

[Fischer *et al.*, 2000] Fischer, F.D., Reisner, G., Werner, E., Tanaka, K., Cailletaud, G., et Antretter, T. 2000. A new view on transformation induced plasticity (TRiP). *International Journal of Plasticity*, **Vol.16**, 723–748.

[Frémond, 1987] Frémond, M. 1987. Matériaux à mémoire de forme. *C.R. Académie des Sciences, Paris*, **Tome 34, sII**, 239–244.

[Frémond, 1998] Frémond, M. 1998. L'éducation des alliages à mémoire de forme. *Revue Européenne des Eléments Finis*, **Vol.7, n° 8**, 35–46.

[Frémond, 2001] Frémond, M. 2001. *Non Smooth Thermomechanics*. Springer.

[Gautier *et al.*, 1985] Gautier, E., Simon, A., et Beck, G. 1985. Etude du comportement mécanique associé à la transformation martensitique d'alliages de type Fe-Ni-C sollicités en fluage ou en traction. *7th international conference on strengh of metal and alloys (ICSMA 7), Montréal, Ed. Mc Queen, 12-16 août*, **p569-**, ISBN0080316409.

[Germain, 1973] Germain, P. 1973. *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson.

[Gery *et al.*, 2005] Gery, D, Long, H., et Maropoulos, P. 2005. Effects of welding speed, energy input and heat source distribution on temperature variations in butt joint welding. *Journal of Materials Processing Technology*, **Vol.167**, 393–401.

[Giusti, 1981] Giusti, J. 1981. *Contraintes et déformations résiduelles d'origine thermique. Application au soudage et à la trempe des aciers*. Ph.D. thesis, (Thèse de Doctorat d'Etat ès Sience Physique), Université Paris 6.

[Goldak *et al.*, 1984] Goldak, J., Chakravati, A., et Bibby, M. 1984. A new finite element model for welding heat sources. *Metallurgical Transactions*, **15B**, 299–305.

[GouMing *et al.*, 2007] GouMing, H., Jian, Z., et JianQang, L. 2007. Dynamic simulation of the temperature field of stainless steel laser welding. *Materials and Design*, **Vol.28**, 240–245.

[Greenwood et Johnson, 1965] Greenwood, G.W., et Johnson, R.H. 1965. The deformation of metals under small stresses during phase transformation. *Proceeding of the Royal Society of Sciences*, **A 283**, 403–422.

[Grostabussiat *et al.*, 2001] Grostabussiat, P., Taleb, L., Julien, J.F., et Sidoroff, F. 2001. Transformation induced plasticity in martensitic transformation of ferrous alloys. *J. Phys. IV*, **Vol.11**, 173–180.

[Halphen et Nguyen, 1974] Halphen, B., et Nguyen, Q.S. 1974. Plastic and visco-plastic materials with generalized potential. *Mechanical Research Communications*, **Vol.1**, 43–47.

[Hu *et al.*, 2007] Hu, J., Guo, H., et Tsai, H.L. 2007. Weld pool dynamics and the formation of ripples in 3D gas metal arc welding. *International Journal of Heat and Mass transfer*.

[Inoue et Wang, 1985] Inoue, T., et Wang, Z. 1985. Coupling between stress, temperature and metallic structures during processes involving phases transformations. *Mater.sci. and Tech*, **Vol.1**, 845–850.

[Inoue *et al.*, 1985] Inoue, T., Yamaguchi, et Wang, Z. 1985. Stresses and phase trandformations occuring in quenching of carburized steel gear wheel. *Mater.sci. and Tech*, **Vol.1**, 872–876.

[Johnson et Mehl, 1939] Johnson, W.A., et Mehl, R.F. 1939. Reaction kinetics in processes of nucleation and growth. *Transactions of the A.I.M.E.*, **Vol.135**, 416–458.

[Karlsson et Lindgren, 1991] Karlsson, L., et Lindgren, L.E. 1991. Combined heat and stress-strain calculations. *Modeling of casting, welding and advances solidification Processes V*, 187–202.

[Kim et Na, 1998] Kim, W.H., et Na, S.J. 1998. Heat and fluid flow in pulsed current GTA weld pool. *International Journal of Heat and Mass Transfert*, **Vol.41**, 3213–3227.

[Koistinen et Marburger, 1959] Koistinen, D.P., et Marburger, R.E. 1959. A general equation prescribing extent of austenite–martensite transformation in pure Fe–C alloys and plain carbon steels. *Acta Matallurgica*, **Vol.7**, 59–60.

[Leblond, 1989] Leblond, J.B. 1989. Mathematical modelling of transformation plasticity in steels II : coupling with strain hardening phenomena. *International journal of plasticity*, **Vol.5**, 573–591.

[Leblond et Devaux, 1984] Leblond, J.B., et Devaux, J. 1984. A new kinetic model for anisothermal metallurgical transformations in steels including effect of austenite grain size. *Acta Metallurgica*, **Vol.32**, 137–146.

[Leblond *et al.*, 1986a] Leblond, J.B., Mottet, G., et Devaux, J.C. 1986a. A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformation-I. Derivation of general relations. *J.Mech.Phys.Solids*, **Vol.34**, 395–409.

[Leblond *et al.*, 1986b] Leblond, J.B., Mottet, G., et Devaux, J.C. 1986b. A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformation-II. Study of classical plasticity for ideal-plastic phase. *J.Mech.Phys.Solids*, **Vol.34**, 411–432.

[Leblond *et al.*, 1989] Leblond, J.B., Devaux, J., et Devaux, J.C. 1989. Mathematical modelling of transformation plasticity in steels I : case of ideal-plastic phases. *International journal of plasticity*, **Vol. 5**, 551–572.

[Lemaitre et Chaboche, 1996] Lemaitre, J., et Chaboche, J.L. 1996. *Mécanique des matériaux solides*. 2ième ed. Paris : Dunod.

[Li et Wu, 1997] Li, Z.Y., et Wu, C.S. 1997. Analysis of the transport phenomena in the interfacial region between TIG arcs and weld pools. *Computational Materials Science*, **Vol.8**, 243–350.

[Lu *et al.*, 2006] Lu, F., Tang, X., Yu, H., et Yao, S. 2006. Numerical simulation on interaction between TIG welding arc and weld pool. *Computational Materials Science*, **Vol.35**, 458–465.

[Magee, 1966] Magee, C.L. 1966. *Transformation kinetics, microplasticity and aging of martensite in Fe31Ni*. Ph.D. thesis, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh PA.

[Mahrle *et al.*, 2000] Mahrle, A., Schmidt, J., et Weiss, D. 2000. Simulation of temperature fields in arc and beam welding. *Heat and Mass Transfert*, **Vol.36**, 117–126.

[Manning et Lorig, 1946] Manning, G.K., et Lorig, C.H. 1946. The relationship between transformation at constant temperature and transformation during cooling. *Trans. A.I.M.E.*, **Vol.167**, 442–466.

[Martinez, 1999] Martinez, M. 1999. *Jonction 16MND5-INCONEL 690-316LN par soudage diffusion. Elaboration et calculs des contraintes résiduelles de procédé*. Ph.D. thesis, Ecole Nationale Supérieure de Mines de Paris.

[Moumni, 1995] Moumni, Z. 1995. *Sur la modélisation du changement de phase à l'état solide*. Ph.D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées.

[Moumni *et al.*, 2008] Moumni, Z., Zaki, W., et Nguyen, Q.S. 2008. Theoretical and numerical modeling of solid-solid phase change : Application to the decription of the thermomechanical behavior of shape memory alloys. *International Journal of Plasticity*, **Vol.24**, 614–645.

[Nguyen, 2000] Nguyen, Q.S. 2000. *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley.

[Nguyen et Moumni, 1998] Nguyen, Q.S., et Moumni, Z. 1998. Modélisation théorique et calcul numérique du changement de phase dans les solides. *Revue Européenne de Eléments Finis*, **Vol.7, n° 8**, 47–68.

[Petit-Grostabussiat, 2000] Petit-Grostabussiat, S. 2000. *Conséquences mécaniques des transformations structurales dans les alliages ferreux*. Ph.D. thesis, INSA Lyon.

[Petit-Grostabussiat *et al.*, 2004] Petit-Grostabussiat, S., Taleb, L., et Julien, J.F. 2004. Experimental results on classical plasticity of steels subjected to structural transformations. *International Journal of Plasticity*, **Vol.20**, 1371–1386.

[Razakanaivo *et al.*, 2002] Razakanaivo, A., Donore, A.M., et Waeckel, F. 2002. *Modélisation élasto-(visco)plastique prenant en compte de transformations structurales*. Tech. rept. EDF/MTI/MMN.

[Roger, 2000] Roger, F. 2000. *Etude et modélisation de la formation d'un cordon de soudure à l'arc*. Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique - LMS.

[Roger, 2005] Roger, F. 2005. Analysis of magnetohydrodynamics GTAW arc behavior. *In : Proceedings of the COMSOL Multiphysics User's Conference*.

[Simon *et al.*, 1994] Simon, A., Denis, S., et Gautier, E. 1994. Effets des sollicitations thermomécaniques sur les transformations de phase dans l'état solide. Aspects métallurgique et mécanique. *Journal de Physique IV, Colloque C3, supplément au Journal de Physique III*, **Vol.4**, 14 p.

[Taleb et Petit, 2006] Taleb, L., et Petit, S. 2006. New investigations on transformation induced plasticity and its interaction with classical plasticity. *International Journal of Plasticity*, **22**, 110–130.

[Taleb et Sidoroff, 2003] Taleb, L., et Sidoroff, F. 2003. A micromechanical modeling of the Greenwood-Johnson mechanism in transformation induced plasticity. *International Journal of Plasticity*, **Vol.19**, 1821–1842.

[Taleb *et al.*, 2001] Taleb, L., Cavallo, N., et Waeckel, F. 2001. Experimental analysis of transformation plasticity. *International Journal of Plasticity*, **Vol.17**, 1–20.

[Tian *et al.*, 2007] Tian, Y., Wang, C., Zhu, D., et Zhou, Y. 2007. Finite element modeling of electron beam welding for a large complex Al alloy structure by parallel computations. *Journal of Materials Processing Technology*.

[Videau *et al.*, 1994] Videau, J.C., Cailletaud, G., et Pineau, A. 1994. Modélisation des effets mécaniques des transformations de phase pour le calcul de structures. *Journal de Physique IV, Colloque C3*, **Vol.4**, 227–231.

[Videau *et al.*, 1996] Videau, J.C., Cailletaud, G., et Pineau, A. 1996. Experimental study of the transformation induced plasticity in a Cr-Ni-Mo-Al-Ti steel. *Journal de Physique VI*, 465–474.

[Vincent *et al.*, n.d.] Vincent, Y., Julien, J.F., Gilles, Ph., et Cano, V. Thermal, metallurgical, mechanical simulations and experimental validations of residual stresses in the heat affected zone.

[Vincent *et al.*, 2005] Vincent, Y., Jullien, J.F., et Gilles, P. 2005. Thermo-mechanical consequences of phase transformations in the heat-affected zone using a cyclic uniaxial test. *International Journal of Solids ans Structures*, **Vol.42**, 4077–4098.

[Waeckel, 1994] Waeckel, F. 1994. *Une loi de comportement thermo-métallurgique des aciers pour le calcul mécanique des structures*. Ph.D. thesis, ENSAM de Paris.

[Waeckel et Razakanaivo, 2001] Waeckel, F., et Razakanaivo, A. 2001. *Modèle de comportement métallurgique des aciers dans le code Aster*. Tech. rept. EDF/MTI/MMN.

[Wang et Inoue, 1985] Wang, Z., et Inoue, T. 1985. Viscoplastic constitutive relation incorporating phase transformation. Application to welding. *Mater.sci. and Tech*, **Vol.1**, 899–903.

[Wu *et al.*, 1997] Wu, C.S., Ushio, M., et Tanaka, M. 1997. Analysis of the TIG welding arc behavior. *Computational Materials Science*, **Vol.7**, 308–314.

[Zaki, 2006] Zaki, W. 2006. *Comportement thermo-mécanique des matériaux à mémoire de forme : modélisation macroscopique, chargement cyclique et fatigue*. Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique.

[Zaki et Moumni, 2007a] Zaki, W., et Moumni, Z. 2007a. A 3D model of the cyclic thermomechanical behavior of shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **Vol.55**, 2427–2454.

[Zaki et Moumni, 2007b] Zaki, W., et Moumni, Z. 2007b. A three-dimensional model of the thermomechanical behavior of shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **Vol.55**, 2455–2490.