Étude de deux problèmes de propagation d'ondes transitoires : 1) Focalisation spatio-temporelle en acoustique; 2) Transmission entre un diélectrique et un métamatériau.

Maxence Cassier

▶ **To cite this version:**

Maxence Cassier. Étude de deux problèmes de propagation d'ondes transitoires : 1) Focalisation spatio-temporelle en acoustique; 2) Transmission entre un diélectrique et un métamatériau.. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Ecole Polytechnique X, 2014. Français. NNT : . pastel-01023289

HAL Id: pastel-01023289
https://pastel.hal.science/pastel-01023289

Submitted on 11 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale de l'École Polytechnique

Thèse

présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'École Polytechnique

« Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES »

par

Maxence Cassier

Étude de deux problèmes de propagation d'ondes transitoires : 1) Focalisation spatio-temporelle en acoustique ; 2) Transmission entre un diélectrique et un métamatériau.

Thèse soutenue publiquement le 12 Juin 2014 devant le jury composé de :

M.	Bruno Després	Examinateur
M.	Josselin Garnier	Rapporteur
M.	Boris Gralak	Examinateur
M.	Christophe Hazard	Directeur de thèse
M.	Patrick Joly	Co-directeur de thèse
M^{me}	Chrysoula Tsogka	Examinatrice
M.	Ricardo Weder	Rapporteur

au vu des rapports de Josselin Garnier, Jeffrey Rauch et Ricardo Weder.

Remerciements

La thèse, c'est aussi une aventure humaine et il est temps pour moi d'en remercier les participants.

Je voudrais en premier lieu remercier mon directeur de thèse Christophe Hazard. Christophe, tes idées, tes conseils, ta disponibilité, tes encouragements et ta confiance m'ont permis de mener à bien cette thèse. Ta devise : "Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement - Et les mots pour le dire arrivent aisément [1]" n'a cessé de me guider tout au long de ce travail. Je voudrais en outre saluer tes grandes qualités d'enseignant qui ont su aiguiser mon appétit pour l'étude de la théorie spectrale et ont entretenu mon désir de m'engager dans cette entreprise.

Je tiens ensuite à exprimer toute ma gratitude à mon co-directeur Patrick Joly. Patrick, ta vision globale des problèmes, tes remarques pertinentes, tes multiples questions m'ont permis de mieux maîtriser mon sujet. J'ai beaucoup appris à tes côtés et je t'en suis très redevable.

Je souhaite aussi manifester toute ma reconnaissance à mes rapporteurs Josselin Garnier, Jeffrey Rauch et Ricardo Weder pour m'avoir fait l'honneur d'examiner cette thèse, en particulier pour leur lecture attentive de ce manuscrit et pour la pertinence de leurs remarques.

Je suis également très honoré de la présence de Bruno Després, Boris Gralak et Chrysoula Tsogka au sein de mon jury. Je tiens notamment à mentionner les discussions instructives que j'ai eues avec Boris et Chrysoula lors de conférences ou de réunions de l'ANR METAMATH qui m'ont permis d'approfondir mon sujet.

Quelques mots aussi pour remercier chaleureusement Valentin Vinoles pour sa collaboration sur la deuxième partie de ce travail. Ses simulations numériques ont été un outil précieux pour intuiter ou vérifier mes résultats.

J'en viens maintenant aux membres de l'UMA. Un grand merci à Anne-Sophie, Lucas, Patrick C. et Sonia, non seulement pour leur profonde humanité, mais aussi pour avoir su initier et développer dans notre laboratoire cette thématique passionnante que sont les métamatériaux. Je remercie beaucoup Marc L., Fréderic et Pierre de m'avoir confié les petites classes de leurs cours respectifs. Merci à mon ami et collègue Francesco, d'une part pour tous les joggings épuisants mais revigorants sur "le platal palaisien" et d'autre part pour l'organisation de divers dîners (vous verrez ce mot reviendra malheureusement tout au long de ces pages car il est profondément lié à ma personnalité et à mon appétit gargantuesque) dont la convivialité était le maître-mot. Ces années de thèse ont été également marquées par des intermèdes cinématographiques intenses : de Bernard Blier à Jack Nicholson en passant par Patrick Dawaere ... Je

1. Citation de Nicolas Boileau tirée de "l'Art Poétique".

remercie à ce titre Éliane et Laurent pour leurs conseils avisés sur ce sujet. Je remercie Jean-François, qui tout comme moi, (certaines mauvaises langues diront que c'est un défaut) arpente les bureaux à partir de 17 heures en quête de bombance. Je salue aussi Maurice D., Nicolas K. et Christophe M. pour m'avoir assisté lorsque l'homme ne maîtrisait plus la machine, ainsi qu'Annie, Corine, Hélène et Sylvie-Anne d'avoir toujours été pour moi un fil d'Ariane lorsque j'étais perdu dans le labyrinthe administratif. Je remercie Colin et Manh Ha pour tous "ces gueuletons" parisiens ("fils de la ferme", "Phô bo vietnamiens" ...), mais aussi Marie-Christine et Jérôme pour "les psaumes", sortes de "ripailles trimestrielles" réunissant tous les habitués du laboratoire. Je remercie David, Hasnaa, Marc B., Stéphanie pour leur profonde sympathie à mon égard et enfin Éric pour être le calife d'un laboratoire où il fait bon vivre et que j'aurai peine à quitter.

Je tiens maintenant à exprimer ma gratitude à la ribambelle de thésards, post-docs et stagiaires qui ont su égayer mon quotidien. J'exprime d'abord une pensée particulière pour Aliénor avec qui j'ai commencé et termine cette épopée. Je tiens à remercier Anne-Claire et Pierre-Louis pour nos discussions pas toujours philosophiques (mais presque ...). Pierre-Louis, je salue également ta muse Émi, pianiste avérée, dont les talents musicaux m'ont toujours impressionné et qui sont infiniment supérieurs à ceux mis en œuvre lors de ta mémorable interprétation alcoolisée d'une sonate de Bach. Un grand merci à mes amis sportifs Mathieu, Junyi, Lionel M., Adriano, Amir et Antony qui m'ont souvent accompagné lors de mes kilomètres hebdomadaires, mais aussi à Lucas et Nicolas S. pour ces trois semaines de randonnées inoubliables dans les montagnes canadiennes où nous avons pu croiser de nombreuses bestioles nobles : ours, coyotes ... et d'autres moins sympathiques : porcs-epics, moustiques, etc. Puis, je souhaiterais remercier Athena, Camille, Nadia et Luca pour leur dons culinaires et leur organisation régulière de goûters (crêpes, tiramisus, pâtisseries orientales et autres denrées hautement comestibles) qui ont participé à la grande convivialité de ce laboratoire. J'en arrive maintenant à remercier Simon M. pour sa profonde connaissance de Dikkenek, Goeffrey pour être un peu à sa manière l'aède de ces lieux, Cristopher qui ose dire que Brassens et Pink-Floyd sont des musiques préhistoriques, Pablo pour notre intérêt commun pour les sketchs des inconnus, Audrey pour son humour déjanté et Rémi pour son air d'ours endormi. Je salue également Juliette, Julien, Jérémi, Sébastien, Adrien, Bérangère D., Zhiping, Mohamed, Nicolas C., Jameson, Guillaume, Antoine T., Cédric, Félix, Joao, Ismail, Aurore, Ibtissam, Christian, Yves, Grégoire, Maryna, Steven, Laure et Antoine B. et je demande pardon d'avance à tous ceux que j'ai pu oublier.

Ces trois années auraient été bien différentes sans la présence de camarades de tous horizons. Je tiens à remercier mes amis d'enfance : Timothée, Tristan et Vincent qui ont su m'accorder leur indéfectible confiance ; ceux du lycée et de la prépa : Bérangère B., Christelle, Elfie, Stéphanie, Pierre-François , Nicolas B. et enfin les copains de l'ENSTA : Cyril, Simon, Yann (pour tous ces voyages : Égypte, Écosse, Gévaudan, Croatie, Slovénie, Italie ...), les deux "Raphaël" (mes compères de la cité U), Anne-Céline, Lionel A. et Baptiste "le pire d'entre nous" ... Je tiens également à honorer ta rémission Cyril car ta maladie a été un élément poignant de cette période. Je salue également mes amis de la plongée : Benjamin, Alison, Françoise, Audrey, Béline, Xavier, Michel, Yves, Natacha avec qui je partage une véritable passion. Merci aussi à Soraya, "ma coloc", pour ses trésors de patience à mon égard. Je compte tous vous revoir pour de nouvelles aventures dans l'Ouest américain.

Mes remerciements les plus importants sont peut-être contenus dans ces quelques lignes. Ils sont destinés à toute ma famille, notamment mes parents, mon frère Lionel, ma grand-mère, mes oncles et tantes, pour leur bienveillance et leur soutien inconditionnel.
J'espère qu'ils seront fiers de ce manuscrit ...

Table des matières

Introduction **1**

Partie I Focalisation spatio-temporelle d'ondes acoustiques **9**

1 Space–time focusing of acoustic waves on unknown scatterers **11**
1.1 Introduction . . . 12
1.1.1 General context and objective . . . 12
1.1.2 Mathematical formulation of the problem . . . 13
1.2 Space focusing in the frequency domain . . . 15
1.2.1 The scattering operator for small scatterers . . . 15
1.2.2 The DORT method . . . 17
1.3 Space-time focusing . . . 20
1.3.1 From frequency domain to time domain . . . 20
1.3.2 Optimality of a time reversal gap functional . . . 22
1.3.3 Space–time focusing : from active sources to passive scatterers . . . 23
1.3.4 Numerical results . . . 26
1.4 Conclusion . . . 30

2 Focalisation spatiale en régime harmonique **35**
2.1 Description de la tache focale pour un milieu contenant un seul obstacle . . . 36
2.1.1 Cas idéal d'un réseau sphérique à grande distance . . . 36
2.1.2 Cas d'un réseau plan ouvert . . . 38
2.2 Focalisation dans un milieu contenant plusieurs obstacles . . . 44
2.2.1 Propriétés algébriques de l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ . . . 45
2.2.2 Obstacles parfaitement découplés . . . 46

3 Résultats numériques **51**
3.1 Simulation numérique en régime harmonique . . . 51
3.1.1 La méthode DORT en milieu homogène . . . 52
3.1.2 La méthode DORT en milieu diffusif . . . 54
3.2 Focalisation en régime transitoire . . . 62
3.2.1 La focalisation sélective . . . 62
3.2.2 Tache focale et bande passante de la gaussienne . . . 62
3.2.3 Effet super résolutif du milieu diffusif . . . 63
3.2.4 Focalisation avec un transducteur . . . 63

4 Multiple scattering by pointlike obstacles in two dimensions 71
4.1 Introduction . . . 71
4.2 A physical point of view . . . 72
4.3 An asymptotic point of view . . . 75
4.3.1 Rewriting the scattering problem . . . 75
4.3.2 Asymptotic models . . . 77
4.4 A mathematical point of view . . . 77
4.4.1 Functional framework . . . 77
4.4.2 Error analysis . . . 79
4.5 Technical lemnas . . . 81
4.6 Conclusion . . . 84

Partie II Théorie spectrale et principe d'amplitude limite pour un dioptre composé d'un diélectrique et d'un métamatériau 85

5 Cadre physique et mathématique 87
5.1 Équations de Maxwell dans les matériaux de Lorentz . . . 87
5.1.1 Lois constitutives des matériaux . . . 87
5.1.2 Système de Lorentz en régime transitoire . . . 89
5.2 Description du problème physique traité . . . 90
5.2.1 Modélisation du problème . . . 90
5.2.2 Modes TE et TM . . . 92
5.2.3 Une équation d'évolution de Schrödinger . . . 93
5.2.4 Un problème de Cauchy bien posé . . . 95

6 Approche modale 97
6.1 Modes propres et modes propres généralisés . . . 97
6.2 Séparation des variables spatiales . . . 98
6.3 Réduction à un problème scalaire . . . 100
6.4 Coupures spectrales . . . 102
6.5 Expression des éléments propres de l'opérateur réduit . . . 106

7 Décomposition spectrale de l'opérateur de Schrödinger 113
7.1 Théorie spectrale de l'opérateur réduit $\hat{\mathbb{A}}_k$ . . . 114
7.1.1 Calcul de la résolvante de $\hat{\mathbb{A}}_k$ . . . 114
7.1.2 Fonction de Green de l'équation de Sturm-Liouville . . . 118
7.1.3 Famille spectrale de l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ . . . 122
7.1.4 Diagonalisation de l'opérateur réduit . . . 138
7.2 Théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger . . . 145
7.2.1 De la théorie spectrale de $\hat{\mathbb{A}}_k$ à celle $\mathbb{A}$ . . . 145
7.2.2 Famille modale de l'opérateur de Schrödinger . . . 145
7.2.3 Diagonalisation de l'opérateur de Schrödinger . . . 150
7.3 Annexe : un peu de théorie spectrale . . . 155
7.3.1 Résolvante et spectre d'un opérateur auto-adjoint . . . 155
7.3.2 Le théorème spectral . . . 156
7.3.3 Décomposition de la mesure spectrale . . . 159
7.3.4 Opérateurs décomposables . . . 160

8 Principe d'amplitude limite **163**
8.1 Expression de la solution du problème de Cauchy 163
8.2 Asymptotique en temps long de la solution homogène 164
8.3 Un phénomène de résonance 166
8.4 Le principe d'amplitude limite 172
8.5 Conclusion 181
8.6 Annexe 182
8.6.1 Expression de la résolvante en fonction de la densité spectrale 182
8.6.2 Théorème d'absorption limite 183

Bibliographie **191**

Introduction

Cette thèse comporte deux parties indépendantes dont le thème commun concerne des phénomènes de propagation d'ondes en régime temporel par une approche que l'on peut qualifier de "stationnaire" au sens elle consiste à représenter une onde transitoire par une superposition d'ondes périodiques. La première partie est dédiée à la focalisation spatio-temporelle d'ondes acoustiques sur des obstacles diffractants. Elle fait l'objet des quatre premiers chapitres. La seconde est consacrée à l'étude des équations de Maxwell, en régime transitoire, dans un dioptre entre un diélectrique et un métamatériau. Elle est également divisée en quatre chapitres.

Cette introduction est composée de deux paragraphes présentant le contexte, les objectifs et un résumé des résultats obtenus dans chaque partie.

Focalisation spatio-temporelle d'ondes acoustiques

Enjeux et motivation

Aujourd'hui, les méthodes permettant de concentrer de l'énergie acoustique ou électromagnétique à la fois spatialement et temporellement dans une zone donnée sont prisées en raison de la diversité et de l'importance de leurs applications. En médecine, on cherche par exemple à détruire, sans intervention chirurgicale, des parties malades de l'organisme sans endommager les tissus voisins. Citons à ce titre la méthode de lithotritie extra corporelle (cf. [77, 105]) qui vise justement à casser des calculs rénaux par ondes ultra-sonores. L'opération est réalisée en deux temps. Les calculs rénaux sont tout d'abord repérés par une méthode d'imagerie "classique" (radioscopie ou échographie). Des ondes sont ensuite générées par un réseau de transducteurs piézoélectriques pour focaliser spatialement et temporellement sur l'un de ces calculs. Elles entrainent alors pendant un bref instant une variation brutale de la pression au voisinage de ce calcul provoquant ainsi sa fragmentation. Dans un autre domaine, celui des télécommunications à l'instar de l'acoustique sous-marine [45], les réseaux sans fils [43]) ect, il s'agit de trouver des techniques pour acheminer la plus grande quantité d'énergie entre un émetteur et un ou plusieurs récepteurs via l'utilisation d'ondes acoustiques ou électromagnétiques. L'enjeu est ici de prendre en compte le caractère diffusif du milieu de propagation pour pouvoir acheminer suffisamment d'information au niveau des récepteurs. Dans l'industrie, dans le cadre du contrôle non destructif des matériaux, on cherche à imager des défauts dans les métaux (cf. [54]). Enfin, le champ d'application s'étend également à la géophysique (cf. [73]) où l'on essaye par exemple de localiser l'épicentre d'un séisme.

Notre problématique s'inscrit dans le cadre de ces applications. Nous considérons un milieu acoustique perturbé par la présence d'obstacles diffractants (à l'instar des calculs rénaux pour la lithotritie) dont nous ignorons la position. Nous cherchons alors à l'aide d'un réseau composé

de N transducteurs ponctuels à émettre une onde transitoire venant focaliser sélectivement en temps et en espace au voisinage d'un de ces obstacles. Par focaliser, nous entendons que la majeure partie de l'énergie de l'onde doit venir se concentrer en un temps donné au voisinage de cet obstacle.

Contexte

La méthode de retournement temporel permet d'obtenir de telles propriétés de focalisation dans le cas d'une source active. Par active, nous entendons que cette source est capable d'émettre un son. Cette méthode est basée sur la réversibilité de l'équation des ondes dans un milieu non dissipatif. Elle peut être illustrée par l'expérience suivante (cf. [50]). Dans un premier temps, une source acoustique émet un son qui se propage dans le milieu. Ce son est ensuite mesuré par un réseau composé de transducteurs pouvant jouer alternativement le rôle d'émetteurs ou de récepteurs. Dans un second temps, le réseau réémet la mesure mais retournée temporellement (à l'instar d'une bande magnétique passée à l'envers dans un magnétophone). Il est alors, pour cette raison, communément appelé miroir à retournement temporel (MRT). Pour une source localisée spatialement et un son initial suffisamment bref, l'énergie acoustique de l'onde générée va venir se concentrer à un instant donné dans un voisinage de la source. La qualité de la focalisation dépend alors des caractéristiques du MRT : elle sera meilleure si celui-ci entoure la source et contient un nombre suffisant de transducteurs.

Cependant, nous ne cherchons pas à focaliser sur des sources actives mais sur des sources passives : des obstacles diffractants. La méthode DORT (Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel) introduite par Claire Prada et Mathias Fink (cf. [95, 97]) répond à cette attente mais en régime harmonique. Cette dernière est fondée sur le processus de retournement temporel suivant (décrit par la figure 1). Pour une distribution de signaux d'entrée

$$\hat{\boldsymbol{q}}_{\text{in}}(\omega) = (\hat{q}_1(\omega), \ldots, \hat{q}_N(\omega))^\top \in \mathbb{C}^N$$

placés sur les N transducteurs, le MRT émet une onde acoustique qui se propage dans le milieu contenant les obstacles. L'onde est ensuite réfléchie par les obstacles qui génèrent une onde diffractée, elle-même mesurée par le MRT. Nous désignons par opérateur de diffraction, noté ici $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ (cf. figure 1), l'opérateur qui à une distribution de signaux d'entrée $\hat{\boldsymbol{q}}_\omega$ associe la mesure du champ diffracté. Le MRT contenant N transducteurs, il s'agit ici d'une matrice $N \times N$. La dernière étape consiste alors à retourner temporellement la mesure $\widehat{\mathbb{S}}_\omega\, \hat{\boldsymbol{q}}_\omega$ du champ diffracté et à l'utiliser comme signal d'entrée pour réémmetre une nouvelle onde acoustique. Notons qu'en régime harmonique l'opération de retournement temporel se réduit à une simple conjugaison. En effet, pour une fonction périodique en temps Φ de la forme :

$$\Phi(x,t) = \mathrm{R}e(\phi(x)e^{-i\omega\, t}),$$

changer t en $-t$ revient à considérer la fonction

$$\Phi(x,-t) = \mathrm{R}e(\phi(x)e^{i\omega\, t}) = \mathrm{R}e(\overline{\phi(x)}\, e^{-i\omega\, t}).$$

Les auteurs de [95] ont montré qu'itérer ce processus conduit (par algorithme des puissances itérées) à focaliser sur l'obstacle le plus réflectif du milieu. La méthode DORT est une manière de raffiner ce procédé en introduisant l'opérateur $\widehat{\mathbb{T}}_\omega$ associé à deux itérations du processus de retournement temporel, communément appelé opérateur de retournement temporel. Ce dernier est donc défini en fonction de l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ de la manière suivante :

$$\widehat{\mathbb{T}}_\omega\, \hat{\boldsymbol{q}}_\omega = \overline{\widehat{\mathbb{S}}_\omega\, \overline{\widehat{\mathbb{S}}_\omega\, \hat{\boldsymbol{q}}_\omega}}, \quad \text{soit} \quad \widehat{\mathbb{T}}_\omega = \overline{\widehat{\mathbb{S}}_\omega}\, \widehat{\mathbb{S}}_\omega.$$

Le principe de réciprocité du milieu nous assure que l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ est symétrique au sens où $\widehat{\mathbb{S}}_\omega^\top = \widehat{\mathbb{S}}_\omega$. Ainsi l'opérateur

$$\widehat{\mathbb{T}}_\omega = \overline{\widehat{\mathbb{S}}_\omega}\, \widehat{\mathbb{S}}_\omega = \widehat{\mathbb{S}}_\omega^*\, \widehat{\mathbb{S}}_\omega \tag{1}$$

est auto-adjoint. La méthode DORT consiste, comme son nom l'indique, à décomposer cet opérateur, autrement dit à déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres ou encore de manière équivalente (d'après (1)) à effectuer une décomposition en valeurs singulières (SVD) de l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ (nous adopterons d'ailleurs ce point de vue dans le manuscrit). Ces éléments propres vérifient alors la propriété remarquable suivante. Pour des obstacles suf-

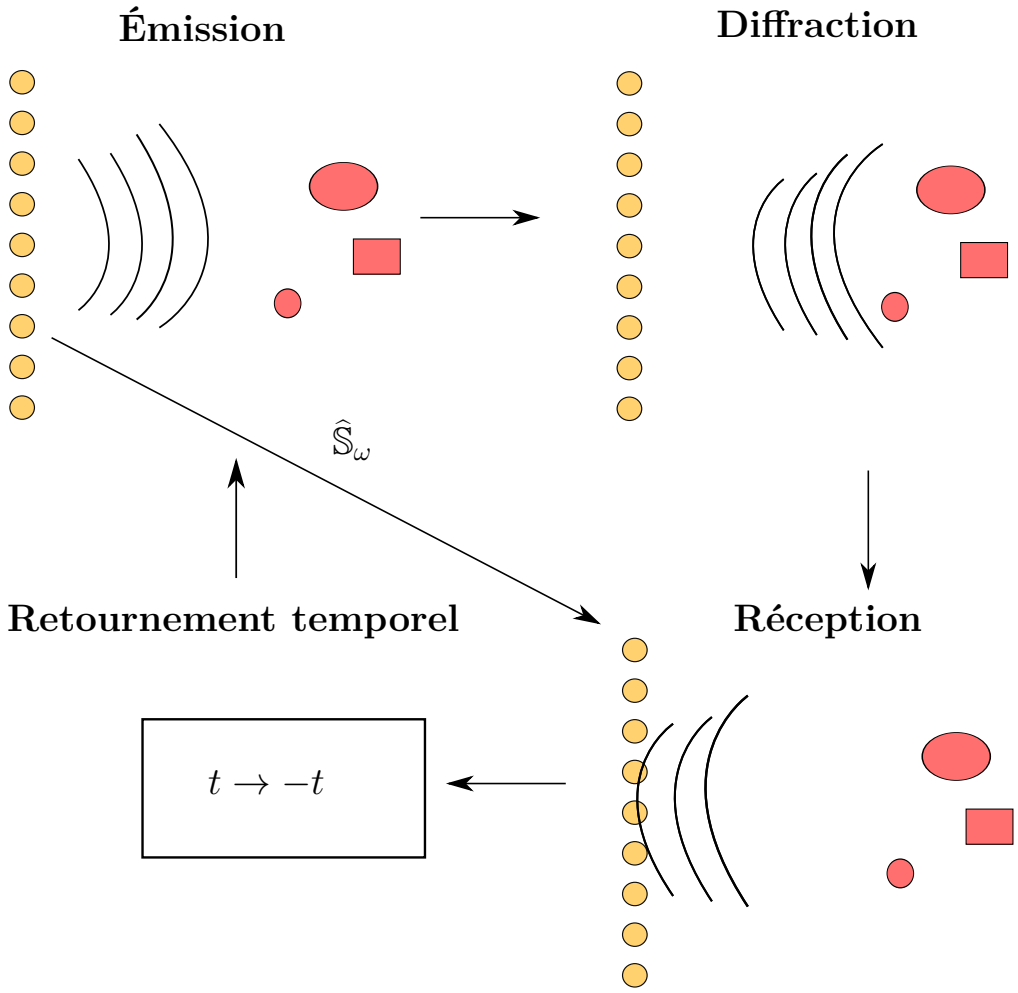

FIGURE 1 – Cycle du processus de retournement temporel.

fisamment petits et éloignés, le nombre de valeurs singulières non nulles de $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ coïncide avec le nombre d'obstacles du milieu. De plus, si ces valeurs singulières sont simples, chaque vecteur singulier à droite associé à une telle valeur singulière génère une onde qui vient focaliser spatialement et sélectivement sur l'un des obstacles du milieu. Cette propriété fut tout d'abord mise en évidence dans [95, 97] pour des obstacles ponctuels, puis démontrée en acoustique [65] et en électromagnétisme [6] dans le cas d'un milieu tridimensionnel où la distance entre le MRT et les obstacles est supposée infinie. Des résultats numériques montrent que ces propriétés de focalisation restent valables lorsque les obstacles ne sont plus petits devant la longueur d'onde [3].

Les propriétés de focalisation spatiale des ondes générées par la méthode DORT ont été étudiées dans divers types de milieux : les milieux diffusifs [93, 96, 104], les guides d'ondes [87,

103, 78, 2, 109] et les mileux aléatoires [21]. Son domaine d'application, initialement l'acoustique, s'étend désormais aux ondes électromagnétiques [106, 85, 26] et élastiques [11]. Mentionnons également que la méthode DORT a été considérée récemment dans le cas d'obstacles mobiles [92].

Nous pouvons alors préciser nos objectifs. Peut-on profiter des propriétés de focalisation spatiale de la méthode DORT dans le domaine fréquentiel pour générer un signal transitoire qui non seulement se focaliserait autour d'une cible particulière, mais aussi serait suffisamment compressé dans le temps au voisinage de cette cible ? Autrement dit, la méthode DORT peut-elle conduire à une *focalisation spatio-temporelle* ? L'idée de départ consiste simplement à superposer les signaux harmoniques fournis par la méthode DORT. Toute la question réside alors dans la *synchronisation* de ces signaux qui sont définis à une phase fréquentielle près.

Contenu de la première partie

Le premier chapitre reprend intégralement le contenu d'un article soumis [30]. La réponse proposée consiste à tirer parti de la propriété de symétrie de l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ qui nous permet de choisir une SVD particulière, dite symétrique (SSVD). L'idée d'utiliser cette SSVD est née d'un argument purement heuristique. L'essentiel des travaux réalisés dans la thèse ont consisté à légitimer ce choix, en s'appuyant sur un modèle asymptotique très utilisé par les physiciens – le modèle de Foldy–Lax – qui considère des obstacles ponctuels. Différents arguments théoriques et numériques ont été explorés. Tout d'abord, nous avons montré que les phases fournies par la SSVD reviennent à minimiser un critère temporel qui compare le signal mesuré avec le retourné temporel du signal d'entrée réajusté par un facteur multiplicatif. D'autre part, nous avons comparé les signaux résultant de la SSVD avec ceux obtenus par l'expérience de retournement temporel décrite précédemment pour une source active en supposant que notre cible pouvait émettre une courte impulsion. Nous avons alors montré que la SSVD fournit les mêmes phases que cette expérience, autrement dit qu'elle conduit dans le cas d'obstacles passifs à la même refocalisation que pour des sources actives. Enfin, de nombreuses expériences numériques en milieux homogène et diffusif ont permis de confirmer l'effet de focalisation spatio-temporelle et de le quantifier. Les résultats de ce chapitre font également l'objet d'un acte de conférence [32].

Le second chapitre revient sur les propriétés de focalisation spatiale (admises au premier chapitre) des ondes générées par la méthode DORT en régime harmonique. Il tente de donner un cadre mathématique précis à certaines notions utilisées par les physiciens, notamment les notions de tache focale, d'obstacles parfaitement découplés ("ideally resolved") et de focalisation sélective. Nous considérons tout d'abord le cas d'un milieu contenant un seul obstacle. Il est alors montré que l'amplitude des ondes générées par la méthode DORT se concentre dans un voisinage de l'obstacle appelé tache focale. Dans un second temps, pour un milieu contenant plusieurs obstacles, nous étudions les propriétés de focalisation sélective des ondes générées par la méthode DORT dans le cas idéal d'obstacles parfaitement découplés [95, 97]. Puis, nous montrons par une étude asymptotique des termes d'interactions que l'on s'approche de cette situation idéale à faible longueur d'onde, autrement dit lorsque les obstacles sont suffisamment distants.

Le troisième chapitre illustre par une étude numérique les propriétés de focalisation exhibées dans les deux chapitres précédents. En régime harmonique, il met en évidence à travers divers exemples la focalisation spatiale sélective des ondes générées par la méthode DORT. Il en montre également les limites en présentant notamment les cas pathologiques d'obstacles fortement couplés ou non discernables par le réseau de transducteurs. Dans le cas du régime transitoire, nous complétons les résultats numériques montrés dans le premier chapitre.

Enfin, le quatrième chapitre constitue une justification dans le cas d'un milieu bidimensionnel de différents modèles asymptotiques de diffraction multiple par de petits obstacles. Il s'intéresse entre autres au modèle de Foldy-Lax que nous avons utilisé tout au long de cette première partie pour modéliser la réflexion d'une onde sur une famille d'obstacles ponctuels. Il reprend intégralement le contenu d'un article [31] publié dans la revue Wave-Motion.

Théorie spectrale et principe d'amplitude limite pour un dioptre composé d'un diélectrique et d'un métamatériau

Contexte

Ces dernières années, les matériaux dits "négatifs" ont pris une place importante dans le domaine de l'électromagnétisme. Commençons par préciser ce que nous entendons par matériau négatif. En électromagnétisme, en régime harmonique c'est-à dire à fréquence ω fixée, un matériau linéaire, homogène et dispersif est caractérisé par deux grandeurs physiques : sa permittivité électrique $\varepsilon(\omega)$ et sa perméabilité magnétique $\mu(\omega)$. Nous dirons que le matériau est négatif à la fréquence ω si au moins un de ces deux paramètres physiques est négatif. Dans la nature, les métaux constituent, sans doute, l'exemple le plus connu de matériaux négatifs. En effet, leur permittivité $\varepsilon(\omega)$ devient négative à basses fréquences. Ce phénomène peut se comprendre en utilisant le modèle de Drude qui constitue une bonne approximation de la dépendance de $\varepsilon(\omega)$ en ω dans un métal (cf. [89]) où il est raisonnable de négliger la dissipation (tout du moins à fréquences suffisamment élevées). Il stipule que

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}\right),$$

où les constantes positives ε_0 et Ω_e désignent respectivement la permittivité du vide et la fréquence plasma. Ω_e est ici située dans l'ultraviolet (cf. [89]), si bien que $\varepsilon(\omega)$ est négatif pour les fréquences du visible et plus généralement pour toute fréquence inférieure à Ω_e. Grâce à cette dernière propriété, des ondes peuvent se propager le long de l'interface entre un métal et un diélectrique, ce sont les plasmons de surface. Ces derniers constituent désormais un véritable enjeu technologique dans le domaine des télécommunications. Expliquons brièvement pourquoi.

Les plasmons sont un moyen de transmettre de l'information le long d'une interface entre un diélectrique et un métal via la propagation d'une onde lumineuse. Cette transmission a la particularité de pouvoir être réalisée à de très petites échelles (cf. [12, 119, 58]). Ils pourraient donc être utilisés pour réduire la taille des composants électroniques, ce qui constitue un véritable défi dans le domaine du numérique. Cependant, les plasmons furent longtemps inexploitables technologiquement car les appareils de mesure ne pouvaient alors détecter que leur champ lointain. Or, ce dernier est inexploitable car les ondes plasmoniques ont la particularité d'être exponentiellement décroissantes de part et d'autre de l'interface. Récemment, les progrès effectués dans les procédés d'observation nous permettent d'avoir accès à leur champ proche [51] ; ceci explique le nouvel engouement concernant les technologies plasmoniques. Notons enfin que les plasmons sont très sensibles à la moindre irrégularité de l'interface entre le diélectrique et le métal. On tente alors de les utiliser pour concevoir des photodétecteurs à l'échelle nanomètrique. Pour plus de détails concernant la physique des plasmons, nous renvoyons le lecteur à [33].

Si les métaux constituent un premier exemple de matériaux négatifs, ils ont à l'instar de tous les matériaux naturels une perméabilité magnétique $\mu(\omega)$ positive à toutes fréquences. La possibilité de concevoir des matériaux de perméabilité négative a vu le jour avec l'avènement des médiatiques métamatériaux. Les métamatériaux sont des structures périodiques (cf. figure

2), diélectriques ou métalliques, qui se comportent comme un matériau homogène n'existant pas à l'état naturel. Ils sont fabriqués en agençant de façon périodique un motif petit devant la longueur d'onde à laquelle ils sont excités.

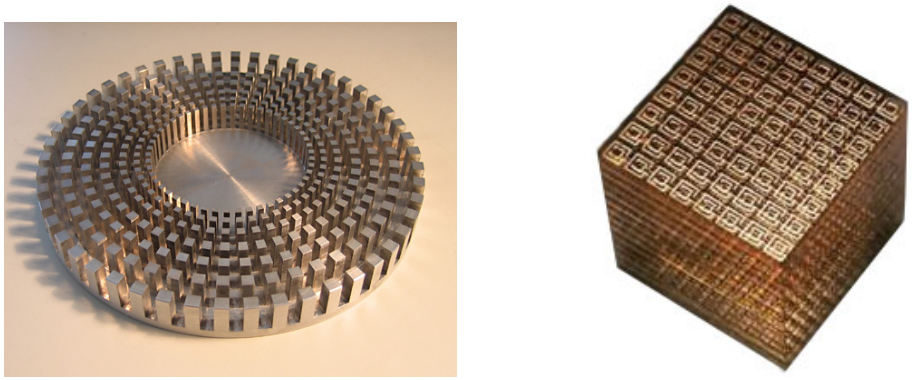

FIGURE 2 – Exemple de métamatériaux. L'un fut usiné au laboratoire Fresnel à Marseille à partir d'une plaque d'aluminium (à gauche), l'autre a été construit au laboratoire Ames de l'université de Duke (à droite).

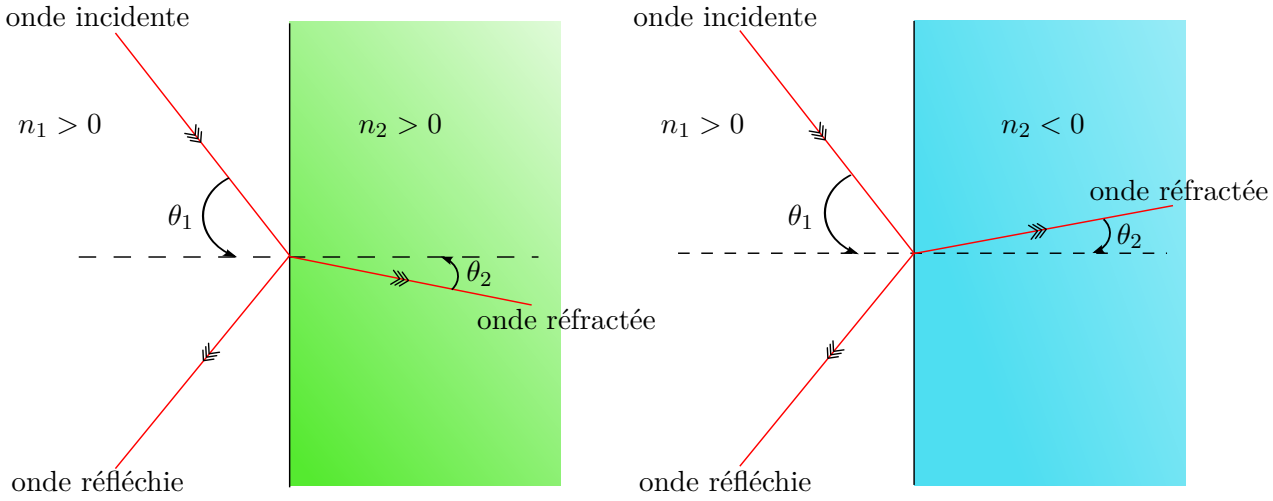

FIGURE 3 – Réfraction entre deux diélectriques (à gauche) et entre un diélectrique et un métamatériau à indice de réfraction négative (à droite). Ces réfractions suivent la loi de Snell-Descartes : $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$.

Dans notre cas, nous nous intéressons plus particulièrement aux métamatériaux à indice de réfraction négative (NIM acronyme anglais pour "Negative Index Metamaterials") qui se comportent comme un matériau homogène dont la permittivité électrique $\varepsilon(\omega)$ et la perméabilité magnétique $\mu(\omega)$ sont toutes deux négatives. Ils portent ce nom car le changement de signe de $\varepsilon(\omega)$ et de $\mu(\omega)$ induit un phénomène tout à fait remarquable : l'indice optique du matériau devient négatif. En effet, le physicien Veselago démontre en 1968 (cf. [110]) à partir des équations de Maxwell que lorsque $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ sont tous deux négatifs, l'indice optique n n'est plus défini comme la racine positive du produit $\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)$, il faut dans cas prendre sa racine négative en posant $n = -\sqrt{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}$. Toute onde incidente se propageant dans un diélectrique subit alors à l'interface avec un NIM une réfraction "dite négative" où le signe de l'angle formé par le rayon réfracté et la normale à l'interface est l'opposée de celui qu'on obtiendrait dans un processus

de réfraction classique (cf. figure 3). En exploitant cette propriété, J. F. Pendry imagine en 2000 (cf. [90]) concevoir des lentilles dites "parfaites" au sens où elles ne sont plus soumises aux limites de la diffraction. Ces dernières doivent être réalisées à l'aide d'une plaque de NIM dont l'indice optique est exactement l'opposé de celui du diélectrique dans lequel elles sont insérées.

Une dernière application des métamatériaux concerne l'invisibilité [114, 59, 61] dans la mesure où ces derniers offrent la possibilité de construire un matériau homogène de permittivité $\varepsilon(\omega)$ et de perméabilité $\mu(\omega)$ données. En jouant sur ces deux paramètres, on est donc théoriquement capable de choisir l'indice optique du milieu, autrement dit de contrôler le trajet de la lumière. Les physiciens ont ainsi imaginé façonner des capes d'invisibilité pouvant dévier les rayons lumineux afin de rendre un objet invisible (cf. figure 4). Pour l'instant, il n'y a pas encore de quoi faire frémir les fans d'Harry Potter puisque de telles expériences n'ont encore pu être menées. En effet, pour construire de tels matériaux, il faudrait être capable de réaliser des structures périodiques dont le motif est petit devant les longueurs d'ondes du visible (400 à 800 nanomètres), ce qui est pour l'instant technologiquement hors de portée. Néanmoins, il est aujourd'hui possible par un tel procédé de rendre un objet invisible pour les micro-ondes dont la longueur d'onde varie entre 1 millimètre et 1 mètre [102].

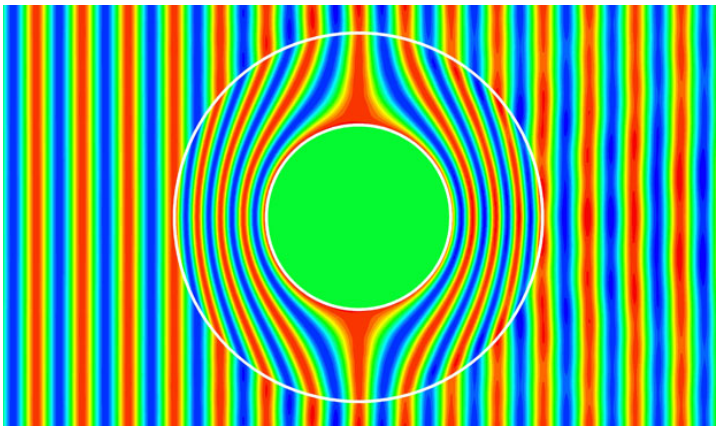

FIGURE 4 – Exemple d'invisibilité : une couche de métamatériau rend ici un objet circulaire invisible pour une onde plane.

Nous nous arrêtons là pour la présentation des différents matériaux négatifs et pour la description des technologies dans lesquelles ils sont impliqués. Expliquons maintenant le contexte scientifique qui a conduit à la problématique de cette seconde partie où nous nous intéressons à un problème de transmission entre un diélectrique et un matériau négatif.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un projet ANR (Agence nationale de la recherche) : "METAMATH" dirigé par Sonia Fliss, enseignante chercheuse au laboratoire POEMS. Il a pour origine le constat suivant. En régime fréquentiel, du fait des changements de signe de $\varepsilon(\omega)$ et/ou $\mu(\omega)$ à la traversée de l'interface entre un diélectrique et un matériau négatif, les techniques mathématiques et numériques habituelles ne s'appliquent plus [36, 42]. Dans le cas d'une interface régulière (sans "coin"), les auteurs de [17, 18] ont démontré que les équations de propagation en régime périodique sont bien posées sauf si les rapports des valeurs prises par $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ de part et d'autre de l'interface sont égaux à -1 (pour plus de détails à ce sujet, nous renvoyons le lecteur à [35]). Et cette dernière situation est particulièrement importante puisque c'est, comme nous l'avons vu précédemment, le cas d'application de la lentille parfaite.

Le régime périodique établi est généralement défini comme le comportement asymptotique en temps d'un système soumis à une excitation périodique, après disparition du "transitoire" lié à la mise en route de l'excitation. Cette propriété est connue sous le nom de principe d'amplitude

limite (cf. [47]). Lorsque le régime périodique conduit à un problème mal posé, ce principe ne peut évidemment pas s'appliquer. Il se pose alors naturellement la question suivante : que se passe-t-il lorsqu'on excite le système à une telle fréquence ?

La réponse proposée dans cette partie repose sur l'utilisation d'un modèle dispersif simple, le modèle de Drude, pour lequel $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ deviennent négatifs à basse fréquence. Le cas d'un dioptre plan séparant deux demi-espaces occupés respectivement par un milieu diélectrique classique et un matériau de Drude a été étudié. Dans un tel modèle, sous certaines conditions physiques, les rapports des valeurs prises par $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ de part et d'autre de l'interface sont égaux à -1 pour une unique et même fréquence appelée communément fréquence plasmon. Cette partie de la thèse permet entre autre de répondre à la question posée : lorsqu'on excite le système à la fréquence plasmon où le problème fréquentiel est mal posé, le principe d'amplitude limite n'est pas vérifié. L'onde générée diverge linéairement en temps du fait de l'excitation de plasmons de surface qui entrent en résonance.

Contenu de la seconde partie

La partie du mémoire consacrée à cette étude comporte quatre chapitres ; un article est en outre en préparation sur ce travail.

Le premier chapitre donne un cadre physique et mathématique général dans lequel s'inscrit le problème étudié dans cette seconde partie. Dans ce but, les équations de Maxwell en régime transitoire sont tout d'abord introduites dans le cas d'un matériau de Lorentz pour se restreindre ensuite à un dioptre entre un diélectrique et un matériau de Lorentz particulier : le matériau de Drude. Une décomposition en modes transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM) est alors effectuée. Après avoir choisi de façon arbitraire de travailler en mode TM, le problème d'évolution obtenu est finalement reformulé sous forme d'une équation de Schrödinger abstraite.

Le second chapitre introduit la notion de modes. Il a pour but d'établir une famille modale associée à notre problème de propagation. Les propriétés des différents modes calculés sont exhibées, on constate notamment la présence d'ondes plasmoniques localisées spatialement à l'interface entre le diélectrique et le matériau de Drude.

Le troisième chapitre constitue le coeur de cette seconde partie. Une analyse spectrale complète de l'opérateur auto-adjoint non compact qui décrit la dynamique du problème de propagation est effectuée, ce qui permet de représenter n'importe quelle onde sous forme d'une superposition d'ondes harmoniques en temps. Cette étude s'inscrit en droite ligne à la suite des travaux de Ricardo Weder et Calvin Hayden Wilcox [113, 117] pour la propagation dans des milieux stratifiés. Elle est menée dans le cadre original du modèle de Drude.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'asymptotique en temps long des solutions de l'équation de Schrödinger dans le cas d'un second membre périodique en temps. Il a pour but de démontrer les résultats mis en évidence par Boris Gralak, Daniel Maystre et Adriaan Tip dans [57, 56]. Nous montrons ici tout d'abord l'existence d'un phénomène de résonance à la fréquence plasmonique où la solution croît linéairement en temps. Puis, en démontrant un principe d'absorption limite, nous étudions ensuite pour quelles fréquences d'excitation le principe d'amplitude limite est vérifié, autrement dit pour quelles fréquences d'excitation la solution du système transitoire converge vers un régime périodique établi. Une étude numérique vient illustrer ces résultats.

PREMIÈRE PARTIE

FOCALISATION SPATIO-TEMPORELLE D'ONDES ACOUSTIQUES

CHAPITRE PREMIER

SPACE–TIME FOCUSING OF ACOUSTIC WAVES ON UNKNOWN SCATTERERS

Sommaire

1.1 Introduction 12
1.1.1 General context and objective 12
1.1.2 Mathematical formulation of the problem 13
1.2 Space focusing in the frequency domain 15
1.2.1 The scattering operator for small scatterers 15
1.2.2 The DORT method 17
1.3 Space-time focusing 20
1.3.1 From frequency domain to time domain 20
1.3.2 Optimality of a time reversal gap functional 22
1.3.3 Space–time focusing : from active sources to passive scatterers 23
1.3.4 Numerical results 26
1.4 Conclusion 30

Ce chapitre est l'objet d'un article soumis (cf.[30]), dont nous reprenons ici intégralement le texte.

Abstract : Consider a propagative medium, possibly inhomogeneous, containing some scatterers whose positions are unknown. Using an array of transmit–receive transducers, how can one generate a wave that would focus in space and time near one of the scatterers, that is, a wave whose energy would confine near the scatterer during a short time ? The answer proposed in the present paper is based on the so-called DORT method (French acronym for : decomposition of the time reversal operator) which has led to numerous applications owing to the related space focusing properties in the frequency domain, i.e., for time-harmonic waves. This method essentially consists in a singular value decomposition (SVD) of the scattering operator, that is, the operator which maps the input signals sent to the transducers to the measure of the scattered wave. By introducing a particular SVD related to the symmetry of the scattering operator, we show how to synchronize the time-harmonic signals derived from the DORT method to achieve space–time focusing. We consider the case of the scalar wave equation and we make use of an asymptotic model for small sound-soft scatterers, usually called the Foldy–Lax model. In this context, several mathematical and numerical arguments that support our idea are explored.

Keywords : Space–time focusing, Time reversal, DORT method, Singular value decomposition, Foldy–Lax model.

1.1 Introduction

1.1.1 General context and objective

Time reversal (TR) techniques have been extensively studied during the last decades, in particular owing to the related focusing properties. The simplest illustration of these properties consists in the following classical TR experiment (see, e.g., [50]). In a first step, an acoustic source emits a sound which propagates in the surrounding medium. The acoustic field is then measured and recorded by an array of transmit–receive transducers. In a second step, all the recordings are time-reversed and then used as input signals for the transducers of the array, generally called a time reversal mirror (TRM) because of this time reversal step. The acoustic wave emitted by the TRM propagates back in the same medium towards the original source. If this source fills a small region and if the initial sound is a short pulse, one can observe that a great part of the acoustic energy of the back-propagating wave will be concentrated near the original source at a given time. In this sense, *space–time focusing* is achieved. The focus quality will be high if the TRM surrounds completely the source (full aperture case) and if the number of transducers is large enough. On the other hand, the focusing will generally deteriorate if the number of transducers becomes smaller or if the aperture of the TRM is reduced, that is, if the angular area occupied by the TRM decreases (partial aperture case).

In such a TR experiment, the source is active in the sense that it emits the original sound which is then recorded by the TRM. In the present paper, we are no longer concerned by active sources, but rather by unknown scatterers which behave passively only by their ability to reflect an incident wave. Hence the way to retrieve some information on the scatterers is to test the medium by means of the array of transducers which can emit various incident waves and record the response of the medium. We assume here that we are able to measure the *scattered* wave, that is, the perturbation of the incident wave due to the presence of the scatterers. This means implicitly that we are able to compare the propagation of an acoustic wave in two different media : on the one hand, a *reference* medium which is the surrounding medium in the absence of the scatterers, on the other hand a *perturbed* medium which is the same medium perturbed by the presence of the scatterers. In other words, each test of the medium consists actually in two experiments : for given input signals sent to the transducers, the same incident wave is emitted by the array in both reference and perturbed media, both responses are then measured by the array, and finally the former is subtracted from the latter. The operator which maps the input signals to the difference of both measures will be called here the *scattering operator* (it is often referred to as the multi-static response matrix). The question we are interested in is the following : from the only knowledge of this scattering operator, can one generate a wave which would focus in both space and time at one of the scatterers ? There is no doubt that a positive answer to this question could lead to numerous applications in nondestructive testing, medicine, communication, imaging, etc.

The method we propose is based on the so-called DORT method (French acronym for : decomposition of the time reversal operator) first developed by Prada and Fink [93, 95, 97] in the context of ultrasonics. Numerous experimental, numerical and theoretical applications of this method have been explored for acoustic, elastic or electromagnetic waves. The DORT method can be seen as an improvement of iterative time reversal in the frequency domain. It is based actually on a singular value decomposition (SVD) of the above mentioned scattering operator for time-harmonic waves. It is now well understood that for distant enough and small scatterers, the number of non-negligible singular values of the scattering operator coincide with the number of scatterers. Moreover, when these singular values are simple, each corresponding singular vector generates a wave which focuses selectively on each scatterer. These properties

were first observed for point-like targets [95, 97] and then confirmed by different theoretical studies (see, e.g., [65] for acoustic waves and [6] for electromagnetic waves). Numerical results [3] show that these selective focusing properties hold even when the asymptotic conditions are not satisfied, that is, for rather close scatterers which are not so small in comparison with the wavelength.

In short, the DORT method provides us spatial selective focusing in the frequency domain. This is the starting point of the present paper which addresses the following issue : can we take advantage of these spatial focusing properties in the frequency domain in order to produce a time-dependent wave which would also focus in time ? This challenging question was first raised in [87]. It mainly consists in a phase synchronization issue, since the singular vectors of the scattering operator are defined up to a phase shift. The same issue was also mentioned in [21] which presents an extension to the time domain of the so-called MUSIC algorithm (multiple signal classification) for imaging in random media. To our knowledge, the first proposal of solution was given in [91] using an approximation by a homogeneous free-space back propagation. The method we propose does not involve any approximation. It is based on the symmetry of the scattering operator which allows us to choose a particular SVD, called the symmetric singular value decomposition (SSVD). The idea of using this particular SVD is not really new : we discovered recently that it is briefly mentioned in an unpublished report [94], but with no justification. Our aim is to explore several arguments which show that the use of the SSVD of the scattering operator yields space–time focusing.

The paper is organized as follows. We begin by describing in §1.1.2 the mathematical formulation of the problem and we introduce the main notations which are used throughout the paper. Section 1.2 is devoted to space focusing in the frequency domain. As the focusing properties of the DORT method hold for small scatterers, we make use of an asymptotic model, usually called the Foldy–Lax model, which considers point-like scatterers. In this context, we briefly recall the main features of the DORT method and we illustrate them by numerical results. Section 1.3 constitutes the core of the paper. We first show in §1.3.1 how to reduce the problem to a phase synchronization issue and introduce the SSVD of the scattering operator. We then prove in §1.3.2 that the choice of this SSVD is associated with the optimum of a TR criterion. In §1.3.3, we explore the link between the SSVD and the TR experiment mentioned above. Finally the numerical results of §1.3.4 illustrate the space–time focusing effect. The focus quality is evaluated by means of an energy criterion which involves some technical calculations that are collected in the Appendix.

1.1.2 Mathematical formulation of the problem

In the present paper, we consider a *reference* medium, possibly inhomogeneous in a bounded region, filling the whole space $\mathbb{R}^d$ (with $d > 1$). This medium is characterized by a sound velocity function $c = c(x)$ for $x \in \mathbb{R}^d$. We denote by $G = G(x, y, t)$ the time-dependent Green's function of the acoustic wave equation, which is solution to

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 G(x, y, t)}{\partial t^2} - \Delta_x G(x, y, t) = \delta(x - y) \otimes \delta(t),$$

where δ stands for the Dirac measure at the origin, either in space or time. Moreover G is assumed to be *causal* in the sense that $G(x, y, t) = 0$ for all $(x, y) \in \mathbb{R}^{2d}$ and $t < 0$ (which ensures the uniqueness of G). Recall that for a homogeneous medium, i.e., $c \equiv 1$, this function

is given by

$$G_{\mathrm{hom}}(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{H(t-|x-y|)}{2\pi\sqrt{t^2-|x-y|^2}} & \text{if } d=2, \\ \dfrac{\delta(t-|x-y|)}{4\pi\,|x-y|} & \text{if } d=3, \end{cases} \tag{1.1}$$

where H is the Heaviside function.

We consider an array of N point-like transducers located at x_n for $n = 1, \dots, N$ which can emit incident waves of the form

$$v_{\mathrm{inc}}(x,t) := \sum_{n=1}^{N} (q_n \overset{t}{\star} G(x, x_n, \cdot))(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} q_n(t')\, G(x, x_n, t-t')\, \mathrm{d}t' \tag{1.2}$$

where $\boldsymbol{q}_{\mathrm{in}}(t) := (q_1(t), \dots, q_N(t))^\top$ represents the vector composed of the input signals which are applied to the transducers (the symbol $\top$ indicates transposition) and $\overset{t}{\star}$ denotes the convolution with respect to time.

We suppose that our reference medium is perturbed by the presence of a family of P sound-soft scatterers $\mathcal{S}_p \subset \mathbb{R}^d$ for $p = 1, \dots, P$. In this case, when the same signals $\boldsymbol{q}_{\mathrm{in}}(t)$ are sent to the transducers, we observe instead of the incident wave (1.2) a perturbed wave $v_{\mathrm{inc}} + v_{\mathrm{sc}}$ where v_{sc} represents the *scattered* wave, that is, the part of the wave due to the presence of the scatterers, which is the causal solution to

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 v_{\mathrm{sc}}}{\partial t^2} - \Delta v_{\mathrm{sc}} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \cup_{p=1}^{P} \mathcal{S}_p, \\ &v_{\mathrm{sc}} = -v_{\mathrm{inc}} \quad \text{on } \cup_{p=1}^{P} \partial\mathcal{S}_p. \end{aligned}$$

This wave is finally measured by the transducers, which yields a vector composed of N functions which is denoted by $\boldsymbol{q}_{\mathrm{out}}(t) := (v_{\mathrm{sc}}(x_1,t), \dots, v_{\mathrm{sc}}(x_N,t))^\top$. The linear operator

$$\mathbb{S} : \boldsymbol{q}_{\mathrm{in}} \longmapsto \boldsymbol{q}_{\mathrm{out}}$$

is called here the *scattering operator*. Note that this definition differs slightly from the scattering operator involved in mathematical physics.

In this paper, we use a spectral representation of $\mathbb{S}$, which amounts to representing all time-dependent signals as superpositions of time-harmonic signals. Thus we introduce the Fourier transform $\mathcal{F}$ with respect to time defined by

$$\hat{f}(\omega) := \mathcal{F}f(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}t$$

whose inverse is given by

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega.$$

Note that in the case where f is real-valued, its Fourier transform satisfies the symmetry property

$$f(-\omega) = \overline{f(\omega)} \quad \text{so that} \quad f(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_{0}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega. \tag{1.3}$$

Define $\hat{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{in}}(\omega) := \mathcal{F}\boldsymbol{q}_{\mathrm{in}}(\omega) = (\hat{q}_1(\omega), \dots, \hat{q}_N(\omega))^\top$. For all ω, $\hat{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{in}}(\omega)$ represents the time-harmonic input signals which emit a time-harmonic incident wave

$$\hat{v}_{\mathrm{inc}}(x,\omega) := (\mathcal{F}v_{\mathrm{inc}}(x,\cdot))(\omega) = \sum_{n=1}^{N} \hat{q}_n(\omega)\, \hat{G}(x, x_n, \omega), \tag{1.4}$$

where $\hat{G} = \hat{G}(x, y, \omega)$ denotes the Fourier transform of G, that is, the time-harmonic Green's function of the reference medium. Its expression is well-known for a homogeneous medium ($c \equiv 1$) :

$$\hat{G}_{\rm hom}(x, y, \omega) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}(\omega|x-y|) & \text{if } d = 2, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega|x-y|}}{4\pi|x-y|} & \text{if } d = 3, \end{cases} \tag{1.5}$$

where $H_0^{(1)}$ is the Hankel function of the first kind and order 0. The interaction of $\hat{v}_{\rm inc}(x, \omega)$ with the scatterers produces a scattered wave $\hat{v}_{\rm sc}(x, \omega) = (\mathcal{F} v_{\rm sc}(x, \cdot))(\omega)$ which is finally measured by the transducers. This yields the time-harmonic scattering operator

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega : \ \hat{\boldsymbol{q}}_{\rm in}(\omega) \longmapsto \hat{\boldsymbol{q}}_{\rm out}(\omega) := (\hat{v}_{\rm sc}(x_1, \omega), \ldots, \hat{v}_{\rm sc}(x_N, \omega))^\top. \tag{1.6}$$

We can sum up the link between the time-dependent and time-harmonic scattering operators by the equality

$$\mathbb{S} = \mathcal{F}^{-1} \, \widehat{\mathbb{S}} \, \mathcal{F}, \tag{1.7}$$

where $\widehat{\mathbb{S}}$ denotes the operator defined from the family $\{\widehat{\mathbb{S}}_\omega;\ \omega \in \mathbb{R}\}$ by the simple relation

$$(\widehat{\mathbb{S}} \, \hat{\boldsymbol{q}})(\omega) = \widehat{\mathbb{S}}_\omega(\hat{\boldsymbol{q}}(\omega)).$$

The question we address in the present paper is the following : from the only knowledge of the operator $\mathbb{S}$, how can one generate a wave that focuses selectively in space and time on one of the scatterers ? The answer we propose is the subject of section 1.3. It is based on the DORT method presented in the next section.

1.2 Space focusing in the frequency domain

1.2.1 The scattering operator for small scatterers

As mentioned in the introduction, the spatial focusing properties related to the DORT method hold for small enough scatterers. That is why we use in the sequel an asymptotic model in the frequency domain, which enables us to replace the family $\{\mathcal{S}_p \subset \mathbb{R}^d;\ p = 1, \ldots, P\}$ by a family of P point-like scatterers located at $y_1, \ldots, y_P$. The model we use, often called the Foldy–Lax model [52], has the advantage to take into account an approximation of the interactions between the scatterers. It is widely used by physicists. For instance, [80] presents an application of the MUSIC method for estimating the locations and reflectivities of point-like inhomogeneities. A mathematical justification of the Foldy–Lax model was recently proposed in [31] for the two-dimensional problem.

This model is based on the fact that in the case of one single sound-soft scatterer ($P = 1$) whose size is small compared to the wavelength, the time-harmonic scattered field $\hat{v}_{\rm sc}$ behaves like the field emitted by a point source (see [81]). More precisely, one has

$$\hat{v}_{\rm sc}(x, \omega) \approx \sigma(\omega) \, \hat{v}_{\rm inc}(y, \omega) \, \hat{G}(x, y, \omega),$$

where $y \in \mathbb{R}^d$ is the location of the scatterer and $\sigma(\omega) \in \mathbb{C}$ is its reflectivity coefficient. For instance, in a homogeneous medium ($c \equiv 1$), if the scatterer is circular ($d = 2$) or spherical ($d = 3$) with radius ε, we have

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} -4i / H_0^{(1)}(\omega\varepsilon) & \text{if } d = 2, \\ 4\pi\varepsilon & \text{if } d = 3. \end{cases} \tag{1.8}$$

For several obstacles ($P > 1$), the scattered field appears as a superposition of similar behaviours,

$$\hat{v}_{\rm sc}(x,\omega) \approx \sum_{p=1}^{P} \sigma_p(\omega)\, \hat{v}_p(\omega)\, \hat{G}(x, y_p, \omega) \tag{1.9}$$

where $\hat{v}_p(\omega)$ represents the *exciting field* on the p-th scatterer. Choosing $\hat{v}_p(\omega) = \hat{v}_{\rm inc}(y_p,\omega)$ as for a single scatterer amounts to neglecting the interactions between the scatterers. The Foldy–Lax model consists in correcting the latter choice by adding the waves scattered by all the other obstacles, i.e.,

$$\hat{v}_p(\omega) = \hat{v}_{\rm inc}(y_p,\omega) + \sum_{q\neq p} \sigma_q(\omega)\, \hat{v}_q(\omega)\, \hat{G}(y_p, y_q, \omega) \quad \text{for } p = 1,\dots,P.$$

If we denote by $\widehat{V}_\omega$ and $\widehat{V}_\omega^{\rm inc}$ the vectors of $\mathbb{C}^P$ with components $\hat{v}_p(\omega)$ and $\hat{v}_{\rm inc}(y_p,\omega)$ respectively, this coupling between the exciting fields can be written equivalently as

$$\left(\mathbb{I} - \widehat{\mathbb{H}}_\omega\, \Sigma_\omega\right)\, \widehat{V}_\omega = \widehat{V}_\omega^{\rm inc}, \tag{1.10}$$

where Σ_ω is the $P \times P$ diagonal matrix composed of the reflectivity coefficients, i.e., $(\Sigma_\omega)_{pp} := \sigma_p(\omega)$, and $\widehat{\mathbb{H}}_\omega$ is the $P \times P$ matrix defined by

$$(\widehat{\mathbb{H}}_\omega)_{pq} := \hat{G}(y_p, y_q, \omega) \;\text{ if } p \neq q \quad \text{and} \quad (\widehat{\mathbb{H}}_\omega)_{pp} := 0.$$

The use of the Foldy–Lax model yields a simple expression for the time-harmonic scattering operator (1.6). Indeed, applying (1.9) to $x = x_n$ for $n = 1$ to N yields

$$\hat{\boldsymbol{q}}_{\rm out}(\omega) = \widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top\, \Sigma_\omega\, \widehat{V}_\omega, \tag{1.11}$$

where $\widehat{\mathbb{G}}_\omega$ denotes the $P \times N$ matrix defined by

$$(\widehat{\mathbb{G}}_\omega)_{pn} := \hat{G}(x_n, y_p, \omega),$$

and we recall that the superscript $\top$ indicates transposition. Moreover, noticing from (1.4) that the right-hand side of (1.10) writes as $\widehat{V}_\omega^{\rm inc} = \widehat{\mathbb{G}}_\omega\, \hat{\boldsymbol{q}}_{\rm in}(\omega)$, we have $\widehat{V}_\omega = (\mathbb{I} - \widehat{\mathbb{H}}_\omega\, \Sigma_\omega)^{-1}\, \widehat{\mathbb{G}}_\omega\, \hat{\boldsymbol{q}}_{\rm in}(\omega)$. Substituting this expression in (1.11) yields finally

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top\, (\Sigma_\omega^{-1} - \widehat{\mathbb{H}}_\omega)^{-1}\, \widehat{\mathbb{G}}_\omega. \tag{1.12}$$

This product of three matrices can be interpreted as the succession of three steps in the scattering process. First $\widehat{\mathbb{G}}_\omega$ represents the propagation of the incident wave from the transducers to the scatterers. Then $(\Sigma_\omega^{-1} - \widehat{\mathbb{H}}_\omega)^{-1}$ describes the reflection on the scatterers (note that this matrix reduces to Σ_ω if $\widehat{\mathbb{H}}_\omega$ is neglected, which amounts to neglecting the interaction between the scatterers). And finally $\widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top$ corresponds to back-propagation from the scatterers to the transducers.

Remark 1.2.1 It is readily seen that the scattering operator is symmetric (but not hermitian) in the sense that $\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \widehat{\mathbb{S}}_\omega^\top$ (but $\widehat{\mathbb{S}}_\omega \neq \widehat{\mathbb{S}}_\omega^*$ where $\widehat{\mathbb{S}}_\omega^*$ is the adjoint matrix, i.e., the conjugate transpose matrix) since both matrices Σ_ω and $\widehat{\mathbb{H}}_\omega$ are symmetric. This can be seen as a consequence of the reciprocity principle.

1.2.2 The DORT method

The DORT method [93, 95, 97] consists in a singular value decomposition (SVD) of the scattering operator $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$:

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \widehat{\mathbb{V}}_\omega \, \widehat{\mathbb{D}}_\omega \, \widehat{\mathbb{W}}_\omega^* \tag{1.13}$$

where $\widehat{\mathbb{D}}_\omega$ is a $N \times N$ diagonal matrix with nonnegative real numbers on the diagonal, whereas $\widehat{\mathbb{V}}_\omega$ and $\widehat{\mathbb{W}}_\omega$ are unitary $N \times N$ matrices. The diagonal entries of $\widehat{\mathbb{D}}_\omega$ are known as the singular values of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ and the columns of $\widehat{\mathbb{V}}_\omega$ and $\widehat{\mathbb{W}}_\omega$ are called the left and right singular vectors, respectively.

A real number $\lambda \geq 0$ is a singular value of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ if and only if there exist unit vectors $\hat{\boldsymbol{v}}$ and $\hat{\boldsymbol{w}}$ in $\mathbb{C}^N$ such that

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega \hat{\boldsymbol{w}} = \lambda \, \hat{\boldsymbol{v}} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbb{S}}_\omega^* \hat{\boldsymbol{v}} = \lambda \, \hat{\boldsymbol{w}}. \tag{1.14}$$

Vectors $\hat{\boldsymbol{v}}$ and $\hat{\boldsymbol{w}}$ are respectively left and right singular vectors of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$.

Remark 1.2.2 The SVD of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ is not unique (actually $\widehat{\mathbb{D}}_\omega$ is unique but not $\widehat{\mathbb{V}}_\omega$ and $\widehat{\mathbb{W}}_\omega$). This is obvious if at least one eigenvalue is degenerate, that is, if the dimension of the associated space of right (respectively, left) singular vectors is greater than one. On the other hand, for a simple (or non-degenerate) singular value, the right and left singular vectors are unique up to a multiplication by a unit complex number. Indeed it is readily seen that if a pair $(\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}})$ satisfies (1.14), then so does $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \, \hat{\boldsymbol{v}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \, \hat{\boldsymbol{w}})$ for all $\phi \in \mathbb{R}$.

Remark 1.2.3 The singular values of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ are the square roots of the eigenvalues of the positive hermitian matrix $\widehat{\mathbb{S}}_\omega^* \, \widehat{\mathbb{S}}_\omega$ and the right singular vectors of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ coincide with the eigenvectors of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega^* \, \widehat{\mathbb{S}}_\omega$. The initial presentation of the DORT method (see, e.g., [95, 97]) consisted in the diagonalization of the latter matrix, called the *time reversal operator* because it was derived from an iterative TR process. The basic loop of this process consists of the following steps : for given input signals $\hat{\boldsymbol{q}}$, the array of transducers first emit an incident wave ; the associated scattered wave in then measured, which yields $\widehat{\mathbb{S}}_\omega \, \hat{\boldsymbol{q}}$; and finally this measure is time-reversed, which amounts to a conjugation in the frequency domain (see (1.22)). The time-reversed measure can then be used to re-emit a new incident wave. The time reversal operator $\widehat{\mathbb{T}}_\omega$ describes two successive iterations of this loop, that is,

$$\widehat{\mathbb{T}}_\omega \, \hat{\boldsymbol{q}} := \overline{\widehat{\mathbb{S}}_\omega \, \overline{\widehat{\mathbb{S}}_\omega \, \hat{\boldsymbol{q}}}} = \overline{\widehat{\mathbb{S}}_\omega} \, \widehat{\mathbb{S}}_\omega \, \hat{\boldsymbol{q}} \quad \text{so} \quad \widehat{\mathbb{T}}_\omega = \overline{\widehat{\mathbb{S}}_\omega} \, \widehat{\mathbb{S}}_\omega = \widehat{\mathbb{S}}_\omega^* \, \widehat{\mathbb{S}}_\omega,$$

where the last equality follows from the symmetry of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$.

The main interest of the DORT method lies in the selective focusing properties related to the singular vectors of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$. In our context of point-like scatterers, it is well understood [65, 95, 97] that if the reference medium is homogeneous and if the scatterers are distant enough from each other (they are often referred to as *ideally resolved* in this case), then

1. the number of scatterers P is equal to the number of nonzero singular values of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ (provided that $P \leq N$ and that the rank of $\widehat{\mathbb{G}}_\omega$ is equal to P, which excludes some exceptional situations such as scatterers located symmetrically with respect to the array) ;
2. when these singular values are simple, each right singular vector (column of $\widehat{\mathbb{W}}_\omega$) associated with each nonzero singular value generates a wave which focuses selectively on each scatterer.

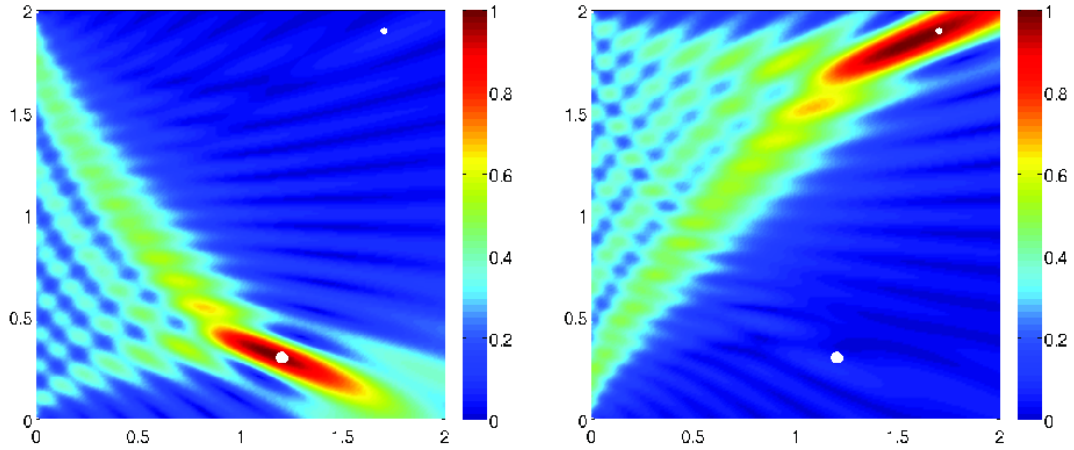

FIGURE 1.1 – Modulus of the incident field generated by the right singular vectors of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ associated with the dominant (left) and second (right) singular values. Case of a homogeneous medium with $\omega = 40$.

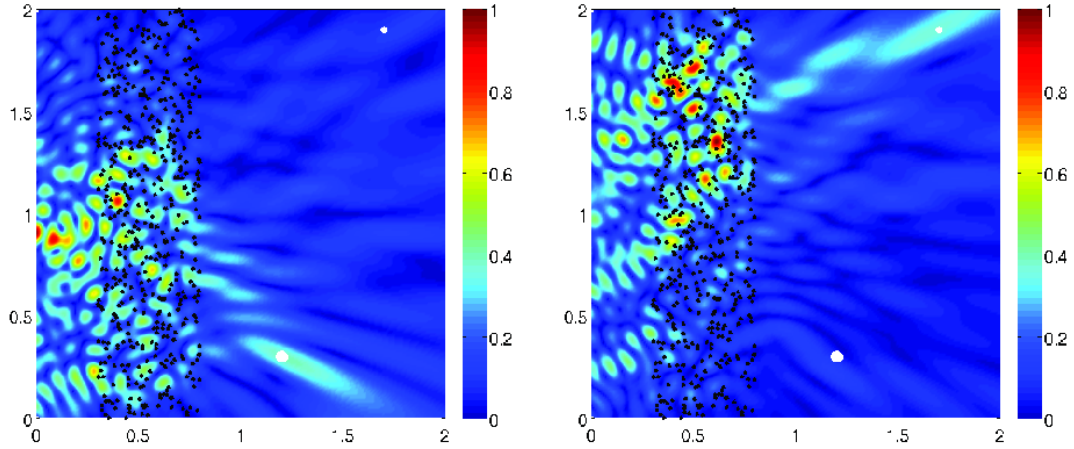

FIGURE 1.2 – Same as Figure 1.1 in the case of a scattering medium with $\omega = 40$.

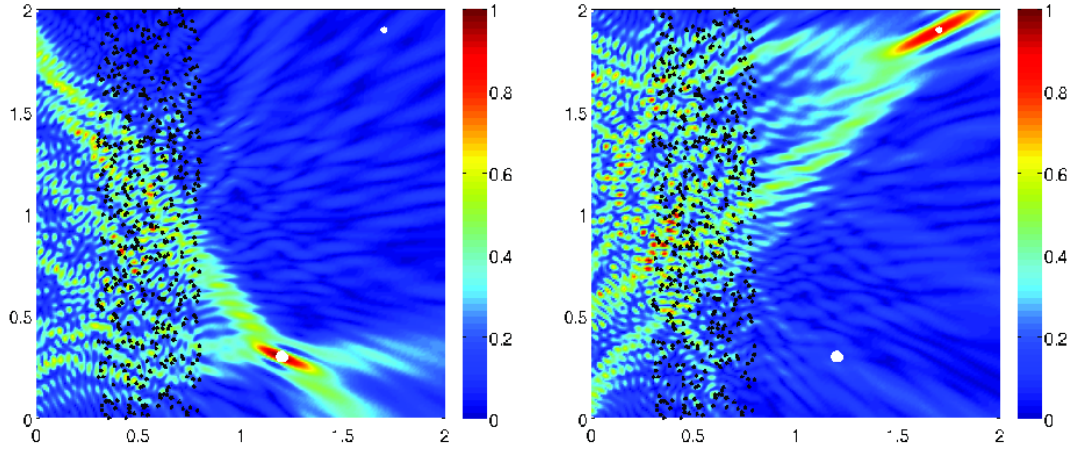

FIGURE 1.3 – Same as Figure 1.2 for $\omega = 90$.

Figures 1.1 to 1.3 illustrate these results by some numerical experiments in the two-dimensional case. We first consider the case of a homogeneous medium (i.e., $c \equiv 1$) filling the whole plane $\mathbb{R}^2$. The part of the plane represented on each figure is the square $[0,2] \times [0,2]$. Our array is composed of 128 transducers ($N = 128$) regularly distributed along the segment $\{0\} \times [0,2]$ which corresponds to the left edge of each figure. Two scatterers ($P = 2$), with respective diameters 2×10^{-3} and 10^{-3}, are located at $(1.2, 0.3)$ and $(1.7, 1.9)$ respectively. They are represented by white disks (not to scale). The time-harmonic scattering operator has two non-zeros singular values in this case. For the circular frequency $\omega = 40$, that is, a wavelength $\lambda = 2\pi/\omega \approx 0.16$, Figure 1.1 shows the modulus of the incident field generated by the associated singular vectors. We clearly see the spatial focusing effect : the field becomes maximal in an elliptical area centered at each scatterer, generally called the *focal spot*. If ℓ denotes the length of the array (here $\ell = 2$) and d is the distance between the array and the considered scatterer, the transverse radius of this area is given by $\lambda d/\ell$ (Rayleigh resolution formula, see, e.g., [22]) provided that $\lambda \ll \ell \ll d$. For instance $\lambda d/\ell \approx 0,1$ for the biggest scatterer, which is consistent with the observed focal spot though the assumption $\ell \ll d$ is not fulfilled.

In Figures 1.2 and 1.3, we consider the case where a scattering medium is located between the array and the scatterers. Here our scattering medium consists of 500 point-like scatterers with same diameter 2×10^{-4} (represented by black points) randomly displayed in the rectangle $[0.3, 0.8] \times [0, 2]$. In this situation, the Green's function of the reference medium appears as a perturbation of the Green's function of the homogeneous medium :

$$\hat{G}(x, y, \omega) = \hat{G}_{\text{hom}}(x, y, \omega) + \hat{G}_{\text{sc}}(x, y, \omega) \tag{1.15}$$

where the perturbation $\hat{G}_{\text{sc}}(x, y, \omega)$ can be computed by the Foldy–Lax model described in section 1.2.1, which requires us to invert the 500×500 matrix involved in equation (1.10). Figure 1.2 represents again the modulus of the incident field generated by the singular vectors associated with the non-zero eigenvalues of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ for the same circular frequency $\omega = 40$ as in Figure 1.1. We see that the presence of the scattering medium has damaged considerably the spatial focusing effect. Focal spots are still observed, but their intensity is reduced significantly, for the acoustic field seems to be trapped in the scattering medium. Figure 1.3 shows that for the higher circular frequency $\omega = 90$, spatial focusing is recovered.

The physical notions of *ballistic* and *diffusive* regimes (see, e.g., [48]) can help us to interpret these numerical observations. We have to compare the thickness L of the scattering medium with the mean free path which is given here by

$$L_{\text{fp}} := \frac{4\omega}{\mathcal{N}\,|\sigma(\omega)|^2} \tag{1.16}$$

where $\mathcal{N}$ is the number of scatterers per unit surface and $\sigma(\omega)$ is the reflectivity coefficient defined in (1.8). The so-called *ballistic* regime corresponds to the case where $L \ll L_{\text{fp}}$. In such a situation, when a plane wave crosses the scattering medium, its direction of propagation is not much affected and the perturbation of the plane wave essentially consists in the specular reflections on the scatterers. Higher order successive reflections are negligible. On the other hand, when $L \gg L_{\text{fp}}$, the latter may become significant, which leads to resonant phenomena inside the scattering medium. In such a *diffusive* regime, the structure of a wave crossing the medium is strongly perturbed. In the case of Figure 1.2 ($\omega = 40$), we have $L_{\text{fp}} \approx 0.28$ whereas $L = 0.5$, which rather corresponds to the diffusive regime. In the case of Figure 1.3 ($\omega = 90$), we have $L_{\text{fp}} \approx 0.47$, which corresponds to an intermediate regime. In particular, resonances are still observed in the scattering medium. By increasing the frequency further, we would enter the ballistic regime and the focus quality would improve.

1.3 Space-time focusing

1.3.1 From frequency domain to time domain

A phase synchronization issue.

We arrive now at the main purpose of the paper, which is to take advantage of the selective focusing properties of the DORT method in the frequency domain in order to construct a time-dependent wave which focuses in space and time on one given scatterer chosen as a target. Suppose that for all frequency ω in a given frequency band $[\omega_1, \omega_2]$ (which depends on the specifications of the transducers), we know a triplet $(\lambda(\omega), \hat{\boldsymbol{v}}(\omega), \hat{\boldsymbol{w}}(\omega))$ of singular elements of the scattering operator corresponding to our target : $\lambda(\omega) > 0$ is a singular value, which is assumed simple for simplicity, and the associated left and right singular vectors $\hat{\boldsymbol{v}}(\omega)$ and $\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)$ are unit vectors of $\mathbb{C}^N$ such that

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega \hat{\boldsymbol{w}}(\omega) = \lambda(\omega)\, \hat{\boldsymbol{v}}(\omega) \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbb{S}}_\omega^* \hat{\boldsymbol{v}}(\omega) = \lambda(\omega)\, \hat{\boldsymbol{w}}(\omega). \tag{1.17}$$

The fact that these singular elements correspond to our target means that the time-harmonic wave generated by the right singular vector $\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)$ focuses spatially on this target. As this spatial focusing occurs for all $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, it holds true for any frequency superposition of these waves. So if we consider a pair (χ, ϕ) of real-valued functions defined on $[\omega_1, \omega_2]$, the time-dependent input signal defined by

$$\boldsymbol{q}_\phi(t) := \frac{1}{\pi}\, \mathrm{Re} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}\, \hat{\boldsymbol{w}}(\omega)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega \tag{1.18}$$

generates a time-dependent wave which focuses in space on our target. But can we choose these functions so that the above superposition of time-harmonic signals yields also time focusing ? Instead of searching for a pair (χ, ϕ), we assume here that χ is known and we restrict ourselves to the determination of the phase function $\phi : [\omega_1, \omega_2] \mapsto \mathbb{R}$ (which justifies the fact that χ is not involved in the notation $\boldsymbol{q}_\phi$ above). In other words, the issue we are faced with is to synchronize the singular vectors of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ in order to achieve space–time focusing (recall that $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}\, \hat{\boldsymbol{w}}(\omega)$ is a right singular vector of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ whatever $\phi(\omega)$, see remark 1.2.2).

Continuity assumptions in the frequency domain.

From a practical point of view, the signals $\boldsymbol{q}_\phi(t)$ we are interested in must have a finite duration of emission. However this is incompatible with the expression (1.18) of $\boldsymbol{q}_\phi(t)$. Indeed, from (1.3), it is clear that the Fourier transform $\hat{\boldsymbol{q}}_\phi$ of $\boldsymbol{q}_\phi$ is given by

$$\hat{\boldsymbol{q}}_\phi(\omega) = \begin{cases} \chi(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}\, \hat{\boldsymbol{w}}(\omega) & \text{if } \omega \in [\omega_1, \omega_2], \\ 0 & \text{if } \omega \in \mathbb{R}^+ \setminus [\omega_1, \omega_2], \\ \overline{\hat{\boldsymbol{q}}_\phi(-\omega)} & \text{if } \omega \in \mathbb{R}^-. \end{cases} \tag{1.19}$$

In particular $\hat{\boldsymbol{q}}_\phi$ has a compact support in the frequency domain, so $\boldsymbol{q}_\phi$ cannot be compactly supported in the time domain since it is an entire function of t. However $\boldsymbol{q}_\phi(t)$ may be close to 0 outside a bounded interval provided that $\hat{\boldsymbol{q}}_\phi(\omega)$ is regular enough (recall that the Riemann–Lebesgue theorem tells us that if $t^n\, \boldsymbol{q}_\phi(t) \in L^1(\mathbb{R})$, then $\hat{\boldsymbol{q}}_\phi(\omega) \in C^n(\mathbb{R})$). In such a case, (1.18) can be considered as an approximation of a compactly supported signal.

It is then natural to assume at least that $\hat{\boldsymbol{q}}_\phi(\omega) \in C^0(\mathbb{R})$. This means on the one hand that χ and ϕ both belong to $C^0([\omega_1, \omega_2])$ and $\chi(\omega_1) = \chi(\omega_2) = 0$, on the other hand that $\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)$ depends also continuously on $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. This assumption is not restrictive. Indeed we can

assume without loss of generality that our family of singular elements is continuous in the sense that $\lambda(\omega)$, $\hat{\boldsymbol{v}}(\omega)$ and $\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)$ are continuous functions of ω. One can always find such a family. This follows from classical arguments of perturbation theory [70] using the fact that $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ is a continuous (even C^∞) function of ω (which derives from the regularity of the time-harmonic Green's function $\hat{G}(\cdot,\cdot,\omega)$).

A particular singular value decomposition.

The phase choice we propose is related to the symmetry of the scattering operator (see remark 1.2.1). Indeed, this property implies that there exists a particular SVD, called the symmetric singular value decomposition (SSVD) or Takagi's factorization [67], which writes as

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \overline{\widehat{\mathbb{U}}_\omega}\, \widehat{\mathbb{D}}_\omega\, \widehat{\mathbb{U}}_\omega^* \tag{1.20}$$

where $\widehat{\mathbb{D}}_\omega$ is the diagonal matrix composed of the singular values and $\widehat{\mathbb{U}}_\omega$ is unitary. This decomposition is a particular version of (1.13) with $\widehat{\mathbb{W}}_\omega = \overline{\widehat{\mathbb{V}}_\omega} = \widehat{\mathbb{U}}_\omega$, i.e., the right and left singular vectors are conjugate of each other. From a practical point of view, the way to obtain the SSVD from a given SVD is straightforward, especially for simple singular values. Indeed, as $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ is symmetric, conjugating (1.17) yields

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega^* \overline{\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)} = \lambda(\omega)\, \overline{\hat{\boldsymbol{v}}(\omega)} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbb{S}}_\omega \overline{\hat{\boldsymbol{v}}(\omega)} = \lambda(\omega)\, \overline{\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)}.$$

This shows that if $(\hat{\boldsymbol{v}}(\omega), \hat{\boldsymbol{w}}(\omega))$ is a pair of left and right singular vectors, then so is $(\overline{\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)}, \overline{\hat{\boldsymbol{v}}(\omega)})$. For a simple singular value $\lambda(\omega)$, we deduce from remark 1.2.2 that there exists $\theta(\omega) \in \mathbb{R}$ such that

$$(\overline{\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)}, \overline{\hat{\boldsymbol{v}}(\omega)}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\omega)}\, (\hat{\boldsymbol{v}}(\omega), \hat{\boldsymbol{w}}(\omega)).$$

As a consequence,

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega \hat{\boldsymbol{w}}(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}\, \lambda(\omega)\, \overline{\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)}.$$

This relation tells us how to change the phase of our right singular vector in order to obtain a singular vector of the SSVD (1.20). Indeed by setting

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\omega)/2}\, \hat{\boldsymbol{w}}(\omega),$$

we see that

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega) = \lambda(\omega)\, \overline{\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega)}, \tag{1.21}$$

which means that $\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega)$ is a singular vector of the SSVD. Note that contrary to the singular vectors of a SVD (see remark 1.2.2), $\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega)$ is defined uniquely up to a multiplication by -1.

In the sequel our aim is to show that if we choose this particular singular vector $\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega)$ instead of an arbitrary one $\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)$ in the definition (1.18) of $\boldsymbol{q}_\phi(t)$, then the optimal choice for ϕ is either $\phi \equiv 0$ or $\phi \equiv \pi/2$. We begin in the next section by proving that both phase functions lead to the minimum of a function which describes a time reversal process. But do they yield an *optimal focusing*? A ideal way to give a mathematical answer to this question would be to prove that these constant phase functions lead to the minimum of a function which would quantify the focus quality. Unfortunately, we were not able to find such a function. The only mathematical answer we can give is based on the connection between these constant phase functions and the time reversal experiment mentioned in the introduction. It is the subject of §1.3.3. We finally present in §1.3.4 some numerical results which confirm the space–time focusing effect.

1.3.2 Optimality of a time reversal gap functional

Hereafter we denote by $\mathbb{J}$ the time reversal transformation with origin $t = 0$: for every real-valued function $f = f(t)$, function $\mathbb{J}f$ is simply given by $\mathbb{J}f(t) := f(-t)$. Using the Fourier transform, it is readily seen that $\mathcal{F}\mathbb{J}f(\omega) = \overline{\mathcal{F}f(\omega)}$, or equivalently

$$\mathbb{J} = \mathcal{F}^{-1}\,\widehat{\mathbb{J}}\,\mathcal{F} \quad \text{where} \quad \widehat{\mathbb{J}}\hat{f} := \overline{\hat{f}}\,. \tag{1.22}$$

This is nothing but the well-known fact that time reversal becomes complex conjugation in the frequency domain.

Our idea of using the SSVD originates from a heuristic argument which can be explained as follows. Suppose that the array emits several short pulse waves, respectively at times t_j for $j = 1, \dots, J$, that propagate along different paths leading to the aimed scatterer. Let T_j denote the travel time related to the j-th path. After the interaction of these incident waves with the scatterer, suppose that the associated scattered wave propagate back to the array along the same respective paths. Thus they will reach the array respectively at times $t'_j := t_j + 2T_j$ for $j = 1, \dots, J$. Obviously, the incident pulse waves will arrive at the same time t_* on the scatterer only if $t_j + T_j = t_*$ for all j. In this case, the times of emission and reception become symmetric with respect to t_* in the sense that $t'_j - t_* = t_* - t_j$ for all j. More precisely, up to a scaling factor related to the reflectivity of the scatterer, the input and the output are time-reversed with respect to the focus time t_*.

This very simple model prompted us to search for phase functions such that this time reversal property could be *nearly* satisfied. This is the subject of Theorem 1.3.1 below which leads us to the SSVD in the case where the aimed focus time is $t_* = 0$. Actually the connection between this time reversal property and the SSVD can be seen directly in the characterization (1.21) of the singular vectors of the SSVD, which can be written $\widehat{\mathbb{S}}_\omega\,\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega) = \lambda(\omega)\,\widehat{\mathbb{J}}\,\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega)$. This relation means that when the input signal sent to the transducers is $\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega)$, then the measure of the scattered field is, up to a positive real factor $\lambda(\omega)$, the time reversed input signal. As relation (1.21) holds for all frequencies $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, all time-harmonic signals are time-reversed with respect to the same origin $t = 0$. To a certain extent, this means that working with singular vectors of the SSVD amounts to synchronizing the time-harmonic emitted waves at time $t = 0$. In the above comments, one can replace $\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega)$ by $\mathrm{i}\,\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega)$. The only change is that the positive real factors become negative. These are the two possible choices which yield a synchronization at $t = 0$.

Theorem 1.3.1 *Suppose that* $\big\{(\lambda(\omega), \hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^N;\ \omega \in [\omega_1, \omega_2]\big\}$ *is a continuous family of singular elements of the SSVD of* $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$. *Let* $\chi \in C^0([\omega_1, \omega_2])$ *chosen such that* $\chi(\omega_1) = \chi(\omega_2) = 0$. *For all* $(\mu, \phi) \in \mathbb{R} \times C^0([\omega_1, \omega_2])$, *define*

$$\mathcal{G}(\mu, \phi) := \|(\mathbb{S} - \mu\,\mathbb{J})\boldsymbol{q}_\phi\|^2_{\mathbb{R}_t;\,\mathbb{C}^N} := \int_{\mathbb{R}} \|(\mathbb{S} - \mu\,\mathbb{J})\boldsymbol{q}_\phi(t)\|^2_{\mathbb{C}^N}\,\mathrm{d}t$$

where $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^N}$ *denotes the Euclidean norm in* $\mathbb{C}^N$ *and*

$$\boldsymbol{q}_\phi(t) := \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}\,\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathrm{s}}(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Then the minimum of $\mathcal{G}(\mu, \phi)$ *is reached at* (μ_+, ϕ_+) *and* (μ_-, ϕ_-) *where*

$$\mu_\pm := \pm\int_{\omega_1}^{\omega_2} \lambda(\omega)\,\chi(\omega)^2\,\mathrm{d}\omega\left(\int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi(\omega)^2\,\mathrm{d}\omega\right)^{-1}, \quad \phi_+ \equiv 0 \quad \textit{and} \quad \phi_- \equiv \frac{\pi}{2}.$$

Proof. Thanks to (1.7) and (1.22), Parseval's identity yields

$$\mathcal{G}(\mu,\phi) = \frac{1}{2\pi}\,\|(\widehat{\mathbb{S}} - \mu\,\widehat{\mathbb{J}})\hat{\boldsymbol{q}}_\phi\|^2_{\mathbb{R}_\omega;\,\mathbb{C}^N} = \frac{1}{2\pi}\left(a_\phi\,\mu^2 - 2b_\phi\,\mu + c_\phi\right), \tag{1.23}$$

where $\hat{\boldsymbol{q}}_\phi := \mathcal{F}\boldsymbol{q}_\phi$ and

$$a_\phi := \|\hat{\boldsymbol{q}}_\phi\|^2_{\mathbb{R}_\omega;\,\mathbb{C}^N},\quad b_\phi := \mathrm{Re}(\widehat{\mathbb{S}}\,\hat{\boldsymbol{q}}_\phi\,,\,\widehat{\mathbb{J}}\hat{\boldsymbol{q}}_\phi)_{\mathbb{R}_\omega;\,\mathbb{C}^N}\ \text{ and }\ c_\phi := \|\widehat{\mathbb{S}}\,\hat{\boldsymbol{q}}_\phi\|^2_{\mathbb{R}_\omega;\,\mathbb{C}^N}.$$

Note that the expression of a_ϕ follows from the fact that $\widehat{\mathbb{J}}$ is an isometry. From (1.19) and (1.21), we deduce

$$\begin{aligned}
a_\phi &= 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi(\omega)^2\,\mathrm{d}\omega,\\
b_\phi &= 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} \lambda(\omega)\,\chi(\omega)^2\,\cos(2\phi(\omega))\,\mathrm{d}\omega\ \text{ and}\\
c_\phi &= 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} \lambda(\omega)^2\,\chi(\omega)^2\,\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

For a fixed ϕ, the minimum of the second-order polynomial in the right-hand side of (1.23) is reached at $\mu_\phi := b_\phi/a_\phi$. Moreover

$$\mathcal{G}(\mu_\phi,\phi) = \frac{1}{2\pi}\left(c_\phi - \frac{b_\phi^2}{a_\phi}\right).$$

As a_ϕ and c_ϕ do not actually depend on ϕ, the minimum of this function is reached for the maximum of b_ϕ^2, that is, when $\cos(2\phi(\omega)) = \pm 1$. Hence $\phi(\omega) = k\pi/2$ for some integer k. And of course it is sufficient to consider both cases $k = 0$ and $k = 1$ since the other cases correspond to the same signals $\boldsymbol{q}_\phi(t)$ or their opposites. ∎

Function $\mathcal{G}(\mu,\phi)$ is a *time reversal gap functional* since it quantifies the gap between the measure of the scattered field and the time-reversed input signal rescaled by a real factor. If $\lambda(\omega)$ was constant in the whole frequency band $[\omega_1,\omega_2]$, say $\lambda(\omega) = \lambda_\mathrm{c}$, we would have $\mu_\pm = \pm\lambda_\mathrm{c}$ and $\mathcal{G}(\mu_\pm,\phi_\pm) = 0$. Hence $\boldsymbol{q}_{\phi_\pm}(t)$ would be an eigenvector of the operator $\mathbb{J}\,\mathbb{S}$ associated with the eigenvalue $\pm\lambda_\mathrm{c}$. In this case, the TR property satisfied in the frequency domain holds true in the time domain : the measure of the time-dependent scattered field is, up to a real factor $\pm\lambda_\mathrm{c}$, the time-reversed input signal. Theorem 1.3.1 tells us that in the general case, the phase functions $\phi_+ \equiv 0$ and $\phi_- \equiv \pi/2$ bring us as close as possible to this situation : $\boldsymbol{q}_{\phi_\pm}(t)$ is close to some kind of eigenvector of $\mathbb{J}\,\mathbb{S}$. But of course, this is not really an eigenvector since the time reversal gap $\varepsilon := \mathcal{G}(\mu_\pm,\phi_\pm)$ does not vanish in general. It can be interpreted by means of the notion of *pseudospectra* [107] : $\mu_\pm$ belongs to the ε-pseudospectrum of $\mathbb{J}\,\mathbb{S}$ and $\boldsymbol{q}_{\phi_\pm}(t)$ is a corresponding ε-pseudoeigenvector.

1.3.3 Space–time focusing : from active sources to passive scatterers

In the previous section, the link between Theorem 1.3.1 and space–time focusing is only based on a heuristic argument. The purpose of this section is to reinforce this link by a mathematical argument : we show that under certain conditions, the optimal signals of Theorem 1.3.1 yield the same space–time refocusing as the time reversal experiment for active sources which is mentioned in the introduction.

Mathematical interpretation of the time reversal experiment.

Suppose that at some point $y \in \mathbb{R}^d$, an active point-like source emits a short pulse defined by

$$v_{\rm act}^{(\ell)}(x,t) := \frac{1}{\pi}\,{\rm Re}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi_{\rm act}(\omega)\,(-{\rm i}\omega)^\ell\,\hat G(x,y,\omega)\,{\rm e}^{-{\rm i}\omega t}\,{\rm d}\omega, \tag{1.24}$$

where $\ell \in \mathbb{N}$ and $\chi_{\rm act}$ is a cutoff function chosen as in Theorem 1.3.1. This wave can be seen as a spectral truncation of a time-derivative of the time-dependent Green's function since $v_{\rm act}^{(\ell)}(x,t) = (\partial^\ell/\partial t^\ell)G(x,y,t)$ if $(\omega_1,\omega_2) = (0,+\infty)$ and $\chi_{\rm act} \equiv 1$ (see (1.3)). Except in this latter situation, $v_{\rm act}^{(\ell)}$ is not causal but it can be considered as an approximation of a causal function for a large enough frequency band (ω_1,ω_2). The measure of $v_{\rm act}^{(\ell)}$ by the array is then given by

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}^{(\ell)}(t) \;&=\; \frac{1}{\pi}\,{\rm Re}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi_{\rm act}(\omega)\,(-{\rm i}\omega)^\ell\,\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\,{\rm e}^{-{\rm i}\omega t}\,{\rm d}\omega \quad \text{where} \\ \hat{\boldsymbol{g}}(\omega) &:= (\hat G(x_1,y,\omega),\dots,\hat G(x_N,y,\omega))^\top. \end{aligned} \tag{1.25}$$

The idea of the TR experiment consists in using the time-reversed measure

$$\mathbb{J}\,\boldsymbol{q}^{(\ell)}(t) = \boldsymbol{q}^{(\ell)}(-t) = \frac{1}{\pi}\,{\rm Re}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi_{\rm act}(\omega)\,({\rm i}\omega)^\ell\,\overline{\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)}\,{\rm e}^{-{\rm i}\omega t}\,{\rm d}\omega \tag{1.26}$$

as input signals to emit a new wave

$$v_{\rm back}^{(\ell)}(x,t) := \frac{1}{\pi}\,{\rm Re}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi_{\rm act}(\omega)\,({\rm i}\omega)^\ell\,\left(\sum_{n=1}^N \overline{\hat G(x_n,y,\omega)}\,\hat G(x,x_n,\omega)\right){\rm e}^{-{\rm i}\omega t}\,{\rm d}\omega.$$

The fact that this wave propagates back to the original source can be understood easily in the case of a full aperture spherical array located far enough from the inhomogeneities of the medium. Assume that the family of points x_n is distributed regularly on the surface $S_R := \{z \in \mathbb{R}^d;\ \|z\| = R\}$. Hence, in the above formula, the sum can be interpreted as an approximation of an integral on S_R, that is,

$$\sum_{n=1}^N \overline{\hat G(x_n,y,\omega)}\,\hat G(x,x_n,\omega) \approx C\int_{S_R} \overline{\hat G(z,y,\omega)}\,\hat G(x,z,\omega)\,{\rm d}S(z),$$

where $C > 0$ depends on N and the space dimension d. The asymptotic behaviour of the latter integral for large R follows from the Helmholtz–Kirchhoff formula [53] :

$$\int_{S_R} \overline{\hat G(z,y,\omega)}\,\hat G(x,z,\omega)\,{\rm d}S(z) \;\overset{R\to+\infty}{\approx}\; \frac{\hat G(x,y,\omega) - \overline{\hat G(x,y,\omega)}}{2{\rm i}\omega} \quad \text{for } \|x\| \ll R.$$

As a consequence,

$$v_{\rm back}^{(\ell)}(x,t) \approx \frac{C}{2\pi}\,{\rm Re}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi_{\rm act}(\omega)\,({\rm i}\omega)^{\ell-1}\,\left(\hat G(x,y,\omega) - \overline{\hat G(x,y,\omega)}\right){\rm e}^{-{\rm i}\omega t}\,{\rm d}\omega.$$

Going back to the expression (1.24) of $v_{\rm act}^{(\ell)}$, we conclude that

$$v_{\rm back}^{(\ell)}(x,t) \approx \frac{C}{2}\left((-1)^{\ell-1}v_{\rm act}^{(\ell-1)}(x,t) - v_{\rm act}^{(\ell-1)}(x,-t)\right).$$

In this expression, $v_{\rm act}^{(\ell-1)}(x,t)$ approximates a time-derivative of the Green's function, which is causal, whereas the other term $v_{\rm act}^{(\ell-1)}(x,-t)$ represents the time-reversed of this function and then appears as an approximation of an anti-causal function. As a consequence,

$$v_{\rm back}^{(\ell)}(x,t) \approx \begin{cases} -\dfrac{C}{2}\, v_{\rm act}^{(\ell-1)}(x,-t) & \text{if } t<0, \\ (-1)^{\ell-1}\dfrac{C}{2}\, v_{\rm act}^{(\ell-1)}(x,t) & \text{if } t>0. \end{cases}$$

This means that for $t<0$, $v_{\rm back}^{(\ell)}$ behaves like a converging wave which propagates towards the initial source y and refocuses at this point at time $t=0$, whereas for $t>0$, $v_{\rm back}^{(\ell)}$ diverges from y. This gives us a mathematical interpretation of the TR experiment.

Back to passive scatterers.

Let us now come back to our problem and suppose for simplicity that there is only one scatterer located at y. In this case, the expression (1.12) of the time-harmonic scattering operator simplifies as

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \sigma(\omega)\ \hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\ \hat{\boldsymbol{g}}(\omega)^\top, \tag{1.27}$$

where $\sigma(\omega)$ is the reflectivity coefficient of the scatterer (see (1.8)) and $\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)$ is defined in (1.25). This shows in particular that the rank of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ is 1. Moreover,

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega\ \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(\sigma(\omega))/2}\,\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)} = |\sigma(\omega)|\,\|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}^2\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(\sigma(\omega))/2}\,\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\right),$$

which means that

$$\lambda(\omega) := |\sigma(\omega)|\,\|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}^2 \quad \text{and} \quad \hat{\boldsymbol{w}}_{\rm s}(\omega) := \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg(\sigma(\omega))/2}\,\overline{\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)}}{\|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}}$$

are singular elements of the SSVD of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$. From (1.8), we infer that $\arg(\sigma(\omega))$ either vanishes (if $d=3$) or is small (if $d=2$: the asymptotic of $H_0^{(1)}$ for small arguments shows that $\arg(\sigma(\omega)) = O((\ln\varepsilon)^{-1})$). Hence $\hat{\boldsymbol{w}}_{\rm s}(\omega) \approx \overline{\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)}/\|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}$. Thus the respective behaviours of the optimal signals of Theorem 1.3.1 are given by

$$\boldsymbol{q}_{\phi_\pm}(t) \approx \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Re}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \chi(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_\pm}\,\frac{\overline{\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)}}{\|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega,$$

where we recall that $\phi_+ \equiv 0$ and $\phi_- \equiv \pi/2$. Comparing the latter formula with (1.26), we see that if both cutoff functions χ and $\chi_{\rm act}$ satisfy

$$\chi(\omega) = \chi_{\rm act}(\omega)\,\omega^\ell\,\|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|_{\mathbb{C}^N},$$

then, up to a change of sign, $\boldsymbol{q}_{\phi_+}(t)$ (respectively, $\boldsymbol{q}_{\phi_-}(t)$) behaves like $\boldsymbol{q}^{(\ell)}(-t)$ for even ℓ (respectively, odd ℓ). We conclude that the wave emitted by an optimal signal of Theorem 1.3.1 is similar to the back-propagating wave produced by the TR experiment when the initial wave is some spectral truncation of a time-derivative of the Green's function. In short, our method for passive scatterers yields some kind of optimal space–time focusing. This is justified above for one single scatterer. Using similar arguments as in [65], it is easy to see that this holds true for distant enough scatterers. The next section illustrates these results and also shows that the focus quality decreases if the scatterers become close.

1.3.4 Numerical results

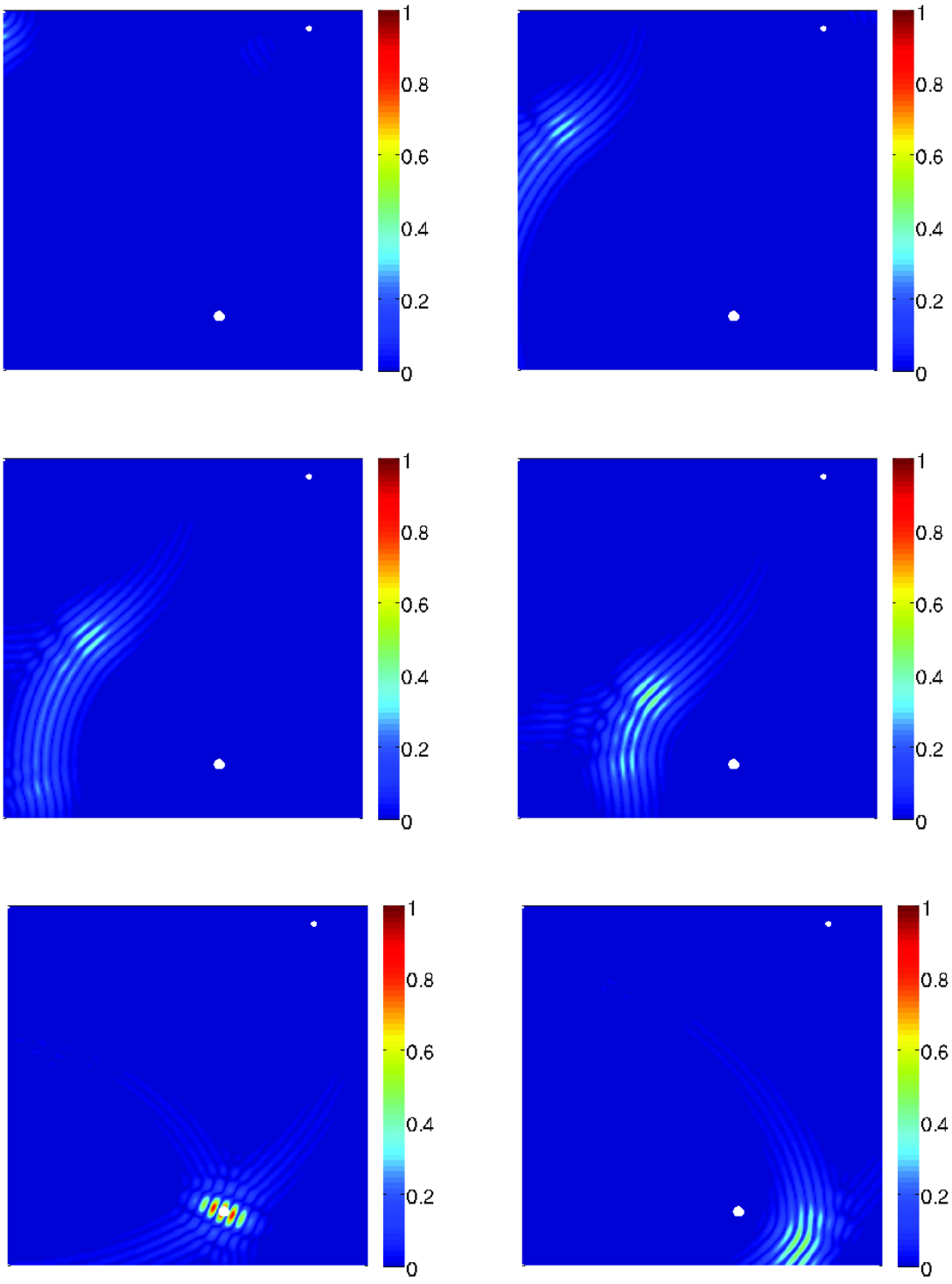

FIGURE 1.4 – In the case of a homogeneous medium, modulus of the field generated by the optimal signal $\boldsymbol{g}_{\phi_+}(t)$ of Theorem 1.3.1 at times $t = -2.0$, -1.4, -1.0, -0.6, 0.0 and 0.4 (the field is rescaled so that its modulus belongs to $[0, 1]$).

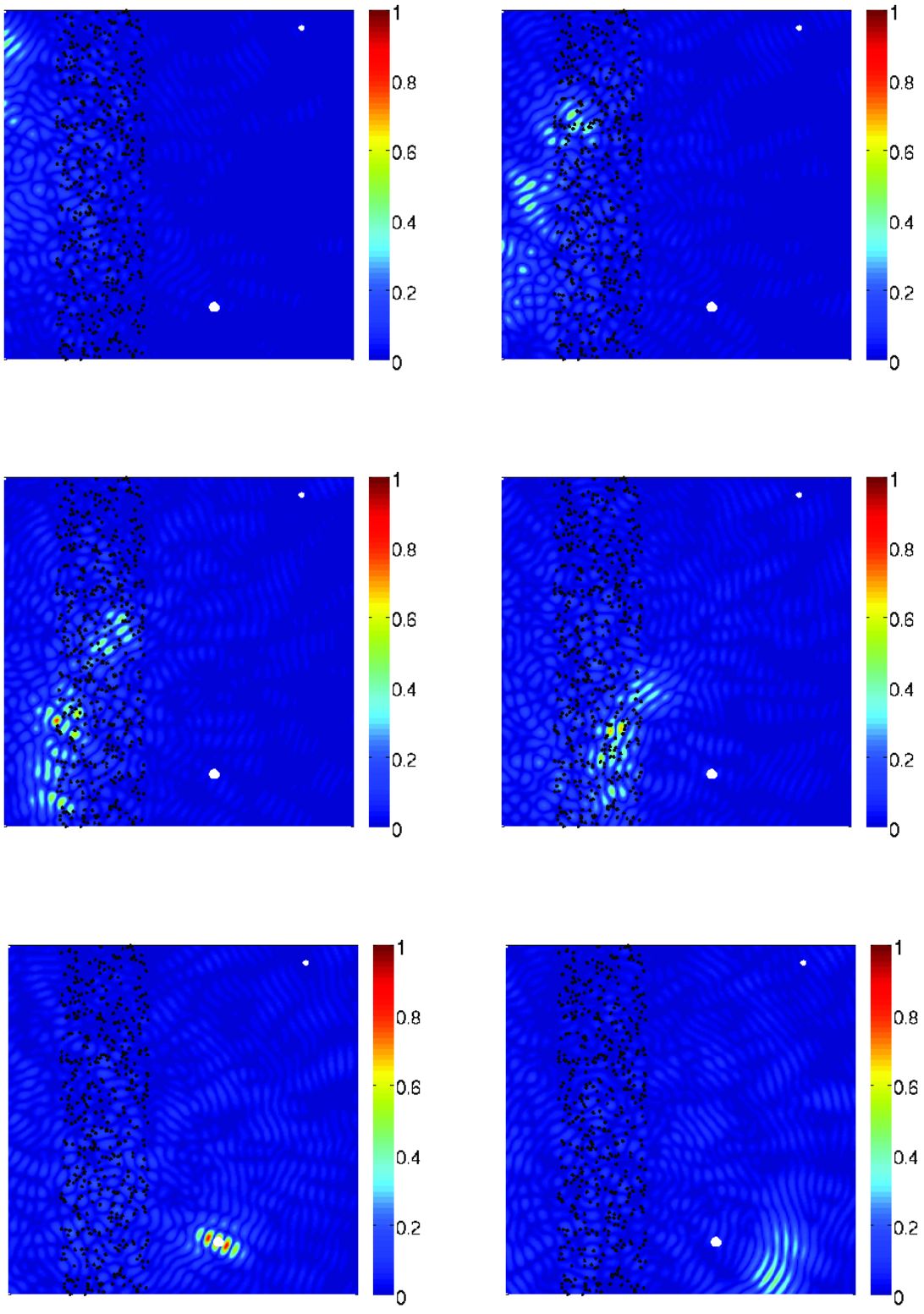

FIGURE 1.5 – Same as Figure 1.4 in the case of a scattering medium.

We finally present some numerical experiments which confirm the space–time focusing effect related to the optimal signals of Theorem 1.3.1. We consider the same geometrical configuration as in section 1.2.2. We use the family of singular vectors of the SSVD of $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ associated with the dominant eigenvalue (which focus in space on the biggest scatterer, located at (1.2,0.3)). The

cutoff function we have chosen is a truncated Gaussian function given by

$$\chi(\omega) = \mathbb{1}_{[\omega_1,\omega_2]}(\omega)\ \exp\left(\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\gamma^2}\right)$$

where $[\omega_1,\omega_2] = [20,100]$, $\omega_0 = 60$ and $\gamma = 10$. Note that strictly speaking, this function is not continuous at ω_1 and ω_2 as assumed in Theorem 1.3.1. However the Gaussian function is very small at these points (about 3×10^{-4}).

Figures 1.4 and 1.5 show the evolution of the wave generated by the optimal signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}(t)$ of Theorem 1.3.1. From (1.2), (1.3) and (1.4), this wave can be expressed as

$$v_{\rm inc}(x,t) = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Re}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left\{\sum_{n=1}^{N}\hat{q}_n(\omega)\,\hat{G}(x,x_n,\omega)\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

where $\hat{q}_1(\omega),\dots,\hat{q}_N(\omega)$ are the components of $\hat{\boldsymbol{q}}_{\phi_+}(\omega) = \mathcal{F}\boldsymbol{q}_{\phi_+}(\omega) = \chi(\omega)\,\hat{\boldsymbol{w}}_{\rm s}(\omega)$. The above frequency integral is approximated by a standard Simpson rule and $v_{\rm inc}(x,t)$ is computed at various times on a regular x-grid covering the square $[0,2]\times[0,2]$ represented on each picture.

In Figure 1.4, we first consider the case of a homogeneous medium. The space–time focusing appears very clearly : the array seems to emit an angular portion of a radial wave which propagates towards the target and concentrates near it at time $t = 0$. In this situation, the structure of the signal is very simple : Figure 1.6 (left) shows that all the transducers emit approximatively the same signal starting at different times which only depend on the distances between the transducers and the target.

Figure 1.5 illustrates the influence of the same scattering medium as in section 1.2.2, i.e., 500 point-like scatterers randomly displayed in the rectangle $[0.3,0.8]\times[0,2]$. Again space–time focusing is confirmed. The focal spot observed at time $t = 0$ is even slightly smaller than in the homogeneous case, which is the well-known *super-resolution* effect of a scattering medium (see, e.g., [9, 20]). On the other hand, the structure of the wave is strongly perturbed. Resonance phenomena are observed inside the scattering medium, which slow down the propagation of the wave. In order to compensate these effects, a part of the wave is emitted earlier so that the various components meet at the same time $t = 0$ near the target. This is shown in Figure 1.6 (right) where we recognize a main front whose shape is similar to the homogeneous case, but which is now preceded by an unstructured contribution.

The above comments remain valid if we use the optimal signal $\boldsymbol{q}_{\phi_-}(t)$ of Theorem 1.3.1 instead of $\boldsymbol{q}_{\phi_+}(t)$. Actually the differences between both cases are not so easy to detect. Figure 1.7 shows a zoom on the focal spots observed at $t = 0$ in the case of a homogeneous medium. We see that both focal spots are about the same size. They seem to be shifted by a quarter wavelength, which is consistent with the fact that in the frequency domain, both signals are in phase quadrature.

In order to quantify the focus quality, we propose an energy criterion which simply consists in comparing the acoustic energy concentrated in a given vicinity of the target with the total energy emitted by the array of transducers. Let $u = u(x,t)$ denote the wave emitted in the reference medium by the array for some input signal $\boldsymbol{q}(t)$ (see (1.2)). For a given box $B\subset\mathbb{R}^d$ around our target, we define a focus quality function by

$$\mathcal{Q}_B(t) := \frac{\mathcal{E}_B(t)}{\mathcal{E}_{\rm tot}} \quad \text{where} \quad \mathcal{E}_B(t) := \frac{1}{2}\int_B\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 + |\nabla u(x,t)|^2\,\mathrm{d}x \tag{1.28}$$

represents the local acoustic energy contained in B at time t (see (1.30)) and $\mathcal{E}_{\rm tot}$ stands for the total energy emitted by the array. As our array consists of point-like transducers, the fact

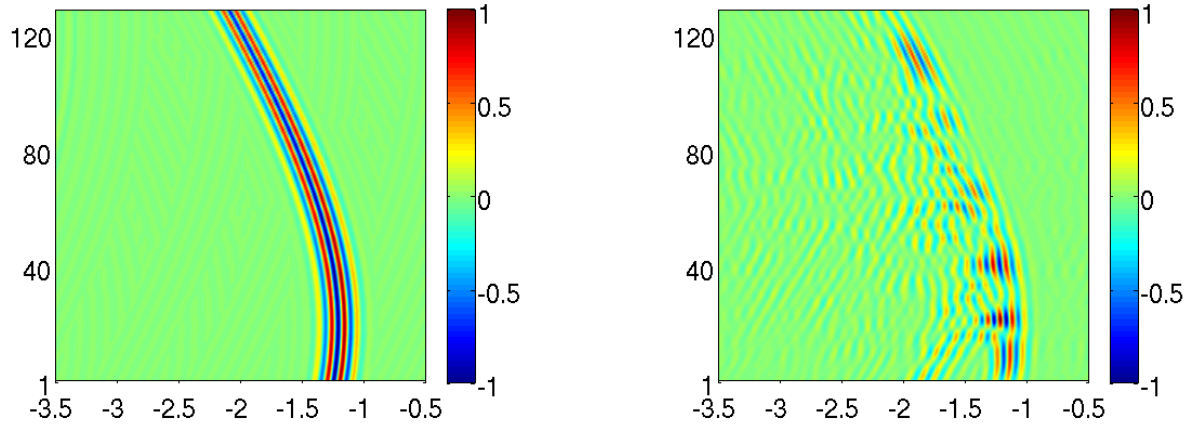

FIGURE 1.6 – Representation of the optimal signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}(t)$ of Theorem 1.3.1 (rescaled in $[-1,+1]$) in the homogeneous medium (left) and in the presence of the scattering medium (right). The horizontal coordinate is time and the vertical one is the transducer's number.

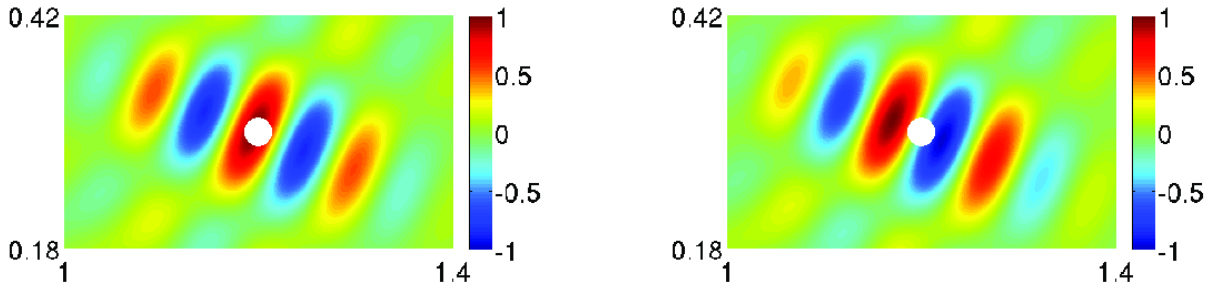

FIGURE 1.7 – In the case of a homogeneous medium, zoom in the box $[1.0, 1.4] \times [0.18, 0.42]$ of the focal spots obtained at time $t = 0$ with the optimal signals $\boldsymbol{q}_{\phi_+}(t)$ (left) and $\boldsymbol{q}_{\phi_-}(t)$ (right) of Theorem 1.3.1.

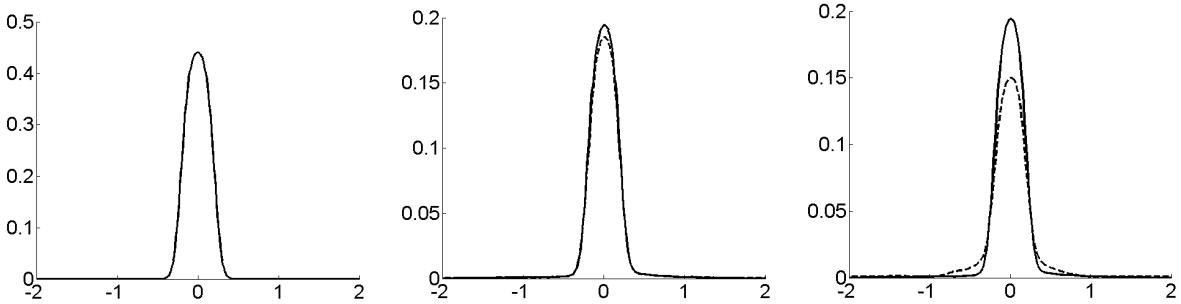

FIGURE 1.8 – Representation of the focus quality function $\mathcal{Q}_B(t)$ for $t \in [-2,+2]$ and the box B of Figure 1.7 in three configurations : the homogeneous medium of Figure 1.4 (left), the scattering medium of Figure 1.5 (middle) and the same scattering medium with the second scatterer moved at point $(0.5, 1.6)$ (right). For each case, the dashed line corresponds to the optimal signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}(t)$ of Theorem 1.3.1 and the solid line, the signal (1.26) of the TR experiment with $\ell = 0$ and $\chi_{act} = \chi$.

that $\mathcal{E}_{\rm tot}$ is finite is not obvious. As a matter of fact, we show in the appendix that during the emission, this energy is infinite, but becomes finite as soon as the transducers become silent (provided that the input signals are regular enough). A suitable expression of $\mathcal{E}_{\rm tot}$ is given in Proposition 1.4.1.

Figure 1.8 compares the focus quality functions computed for two signals : on the one hand, the optimal signal $\boldsymbol{g}_{\phi_+}(t)$ of Theorem 1.3.1 and on the other hand, the signal (1.26) of the TR experiment with $\ell = 0$ and $\chi_{act} = \chi$. On the left, we consider the same configuration as in Figure 1.4, that is, the case of the homogeneous medium. We see that both curves coincide, which is consistent with the results of section 1.3.3. The maximum of $\mathcal{Q}_B(t)$ is reached at time $t = 0$ with 44 % of the total energy concentrated in the box represented in Figure 1.7. Note that in our model, the array emits the same wave on both sides, so $\mathcal{Q}_B(t)$ cannot exceed 50 %. The case of the scattering medium of Figure 1.5 is represented in the middle part. Both curves nearly coincide, which confirms again the results of section 1.3.3, but here the maximum of $\mathcal{Q}_B(t)$ is only 19 %, which shows that a great part of the energy is 'lost' in the scattering medium. Finally, in the right part, we consider again the scattering medium but the second obstacle is moved closer to the target. Of course, $\mathcal{Q}_B(t)$ is unchanged for the signal of the TR experiment since it does not depend on the second obstacle. On the other hand, the focus quality decreases for the optimal signal $\boldsymbol{g}_{\phi_+}(t)$ (maximum at 15 %). This is a well-known effect of the DORT method, which maximizes the energy of the scattered wave and then leads to illuminate all obstacles when they are close to each other.

1.4 Conclusion

In the present paper, we have shown that the use of the symmetric singular value decomposition (SSVD) of the time-harmonic scattering operator allows us to synchronize its singular vectors in the frequency domain in order to achieve space–time focusing. We have developed several theoretical and numerical arguments which support this assertion. In particular, we have seen that for distant enough scatterers, the choice of the SSVD for unknown passive scatterers yields the same refocusing as time reversal for an active source, which can be considered as an optimal refocusing. Nevertheless two criticisms can be made.

On the one hand, from a practical point of view, the principle of DORT method is based on the measure of the scattered wave. As mentioned in the introduction, this means that one has to measure separately the incident and the perturbed waves (that is, in the absence and in the presence of the target) and compute their difference. In many situations, it is impossible to make this double measure. However when the medium is weakly inhomogeneous and when the array is located on one side of the medium (open aperture case), only a tiny part of the incident wave propagates back to the array so that one can consider that one measures directly the scattered field.

On the other hand, from a mathematical point of view, it is quite frustrating to be unable to relate the use of the SSVD to a mathematical criterion which should evaluate the quality of space–time focusing. The energy criterion proposed in section 1.3.4 seems very natural. But can we affirm that according to this criterion or another focusing criterion, the best signals are those of Theorem 1.3.1 ? The question remains open.

Appendix : Energy emitted by point sources

Let Ω be a domain of $\mathbb{R}^d$, bounded or not, with boundary Γ and $u = u(x,t)$ a causal solution to the acoustic wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R},$$

for a given causal function $f = f(x,t)$. By multiplying this equation by $\partial u/\partial t$ and integrating over Ω, we deduce classically from Green's formula the energy conservation law :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_\Omega(t) = \mathcal{P}_\Omega(t) + \mathcal{F}_\Gamma(t), \tag{1.29}$$

where $\mathcal{E}_\Omega(t)$ denotes the acoustic energy at time t, $\mathcal{P}_\Omega(t)$ is the power produced by the source f and $\mathcal{F}_\Gamma(t)$ is the incoming energy flux across Γ, which are defined respectively by

$$\mathcal{E}_\Omega(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x, \tag{1.30}$$

$$\mathcal{P}_\Omega(t) := \int_\Omega f(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \text{and} \tag{1.31}$$

$$\mathcal{F}_\Gamma(t) := \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\gamma_x, \tag{1.32}$$

where ν is the unit normal on Γ pointing outside Ω. Formula (1.29) holds provided that u is regular enough so that the definitions above make sense, for instance if $f \in L^2(\Omega \times \mathbb{R})$. The purpose of this appendix is to deal with the case where f represents the excitation produced by point sources located at x_n for $n = 1, \dots, N$, i.e.,

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{N} q_n(t)\,\delta(x - x_n),$$

where functions q_n are assumed causal. In this case, definitions (1.30)–(1.32) are not adapted. Indeed, because of the singular behaviour of u near the sources, the integrals on Ω diverge, which means that the usual acoustic energy is infinite for point sources. However we show below that this energy becomes finite as soon as the sources become silent. Our aim is to exhibit an explicit expression of this energy. Surprisingly, we did not succeed in finding one in the literature !

We consider only the cases of dimensions 2 and 3. Formula (1.2) provides us the field produced by point sources. Thanks to the expression (1.1) of the Green's function in a homogeneous medium, it can be written more explicitly as

$$u = \sum_{n=1}^{N} u_n \quad \text{where} \tag{1.33}$$

$$u_n(x,t) := \begin{cases} \displaystyle\int_{|x-x_n|}^{\max\{t,|x-x_n|\}} \frac{q_n(t-\tau)}{2\pi\sqrt{\tau^2 - |x-x_n|^2}}\,\mathrm{d}\tau & \text{if } d = 2, \\ \displaystyle\frac{q_n(t-|x-x_n|)}{4\pi|x-x_n|} & \text{if } d = 3. \end{cases} \tag{1.34}$$

We see here that if q_n is regular enough, then u_n has a similar regularity outside a vicinity of x_n. Hence, outside a collection of small balls $B_n(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^d;\ |x - x_n| \le \varepsilon\}$, energy conservation (1.29) holds. We shall use an integrated version of this equation :

$$\mathcal{E}_{\Omega(\varepsilon)}(t) = \int_0^t \mathcal{F}_{\Gamma(\varepsilon)}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.35}$$

where $\Omega(\varepsilon) := \mathbb{R}^d \setminus \cup_{n=1,N} B_n(\varepsilon)$ and $\Gamma(\varepsilon) := \partial\Omega(\varepsilon) = \cup_{n=1,N} \partial B_n(\varepsilon)$ (note that $\mathcal{P}_{\Omega(\varepsilon)}(t) = 0$ since f vanishes in $\Omega(\varepsilon)$). The following proposition tells us that we can pass to the limit $\varepsilon \to 0$ in this equation when the sources become silent.

Proposition 1.4.1 *Suppose that all functions q_n belong to $C^2(\mathbb{R})$ and have a compact support contained in $[0,T]$ for some $T > 0$. Then for all $t > T$, the limit $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}_{\Omega(\varepsilon)}(t)$ exists and is independent of t. It is given by*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\rm tot} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \mathcal{E}_{nm} \quad \textit{where} \\
\mathcal{E}_{nn} &:= \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_\tau^T q_n'(s-\tau)\, q_n(s)\, \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi\,\tau} & \textit{if } d=2, \\ \displaystyle\int_0^T \frac{q_n'(s)^2}{4\pi}\, \mathrm{d}s & \textit{if } d=3, \end{cases} \\
\mathcal{E}_{nm} &:= \int_0^T q_n(s)\, \frac{\partial u_m}{\partial t}(x_n, s)\, \mathrm{d}s \quad \textit{for } n \neq m.
\end{aligned}$$

Remark 1.4.2 Using Parseval's identity, these expressions are easily converted to the frequency domain. We obtain

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{nn} &:= \begin{cases} \displaystyle\frac{-1}{2\pi} \int_0^T \frac{1}{\tau} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\mathcal{F}^{-1}\left(|\hat{q}_n|^2 \right) \right)(\tau)\, \mathrm{d}\tau & \text{if } d=2, \\ \displaystyle\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} |\omega \hat{q}_n(\omega)|^2\, \mathrm{d}\omega & \text{if } d=3, \end{cases} \\
\mathcal{E}_{nm} &:= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \mathrm{i}\omega \hat{G}(x_m, x_n, \omega)\, \hat{q}_m(\omega)\, \overline{\hat{q}_n(\omega)}\, \mathrm{d}\omega \quad \text{for } n \neq m.
\end{aligned}$$

In the above formulas, $\mathcal{E}_{nn}$ represents the energy produced by the source located at x_n if it was alone, whereas the other terms $\mathcal{E}_{nm}$ for $n \neq m$ stand for the interactions between the sources. In order to prove Proposition 1.4.1, we need to know the behaviour of u_n near x_n, which is summarized in the following lemma.

Lemma 1.4.3 *Suppose that $q_n \in C^2(\mathbb{R})$ is causal. Then $u_n \in C^2((\mathbb{R}^d \setminus B_n(\varepsilon)) \times \mathbb{R})$ for all $\varepsilon > 0$. Moreover, when ε tends to 0, the following asymptotic expansions hold uniformly for $x \in \partial B_n(\varepsilon)$ and $t \in [0,T]$ for any given $T > 0$:*

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{2\pi}\left(\int_\varepsilon^{\max\{t,\varepsilon\}} \frac{q_n'(t-\tau)}{\tau^2} \sqrt{\tau^2-\varepsilon^2}\, \mathrm{d}\tau + q_n'(t) \right) + O(\varepsilon) & \textit{if } d=2, \\ \displaystyle\frac{q_n'(t)}{4\pi\varepsilon} - \frac{q_n''(t)}{4\pi} + o(1) & \textit{if } d=3, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\frac{q_n(t)}{2\pi\varepsilon} + O(1) & \textit{if } d=2, \\ \displaystyle\frac{q_n(t)}{4\pi\varepsilon^2} + O(1) & \textit{if } d=3. \end{cases}$$

Moreover, if $d = 2$, the integral involved in the expression of $\partial u_n/\partial t$ is $O(|\log\varepsilon|)$.

Proof. The case $d = 3$ is easy. From (1.34), we see that $u_n \in C^2((\mathbb{R}^3 \setminus B_n(\varepsilon)) \times \mathbb{R})$ and for $x \in \partial B_n(\varepsilon)$, we have

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \frac{q_n'(t-\varepsilon)}{4\pi\varepsilon} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u_n}{\partial \nu}(x,t) = \frac{q_n'(t-\varepsilon)}{4\pi\varepsilon} + \frac{q_n(t-\varepsilon)}{4\pi\varepsilon^2}.$$

Using a Taylor expansion of $q_n(t-\varepsilon)$ and $q_n'(t-\varepsilon)$, the conclusion follows.

The case $d = 2$ is more intricate. The C^2-regularity of u_n is easily deduced from its expression (1.34), which shows in addition that for $x \in \partial B_n(\varepsilon)$,

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \frac{q_n'(t-\tau)}{\rho_\varepsilon(\tau)}\, \mathrm{d}\tau$$

where $\rho_\varepsilon(\tau) := \sqrt{\tau^2 - \varepsilon^2}$ and $t_\varepsilon := \max\{t, \varepsilon\}$. Noticing that $\rho_\varepsilon'(\tau) = \tau/\rho_\varepsilon(\tau)$ and integrating by part, we deduce that

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \left(\frac{q_n'(t-\tau)}{\tau^2} + \frac{q_n''(t-\tau)}{\tau} \right) \rho_\varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{1.36}$$

The first term in the integral yields the dominant contribution, which is $O(|\log\varepsilon|)$ because

$$\left| \int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \frac{q_n'(t-\tau)}{\tau^2}\, \rho_\varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \le \sup_{\tau\in[0,t]} |q_n'(\tau)| \int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau},$$

since $\rho_\varepsilon(\tau) \le \tau$ for all $\tau \ge \varepsilon$. To evaluate the second one, rewrite it as

$$\int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \frac{q_n''(t-\tau)}{\tau}\, \rho_\varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_\varepsilon^{t_\varepsilon} q_n''(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau + \int_\varepsilon^{t_\varepsilon} q_n''(t-\tau) \left(\frac{\rho_\varepsilon(\tau)}{\tau} - 1 \right) \mathrm{d}\tau.$$

The first integral of the right-hand side is equal to $q_n'(t-\varepsilon) = q_n'(t) + O(\varepsilon)$ whereas the second one is $O(\varepsilon)$ since $|\rho_\varepsilon(\tau)/\tau - 1| \le \varepsilon^2/\tau^2$. This gives the asymptotic behaviour of $\partial u_n/\partial t$.

We proceed similarly for $\partial u_n/\partial\nu$ starting from an expression of $u_n(x,t)$ similar to (1.36) (with q_n' and q_n'' replaced by q_n and q_n', respectively). Taking the normal derivative and using again an integration by parts, it is easily seen that

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(x,t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \left(\frac{3\, q_n(t-\tau)}{\tau^4} + \frac{3\, q_n'(t-\tau)}{\tau^3} + \frac{q_n''(t-\tau)}{\tau^2} \right) \rho_\varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

By the same argument as above, the last term in the integral yields a contribution $O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ whereas the second one is $O(1)$. The dominant contribution is given by the first term. Indeed we have

$$\int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \frac{3q_n(t-\tau)}{\tau^4}\, \rho_\varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau = q_n(t) \int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \frac{3\rho_\varepsilon(\tau)}{\tau^4}\, \mathrm{d}\tau + \int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \frac{3(q_n(t-\tau) - q_n(t))}{\tau^4}\, \rho_\varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

where the last integral is $O(\varepsilon^{-1})$ (since $|q_n(t-\tau) - q_n(t)| \le C\,\tau$ for some $C > 0$) and

$$\int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \frac{3\,\rho_\varepsilon(\tau)}{\tau^4}\, \mathrm{d}\tau = \int_\varepsilon^{t_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\rho_\varepsilon(\tau)^3}{\varepsilon^2\tau^3} \right) \mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon^2} + O(1).$$

This completes the proof. ∎

Proof of Proposition 1.4.1. From (1.33) and the definition (1.32) of the energy flux, the energy conservation law (1.35) writes as

$$\mathcal{E}_{\Omega(\varepsilon)}(t) = \sum_{n,m,p=1}^{N} \mathcal{E}^p_{nm}(t,\varepsilon) \quad \text{where}$$
$$\mathcal{E}^p_{nm}(t,\varepsilon) := \int_0^t \int_{\partial B_p(\varepsilon)} \frac{\partial u_n}{\partial \nu}(x,s)\, \frac{\partial u_m}{\partial t}(x,s)\, \mathrm{d}\gamma_x\, \mathrm{d}s.$$

Lemma 1.4.3 shows that if $p \neq n$ and $p \neq m$, then $\mathcal{E}^p_{nm}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{d-1})$. Moreover if $n \neq m$, then $\mathcal{E}^m_{nm}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ if $d = 3$ (respectively, $\mathcal{E}^m_{nm}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ if $d = 2$) whereas

$$\mathcal{E}^n_{nm}(t,\varepsilon) = \int_0^t q_n(s)\, \frac{\partial u_m}{\partial t}(x_n,s)\, \mathrm{d}s + O(\varepsilon).$$

Finally, if $n = m$, in the three-dimensional case, we have

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^n_{nn}(t,\varepsilon) &= \int_0^t \left(\frac{q_n(s)\, q_n'(s)}{4\pi\varepsilon} - \frac{q_n(s)\, q_n''(s)}{4\pi} + o(1) \right) \mathrm{d}s \\ &= \frac{q_n(t)^2}{8\pi\varepsilon} + \int_0^t \frac{q_n'(s)^2}{4\pi}\, \mathrm{d}s - \frac{q_n(t)\, q_n'(t)}{4\pi} + o(1).\end{aligned}$$

Thus we see that for all time t such that $q_n(t) \neq 0$, this quantity diverges as $O(\varepsilon^{-1})$ when ε tends to 0. On the other hand, when $q_n(t) = 0$, it has a finite limit given by the second term.

Similarly, in the two-dimensional case, Lemma 1.4.3 shows that

$$\mathcal{E}^n_{nn}(t,\varepsilon) = \int_\varepsilon^t \int_\varepsilon^s \frac{q_n'(s-\tau)\, q_n(s)}{2\pi\, \tau^2}\, \rho_\varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{q_n'(s)\, q_n(s)}{2\pi}\, \mathrm{d}s + O(\varepsilon|\log\varepsilon|).$$

The second integral of the right-hand side is equal to $q_n(t)^2/(4\pi)$. The first one can be rewritten as

$$\int_\varepsilon^t \left(\int_\tau^t (q_n'(s-\tau) - q_n'(s))\, q_n(s)\, \mathrm{d}s + \frac{q_n(t)^2 - q_n(\tau)^2}{2} \right) \frac{\rho_\varepsilon(\tau)}{2\pi\, \tau^2}\, \mathrm{d}\tau.$$

Hence this quantity diverges as $O(|\log\varepsilon|)$ if $q_n(t) \neq 0$, since

$$\int_\varepsilon^t \frac{\rho_\varepsilon(\tau)}{\tau^2}\, \mathrm{d}\tau = \int_\varepsilon^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(-\frac{\rho_\varepsilon(\tau)}{\tau} + \log(\rho_\varepsilon(\tau) + \tau) \right) \mathrm{d}\tau = -\log\varepsilon + O(1).$$

On the other hand, when $q_n(t) = 0$, Lebesgue's dominated convergence theorem shows that it tends to

$$\int_0^t \left(\int_\tau^t (q_n'(s-\tau) - q_n'(s))\, q_n(s)\, \mathrm{d}s - \frac{q_n(\tau)^2}{2} \right) \frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi\, \tau},$$

which can be rewritten in the simpler form shown in the proposition. ∎

CHAPITRE DEUX

FOCALISATION SPATIALE EN RÉGIME HARMONIQUE

Sommaire

2.1 Description de la tache focale pour un milieu contenant un seul obstacle 36
2.1.1 Cas idéal d'un réseau sphérique à grande distance 36
2.1.2 Cas d'un réseau plan ouvert 38
2.2 Focalisation dans un milieu contenant plusieurs obstacles 44
2.2.1 Propriétés algébriques de l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ 45
2.2.2 Obstacles parfaitement découplés 46

Dans le chapitre précédent, nous avons pris comme point de départ les propriétés de focalisation spatiale des ondes générées par la méthode DORT en régime harmonique. Ce chapitre a pour but de les comprendre et de les expliquer. Nous conservons le formalisme et les notations décrits dans le premier chapitre que nous rappelons ici très brièvement.

Dans un milieu de référence remplissant l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou $d = 3$), nous disposons d'un réseau composé de N transducteurs ponctuels (successivement émetteurs et récepteurs) placés en $x_1, ..., x_n$. A fréquence fixée ω, ce réseau est capable d'émettre des ondes incidentes $\hat{v}^{\text{inc}}$ de la forme

$$\hat{v}^{\text{inc}}(x,\omega) = \sum_{n=1}^{N} \hat{q}_n(\omega)\hat{G}(x_n, x, \omega).$$

où $\hat{G}$ et $\hat{q}_n(\omega)$ représentent respectivement la fonction de Green harmonique du milieu (cf. (1.5)) et le signal d'entrée complexe placé sur le $n$ième transducteur (utilisé en tant qu'émetteur). Supposons maintenant que ce milieu soit perturbé par la présence d'une famille d'obstacles ponctuels parfaitement mous [1] dont les positions respectives $y_1, ..., y_P$ sont inconnues. Nous cherchons alors à émettre des ondes incidentes $\hat{v}^{\text{inc}}$ venant focaliser sélectivement sur l'un de ces obstacles . Dans ce but, nous allons utiliser le réseau de transducteurs pour sonder le milieu par le processus suivant. Celui-ci émet dans un premier temps une onde incidente $\hat{v}^{\text{inc}}$. Cette onde est alors réfléchie par les obstacles qui génèrent une onde diffractée $\hat{v}_{\text{sc}}$. L'onde diffractée $\hat{v}_{\text{sc}}$ est finalement mesurée sur les transducteurs (utilisés en tant que récepteurs). Nous avons ainsi accès à l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ (défini en (1.6)) qui à une distribution de signaux d'entrée $\hat{\boldsymbol{q}}_{\text{in}}(\omega) = (\hat{q}_1(\omega), \ldots, \hat{q}_N(\omega))^\top$ associe la mesure $\hat{\boldsymbol{q}}_{\text{out}}(\omega) =: (\hat{v}_{\text{sc}}(x_1,\omega), \ldots, \hat{v}_{\text{sc}}(x_N,\omega))^\top$.

1. Traduction française du terme "sound soft obstacles".

La méthode DORT consiste à effectuer une SVD de cet opérateur

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \widehat{\mathbb{V}}_\omega \, \widehat{\mathbb{D}}_\omega \, \widehat{\mathbb{W}}_\omega^*$$

(cf. (1.2.2)). Notre but est ici d'expliquer les propriétés suivantes (énoncées au chapitre précédent). Lorsque les obstacles sont suffisamment distants :

- Le nombre d'obstacles P coïncide avec le nombre de valeurs singulières non nulles de $\widehat{\mathbb{D}}_\omega$.
- Si ces valeurs singulières sont simples, chaque vecteur singulier à droite, associé à une telle valeur singulière, génère une une onde qui focalise sélectivement sur un des obstacles du milieu.

Nous cherchons ici à comprendre quelles sont les ondes générées par la méthode DORT : on va notamment constater que sous certaines conditions, leur amplitude se concentre en un lieu qu'on appelle tache focale. Nous considérons, dans un premier temps, que le milieu ne contient qu'un seul obstacle ($P = 1$). Nous mettrons alors en évidence la présence de la tache focale dans le cas idéal d'un réseau de transducteurs sphérique entourant l'obstacle et à grande distance de celui-ci. Puis, nous nous intéresserons à un cas plus réaliste, celui d'un réseau plan ouvert (c'est-à-dire un segment pour $d = 2$ ou un rectangle pour $d = 3$) en ne faisant aucune hypothèse sur la distance entre le réseau et l'obstacle. Enfin, nous reviendrons sur les propriétés de focalisation sélective des ondes générées par la méthode DORT pour un milieu contenant plusieurs obstacles.

2.1 Description de la tache focale pour un milieu contenant un seul obstacle

2.1.1 Cas idéal d'un réseau sphérique à grande distance

Nous considérons une distribution de transducteurs équirépartie x_n, $n = 1, ..., N$ sur la sphère $S_R := \{z \in \mathbb{R}^d;\ |z| = R\}$ entourant l'obstacle et située à grande distance de celui-ci. Notre but est alors d'étudier dans ce cas idéal, la décroissance spatiale de l'onde générée par un signal construit à l'aide de la méthode DORT. Notons que le raisonnement qui va suivre est classique au sens où on peut le trouver sous diverses formes dans la littérature. A cette fin, nous renvoyons par exemple le lecteur à [19, 65].

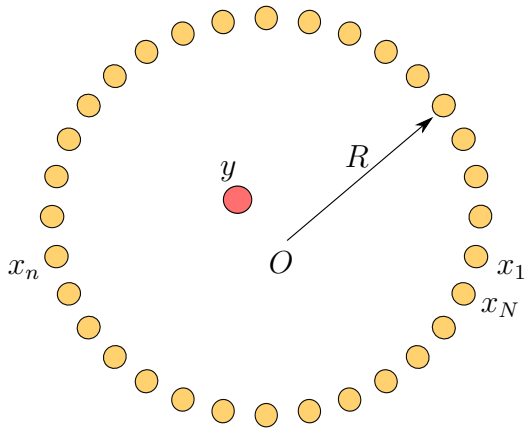

FIGURE 2.1 – Cas idéal d'un réseau sphérique entourant l'obstacle y.

Le milieu ne contenant qu'un seul obstacle y, l'opérateur de diffraction a pour expression (cf.(1.27)) :

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \sigma(\omega)\ \hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\ \hat{\boldsymbol{g}}(\omega)^\top \quad \text{où} \quad \hat{\boldsymbol{g}}(\omega) = (\hat{G}(x_1, y, \omega), ..., \hat{G}(x_N, y, \omega))^\top$$

et $\sigma(\omega)$ représente le coefficient de réflexion de l'obstacle y (cf. (1.8)). Cet opérateur est clairement de rang 1. Il est alors facile de vérifier (cf. (1.14)) que le couple $(\sigma(\omega)\,\hat{\boldsymbol{g}}(\omega))/(|\sigma(\omega)|\ \|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}), \overline{\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)}/\ \|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|_{\mathbb{C}^N})$ est un couple de vecteurs propres singuliers associé à l'unique valeur singulière non nulle : $|\sigma(\omega)|\ \|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|^2_{\mathbb{C}^N}$.

Notons qu'un vecteur singulier à droite associé à la valeur singulière $|\sigma(\omega)|\ \|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|^2_{\mathbb{C}^N}$ est ici nécessairement de la forme $\hat{\boldsymbol{w}}(\omega) = e^{i\,\phi(\omega)}\,\overline{\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)}/\ \|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}$. Le coefficient de phase fréquentielle $e^{i\,\phi(\omega)}$ n'ayant aucune importance, si on se limite comme dans ce chapitre à l'étude de la méthode DORT en régime harmonique, nous le fixons arbitrairement à 1. De même le facteur de normalisation par $1/\ \|\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)\|^2_{\mathbb{C}^N}$ ne modifie pas l'allure de l'onde incidente. Nous l'oublierons donc par la suite. Ainsi, en choisissant, comme distributions de signaux d'entrée le vecteur $\overline{\hat{\boldsymbol{g}}(\omega)}$, le réseau émet l'onde incidente suivante :

$$\hat{v}^{\text{inc}}(x, \omega) = \sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{G}(x_n, y, \omega)}\,\hat{G}(x_n, x, \omega). \tag{2.1}$$

qui peut être approchée pour un nombre de transducteurs N élevé par

$$\hat{v}^{\text{inc}}(x, \omega) \overset{N\to+\infty}{\approx} C_N \int_{S_R} \overline{\hat{G}(z, y, \omega)}\,\hat{G}(x, z, \omega)\,\mathrm{d}S(z),$$

où C_N est une constante dépendant du nombre de transducteurs, de la dimension d. Pour un milieu dont les hétérogénéités sont localisées dans un domaine borné, la relation de Helmholtz–Kirchhoff (cf. [53]) nous permet d'interpréter le comportement asymptotique de cette intégrale lorsque $R \to \infty$:

$$\int_{S_R} \overline{\hat{G}(z, y, \omega)}\,\hat{G}(x, z, \omega)\,\mathrm{d}S(z) \quad \overset{R\to+\infty}{\approx} \quad \frac{\hat{G}(x, y, \omega) - \overline{\hat{G}(x, y, \omega)}}{2\mathrm{i}\omega}.$$

Cette dernière relation relie donc le signal émis à la partie imaginaire de la fonction de Green $\hat{G}(\cdot, y, \omega)$. Ainsi dans le cas d'un milieu homogène (cf. 1.1), on obtient :

$$\frac{\hat{G}(x, y, \omega) - \overline{\hat{G}(x, y, \omega)}}{2\mathrm{i}\omega} = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{J_0(\omega\,|x-y|)}{4\,\omega} & \text{si d=2 ,} \\[2ex] \dfrac{sinc(\omega\,|x-y|)}{4\,\pi} & \text{si d=3 .} \end{array} \right. \tag{2.2}$$

où les fonctions J_0 et $sinc$ désignent ici respectivement la fonction de Bessel d'ordre 0 et le sinus cardinal défini par $sinc(x) = sin(x)/x$ dont les courbes sont représentées dans la figure 2.2.

L'expression (2.2), nous permet alors de décrire l'allure de l'onde incidente (2.1). Celle-ci est radiale dans le sens où elle ne dépend que de la distance du point d'observation x à l'obstacle y. Il est d'ailleurs usuel de définir en optique le rayon r_0 de la tache focale à partir du premier zéro de la fonction de Bessel J_0 pour $d = 2$ ou de la fonction sinus cardinal pour $d = 3$. Ainsi dans notre cas :

$$r_0 \simeq \frac{2.4}{\omega} = \frac{1.2\,\lambda}{\pi} \ \text{ si d=2} \quad \text{et} \quad r_0 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{2} \ \text{ si d=3 .}$$

Effectuons quelques commentaires sur cette dernière expression :

– Remarquons d'abord que r_0 diminue lorsque λ décroit. On retrouve donc ici un phénomène classique en imagerie et en problèmes inverses : l'amélioration de la focalisation à faibles longueurs d'ondes (celles-ci détectant mieux l'obstacle).

– Notons ensuite qu'à longueur d'onde λ fixée, le coefficient $r_0 = \lambda/2$, obtenu pour un réseau de transducteurs sphérique à grande distance, est communément appelé en physique la résolution maximale au sens où l'on ne peut pas focaliser en-dessous de cette limite dans le cas d'un réseau fermé entourant l'obstacle (cf. [28]).

– Constatons enfin que si r_0 est légèrement plus petit en dimension 2, la décroissance spatiale de la tache focale est plus rapide en dimension 3 (cf. figure 2.2). En effet, quand $|x-y| \to \infty$, on a (cf.[1]) :

$$J_0(\omega\,|x-y|) = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\right) \quad \text{et} \quad sinc(\omega\,|x-y|) = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right).$$

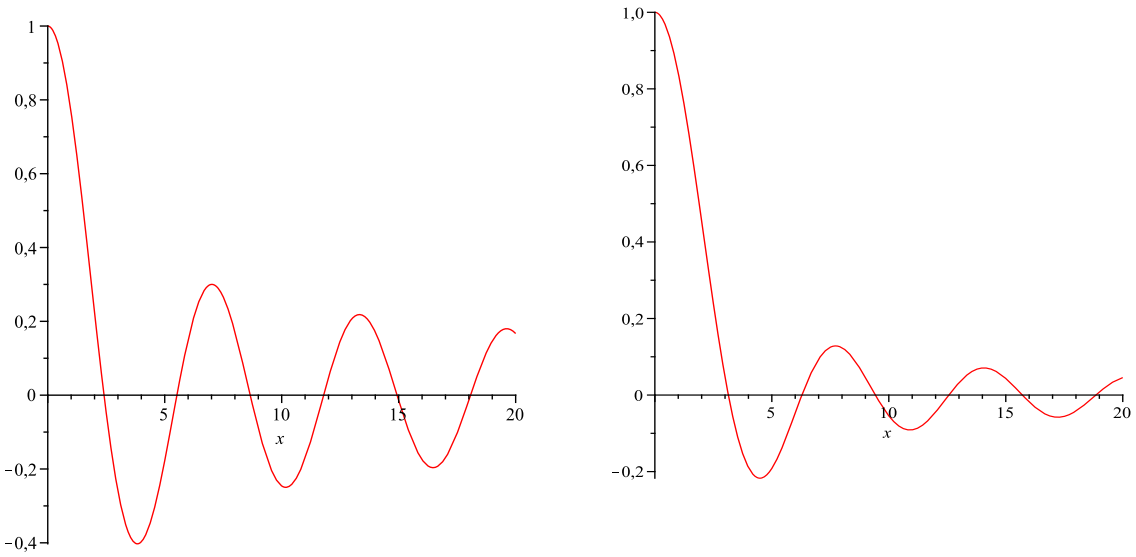

FIGURE 2.2 – Graphique de la fonction J_0 (à gauche) et *sinc* (à droite).

2.1.2 Cas d'un réseau plan ouvert

Des études ont été réalisées pour caractériser la tache focale des ondes générées par la méthode DORT lorsque l'on ne se trouve plus dans le cadre idéal du réseau de transducteurs sphérique à grande distance. Que devient-elle, par exemple, quand le réseau est ouvert, c'est-à-dire qu'il n'entoure plus l'obstacle ? A ce titre, les auteurs de [65] ont montré, à l'aide d'un modèle fondé sur une approximation en champ lointain, que dans le cas d'un milieu homogène tridimensionnel et d'un réseau de transducteurs continu placé à l'infini l'amplitude des ondes générées par la méthode DORT décroît comme l'inverse de la distance à l'obstacle. Dans [20], on s'intéresse au cas d'un réseau plan placé dans un milieu aléatoire où la propagation des ondes vérifie l'approximation paraxiale. Il est alors prouvé que la grandeur caractéristique de la tache focale transverse est définie par le critère de Rayleigh décrit au chapitre précédent.

Dans ce paragraphe, nous complétons une étude effectuée dans mon stage de master [29]. Nous traitons le cas d'un réseau de transducteurs ouvert, placé dans un milieu homogène, dont la

distance à l'obstacle n'est pas nécessairement grande. Nous supposerons par souci de simplicité qu'il s'agit d'un réseau plan ouvert (cf. figure 2.3) : un segment (en deux dimensions) ou un rectangle (en trois dimensions) mais d'autres formes géométriques pourraient être traitées de façon similaire. Notons que nous ne serons ici ni dans une approximation champ lointain, ni dans un régime paraxial.

La relation de Helmholtz–Kirchhoff, utilisée précédemment pour décrire la tache focale, n'étant pas vérifiée pour un réseau ouvert en champ proche, nous allons adopter un autre point de vue : regarder, en un point x fixé, la décroissance de l'onde incidente lorsque l'on diminue la longueur d'onde, ou de façon équivalente lorsqu'on augmente la fréquence ω. Il s'agit donc ici de caractériser le point de focalisation plutôt que la tache focale. En effet, nous verrons que l'obstacle y est le point où cette décroissance est la moins rapide.

Nous considérons une distribution de transducteurs équirépartie x_n, $n = 1, ..., N$ sur le rectangle $\Gamma := \{z = (z_1, z_2, 0), z_1 \in [a, b] \text{ et } z_2 \in [c, d]\}$ pour $d = 3$ ou le segment $\Gamma := \{z = (z_1, 0), z_1 \in [a, b]\}$ pour $d = 2$ (cf. figure 2.3). Nous supposons de plus que l'obstacle s n'appartient pas à l'hyperplan $\mathcal{H}_z$ contenant le réseau de transducteurs (c'est-à-dire au plan $z_3 = 0$ pour $d = 3$ et à la droite $z_2 = 0$ pour $d = 2$) car le réseau ne peut pas focaliser sur de tels obstacles.

FIGURE 2.3 – Cas d'un réseau plan ouvert : un rectangle ou un segment.

Pour un nombre de transducteurs N élevé, nous pouvons encore approcher l'onde incidente (2.1) en un point $x \notin \Gamma$ par :

$$\hat{v}^{\text{inc}}(x, \omega) \overset{N \to +\infty}{\approx} C_N \int_\Gamma \overline{\hat{G}(z, y, \omega)}\, \hat{G}(x, z, \omega)\, \mathrm{d}S(z), \tag{2.3}$$

où C_N dépend ici seulement du nombre de transducteurs et de la dimension d. Pour regarder le comportement de $\hat{v}^{\text{inc}}(x, \omega)$ en hautes fréquences, nous allons ici utiliser un théorème de phase stationnaire sur la fonction de Green $\hat{G}$. Nous devons à cette fin distinguer les cas $d = 2$ et $d = 3$.

Cas d'un réseau rectangulaire

En dimension 3, la fonction de Green d'un milieu homogène $\hat{G}$ est définie par :

$$\hat{G}(z, x, \omega) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega|z-x|}}{4\pi|z - x|}.$$

Le comportement asymptotique en hautes fréquences de $\hat{v}^{\rm inc}$ (cf. (2.3)) sera donc défini par celui de l'intégrale

$$I_{(x,y)}(\omega) = \int_\Gamma \overline{\hat{G}(z,y,\omega)}\,\hat{G}(x,z,\omega)\,\mathrm{d}S(z) = \frac{1}{16\,\pi^2}\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{e^{i\omega(|z-x|-|z-y|)}}{|z-y|\,|z-x|}\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2.$$

Remarquons d'abord que $I_{(x,y)}(\omega)$ ne dépend que de la distance des points x et y avec les points z de Γ. Ainsi en notant alors x_s et y_s les symétriques de x et y par rapport à $\mathcal{H}_z$, on a

$$I_{(x,y)}(\omega) = I_{(x_s,y)}(\omega) = I_{(x,y_s)}(\omega) = I_{(x_s,y_s)}(\omega). \tag{2.4}$$

On peut donc, sans perte de généralités, supposer que les points $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont du même côté du réseau : par exemple que $x_3 \geq 0$ et $y_3 > 0$. Constatons ensuite que lorsque $x = y$, l'intégrale

$$I_{(y,y)}(\omega) = \frac{1}{16\,\pi^2}\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{1}{|z-y|^2}\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2$$

ne dépend pas de ω. Par contre, pour $x \neq y$, c'est une intégrale oscillante dont l'asymptotique haute fréquence découlera du théorème de phase stationnaire suivant (cf. [118]) :

Théorème 2.1.1 *Soient A et ϕ deux fonctions de $C^\infty([a,b]\times[c,d])$. Supposons que ϕ n'admet qu'un nombre fini de points stationnaires (points où le gradient s'annule) qui sont non dégénérés (c'est-à-dire de Hessienne définie positive ou définie négative), alors*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} A(z_1,z_2)\,e^{i\,\omega\,\phi(z_1,z_2)}\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2 = O(\omega^{-1}),\ \textit{quand } \omega \to \infty.$$

Nous voulons appliquer ce théorème aux fonctions $A_{x,y}(z_1,z_2) = 1/(\|z-y\|\,\|z-x\|)$ et $\phi_{x,y}(z_1,z_2) = |z-x| - |z-y|$ C^∞ sur $[a,b]\times[c,d]$. Il faut donc en vérifier les hypothèses, c'est-à-dire caractériser les points stationnaires de $\phi_{x,y}$. Ceci est l'objet du

Lemme 2.1.2 *Soit la fonction $\phi_{x,y} : [a,b]\times[c,d] \mapsto \mathbb{R}$ définie par*

$$\phi_{x,y}(z_1,z_2) = |z-x| - |z-y| \quad \textit{et}\ \ z = (z_1,z_2,0)$$

où le point d'observation $x = (x_1,x_2,x_3)$ et l'obstacle $y = (y_1,y_2,y_3)$ sont distincts, n'appartiennent pas à Γ et vérifient $x_3 \geq 0$ et $y_3 > 0$ (c'est-à-dire qu'ils sont du même côté du réseau). Notons (xy) la droite passant par les points x et y. Les points stationnaires de $\phi_{x,y}$ sont alors caractérisés par les deux assertions suivantes :

1. *Si $(xy)\cap\Gamma = \{(z_1,z_2,0)\}$, $\phi_{x,y}$ admet pour unique point stationnaire (z_1,z_2) et il n'est pas dégénéré.*
2. *Si $(xy)\cap\Gamma = \varnothing$, $\phi_{x,y}$ n'a aucun point stationnaire.*

Preuve. Calculons le gradient de $\phi_{x,y}$ en un point (z_1,z_2)

$$\frac{\partial\phi_{x,y}((z_1,z_2))}{\partial z_1} = \frac{z_1-x_1}{|z-x|} - \frac{z_1-y_1}{|z-y|}$$

et

$$\frac{\partial\phi_{x,y}((z_1,z_2))}{\partial z_2} = \frac{z_2-x_2}{|z-x|} - \frac{z_2-y_2}{|z-y|}$$

Ainsi,

$$\nabla\phi_{x,y}(z_1,z_2) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{z_1-x_1}{|z-x|} = \dfrac{z_1-y_1}{|z-y|} \\ \dfrac{z_2-x_2}{|z-x|} = \dfrac{z_2-y_2}{|z-y|} \end{array}\right. \tag{2.5}$$

Montrons en fait que sous l'hypothèse : $y_3 > 0$ et $x_3 \geq 0$,

$$\nabla\phi_{x,y}(z_1, z_2) = 0 \iff \frac{z-x}{|z-x|} = \frac{z-y}{|z-y|}.$$

L'implication directe découle immédiatement de (2.5). Démontrons la réciproque. Supposons que $\nabla\phi_{x,y}(z_1, z_2) = 0$. Soit P la projection orthogonale sur le plan $z_3 = 0$, il vient alors avec (2.5) :

$$\begin{aligned}\nabla\phi_{x,y}(z_1, z_2) = 0 \Rightarrow P\left(\frac{z-x}{|z-x|}\right) &= P\left(\frac{z-y}{|z-y|}\right) \\ \Rightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{z-x}{|z-x|} &= \frac{z-y}{|z-y|} + \alpha\, e_3, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous allons prouver que $\alpha = 0$. En prenant la norme au carré de l'égalité (2.6), on obtient :

$$1 = \frac{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + (-y_3 + \alpha\,|z-y|)^2}{|z-y|^2}.$$

Soit après simplification :

$$(-y_3)^2 = (-y_3 + \alpha\,|z-y|)^2. \tag{2.7}$$

Or, d'après l'équation (2.6), on a :

$$\frac{-y_3}{|z-y|} + \alpha = \frac{-x_3}{|z-x|} \leq 0.$$

Ainsi $-y_3$ et $-y_3 + \alpha\,|z-y|$ sont de même signe (négatif), on tire alors de (2.7) que $-y_3 = -y_3 + \alpha\,|z-y|$ et on conclut finalement que :

$$\alpha = 0 \quad \text{car } y \notin \Gamma.$$

On a donc prouvé que la fonction $\phi_{x,y}$ admet un point stationnaire (z_1, z_2) si et seulement si les points x, y et $z = (z_1, z_2, 0)$ sont alignés. Ainsi, soit l'intersection de Γ et de la droite (xy) est vide et $\phi_{x,y}$ n'admet aucun point stationnaire, soit cette intersection est un singleton $\{z = (z_1, z_2, 0)\}$ et $\phi_{x,y}$ a pour unique point stationnaire (z_1, z_2). Montrons alors dans ce dernier cas que le point stationnaire de $\phi_{x,y}$: (z_1, z_2) n'est pas dégénéré. A cette fin, calculons la Hessienne au point (z_1, z_2) sachant qu'il vérifie la condition d'alignement : $(z-x)/\,|z-x| = (z-y)/\,|z-y|$. Après un petit calcul, on trouve que :

$$\frac{\partial^2\phi_{x,y}((z_1,z_2))}{\partial z_1^2} = \left(\frac{1}{|z-x|} - \frac{1}{|z-y|}\right)\left(\frac{1}{|z-x|}\right)^2\left[(z_2-x_2)^2 + y_3^2\right],$$

$$\frac{\partial^2\phi_{x,y}((z_1,z_2))}{\partial z_2^2} = \left(\frac{1}{|z-x|} - \frac{1}{|z-y|}\right)\left(\frac{1}{|z-x|}\right)^2\left[(z_1-x_1)^2 + y_3^2\right],$$

et

$$\frac{\partial^2\phi_{x,y}((z_1,z_2))}{\partial z_2\partial z_1} = -\left(\frac{1}{|z-x|} - \frac{1}{|z-y|}\right)\left(\frac{1}{|z-x|}\right)^2\left[(z_1-x_1)(z_2-x_2)\right].$$

En posant : $\alpha_{x,y} = \left(\frac{1}{|z-x|} - \frac{1}{|z-y|}\right)\left(\frac{1}{|z-x|}\right)^2 \neq 0$, la Hessiene $H_{x,y}$ s'écrit :

$$H_{x,y} = \alpha_{x,y}\begin{pmatrix} (z_2-x_2)^2 + x_3^2 & -(z_1-x_1)(z_2-x_2) \\ -(z_1-x_1)(z_2-x_2) & (z_1-x_1)^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

et son déterminant vérifie :

$$det(H_{x,y}) = \alpha_{x,y}^2 \left[\left((z_2 - x_2)^2 + x_3^2 \right) \left((z_1 - x_1)^2 + x_3^2 \right) - (z_1 - x_1)^2 (z_2 - x_2)^2 \right] \geq \alpha^2 y_{p_3}^4 > 0$$

Ainsi, $H_{x,y}$ a deux valeurs propres non nulles et du même signe. Elle est donc selon le signe de $\alpha_{x,y}$, définie positive ou définie négative. ∎

Nous venons de démontrer que $\phi_{x,y}$ possède au plus un point stationnaire qui, lorsqu'il existe, est non dégénéré. L'utilisation du théorème de phase stationnaire 2.1.1, nous permet alors de conclure sur la décroissance de l'intégrale $I_{(x,y)}(\omega)$ avec la

Proposition 2.1.3 *Le comportement fréquentiel des intégrales $I_{x,y}(\omega)$ pour un point d'observation $x \notin \Gamma$ est donné par les assertions suivantes :*

- *Si $x \in \{y, y_s\}$ alors l'intégrale $I_{x,y}(\omega)$ ne dépend pas de la fréquence ω :*

$$I_{(x,y)}(\omega) = \frac{1}{16\,\pi^2} \int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{1}{|z-y|^2}\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2.$$

- *Si $x \notin \{y, y_s\}$ alors*

$$I_{(x,y)}(\omega) = O\left(\omega^{-1}\right) \quad \textit{quand} \quad \omega \to \infty.$$

D'après cette proposition, on constate qu'à un nombre de transducteurs N élevé, l'obstacle y peut être caractérisé par la décroissance fréquentielle de l'onde incidente $\hat{v}^{\text{inc}}$. En effet, en dehors des points y et y_s (symétrique de y par rapport à $\mathcal{H}_z$) où $\hat{v}^{\text{inc}}$ ne dépend pas de ω, $\hat{v}^{\text{inc}}$ décroît au moins en ω^{-1}. Ainsi, lorsque la fréquence ω tend vers l'infini, on focalise parfaitement sur l'obstacle y et son symétrique y_s (puisque le réseau de transducteurs, inclus dans $\mathcal{H}_z$, ne peut les discerner).

Cas d'un réseau linéique

En dimension 2, la fonction de Green est définie par :

$$\hat{G}(x,z,\omega) = \frac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}(\omega|z-x|).$$

En utilisant l'asymptotique de la fonction de Hankel $H_0^{(1)}$ pour de grands arguments $z \in \mathbb{R}^{+*}$ (cf.[1]) :

$$H_0^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\frac{\pi}{4})} + O(z^{-\frac{3}{2}}), \tag{2.8}$$

on obtient quand $\omega \to \infty$:

$$I_{x,y}(\omega) = \int_\Gamma \overline{\hat{G}(z,y,\omega)}\,\hat{G}(x,z,\omega)\,\mathrm{d}S(z) = \frac{1}{8\,\pi\omega} \int_{[a,b]} \frac{e^{i\omega(|z-x|-|z-y|)}}{(|z-x|\;|z-y|)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}z_1 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right). \tag{2.9}$$

Pour étudier le comportement hautes fréquences de l'intégrale oscillante :

$$\int_{[a,b]} \frac{e^{i\omega(|z-x|-|z-y|)}}{(|z-x|\;|z-y|)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}z_1,$$

nous allons encore utiliser un théorème de phase stationnaire (cf. [37]).

Théorème 2.1.4 *Soient A et ϕ deux fonctions $C^\infty([a,b])$:*

- *Si ϕ n'admet pas de point stationnaire alors*

$$\int_{[a,b]} A(z)e^{i\,\omega\,\phi(z)}dx = O(\omega^{-1}), \quad quand\ \omega \to \infty.$$

- *Si ϕ admet un nombre fini strictement positif de points stationnaires qui sont non dégénérés, alors il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\int_{[a,b]} A(z)e^{i\,\omega\,\phi(z)}dx = C\,\omega^{-1/2} + O(\omega^{-1}), \quad quand\ \omega \to \infty. \tag{2.10}$$

- *Si ϕ admet un unique point stationnaire z_0 non dégénéré tel que $A(z_0) \neq 0$ alors la constante C dans (2.10) est non nulle.*

Remarque 2.1.5 *Dans l'asymptotique hautes fréquences des intégrales oscillantes, les contributions prépondérantes sont données par les termes de bord issus d'une intégration par parties et les points où la phase stationne. En dimension 3, les termes de bord et les points stationnaires non dégénérés interviennent au même ordre : en ω^{-1} dans cet asymptotique. Par contre, en dimension 2, c'est la présence de points stationnaires qui va définir l'ordre de décroissance de ces intégrales.*

Pour décrire, l'asymptotique haute fréquence de l'intégrale $I_{(x,y)}(\omega)$, nous cherchons à appliquer ce théorème aux fonctions $C^\infty([a,b])$: $A_{x,y}(z_1) = 1/(|z-x|\ |z-y|)^{\frac{1}{2}}$ et $\phi_{x,y}(z_1) = |z-x| - |z-y|$. Dans ce but, nous devons encore déterminer les points stationnaires de ϕ. L'égalité (2.4) (qui exprime le fait que notre problème est symétrique par rapport à $\mathcal{H}_z$) permet encore de limiter cette étude à des points x et y du même côté du réseau, c'est-à-dire vérifiant par exemple $x_2 \geq 0$ et $y_2 > 0$.

Lemme 2.1.6 *Soit la fonction $\phi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ définie par*

$$\phi_{x,y}(z_1) = |z-x| - |z-y| \quad et\ \ z = (z_1, 0)$$

où le point d'observation $x = (x_1, x_2)$ et l'obstacle $y = (y_1, y_2)$ sont distincts, n'appartiennent pas à Γ et vérifient $x_2 \geq 0$ et $y_2 > 0$ (c'est-à-dire qu'ils sont du même côté du réseau). Notons (xy) la droite passant par les points x et y. Les points stationnaires de ϕ sont alors caractérisés par les deux assertions suivantes :

1. *Si $(xy) \cap \Gamma = \{(z_1, 0)\}$, $\phi_{x,y}$ admet pour unique point stationnaire z_1 et il n'est pas dégénéré.*
2. *Si $(xy) \cap \Gamma = \varnothing$, $\phi_{x,y}$ n'a aucun point stationnaire.*

Preuve. La preuve est ici analogue à celle du lemme 2.1.2. ∎

L'existence d'un point stationnaire de $\phi_{x,y}$ étant liée à une condition d'alignement entre un point z de Γ, le point d'observation x et l'obstacle y ou son symétrique y_s (par rapport à la droite $z_2 = 0$), nous définissons l'ensemble $\mathcal{C}_y$ des $x \in \mathbb{R}^2$ où cette condition est vérifiée par :

$$\mathcal{C}_y = \left(\bigcup_{z\in\Gamma}]z,y) \cup \bigcup_{z\in\Gamma}]z,y_s) \right) \setminus \{y, y_s\}, \tag{2.11}$$

(la notation $]z,y)$ désignant la demi-droite $[z,y)$ privée du point z). La conjonction du lemme précédent, du théorème de phase stationnaire (2.1.4) et de la relation (2.9), nous amènent à la

Proposition 2.1.7 *Le comportement fréquentiel des intégrales $I_{x,y}(\omega)$ pour un point d'observation $x \notin \Gamma$ est donné par les assertions suivantes :*

- *Si $x \in \{y, y_s\}$ alors*

$$I_{(x,y)}(\omega) = \int_{[a,b]} \frac{1}{8\,\pi\omega\,|z-y|}\,\mathrm{d}z_1 + O(\omega^{-2}).$$

- *Si $x \in \mathcal{C}_y$ alors il existe une constante $C \in \mathbb{C}^*$ telle que*

$$I_{(x,y)}(\omega) = C\,\omega^{-3/2} + O(\omega^{-2}) \quad \textit{quand } \omega \to \infty.$$

- *Si $x \notin (\mathcal{C}_y \cup \{y, y_s\})$ alors*

$$I_{(x,y)}(\omega) = O(\omega^{-2}) \quad \textit{quand } \omega \to \infty.$$

De (2.3), on tire alors le schéma récapitulatif suivant.

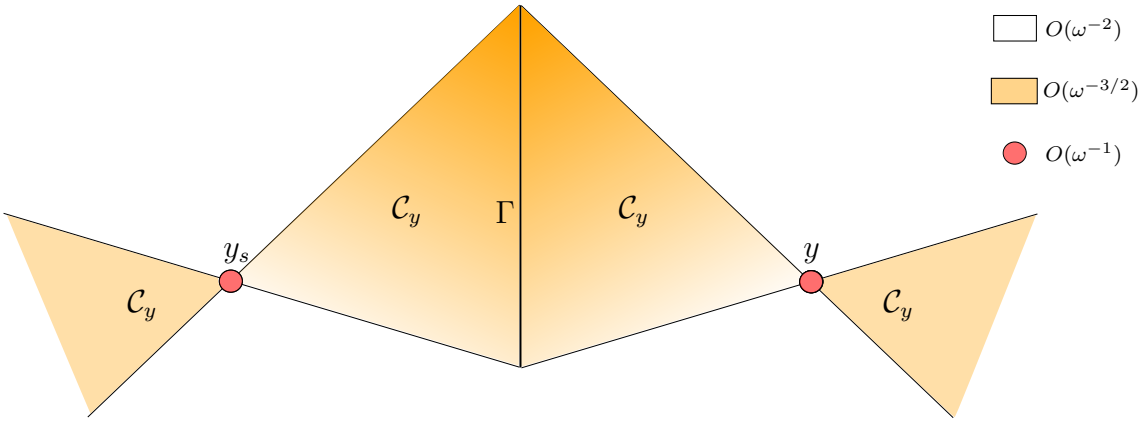

FIGURE 2.4 – Décroissance fréquentielle de $\hat{v}^{\text{inc}}$ en fonction du point d'observation.

Le point de focalisation : l'obstacle y est encore caractérisé comme le point où la décroissance fréquentielle de l'onde incidente $\hat{v}^{\text{inc}}$ est la plus faible. A la différence de la dimension 3, on observe par contre une décroissance fréquentielle plus lente de $\hat{v}^{\text{inc}}$ pour les points x appartenant à $\mathcal{C}_y$. Physiquement, l'ensemble $\mathcal{C}_y$ peut être interprété comme le cône d'émission du réseau, c'est-à-dire l'ensemble des points par lesquels se propagent les rayons focalisant sur l'obstacle y (ou son symétrique y_s).

2.2 Focalisation dans un milieu contenant plusieurs obstacles

Nous allons maintenant considérer le cas où le milieu contient plusieurs obstacles ($P > 1$) et essayer de comprendre les propriétés de focalisation sélective liées aux ondes générées par la méthode DORT. Pour pouvoir focaliser sélectivement sur tous les obstacles du milieu à l'aide de cette méthode, il faut au moins qu'il y ait autant de valeurs singulières non nulles que d'obstacles, c'est-à-dire que l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ soit de $rang(P)$. Nous caractériserons donc, dans un premier temps, le rang de cet opérateur. Puis, nous présenterons ensuite une situation idéale décrite dans [95, 97] où les obstacles du milieu sont parfaitement découplés. Dans ce cadre, il est aisé de comprendre de façon analytique la propriété de focalisation sélective des ondes générées par la méthode DORT. Enfin, par une étude des termes d'interactions entre les obstacles, nous étudierons les situations où l'on s'approche de ce cas idéal d'obstacles parfaitement découplés.

2.2.1 Propriétés algébriques de l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$

Rappelons d'abord brièvement l'expression de l'opérateur de diffraction (cf. (1.12))

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top \, (\Sigma_\omega^{-1} - \widehat{\mathbb{H}}_\omega)^{-1} \, \widehat{\mathbb{G}}_\omega.$$

La matrice de propagation $P \times N$: $\widehat{\mathbb{G}}_\omega$ est définie par

$$(\widehat{\mathbb{G}}_\omega)_{pn} := \hat{G}(x_n, y_p, \omega).$$

Quant aux matrices carrées de taille P : $\widehat{\mathbb{H}}_\omega$ et Σ_ω constituant l'opérateur de réflexion $(\Sigma_\omega^{-1} - \widehat{\mathbb{H}}_\omega)^{-1}$ dans le cadre du modèle de Foldy-Lax, elles sont décrites respectivement par :

$$\left| \begin{array}{l} (\widehat{\mathbb{H}}_\omega)_{pq} := \hat{G}(y_p, y_q, \omega) \;\; \text{si } p \neq q \quad \text{et} \quad (\widehat{\mathbb{H}}_\omega)_{pp} := 0, \\ \\ (\Sigma_\omega)_{pq} := 0 \;\; \text{si } p \neq q \quad \text{et} \quad (\Sigma_\omega)_{pp} = \sigma_p(\omega). \end{array} \right.$$

Pour focaliser sélectivement sur P obstacles à l'aide de la méthode DORT, il faut que l'opérateur $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ possède au moins P valeurs singulières non nulles. Une première étape consiste donc à caractériser l'image et le noyau de cet opérateur.

Proposition 2.2.1 *Soient $\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega) = (\hat{G}(x_1, y_p, \omega), ..., \hat{G}(x_N, y_p, \omega))^\top$ pour $p = 1..., P$, les P colonnes de l'opérateur de rétro-propagation $\widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top$. Alors l'image et le noyau de $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ vérifient :*

$$Im(\widehat{\mathbb{S}}_\omega) \subset vect(\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega), ..., \hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega)) \;\; et \;\; vect(\overline{\hat{\boldsymbol{g}}}_1(\omega), ..., \overline{\hat{\boldsymbol{g}}}_P(\omega))^\perp \subset \mathrm{Ker}(\widehat{\mathbb{S}}_\omega). \tag{2.12}$$

De plus, on a l'équivalence suivante :

$$rang(\widehat{\mathbb{G}}_\omega) = P \Longleftrightarrow rang(\widehat{\mathbb{S}}_\omega) = P.$$

Notons enfin que dans le cas où $rang(\widehat{\mathbb{G}}_\omega) = P$ (autrement dit si la famille $(\hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega))_{p\in\{1,...,P\}}$ est libre), les inclusions (2.12) deviennent des égalités.

Preuve. L'inclusion

$$Im(\widehat{\mathbb{S}}_\omega) \subset vect(\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega), ..., \hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega)) \tag{2.13}$$

découle immédiatement de la relation $Im(\widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top \, (\Sigma_\omega^{-1} - \widehat{\mathbb{H}}_\omega)^{-1} \, \widehat{\mathbb{G}}_\omega) \subset Im(\widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top)$. Concernant le noyau $\mathrm{Ker}(\widehat{\mathbb{S}}_\omega)$, la symétrie de $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ ($\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \widehat{\mathbb{S}}_\omega^\top$) entraine l'égalité suivante :

$$\mathrm{Ker}(\widehat{\mathbb{S}}_\omega) = Im(\overline{\widehat{\mathbb{S}}_\omega})^\perp. \tag{2.14}$$

Il vient alors avec (2.13) que

$$vect(\overline{\hat{\boldsymbol{g}}}_1(\omega), ..., \overline{\hat{\boldsymbol{g}}}_P(\omega))^\perp \subset \mathrm{Ker}(\widehat{\mathbb{S}}_\omega).$$

Supposons maintenant que la matrice $\widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top$ est de rang P. Sous cette hypothèse, l'opérateur $\widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top$ est injectif et l'opérateur $\widehat{\mathbb{G}}_\omega$ est surjectif, il s'ensuit que

$$rang(\widehat{\mathbb{S}}_\omega) = rang(\widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top \, (\Sigma_\omega^{-1} - \widehat{\mathbb{H}}_\omega)^{-1} \, \widehat{\mathbb{G}}_\omega) = rang(\widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top) = P.$$

Réciproquement si $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ est de rang P alors d'après (2.13), la famille $(\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega), ..., \hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega))$ est libre, $rang(\widehat{\mathbb{G}}_\omega) = P$, et

$$Im(\widehat{\mathbb{S}}_\omega) = vect(\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega), ..., \hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega)).$$

On conclut alors finalement avec (2.14) que

$$\mathrm{Ker}(\widehat{\mathbb{S}}_\omega) = vect(\overline{\hat{\boldsymbol{g}}}_1(\omega), ..., \overline{\hat{\boldsymbol{g}}}_P(\omega))^\perp.$$

■

On déduit immédiatement de ce petit résultat algébrique l'équivalence

$$rang(\widehat{\mathbb{G}}_\omega) = P \iff \widehat{\mathbb{S}}_\omega \text{ possède } P \text{ valeurs singulières non nulles.} \tag{2.15}$$

Lorsque la matrice de propagation $\widehat{\mathbb{G}}_\omega$ n'est pas de rang P, l'opérateur de diffraction possède un nombre de valeurs singulières non nulles strictement inférieur au nombre d'obstacles P. Il est donc impossible de focaliser sélectivement sur tous les obstacles du milieu. C'est par exemple le cas lorsque le nombre de transducteurs N est strictement inférieur au nombres d'obstacles, ce qui se traduit par $rang(\widehat{\mathbb{G}}_\omega) \leq min(P, N) < P$.

Quand N est supérieur ou égal à P, la condition $rang(\widehat{\mathbb{G}}_\omega) = P$ est généralement vérifiée sauf dans des cas dégénérés de symétries qui brisent la liberté de la famille $(\hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega))_{p\in\{1,\dots,P\}}$. Citons à ce titre le cas de deux obstacles y_1 et y_2 symétriques par rapport à un réseau linéique (cf. figure 2.5) où la matrice $\widehat{\mathbb{G}}_\omega$ est clairement de rang 1. Pour d'autres exemples moins triviaux, nous renvoyons le lecteur à [80].

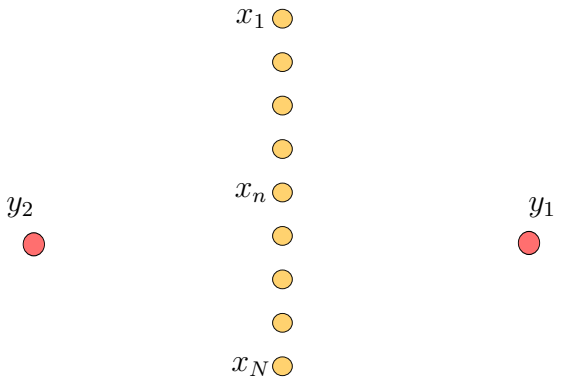

FIGURE 2.5 – Cas pathologique de deux obstacles symétriques par rapport au réseau.

2.2.2 Obstacles parfaitement découplés

Revenons dans ce paragraphe sur une situation idéale présentée dans [95, 97] où les obstacles du milieu peuvent être considérées comme totalement découplés. Les auteurs de [95, 97] considèrent un modèle où l'on néglige les réflexions entre les obstacles. Cette hypothèse se traduit algébriquement par $\widehat{\mathbb{H}}_\omega = 0$ dans (1.12) [2]. L'opérateur de diffraction s'exprime alors de la manière suivante :

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top \, \Sigma_\omega \, \widehat{\mathbb{G}}_\omega = \sum_{p=1}^{P} \sigma_p(\omega) \, \hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega) \, \hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)^\top. \tag{2.16}$$

Dans un tel cadre, ils ont mis en évidence que découpler totalement les obstacles revenait à supposer que la famille $(\hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega))_{p\in\{1,\dots,P\}}$ était orthogonale, ce qui est reformulé dans la

Proposition 2.2.2 *Si la famille $(\hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega))_{p\in\{1,\dots,P\}}$ est orthogonale, les valeurs singulières non nulles de l'opérateur $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ (défini en (2.16)) sont explicitement données par*

$$\lambda_p(\omega) = |\sigma_p(\omega)| \; \|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|^2_{\mathbb{C}^N} \,, \; p = 1, \dots, P.$$

2. En effet, en hautes fréquences c'est-à-dire lorsque les obstacles sont suffisamment distants, la matrice d'interactions entre les obstacles $\widehat{\mathbb{H}}_\omega$ devient négligeable devant le terme Σ_ω^{-1}. Ainsi l'opérateur de réflexion $(\Sigma_\omega^{-1} - \widehat{\mathbb{H}}_\omega)^{-1}$ est équivalent à Σ_ω et on peut ne prendre en compte que la première réflexion sur chaque obstacle en remplaçant $(\Sigma_\omega^{-1} - \widehat{\mathbb{H}}_\omega)^{-1}$ par Σ_ω dans (1.12).

A chaque $\lambda_p(\omega)$, on peut alors associer le couple de vecteurs singuliers suivant

$$\left(\frac{\sigma_p(\omega)\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}{|\sigma_p(\omega)|\ \|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}}, \ \frac{\overline{\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}}{\|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}} \right).$$

Preuve. La famille $(\hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega))_{p\in\{1,...,P\}}$ étant orthogonale, elle est à fortiori libre et donc $rang(\widehat{\mathbb{G}}_\omega) = P$. On déduit alors de (2.15) que l'opérateur $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ a exactement P valeurs singulières non nulles. Pour tout $p \in \{1, ..., P\}$, le couple de vecteurs $((|\sigma(\omega)_p|\ \hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega))/(\sigma_p(\omega)\ \|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}), \overline{\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}/\ \|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N})$ vérifie :

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega \frac{\overline{\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}}{\|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}} = (|\sigma_p(\omega)|\ \|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|^2_{\mathbb{C}^N}) \frac{\sigma_p(\omega)\,\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}{|\sigma_p(\omega)|\ \|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}},$$

et

$$\widehat{\mathbb{S}}^*_\omega \frac{\sigma_p(\omega)\,\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}{|\sigma_p(\omega)|\ \|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}} = (|\sigma_p(\omega)|\ \|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|^2_{\mathbb{C}^N}) \frac{\overline{\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}}{\|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}}.$$

Il s'agit donc (cf. (1.14)) d'un couple de vecteurs singuliers associés à la valeur singulière : $|\sigma_p(\omega)|\ \|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|^2_{\mathbb{C}^N}$. ∎

Lorsque la famille $(\hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega))_{p\in\{1,...,P\}}$ est orthogonale, nous dirons que les obstacles sont parfaitement découplés[3]. Sous cette hypothèse, les valeurs singulières non nulles $\lambda_p(\omega)$ ne dépendent que de la réflectivité de l'obstacle y_p et de sa distance à chacun des transducteurs composant le réseau. Dans ce cadre idéal, lorsque les valeurs singulières $\lambda_p(\omega)$ sont simples, la focalisation sélective des ondes générées par la méthode DORT s'explique par le fait qu'un vecteur singulier à droite $\hat{\boldsymbol{w}}_p(\omega)$ associé à la valeur singulière $\lambda_p(\omega)$ est de la forme

$$\hat{\boldsymbol{w}}_p(\omega) = e^{i\phi_p(\omega)} \frac{\overline{\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}}{\|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}} \quad \text{où} \quad e^{i\phi_p(\omega)} \in \mathbb{C},$$

il génère donc une onde focalisant sélectivement sur l'obstacle y_p (cf. partie 2.1).

Remarque 2.2.3 *Notons ici que nous perdons la propriété de focalisation sélective pour un obstacle y_p dont la valeur singulière $\lambda_p(\omega)$ n'est pas simple. Pour le comprendre, considérons par exemple le cas d'une valeur singulière $\lambda_p(\omega)$ double. Il existe alors $q \neq p$, tel que $\lambda_p(\omega) = \lambda_q(\omega)$. Ainsi, un vecteur singulier à droite associé à $\lambda_p(\omega)$ est de la forme :*

$$\boldsymbol{w}_p(\omega) = A(\omega) \frac{\overline{\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}}{\|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}} + B(\omega) \frac{\overline{\hat{\boldsymbol{g}}_q(\omega)}}{\|\hat{\boldsymbol{g}}_q(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}} \ \textit{où}\ A(\omega),\ B(\omega) \in \mathbb{C} \ \ \textit{et}\ A(\omega)^2 + B(\omega)^2 = 1.$$

Il génère donc des ondes qui focalisent sur les obstacles y_p et y_q dès lors que les coefficients $A(\omega)$ et $B(\omega)$ sont différents de zéro. En pratique, il n'est alors pas possible à l'aide de la méthode DORT de focaliser sélectivement sur y_p et y_q, car ne connaissant pas leurs positions, nous n'avons pas accès aux vecteurs singuliers particuliers $\boldsymbol{w}_p(\omega) = \overline{\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}/\ \|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}$ et $\boldsymbol{w}_q(\omega) = \overline{\hat{\boldsymbol{g}}_q(\omega)}/\ \|\hat{\boldsymbol{g}}_q(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}$ décrits par la proposition 2.2.2.

Ainsi, la focalisation sélective des ondes générées par la méthode DORT sur tous les obstacles du milieu suppose d'une part que les obstacles y_p sont assez éloignés les uns des autres pour que l'on se rapproche de la situation idéale d'obstacle parfaitement découplés et d'autre part que les P valeurs singulières $\lambda_p(\omega)$ qui leur sont associées sont simples. Nous nous proposons ici

3. Traduction française du terme "ideally resolved scatterers" utilisé dans [95, 97].

d'examiner sous quelles conditions on se rapproche de la situation idéale d'obstacles parfaitement découplés. Dans un tel cadre, il paraît logique, comme le suggèrent les auteurs de [95, 97], que pour $p \neq q$, le produit scalaire

$$I_{pq}(\omega) = \left(\frac{\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)}{\|\hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}}, \frac{\hat{\boldsymbol{g}}_q(\omega)}{\|\hat{\boldsymbol{g}}_q(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}} \right)_{\mathbb{C}^N} \tag{2.17}$$

mesure les interactions entre les obstacles p et q. Les obstacles étant alors faiblement couplés lorsque le terme $I_{p,q}(\omega)$ est petit devant 1 pour chaque paire d'obstacles (y_p, y_q) du système. Nous nous proposons ici d'étudier, pour un milieu homogène, la dépendance de I_{pq} en ω dans le cas du réseau plan tronqué Γ en dimension d défini dans le paragraphe 2.1.2. Nous montrerons en particulier que l'on s'approche asymptotiquement d'obstacles parfaitement découplés lorsque la fréquence ω tend vers l'infini (ce qui revient à supposer que la distance entre les obstacles est suffisamment grande pour que l'on puisse négliger les termes de couplages).

Étude asymptotique et numérique des termes de couplage

Soient y_p et y_q deux obstacles n'appartenant pas à l'hyperplan $\mathcal{H}_z$ et tels que $y_q \neq y_{p_s}$ (y_{p_s} étant le symétrique de y_{p_s} par rapport à $\mathcal{H}_z$) [4]. Pour un nombre de transducteurs N élevé, le terme de couplage $I_{pq}(\omega)$ peut être approché de la manière suivante

$$I_{pq}(\omega) \overset{N\to+\infty}{\approx} C \, \frac{\displaystyle\int_\Gamma \overline{\hat{G}(z,y,\omega)}\, \hat{G}(x,z,\omega)\, \mathrm{d}S(z)}{\left\|\hat{G}(\cdot,y_p,\omega)\right\|_{L^2(\Gamma)} \left\|\hat{G}(\cdot,y_q,\omega)\right\|_{L^2(\Gamma)}}, \tag{2.18}$$

où la constante C ne dépend que de la dimension d. On déduit alors aisément de l'étude effectuée au paragraphe 2.1.2 la

Proposition 2.2.4 *L'asymptotique hautes fréquences de $I_{pq}(\omega)$ est donnée pour $d = 3$ par*

$$I_{p,q}(\omega) = O(\omega^{-1}) \quad \textit{quand } \omega \to \infty.$$

Pour $d = 2$, il dépend de la position de l'obstacle y_q :

- *Si $y_q \in \mathcal{C}_{y_p}$ (où le cône d'émission $\mathcal{C}_{y_p}$ est défini en (2.11)) alors il existe une constante $C \in \mathbb{C}^*$ telle que*
$$I_{p,q}(\omega) = C\,\omega^{-1/2} + O(\omega^{-1}) \text{ quand } \omega \to \infty.$$
- *Si $y_q \notin \mathcal{C}_{y_p}$,*
$$I_{p,q}(\omega) = O(\omega^{-1}) \quad \textit{quand } \omega \to \infty.$$

Preuve. Les asymptotiques hautes fréquences en dimension deux et trois de l'intégrale oscillante :

$$\int_\Gamma \overline{\hat{G}(z,y,\omega)}\, \hat{G}(x,z,\omega)\, \mathrm{d}S(z),$$

sont ici respectivement données par les propositions (2.1.7) et (2.1.3). Quant au termes de normalisation, $\left\|\hat{G}(\cdot,y_j,\omega)\right\|_{L^2(\Gamma)}$ pour $j = p$ ou q, il ne dépendent pas de la fréquence pour $d = 3$:

$$\left\|\hat{G}(\cdot,y_j,\omega)\right\|_{L^2(\Gamma)} = \left(\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{1}{16\pi^2\,|z-y_j|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2,$$

4. Notons que pour $y_q = y_{p_s}$, le réseau ne discerne plus les obstacles (cf. figure 2.5).

et vérifie d'après la relation (2.8) pour $d = 2$:

$$\left\|\hat{G}(\cdot, y_j, \omega)\right\|_{L^2(\Gamma)} = \left(\int_{[a,b]} \frac{1}{8\,\pi\omega\,|z - y_j|}\,\mathrm{d}z_1\right)^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \text{ quand } \omega \to \infty.$$

A partir de ces différents asymptotiques, on obtient alors par définition de $I_{pq}(\omega)$ (cf. (2.18)) les résultats énoncés. ∎

Les termes de couplage du système tendent donc vers 0 lorsque la fréquence ω tend vers l'infini. On se rapproche donc de la situation idéale d'obstacles parfaitement découplés lorsque la fréquence est suffisamment élevée. Notons qu'en dimension 2, la vitesse de convergence vers 0 du terme de couplage $I_{pq}(\omega)$ est ralentie lorsque l'obstacle y_q appartient au cône d'émission $\mathcal{C}_{y_p}$. Nous nous proposons d'illustrer ce phénomène à l'aide d'un exemple numérique.

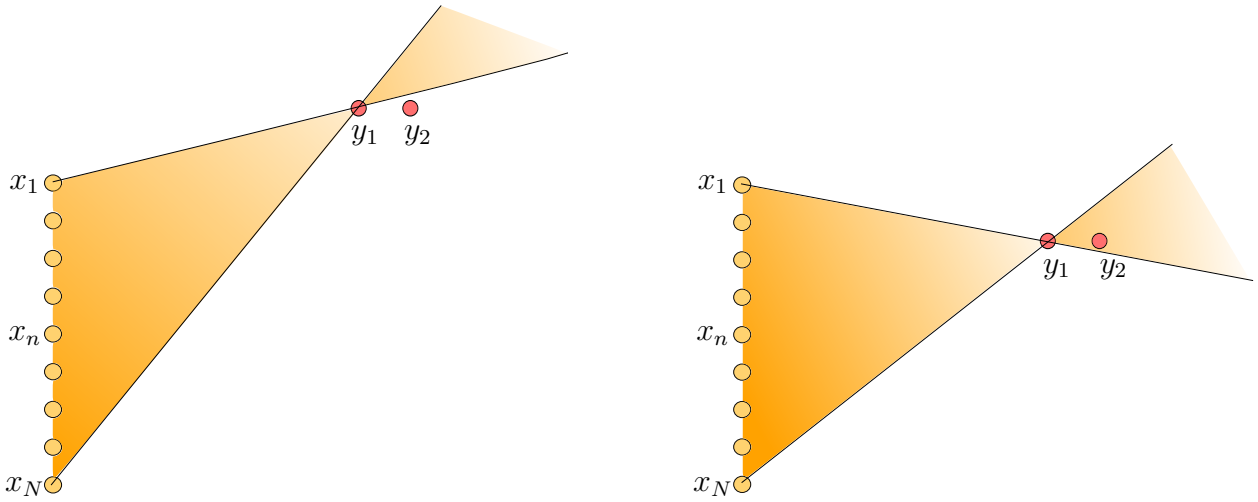

FIGURE 2.6 – Schéma des deux situations traitées : $y_2 \notin \mathcal{C}_{y_1}$ (à gauche) et $y_2 \in \mathcal{C}_{y_1}$ (à droite).

Nous considérons dans la figure 2.7 le cas d'un milieu homogène remplissant le plan $\mathbb{R}^2$ et d'un réseau linéique dont la distribution de transducteurs est équirépartie sur le segment $\{0\} \times [0, 1]$. Le milieu est ici perturbé par la présence de deux obstacles y_1 et y_2. Dans la colonne de gauche, les obstacles y_1 et y_2 sont placés respectivement en $(1.3, 1.1)$ et $(1.6, 1.1)$ de telle sorte que l'obstacle y_2 n'appartienne pas au cône d'émission $\mathcal{C}_{y_1}$. Dans la colonne de droite au contraire, les positions respectives des deux obstacles y_1 et y_2 : $(1.3, 0.9)$ et $(1.6, 0.9)$ font que y_2 appartient à $\mathcal{C}_{y_1}$. Ces situations sont représentées par les deux schémas de la figure 2.6.

Dans le premier et le deuxième couple d'images de la figure 2.7, le terme de couplage I_{12} est tracé en fonction de la fréquence ω respectivement pour un nombre de transducteurs $N = 100$ et $N = 300$. En comparant ces simulations verticalement, on remarque que si l'on augmente fortement la fréquence sans avoir suffisamment de transducteurs, le couplage entre deux obstacles oscille fortement. Cette situation se produit dans chaque cas lorsque la distance entre les transducteurs est voisine de la longueur d'onde $2\pi/\omega$. Numériquement, cela justifie le passage à la limite mathématique $N \to \infty$ pour obtenir un réseau continu avant de faire tendre la fréquence ω vers l'infini. Notons également qu'en confrontant ces simulations horizontalement, on constate que le terme de couplage I_{12} semble converger plus lentement vers 0 à droite, dans le cas où $y_2 \in \mathcal{C}_{y_1}$, ce qui est bien accord avec la proposition 2.2.4.

Dans le dernier couple d'images de la figure 2.7, nous représentons en échelle logarithmique la vitesse de convergence du terme I_{12} en fonction de la fréquence (courbe rouge) pour un réseau de 2000 transducteurs qui est alors une bonne approximation d'un réseau continu. Quant à la

droite bleue, elle représente la fonction $\omega \mapsto \omega^{-1}$ à gauche et la fonction $\omega \mapsto \omega^{-\frac{1}{2}}$ à droite. Les ordres de convergence prédits par la proposition 2.2.4 sont ainsi vérifiés.

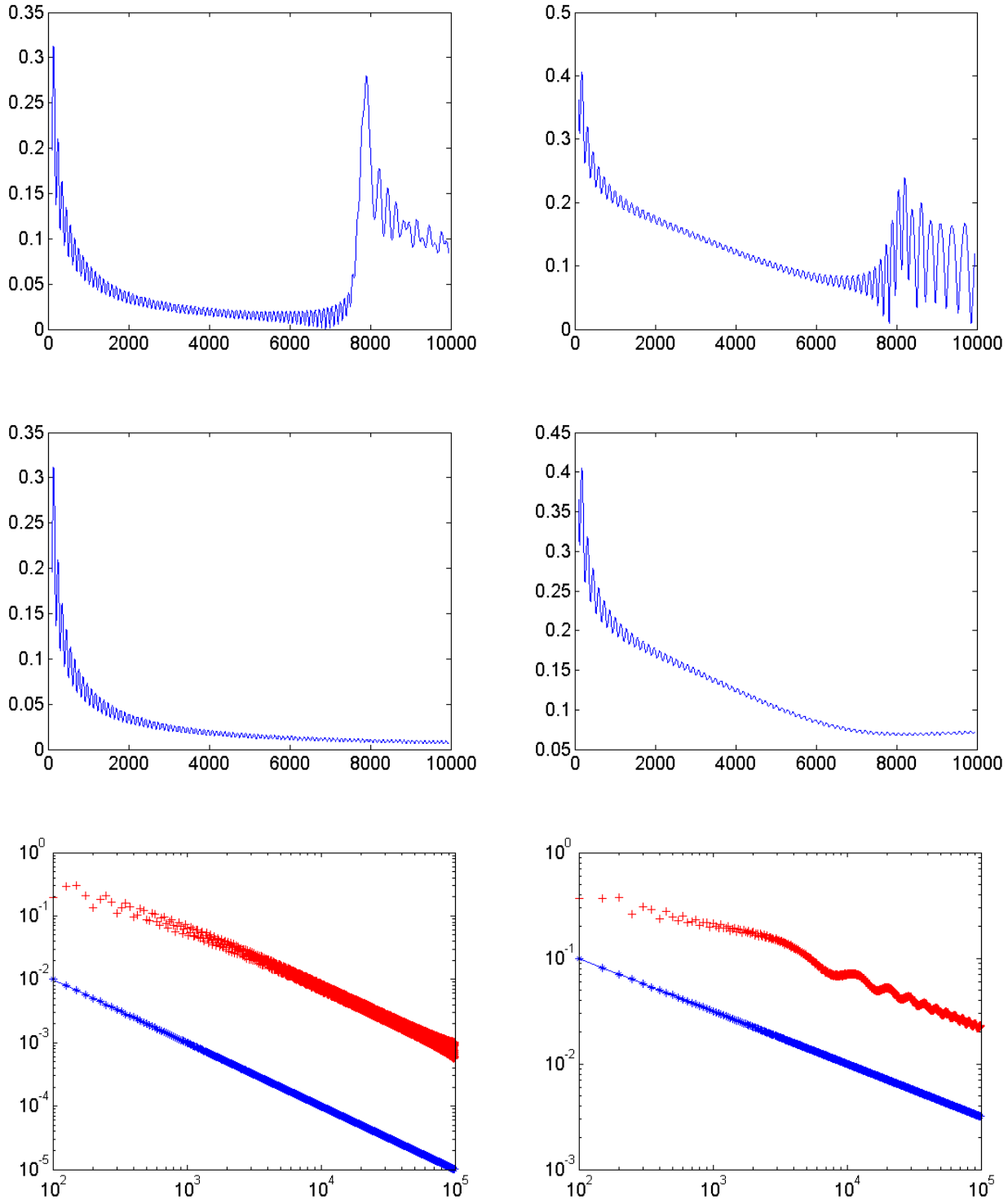

FIGURE 2.7 – Terme de couplage I_{12} en fonction de ω dans les cas où $y_2 \notin \mathcal{C}_{y_1}$ (à gauche) et $y_2 \in \mathcal{C}_{y_1}$ (à droite).

CHAPITRE TROIS

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Sommaire

3.1 Simulation numérique en régime harmonique 51
3.1.1 La méthode DORT en milieu homogène 52
3.1.2 La méthode DORT en milieu diffusif 54
3.2 Focalisation en régime transitoire 62
3.2.1 La focalisation sélective 62
3.2.2 Tache focale et bande passante de la gaussienne 62
3.2.3 Effet super résolutif du milieu diffusif 63
3.2.4 Focalisation avec un transducteur 63

Nous cherchons ici à illustrer numériquement les propriétés de focalisation exhibées dans les deux chapitres précédents pour un milieu bidimensionnel. Dans un premier temps, nous présentons des simulations en régime harmonique en nous intéressant tout d'abord au cas d'un milieu de référence homogène. Dans ce cadre, nous montrons à travers divers exemples la focalisation spatiale sélective des ondes générées par la méthode DORT. Nous en décrivons également les limites en présentant notamment les cas pathologiques d'obstacles fortement couplés ou non discernables par le réseau de transducteurs. Puis, dans le cas d'un milieu diffusif, en jouant sur le nombre de diffuseurs du milieu, nous illustrons l'impact des différents régimes de diffusion : balistique et diffusif (introduits au chapitre un) sur la propagation des ondes générées par la méthode DORT. Enfin, dans le cas du régime transitoire, nous complétons l'étude numérique entreprise dans le premier chapitre.

3.1 Simulation numérique en régime harmonique

La méthode numérique en régime fréquentiel consiste, dans un premier temps, à construire l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ à l'aide du modèle de Foldy-Lax (cf. paragraphe 1.2.1). Puis, il faut exhiber une base de vecteurs singuliers à droite de l'image de cet opérateur. Chacun de ces vecteurs singuliers fournit alors une distribution de signaux complexes : $(\hat{q}_1(\omega), \hat{q}_2(\omega), ..., \hat{q}_N(\omega))$ à appliquer aux transducteurs qui émettent une onde incidente

$$\hat{v}^{\text{inc}}(x,\omega) = \sum_{n=1}^{N} \hat{q}_n(\omega)\hat{G}(x_n, x, \omega),$$

dont nous représentons le module sur une grille qui maille une partie du plan Ω. Notons que dans le cas où le milieu de référence est un milieu diffusif modélisé par un milieu homogène perturbé

par la présence de D petits diffuseurs parfaitement mous, la fonction de Green $\hat{G}$ est elle-même calculée numériquement à l'aide du modèle de Foldy-Lax en résolvant en chaque point de la grille un système de taille D (cf. (1.15)).

3.1.1 La méthode DORT en milieu homogène

Le cas idéal d'un obstacle entouré d'un réseau circulaire

Décrivons la situation représentée par la figure 3.1 qui met en évidence l'évolution de la tache focale en fonction de l'ouverture angulaire du réseau de transducteurs. Nous considérons ici un milieu homogène perturbé par la présence d'un seul obstacle de diamètre 2.10^{-3} placé en $(1,1)$ [1]. Ce dernier est représenté par un rond blanc (nous conserverons cette convention dans les prochaines simulations). Le réseau utilisé est un arc de cercle (de couleur noire sur les images) de rayon $R = 0.9$ dont le centre est placé sur l'obstacle. Son ouverture angulaire, à densité de transducteurs constante : 30 par radian, varie d'une simulation à l'autre avec un pas de $\pi/3$. L'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ possède dans chaque cas une unique valeur singulière non nulle. Nous représentons ici sur le domaine $\Omega = [0,2] \times [0,2]$ pour la fréquence $\omega = 30$ l'onde générée par un vecteur propre singulier à droite qui lui est associé.

Sur la première figure, la tache focale est elliptique. Le réseau de faible ouverture angulaire : $\pi/3$ se comporte ici plutôt comme un réseau linéique. Si l'on désigne par $d = 0.9$ la distance entre l'obstacle et le réseau et par $l = 0.9\pi/3$ la longueur du réseau, on vérifie alors que la taille de la tache focale transverse (à l'axe de symétrie du réseau) suit le critère de Rayleigh : $\lambda\, d/l \approx 0.2$. Avec l'augmentation de l'ouverture angulaire, cette grandeur diminue pour atteindre dans la troisième figure (ouverture angulaire de π) la valeur limite $1.2\lambda/\pi \approx 0.08$ mise en évidence par le petit calcul du paragraphe 2.1.1. Dans les quatrième et cinquième figure, c'est la taille de la tache focale longitudinale qui s'affine. On obtient finalement pour un réseau circulaire (sixième figure) une tache focale dont le rayon est une bonne approximation de la résolution maximale $1.2\lambda/\pi \approx 0.08$.

Obstacles faiblement couplés

Nous nous intéressons dans la figure 3.2 à un milieu homogène contenant deux obstacles de diamètre 2.10^{-3} et 10^{-3} respectivement placés en $(1.2, 0.3)$ et $(1.7, 1.9)$. Le réseau, ici linéique, est composé de 128 transducteurs équirépartis sur le segment $\{0\} \times [0,2]$. L'opérateur $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ possède deux valeurs singulières non nulles. Nous représentons successivement pour les fréquences $\omega = 3$, $\omega = 30$ et $\omega = 100$ les ondes générées par les vecteurs singuliers à droite associés à ces deux valeurs singulières.

Dans le premier couple de figures où $\omega = 3$, la distance entre les obstacle et le réseau est voisine de $0.6\,\lambda$ pour le plus gros obstacle et de $0.8\,\lambda$ pour le plus petit. Les oscillations des ondes générées par le réseau sont donc du même ordre de grandeur que la distance entre les obstacles et le réseau, ces ondes sont donc incapables de focaliser sur les obstacles.

Pour le deuxième couple d'images $\omega = 30$, on a donc multiplié par 10 la longueur d'onde par rapport à la situation précédente. Les obstacles, étant distants d'environ 8λ, sont faiblement couplés. On observe alors la focalisation sélective des ondes générées par la méthode DORT. La taille de la tache focale transverse suit encore le critère de Rayleigh : $\lambda d/l$. Ce rapport est approximativement égal à 0.13 pour l'obstacle le plus proche et à 0.18 pour le plus éloigné. Enfin, on distingue que l'intensité du champ incident est plus importante dans une zone de forme conique. Il s'agit en fait du cône d'émission, décrit au chapitre précédent. Notons à ce

1. Le diamètre d'un obstacle intervient dans l'expression de son coefficient de réflexion $\sigma(\omega)$ (cf. 1.8).

titre que chaque obstacle n'appartient pas au cône d'émission de l'autre, ce qui diminue leur interaction (cf. proposition 2.2.4).

Dans le dernier couple de figures de 3.2 où la fréquence $\omega = 100$, les deux obstacles, distants d'environ $27\,\lambda$ sont pratiquement parfaitement découplés. Ceci peut s'observer numériquement en examinant le graphique gauche de la figure 3.4 où l'on trace le terme de couplage

$$I_{12} = \left(\frac{\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega)}{\|\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}}, \frac{\hat{\boldsymbol{g}}_2(\omega)}{\|\hat{\boldsymbol{g}}_2(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}} \right)_{\mathbb{C}^N}$$

(défini en (2.17)) en fonction de la fréquence ω. A $\omega = 100$, ce terme est inférieur à 0.05, les vecteurs $\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega)/\|\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}$ et $\hat{\boldsymbol{g}}_2(\omega)/\|\hat{\boldsymbol{g}}_2(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}$ sont donc presque orthogonaux. Notons ensuite que la qualité de la focalisation s'est nettement améliorée ; on constate par exemple que la taille de la tache focale transverse qui suit toujours le critère de Rayleigh, a été divisée par 3. On observe aussi qu'en dehors du cône d'émission de chaque obstacle, l'intensité de l'onde incidente est voisine de zéro. En effet, nous avons constaté au chapitre précédent que la décroissance fréquentielle de $\hat{v}^{\text{inc}}(x, \omega)$ était plus importante pour des points x en dehors de ce cône (cf. figure 2.4).

Obstacles fortement couplés

Dans la figure 3.3, le réseau de transducteurs, le nombre et la taille des obstacles, ainsi que le domaine Ω représenté sont semblables à ceux de la figure 3.2. Cependant, la position des obstacles a changé : ils sont ici plus proches. Le plus gros obstacle est désormais positionné en $(1.1, 1.3)$ et le plus petit en $(1.4, 1.4)$. L'opérateur de diffraction possède toujours deux valeurs singulières non nulles dont nous représentons les ondes incidentes associées par la méthode DORT pour les fréquences $\omega = 30$, $\omega = 100$ et $\omega = 200$.

Lorsque $\omega = 30$ (premier couple d'images), la distance entre les obstacles est d'environ 1.5λ. Les obstacles sont donc fortement couplés. Les vecteurs singuliers à droite, dont la propriété est de maximiser l'énergie diffractée sur le réseau, ont alors tendance à illuminer les deux obstacles. On perd donc la propriété de focalisation sélective des ondes générées par la méthode DORT. Pour $\omega = 100$ (deuxième couple de figures), les obstacles sont distants d'environ $5\,\lambda$. La focalisation s'est nettement améliorée, mais elle n'est pas totalement sélective. En effet, dans chaque cas, une partie non négligeable de l'énergie de l'onde incidente est encore envoyée sur le second obstacle. Ceci s'explique par le fait que chaque obstacle appartient au cône d'émission de l'autre, le couplage entre les deux obstacles décroit ainsi moins vite en fonction de la fréquence (cf. proposition 2.2.4) que dans la disposition associée à la figure 3.2 (cf. figure 3.4). Enfin, pour $\omega = 200$ (dernier couple d'images), on peut parler de focalisation sélective. Néanmoins, le cône d'émission de chaque obstacle reste encore perturbé par la présence du second (ce phénomène est notamment très visible sur l'onde incidente focalisant sur le plus petit obstacle).

Obstacles non discernables

Nous traitons dans la figure 3.5 un cas pathologique étudié dans [97] où le réseau n'est plus capable de discerner les obstacles en raison de la forte symétrie du problème. Dans cette simulation, le réseau, le nombre d'obstacles, ainsi que le domaine Ω sont identiques à ceux des figures 3.2 et 3.3. C'est ici le rayon et la position des obstacles qui ont changé. Les deux obstacles sont désormais de tailles identiques : 2.10^{-3} et leur position respective est $(1.2, 0.5)$ et $(1.2, 1.5)$. On remarque alors que la disposition du système (réseau plus obstacles) est symétrique par rapport à la droite $y = 1$.

Dans le premier couple d'images, nous représentons, à la fréquence $\omega = 100$, les ondes générées par deux vecteur singuliers à droite associés aux deux valeurs singulières non nulles

de $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$. Nous perdons ici totalement la propriété de focalisation sélective car les ondes focalisent sur les deux obstacles (cette focalisation est même symétrique par rapport à la droite $y = 1$). Les auteurs de [97] ont par contre constaté que lorsqu'on choisit une combinaison particulière de ces deux vecteurs singuliers, on peux focaliser sélectivement sur chacun des obstacles, ce qui est vérifié numériquement dans le second couple d'images de cette figure. Notons par contre que comme les valeurs singulières $\lambda_1(\omega)$ et $\lambda_2(\omega)$ sont généralement distinctes, les vecteurs ainsi formés ne sont pas des vecteurs singuliers à droite de l'opérateur $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$. Nous sortons donc ici du cadre de la méthode DORT.

Cette situation, très particulière, est en fait "pire" que la situation de la figure 3.3 dans le sens où l'augmentation de la fréquence n'améliore pas la focalisation sélective. En effet, le problème n'est pas ici relié à la promiscuité des obstacles, mais à celle des deux valeurs singulières non nulles : $\lambda_1(\omega)$ et $\lambda_2(\omega)$ ($\lambda_1(\omega)$ étant supérieure à $\lambda_2(\omega)$) de $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$. Ce phénomène est illustré par la courbe 3.6 où l'on trace pour un nombre de transducteurs élevé $N = 3000$, la courbe $(\lambda_1(\cdot)-\lambda_2(\cdot))/\lambda_1(\cdot)$ en fonction de la fréquence ω. On constate que cette différence semble tendre vers 0 lorsque $\omega \to \infty$, tout en s'annulant en certaines fréquences pour lesquelles $\lambda_1(\omega) = \lambda_2(\omega)$. Expliquons ce phénomène dans le cas où l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ est de la forme :

$$\widehat{\mathbb{S}}_\omega = \widehat{\mathbb{G}}_\omega^\top \, \Sigma_\omega \, \widehat{\mathbb{G}}_\omega = \sum_{p=1}^{2} \sigma(\omega) \, \hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega) \, \hat{\boldsymbol{g}}_p(\omega)^\top, \tag{3.1}$$

autrement dit lorsqu'on néglige les réflexions entre les obstacles [2]. Dans ce cas, pour un nombre de transducteurs élevé et en hautes fréquences, les vecteurs $(\hat{\boldsymbol{g}}_P(\omega))_{p\in\{1,\dots,P\}}$ sont presque orthogonaux (cf. proposition 2.2.4). Or, si l'on suppose cette orthogonalité, l'opérateur $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$, défini en (3.1), admet pour une unique valeur singulière non nulle $|\sigma(\omega)| \, \|\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega)\|^2_{\mathbb{C}^N}$ (cf. proposition 2.2.2) qui est ici double, car la symétrie du problème impose que

$$|\sigma(\omega)| \, \|\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega)\|^2_{\mathbb{C}^N} = |\sigma(\omega)| \, \|\hat{\boldsymbol{g}}_2(\omega)\|^2_{\mathbb{C}^N} .$$

Dans ce cas, d'après la remarque 2.2.3, les vecteurs singuliers à droite $\hat{\boldsymbol{w}}(\omega)$ (d'une SVD quelconque) associés à cette valeur singulière sont une combinaison linéaire des vecteurs orthogonaux $\overline{\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega)}/\|\hat{\boldsymbol{g}}_1(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}$ et $\overline{\hat{\boldsymbol{g}}_2(\omega)}/\|\hat{\boldsymbol{g}}_2(\omega)\|_{\mathbb{C}^N}$ et focalisent donc sur les deux obstacles. Pour obtenir la focalisation sélective, il faut choisir une SVD dont les vecteurs singuliers à droite sont à un coefficient complexe de module un près ces deux derniers vecteurs, ce qui n'est pas possible en pratique car on ne connaît pas la position des obstacles.

3.1.2 La méthode DORT en milieu diffusif

Nous considérons ici le cas où le milieu de référence n'est plus homogène, mais diffusif. Par diffusif, nous entendons qu'il s'agit d'un milieu homogène perturbé par des petits diffuseurs parfaitement mous de même rayon r . Dans un tel cadre, nous modélisons la diffraction d'une onde incidente à l'aide du modèle de Foldy-Lax, décrit dans le paragraphe 1.2.1 (une étude approfondie de ce modèle asymptotique sera effectuée dans le chapitre 4). Ce modèle présuppose que la taille des obstacles reste petite devant la longueur d'onde. Dans un tel contexte, le libre parcours moyen (cf. [27, 48]), est donné par la formule (1.16)

$$L_{\mathrm{fp}} := \frac{4\omega}{\mathcal{N}\,|\sigma(\omega)|^2}, \tag{3.2}$$

où $\sigma(\omega) = 4i/(H_0^{(1)}(\omega\, r))$ désigne ici le coefficient de réflexion associé aux diffuseurs par le modèle de Foldy-Lax.

2. Les obstacles étant de même taille, ils ont la même réflectivité $\sigma(\omega)$.

Plaçons nous ici avec le même jeu de paramètres numériques que celui des figures 1.2 et 1.3 du chapitre 1, c'est-à-dire une situation semblable à celle décrite dans la figure 3.3 où nous avons remplacé le milieu homogène par un milieu contenant 500 diffuseurs de rayon $r = 10^{-4}$ aléatoirement répartis dans le domaine $[0.3, 0.8] \times [0, 2]$. Nous avions alors étudié l'influence de l'augmentation de la fréquence ω sur les ondes incidentes générées par la méthode DORT et avions notamment constaté que la qualité de la focalisation augmentait en haute fréquence. Outre le fait que le réseau détecte mieux les obstacles dans un tel régime fréquentiel, une raison de cette amélioration était l'augmentation du libre parcours moyen avec la fréquence, ce que nous visualisons dans la figure 3.7. Nous avions alors mis en évidence un régime plutôt diffusif pour la figure 1.2 et un régime intermédiaire pour la figure 1.3.

Néanmoins, la croissance du libre parcours moyen en fonction de la fréquence étant plutôt lente dans les intervalles de fréquence considérés (cf. figure 3.7), nous nous proposons ici d'examiner ce que deviennent les ondes générées par la méthode DORT lorsqu'on le fait varier de façon importante. A cette fin, nous allons ici jouer sur un autre paramètre dans la formule (3.2) : la densité de diffuseurs du milieu $\mathcal{N}$ (la fréquence ω étant ici fixée à 50).

Dans le premier couple d'images de la figure 3.8, la densité de diffuseurs est de 50 par unité d'aire. Le libre parcours moyen $L_{\text{fp}} \approx 3.2$ est grand devant l'épaisseur du milieu diffusif $L = 0.5$, nous sommes donc en régime balistique. Les ondes générées par la méthode DORT focalisent sélectivement sur les obstacles tout en subissant quelques réflexions spéculaires dans le milieu diffusif. Les taches focales sont ici pratiquement semblables à celle obtenues dans un milieu homogène. Dans le second couple d'images où la densité de diffuseurs est de 500 par unité d'aire, le libre parcours moyen $L_{\text{fp}} \approx 0.32$ est donc divisé par dix par rapport à la situation précédente. Il est ici inférieur à L. Nous sommes donc dans un régime plutôt diffusif. Cette situation est semblable à celle observée dans la figure 1.2. La qualité de la focalisation s'est dégradée. Une grosse partie de l'énergie de l'onde incidente reste piégée par les réflexions dans le milieu diffusif où l'on observe des phénomènes de résonance. Néanmoins, la taille de la tache focale semble réduite par rapport au cas précédent. En effet, la présence de diffuseurs a pour conséquence d'accroître la résolution du réseau en augmentant son ouverture angulaire (cf. [9, 20]). Enfin, dans le dernier couple d'images où la densité de diffuseurs est désormais de 2000 par unité d'aire, le libre parcours moyen $L_{\text{fp}} \approx 0.08$ est petit devant L. Nous sommes ici dans un régime très diffusif. Les ondes incidentes, générées par la méthode DORT, ne focalisent plus les obstacles. La quasi-totalité de leur énergie reste piégée par les réflexions dans le milieu diffusif qui joue ici le rôle d'"un mur infranchissable" pour ces ondes.

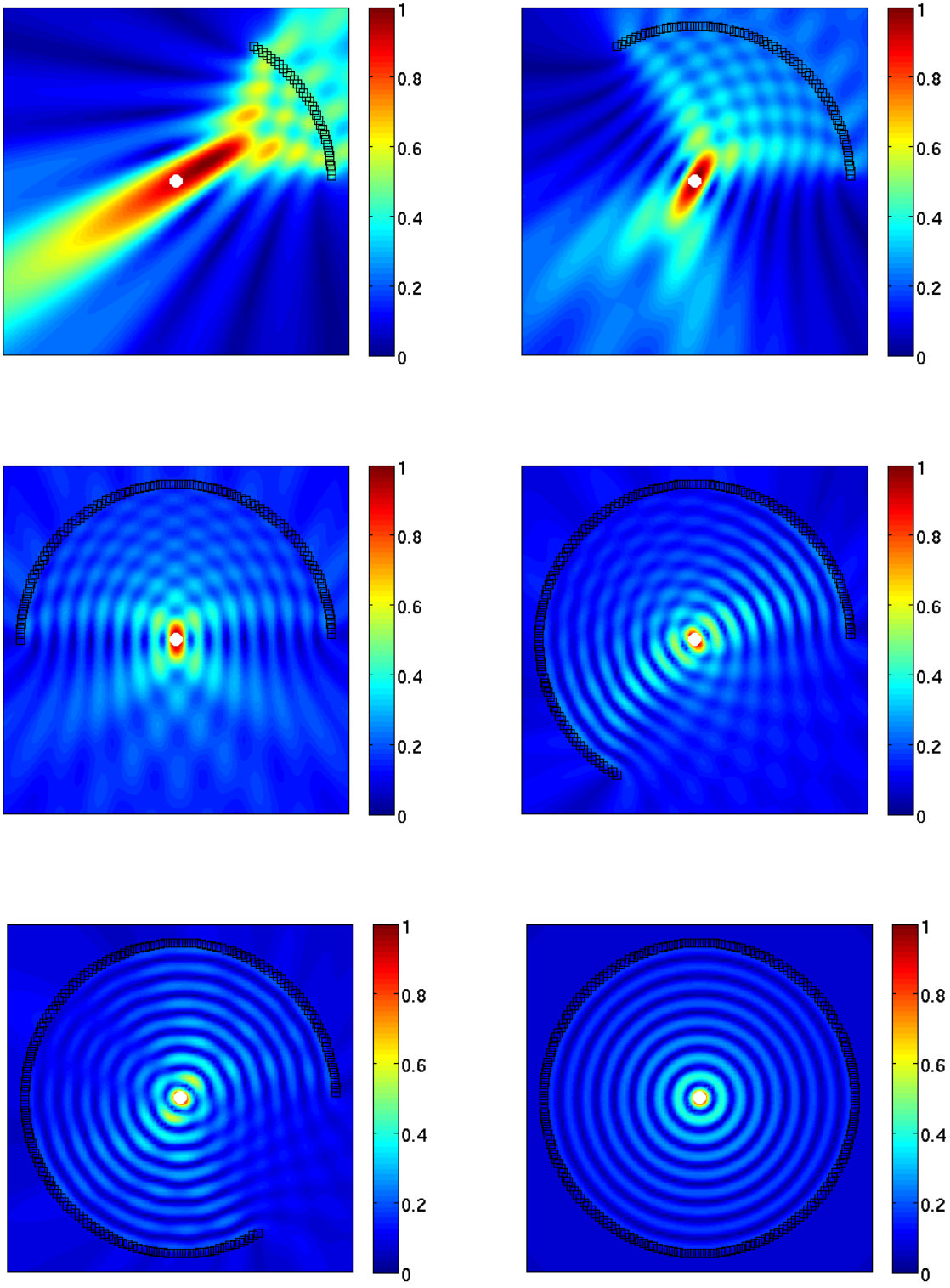

FIGURE 3.1 – Évolution de la tache focale en fonction de l'ouverture angulaire.

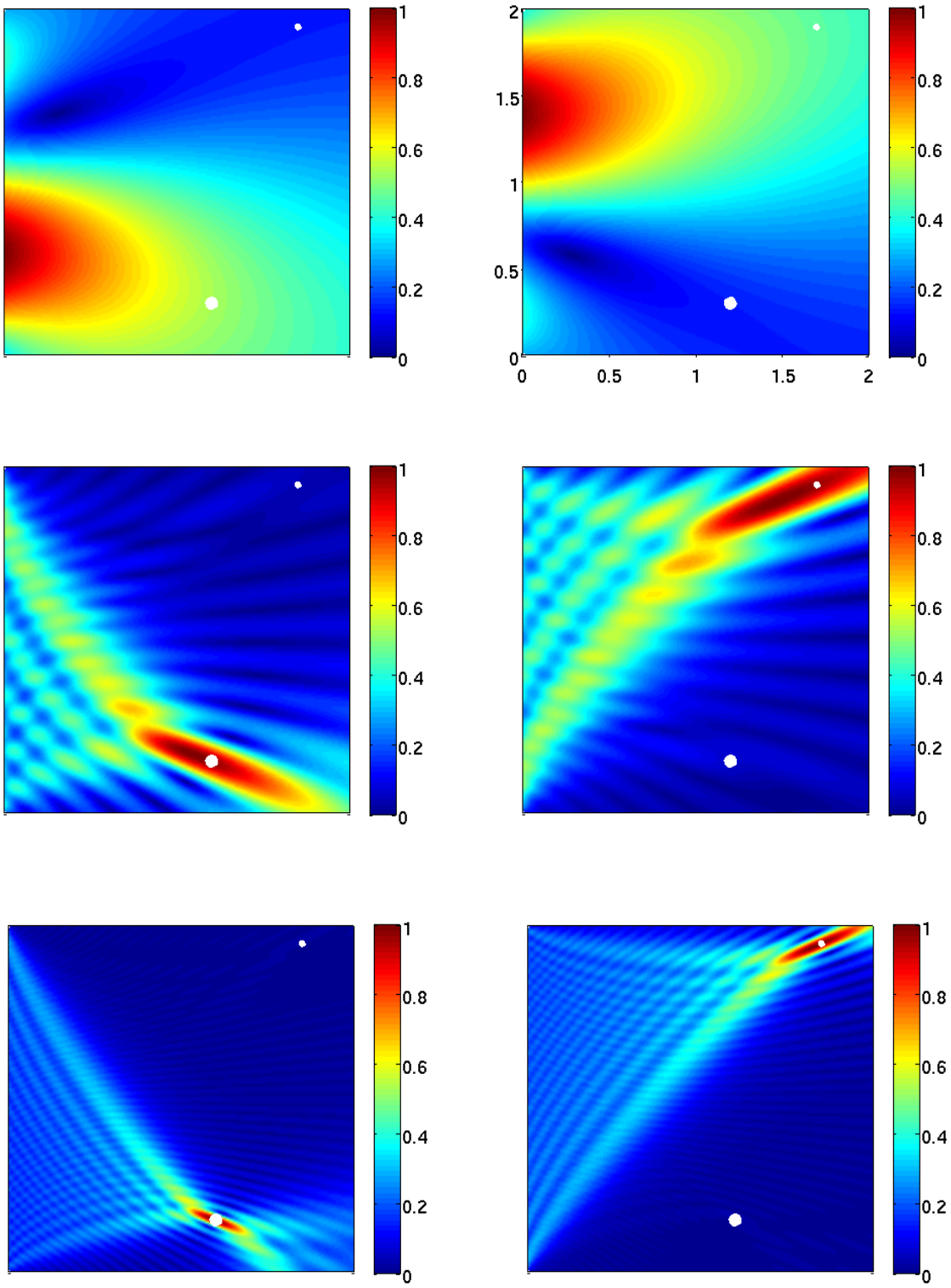

FIGURE 3.2 – Évolution de la tache focale en fonction de la longueur d'onde pour des obstacles faiblement couplés.

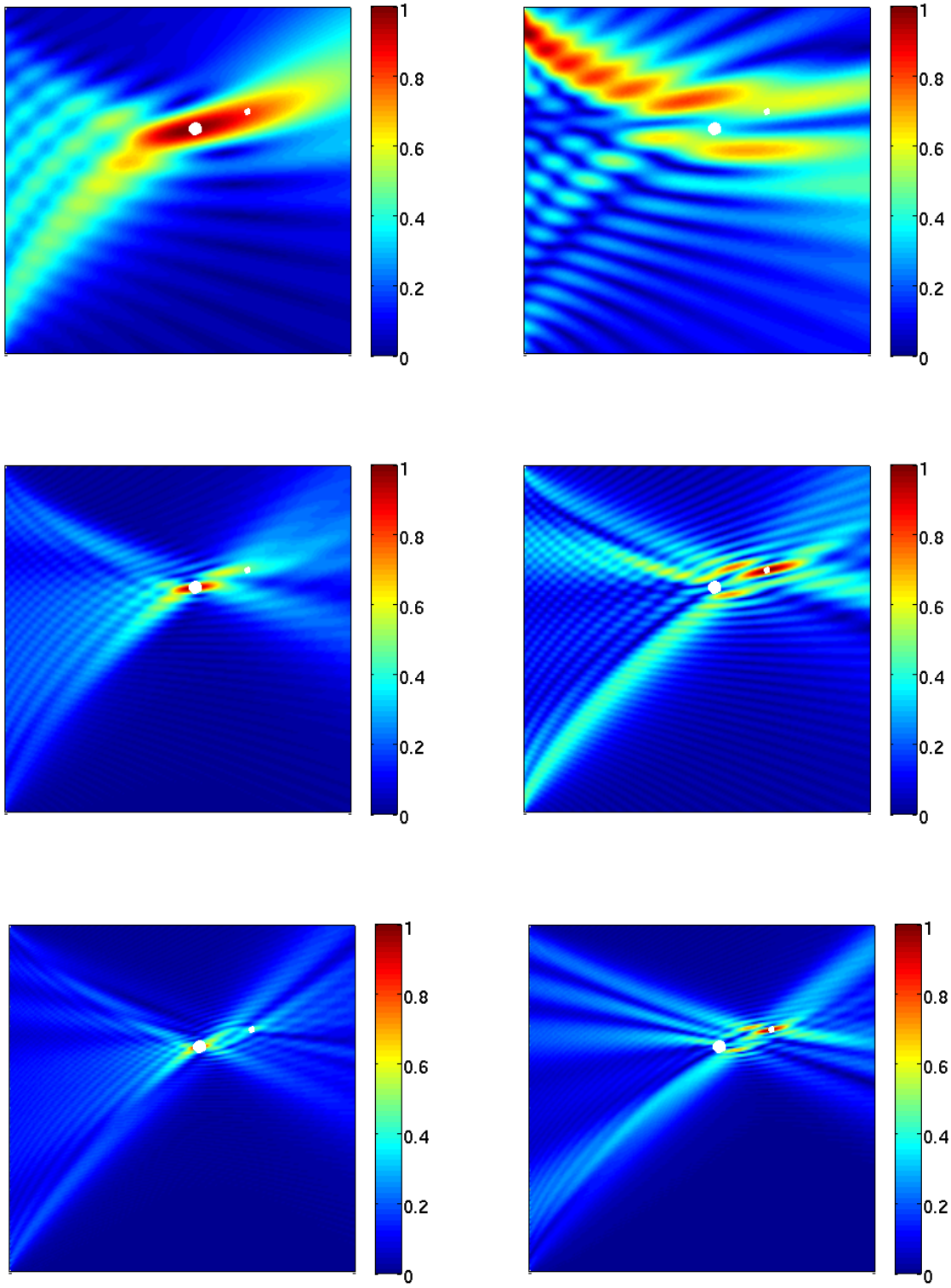

FIGURE 3.3 – Évolution de la tache focale en fonction de la longueur d'onde pour des obstacles fortement couplés.

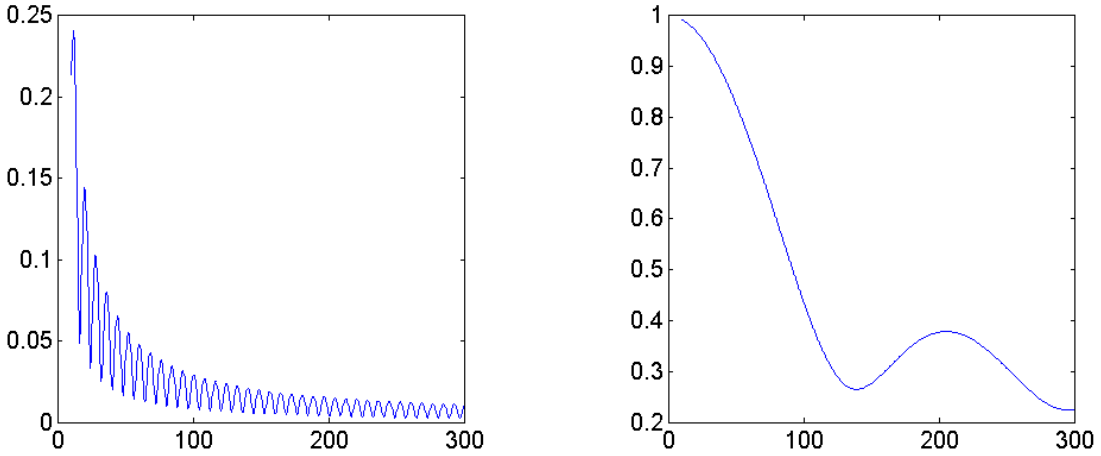

FIGURE 3.4 – Terme de couplage I_{12} en fonction de la fréquence dans la situation décrite par la figure 3.2 (à gauche) et par la figure 3.3 (à droite) .

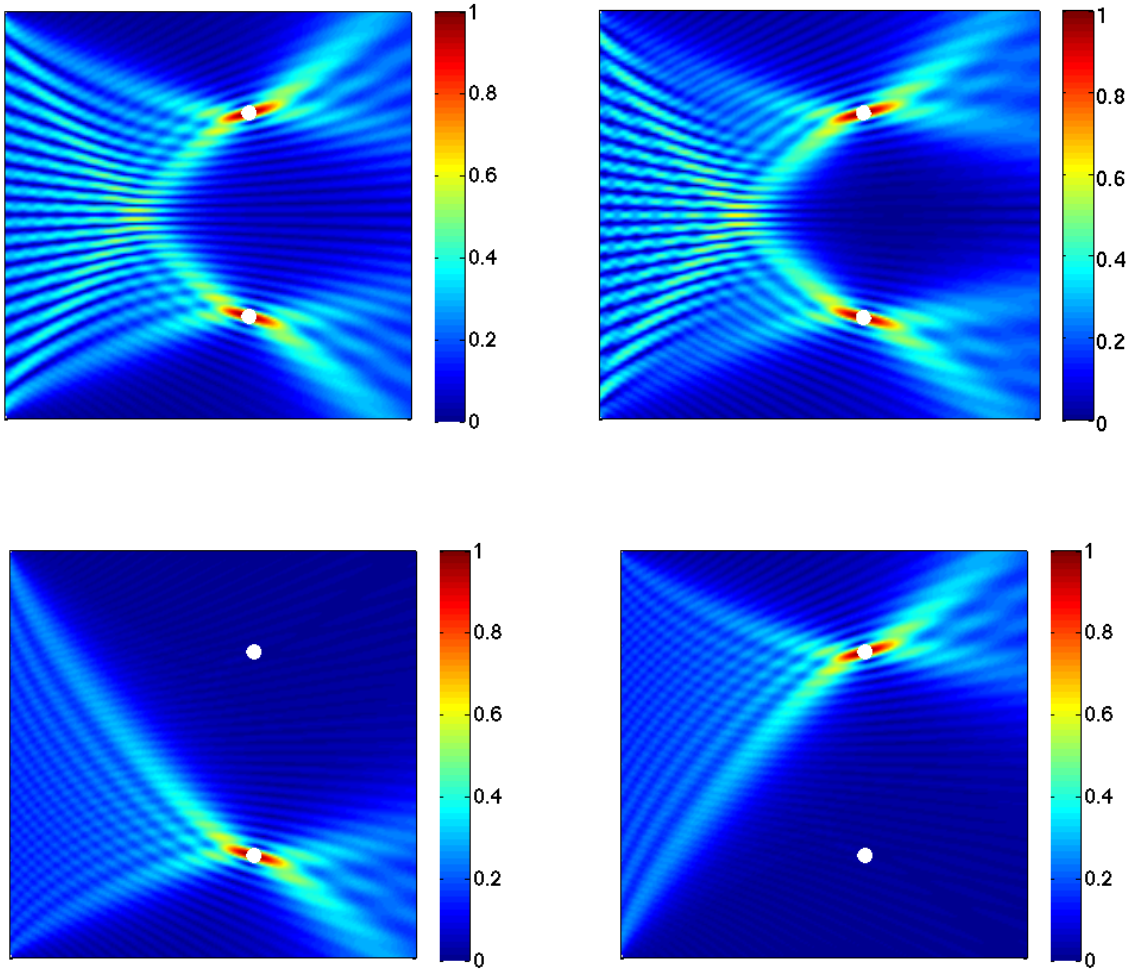

FIGURE 3.5 – Cas pathologique de deux obstacles indiscernables.

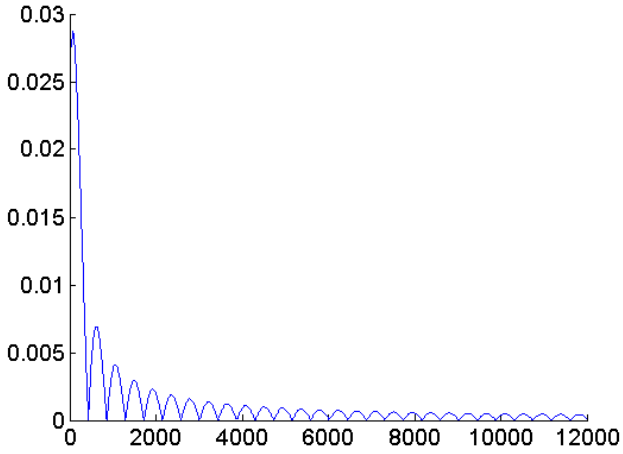

FIGURE 3.6 – Courbe : $(\lambda_1(\cdot) - \lambda_2(\cdot))/\lambda_1(\cdot)$ en fonction de la fréquence ω.

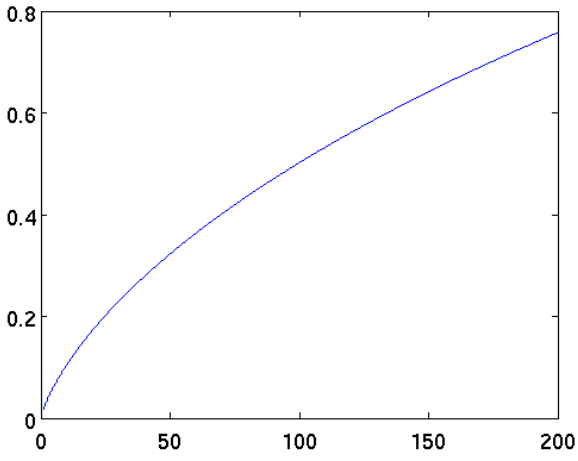

FIGURE 3.7 – Libre parcours moyen en fonction de la fréquence dans le cadre du modèle de Foldy-Lax pour une densité de 500 diffuseurs, de diamètre 2.10^{-4}, par unité d'aire.

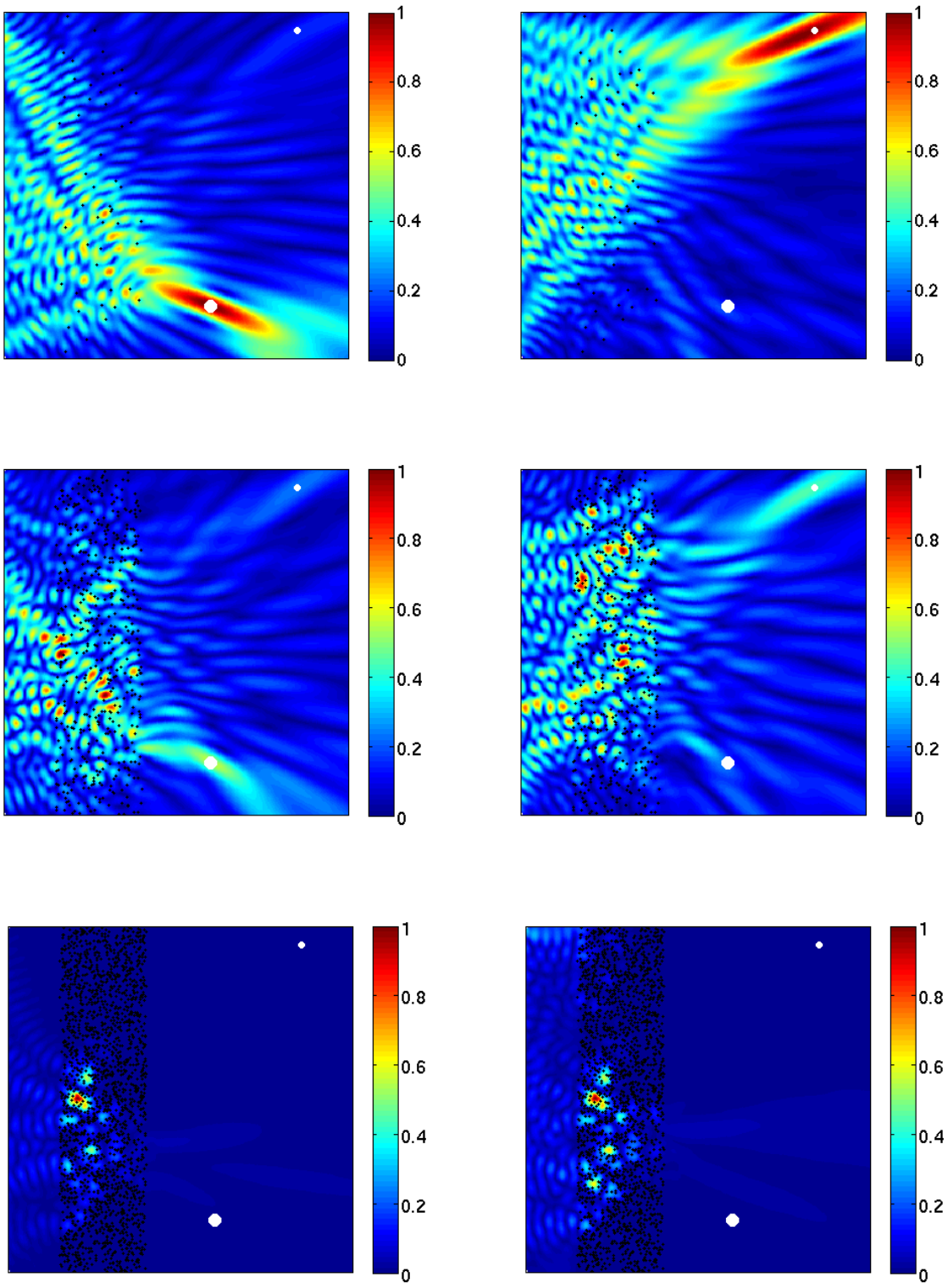

FIGURE 3.8 – Tache focale des ondes générées par la méthode DORT en fonction du régime de diffusion : balistique (premier couple d'images), intermédiaire (deuxième couple) et diffusif (dernier couple).

3.2 Focalisation en régime transitoire

Dans le premier chapitre (cf. paragraphe 1.3.1), nous avons montré comment superposer fréquentiellement les vecteurs singuliers à droite de la méthode DORT afin de construire des signaux temporels générant des ondes qui focalisent sélectivement en espace mais aussi en temps au voisinage des obstacles du milieu. Nous avons mis en évidence les propriétés de ces signaux et donné quelques exemples numériques illustrant la focalisation. Nous cherchons ici à compléter par de nouvelles simulations l'étude numérique entreprise dans le premier chapitre.

3.2.1 La focalisation sélective

En régime harmonique, un grand avantage de la méthode DORT est de focaliser sélectivement tous les obstacles du milieu lorqu'ils sont suffisamment découplés. Observons ici numériquement ce phénomène en régime transitoire. A cette fin, montrons la focalisation sur le second obstacle pour la configuration géométrique et les paramètres physiques utilisés dans la figure 1.5. Cet obstacle étant plus éloigné du réseau et de plus petite taille, il est associé sur toute la bande fréquentielle (ici $[20, 100]$) à la plus petite valeur singulière non nulle de $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$.

Dans la figure 3.9, nous représentons l'onde incidente générée par le signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ du théorème 1.3.1. Celle-ci focalisent à $t = 0$ sur le second obstacle. Cet obstacle étant plus éloigné du réseau, la tache focale est ici légèrement plus étendue que dans la figure 1.5. Concernant la propagation de l'onde, on observe ici les mêmes phénomènes. Le front d'onde est encore perturbé par les réflexions dans le milieu diffusif qui ont tendance à ralentir sa propagation. Pour tenir compte de ces réflexions, une partie de l'onde est émise suffisamment tôt (ceci est visible au temps $t = -3.2$) afin que ses diverses composantes se concentrent à $t = 0$ sur l'obstacle.

Dans la figure 3.10, on compare la qualité de la focalisation à l'aide du critère énergétique (1.28) pour le signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ du théorème 1.3.1 à celui obtenu par l'expérience de retournement temporel pour $l = 0$ et $\chi_{act} = \chi$ (cf. équation (1.26)). La boîte rectangulaire choisie pour calculer l'énergie acoustique locale à un instant t fixé (cf. (1.28)) est ici donnée par $B = [1.5, 1.9] \times [1.76, 2.04]$. A gauche, nous considérons le cas d'un milieu homogène. On observe, à l'instar de la figure 1.8, que les deux courbes coïncident. Ceci confirme numériquement les résultats obtenus dans le paragraphe 1.3.3 qui affirment que ces deux courbes sont très voisines dans le cas d'obstacles suffisamment découplés. Leur maximum est atteint au temps de focalisation $t = 0$. Celui-ci est de 43%, ce qui est très légèrement inférieur au résultat obtenu pour le premier obstacle. A droite, dans le cas d'un milieu diffusif, les deux courbes sont encore très proches, ce qui conforte encore les résultats du paragraphe 1.3.3. Là aussi, leur maximum est atteint en $t = 0$. Il est seulement de 18% car une grande partie de l'énergie est perdue par réflexions dans le milieu diffusif. De nouveau, nous sommes très voisins du ratio d'énergie de 19% obtenu pour le premier obstacle.

3.2.2 Tache focale et bande passante de la gaussienne

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de regarder l'impact de la fonction de troncature sur la forme de la tache focale à l'instant de focalisation $t = 0$. A cette fin, nous allons modifier la valeur moyenne μ et la variance γ de la fonction de troncature gaussienne du signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$:

$$\chi(\omega) = \mathbb{1}_{[\omega_1,\omega_2]}(\omega)\ \exp\left(\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\gamma^2}\right).$$

Notons qu'à l'exception de μ et γ, nous conservons le même jeu de paramètres que dans la simulation associée à la figure 3.9. La bande fréquentielle du signal est toujours donnée par l'intervalle $[\mu - 4\gamma, \mu + 4\gamma]$.

Dans la figure 3.11, on représente la tache focale de l'onde générée par le signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ du théorème 1.3.1 à l'instant $t = 0$ sur le domaine $\Omega = [0.18, 0.42] \times [1, 1.4]$. La fonction de troncature χ est de moyenne $\mu = 50$ (à gauche) et $\mu = 100$ (à droite). Sa variance $\gamma = 10$ est constante entre les deux simulations. La bande fréquentielle du signal est donc l'intervalle $[10, 90]$ (à gauche) et $[60, 140]$ (à droite). On constate que la focalisation spatiale est meilleure dans le cas de la figure de droite où le régime fréquentiel est plus élevé. Entre ces deux figures, si la taille de la tache focale longitudinale reste inchangée, la taille de la tache focale transverse est ici divisée par deux. Il semble qu'elle soit proportionnelle à la fréquence moyenne μ du signal.

Dans la figure 3.12, il s'agit ici de modifier, à valeur moyenne constante $\mu = 100$, la variance du signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ dont la valeur est $\gamma = 10$ (à gauche) et $\gamma = 20$ (à droite). La bande fréquentielle de $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ est donc l'intervalle $[60, 140]$ (à gauche) et $[20, 180]$ (à droite). Il apparait ici qu'une augmentation de la variance entraîne une diminution du temps d'émission du réseau. C'est une conséquence logique d'un phénomène bien connu qui consiste à dire que l'élargissement de la bande fréquentielle d'un signal induit sa compression temporelle. Ce phénomène est également visible dans la figure 3.13 qui représente la tache focale au temps $t = 0$ des ondes générées par ces signaux. En effet, si la tache focale transverse reste ici inchangée, la tache focale longitudinale a nettement diminué dans le cas de l'image de droite qui correspond au signal dont la fonction de troncature χ est de variance $\gamma = 20$.

3.2.3 Effet super résolutif du milieu diffusif

Nous cherchons maintenant à comparer dans les figures 3.14 et 3.15, la tache focale obtenue dans un milieu homogène et un milieu diffusif. Nous avons conservé les paramètres physiques et numériques relatifs à la figure 1.4 dans le cas du milieu homogène et à la figure 1.5 dans le cas du milieu diffusif à l'exception de ceux concernant le réseau de transducteurs. Celui-ci est désormais formé de $N = 64$ transducteurs équirépartis sur le segment $\{0\} \times [0.5, 1.5]$. Sa longueur a donc été divisée par deux tout en conservant la distance entre les transducteurs. L'effet super résolutif d'un milieu diffusif apparaît alors de façon nette (cf. [9, 20]), la tache focale au temps de focalisation $t = 0$ est clairement plus petite dans le cas du mileu diffusif qui augmente l'ouverture angulaire du réseau par le biais des multiples réflexions de l'onde à la traversée de ce milieu. Notons que ce phénomène était moins marqué entre les figures 1.4 et 1.5 car l'ouverture angulaire du réseau était déjà élevée.

3.2.4 Focalisation avec un transducteur

La simulation présentée dans ce paragraphe est le fruit d'une discussion avec Rémi Carminati et Sylvain Gigan, tous deux membres de l'institut Langevin. Ils affirmaient qu'il était possible pour un milieu diffusif de focaliser sur un obstacle à l'aide d'un réseau constitué d'un seul transducteur ($N = 1$) si la bande fréquentielle du signal émis par le réseau était suffisamment grande. En effet, l'opérateur de diffraction $\widehat{\mathbb{S}}_\omega$ étant un scalaire, la focalisation ne peut être réalisée que si les vecteurs singuliers fournis par la méthode DORT sont synchronisés sur une large bande fréquences.

Nous avons essayé d'observer numériquement ce phénomène dans la figure 3.16. Le réseau est ici constitué d'un seul transducteur placé en $(0, 1)$, l'emplacement des 500 diffuseurs est similaire à celui de la figure 1.5. Numériquement, pour que la focalisation soit observable, il faut que le milieu soit plus diffusif que dans la situation décrite par la figure 1.5, nous avons donc multiplié par 5 le diamètre des diffuseurs, il est désormais de 10^{-3}. Quant à l'obstacle, il est situé en $(0.3, 1.5)$ et est de diamètre 5.10^{-3}, il est donc cinq fois plus gros que les diffuseurs. Enfin, la fonction de troncature gaussienne χ a pour moyenne $\mu = 70$ et variance $\gamma = 20$. La

bande fréquentielle utilisée $[\mu - 3\gamma, \mu + 3\gamma] = [10, 130]$ est plus large que celle considérée dans la figure 1.5.

Nous traçons ici le module de l'onde générée par le signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ du théorème 1.3.1 au temps $t = -6$, -1.6, -1, -0.2, 0, 0.2. On observe que l'onde focalise sur l'obstacle à l'instant $t = 0$. Le milieu étant plus diffusif que dans la figure 1.5, l'émission du signal débute dès le temps $t = -6$ afin que les diverses composantes de cette onde viennent se rencontrer en $t = 0$ sur l'obstacle. Notons par contre que la majeure partie de l'énergie de l'onde est ici perdue par réflexion dans le milieu diffusif. [3]

3. L'échelle n'est ici pas renormalisée par le maximum du champ au cours du temps de simulation comme dans toutes les autres figures présentées car le champ est beaucoup intense dans le milieu diffusif que sur l'obstacle à $t = 0$. Elle est volontairement saturée à la valeur 0.12.

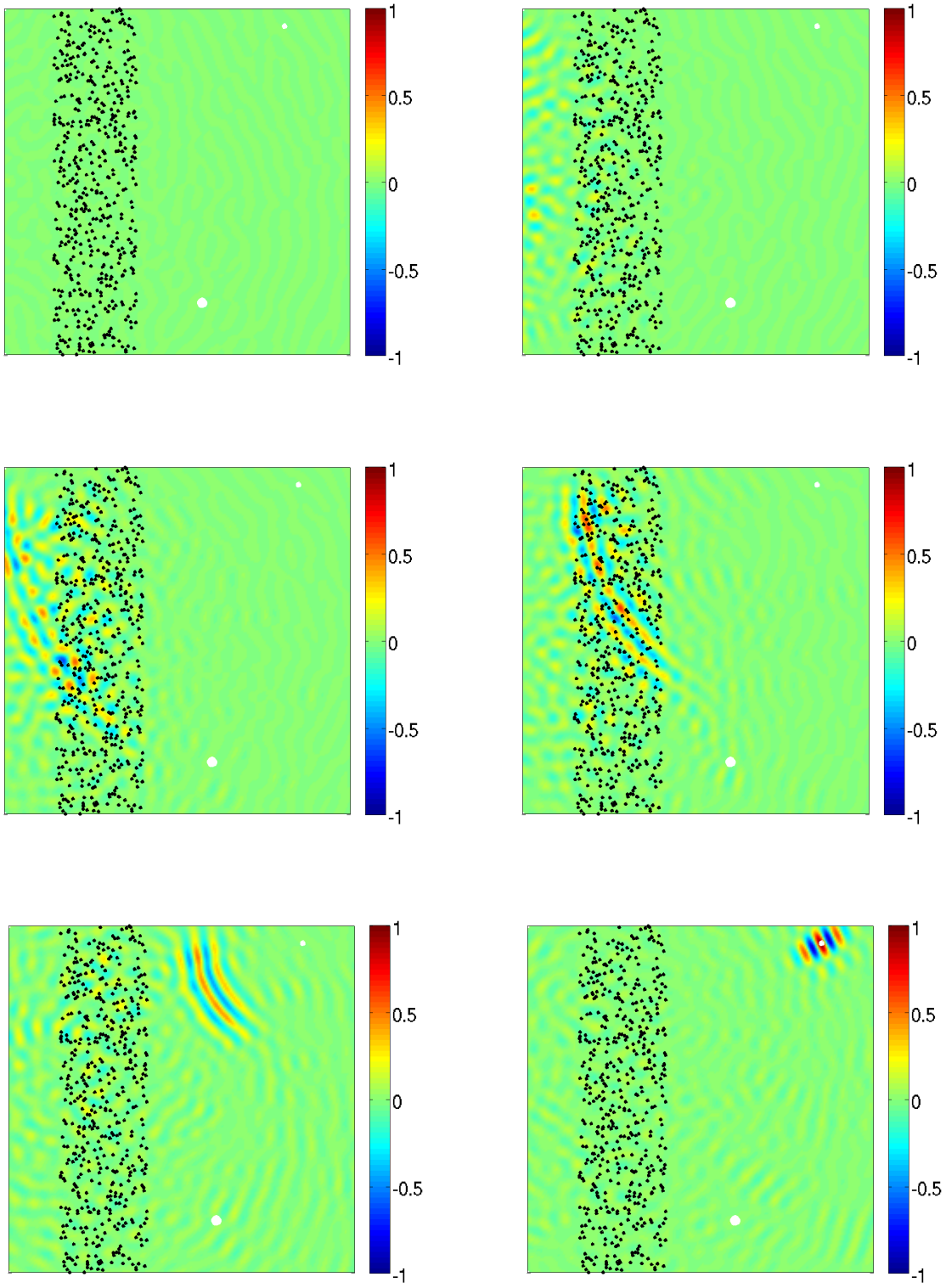

FIGURE 3.9 – Onde incidente, générée par le signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ du théorème 1.3.1, au temps $t = -4.8, -3.2, -1.8, -1.2, -0.6, 0.$ dans le cas du milieu diffusif de la figure 1.5.

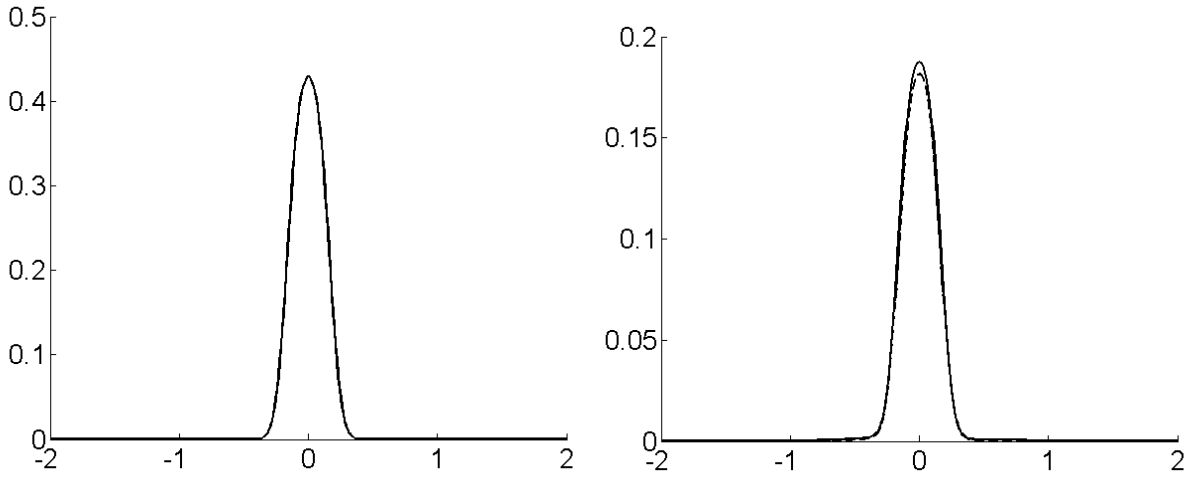

FIGURE 3.10 – Représentation du critère de focalisation $\mathcal{Q}_B(t)$ pour des temps $t \in [-2, +2]$ et une boîte $B = [1.5, 1.9] \times [1.76, 2.04]$ dans le cas du milieu homogène de la figure 1.4 et du milieu diffusif de la figure 1.5. Dans chaque configuration, la courbe brisée correspond au signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ du théorème 1.3.1, tandis que l'autre courbe utilise le signal (1.26), obtenu par l'expérience de retournement temporel pour $l = 0$ et $\chi_{act} = \chi$.

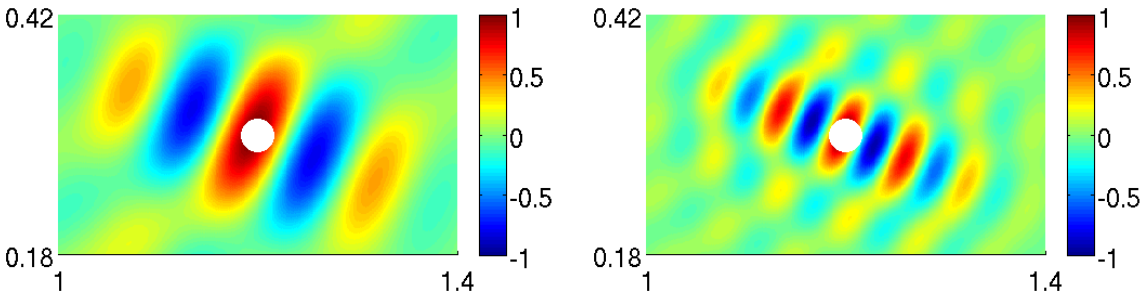

FIGURE 3.11 – Représentation de la tache focale de l'onde générée par le signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ du théorème 1.3.1 à l'instant $t = 0$ dans le cas du milieu homogène de la figure 1.4. La fonction de troncature χ de ce signal est une gaussienne centrée en $\mu = 50$ (à gauche) et en $\mu = 100$ (à droite). Sa variance $\gamma = 10$ est ici identique dans les deux cas.

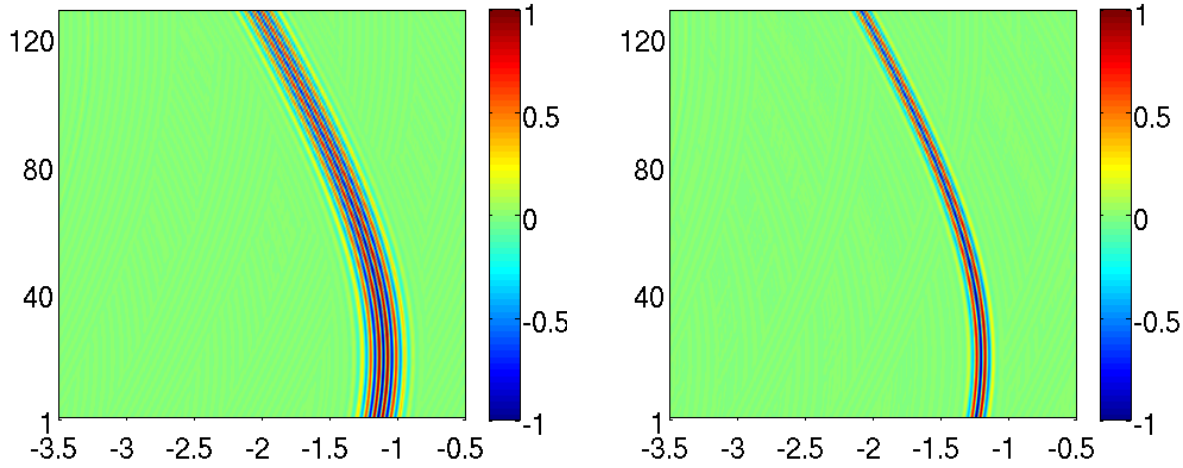

FIGURE 3.12 – Représentation du signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ (rééchelonné sur $[-1,1]$) du théorème 1.3.1 dans le cas du milieu homogène de la figure 1.4. Sa fonction de troncature χ est une gaussienne centrée en $\mu = 100$ de variance $\gamma = 10$ (à gauche) et $\gamma = 20$ (à droite). L'axe des ordonnées décrit ici le numéro du transducteur (le réseau étant indexé de bas en haut) et l'axe des abscisses le temps.

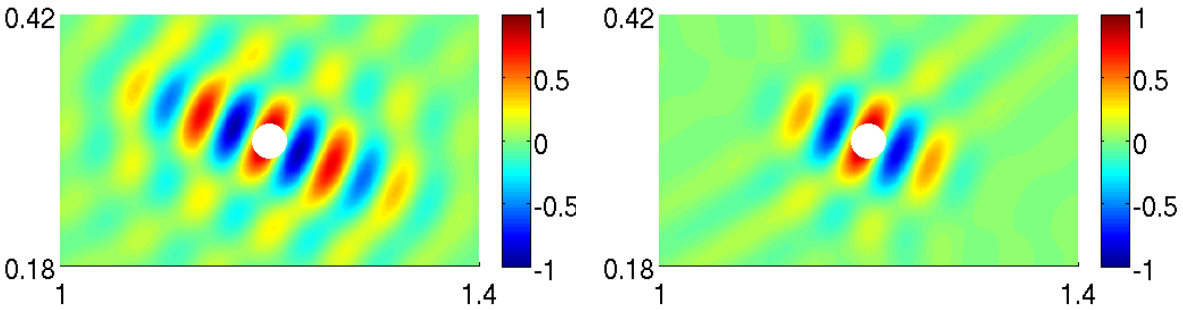

FIGURE 3.13 – Représentation de la tache focale dans le cas du milieu homogène de la figure 1.4. La fonction de troncature χ est une gaussienne centrée en $\mu = 100$ de variance $\gamma = 10$ (à gauche) et $\gamma = 20$ (à droite).

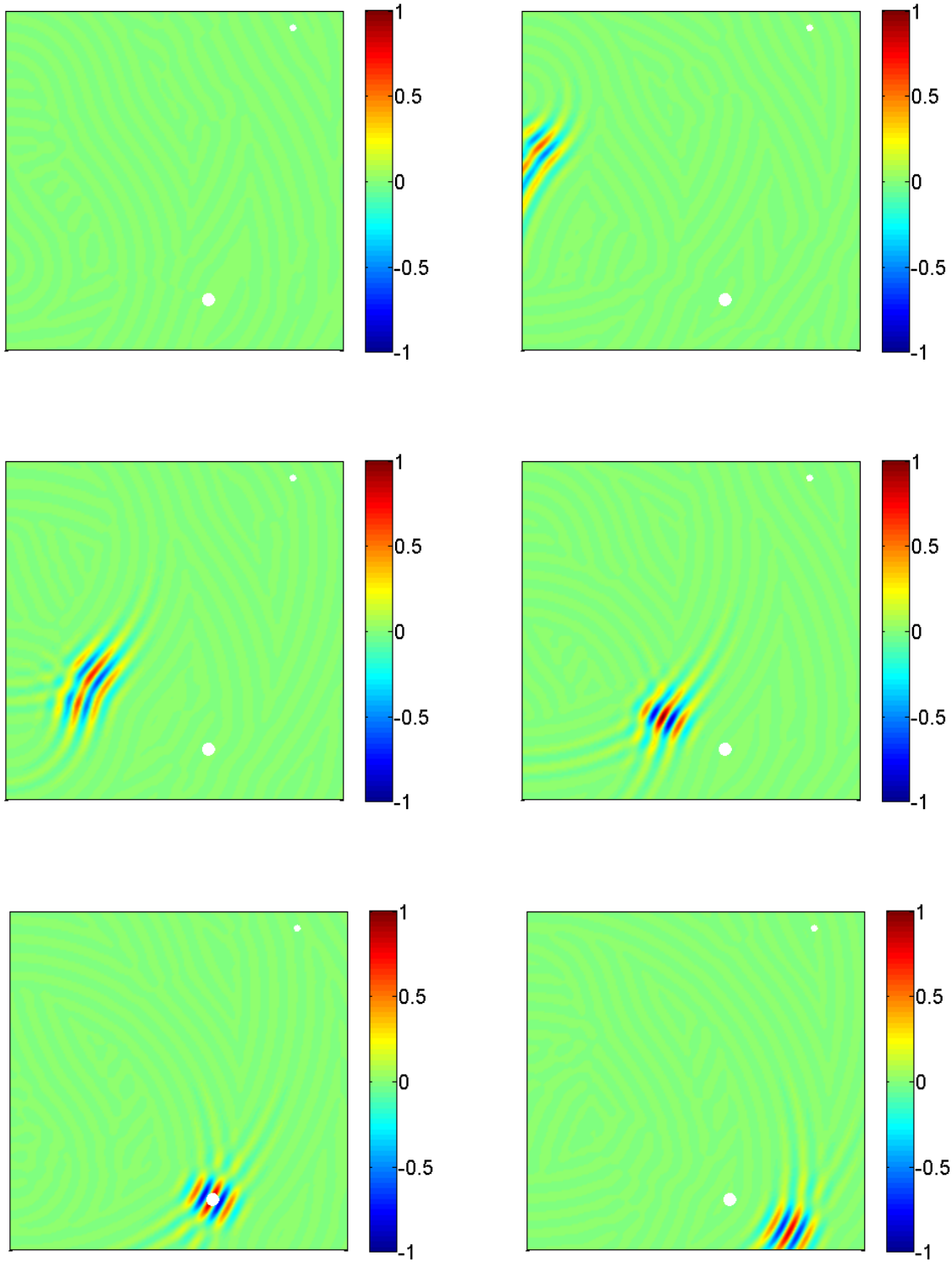

FIGURE 3.14 – Onde incidente, générée par le signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ du théorème 1.3.1, au temps $t = -3, -1.4, -0.8, -0.4, 0, 0.4$ dans le cas du milieu homogène de la figure 1.4. Le réseau est formé ici de $N = 64$ transducteurs équirépartis sur le segment $\{0\} \times [0.5, 1.5]$.

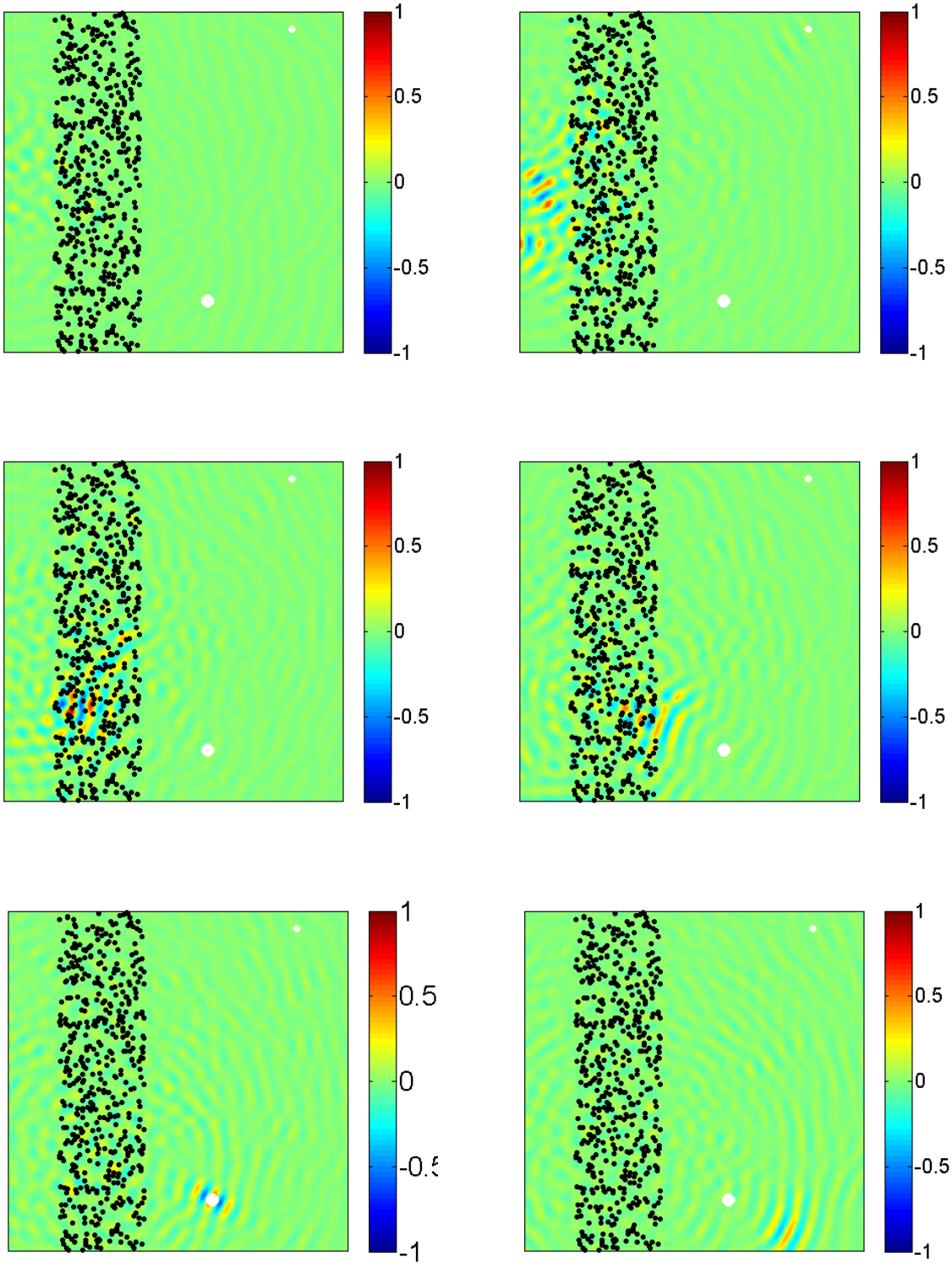

FIGURE 3.15 – Onde incidente, générée par le signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ du théorème 1.3.1, au temps $t = -3, -1.4, -0.8, -0.4, 0, 0.4$ dans le cas du milieu diffusif de la figure 1.5. Le réseau est formé ici de $N = 64$ transducteurs équirépartis sur le segment $\{0\} \times [0.5, 1.5]$.

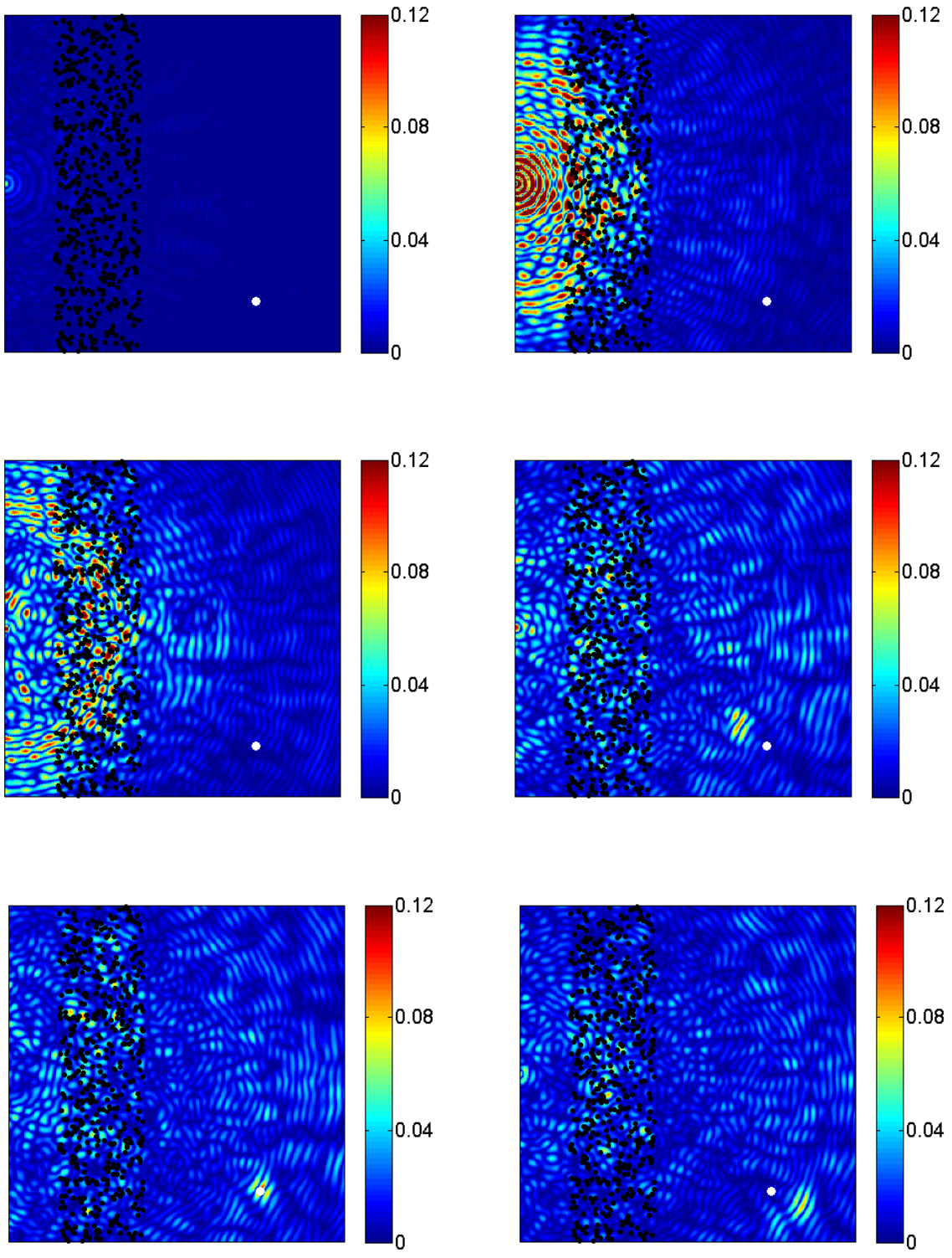

FIGURE 3.16 – Module de l'onde incidente, générée par le signal $\boldsymbol{q}_{\phi_+}$ du théorème 1.3.1, au temps $t = -6, -1.6, -1, -0.2, 0, 0.2$. Le milieu est ici diffusif et le réseau utilisé ne contient q'un seul transducteur ($N = 1$) placé en $(0, 1)$.

CHAPITRE QUATRE

MULTIPLE SCATTERING BY POINTLIKE OBSTACLES IN TWO DIMENSIONS

Sommaire

4.1 Introduction 71
4.2 A physical point of view 72
4.3 An asymptotic point of view 75
4.3.1 Rewriting the scattering problem 75
4.3.2 Asymptotic models 77
4.4 A mathematical point of view 77
4.4.1 Functional framework 77
4.4.2 Error analysis 79
4.5 Technical lemnas 81
4.6 Conclusion 84

Ce chapitre est l'objet d'un article publié (cf. [31]) dans la revue Wave Motion que nous reprenons ici tel qu'il a été publié.

Abstract : We are concerned with a two-dimensional problem which models the scattering of a time-harmonic acoustic wave by an arbitrary number of sound-soft circular obstacles. Assuming that their radii are small compared to the wavelength, we propose a mathematical justification of different levels of asymptotic models available in the physical literature, including the so-called Foldy–Lax model.

Keywords : Asymptotics, Multiple scattering, Foldy–Lax model, Point scatterers.

4.1 Introduction

We consider the scattering of an acoustic time-harmonic wave by an arbitrary number of sound-soft obstacles located in a homogeneous medium. When the size of the obstacles is small compared with the wavelength, the numerical simulation of such a problem by classical methods (e.g., integral equation techniques or methods based on a Dirichlet-to Neumann map) can become highly time-consuming, particularly when the number of scatterers is large. In this case, the use of an asymptotic model may reduce considerably the numerical cost. Such a model was introduced by Foldy [52] in the middle of the last century to study multiple isotropic scattering

in a medium which contains randomly distributed small scatterers. Its use was extended by Lax in [74, 75] to anisotropic or inelastic scattering. Their asymptotic model is based on the fact that the scattered wave can be approximated by a wave emitted by point sources placed at the centers of the scatterers ; the amplitudes of the sources are calculated by solving a linear system which represents the interactions between the scatterers (see [81] for an overview). The same system can be derived formally from the usual first-kind integral equation associated with the scattering problem [98].

Nowadays, the Foldy–Lax model is widely used in the community of physicists to approximate scattered waves in numerous physical and numerical applications. These applications concern on one hand deterministic media – see, e.g., [7] (evaluation of the scattering amplitude of a cluster of small obstacles), [60] (attenuation, dispersion and anisotropy caused by multiple scattering), [68] (multiple scattering between an extended scatterer and small obstacles), [80] (localization of targets using time-reversal techniques) – and on the other hand random media – see, e.g., [8] (generalization of well-established derivations of the radiative transfer equation from first principles), [79] (effective wavenumber in a dilute random array of identical scatterers), [108] (higher order Foldy-Lax models). Surprisingly, to our knowledge, there is no mathematical justification of the Foldy–Lax model. The case of one single small scatterer is well understood. As shown in [81] for sound-soft or sound-hard obstacles, using a simple dilation, it can be derived from the low-frequency behavior [71] of the wave scattered by a (non small) obstacle (see also [4] for the case of a small inhomogeneity). To a certain extent, the Foldy–Lax model provides us the path from single scattering to multiple scattering. Our purpose is to propose a rigorous justification of this model and to obtain local error estimates for the two-dimensional problem in the case of circular obstacles. This assumption allows us to represent the scattered wave by Fourier series, which yields explicit and simple proofs. Other more involved techniques (based on matched asymptotic expansions or multiple scale methods) have been developed in a slightly different context and could probably be adapted to our problem for non circular obstacles. For instance, the Laplace equation in a bounded domain with small inclusions (with Dirichlet boundary conditions) is dealt with in [84, 88] for the two-dimensional case and [83] for three-dimensional case. Note that in [83], the authors consider two-scale asymptotic expansions by assuming that the size of the obstacles as well as the distance between them are both small parameters. We also refer to [16] which studies the case of a Neumann boundary condition on two small and close obstacles for the Laplace equation.

The paper is organized as follows. In section 4.2, we show the equations of our scattering problem and follow a physical point of view to introduce different levels of asymptotic models including the Foldy–Lax model. We end this section with the statement of the main result of this paper, which concerns local error estimates between the exact solution and its different levels of approximation. In section 4.3, we adopt an asymptotic point of view : starting from a representation of the exact solution by means of Fourier series, we derive in a formal way the same asymptotic models. This approach is well adapted to the mathematical justification of the asymptotic models, which is the subject of section 4.4. For the sake of clarity, some general properties and technical lemmas used in the latter section are collected in section 4.5. We conclude in section 4.6 by some comments about the possible generalizations of the work proposed in the present paper.

4.2 A physical point of view

We are concerned with a two-dimensional problem which models the scattering of a given time-harmonic acoustic wave of circular frequency ω by a family of P disjoint small circular

sound-soft obstacles $\mathcal{O}_1^\varepsilon, \dots, \mathcal{O}_P^\varepsilon$ located in a homogeneous medium filling the whole plane $\mathbb{R}^2$. We denote by $s_1, \dots, s_P$ their respective centers and $r_1^\varepsilon, \dots, r_P^\varepsilon$ their respective radii. For the sake of simplicity, we consider non-dimensional equations, which amounts to choosing a constant celerity $c = 1$ in the propagative medium. We suppose that the radii of the obstacles are small compared to the wavelength $2\pi/\omega$ and are all of the same order of magnitude represented by a small positive parameter ε, i.e.,

$$\omega r_p^\varepsilon = O(\varepsilon) \quad \text{for } p = 1, \dots, P. \tag{4.1}$$

Let w be a given incident field, solution to

$$\Delta w + \omega^2 w = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \tag{4.2}$$

The associated scattered field u^ε is the solution to

$$\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \textstyle\bigcup_{p=1}^P \overline{\mathcal{O}_p^\varepsilon}, \tag{4.3}$$

$$u^\varepsilon = -w \quad \text{on } \textstyle\bigcup_{p=1}^P \partial\mathcal{O}_p^\varepsilon, \tag{4.4}$$

which satisfies the usual Sommerfeld radiation condition

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial |x|} - i\omega\, u^\varepsilon = O(|x|^{-3/2}) \quad \text{as } |x| \to \infty. \tag{4.5}$$

In order to approximate the solution to the above system of equations, we define below a family of asymptotic models which are based on the fact that in the case of one single small scatterer ($P = 1$), the scattered field is similar to the field emitted by a point source. More precisely, u^ε can be approximated (see [81]) by

$$u^\varepsilon(x) \approx \sigma_1^\varepsilon\, w(s_1)\, G(x - s_1),$$

where $G(x) = H_0^{(1)}(\omega\,|x|)\,/4i$ is the outgoing Green's function of the Helmholtz equation ($H_0^{(1)}$ is the Hankel function of the first kind and order 0, see [1]) and σ_1^ε is the reflection coefficient of the scatterer, which is given by $\sigma_1^\varepsilon := -4i/H_0^{(1)}(\omega r_1^\varepsilon)$ for a circular obstacle. Indeed it is readily seen that the above function satisfies (4.3) and (4.5), as well as the boundary condition $u^\varepsilon = -w(s_1)$ on $\partial\mathcal{O}_1^\varepsilon$, which actually approximates (4.4) since $w(x) - w(s_1) = O(\varepsilon)$ for all $x \in \partial\mathcal{O}_1^\varepsilon$ by virtue of our assumption (4.1).

For several obstacles ($P > 1$), we can consider different levels of approximation $u^{\varepsilon,0}, u^{\varepsilon,1}, \dots, u^{\varepsilon,\infty}$ of u^ε which consist in superpositions of the form

$$u^{\varepsilon,k}(x) := \sum_{p=1}^P \sigma_p^\varepsilon\, w_p^{\varepsilon,k}\, G(x - s_p) \quad \text{where } \sigma_p^\varepsilon := -4i/H_0^{(1)}(\omega r_p^\varepsilon) \tag{4.6}$$

and $w_p^{\varepsilon,k}$ represents different approximations of an "exciting field" on the p-th scatterer. In the simplest model ($k = 0$), we choose

$$w_p^{\varepsilon,0} := w(s_p) \quad \text{for } p = 1, \dots, P,$$

which amounts to the well-known Born approximation [80] where the interactions between the obstacles are neglected, since in this case, $u^{\varepsilon,0}$ is nothing but a superposition of single scattering approximations. The case $k = \infty$ corresponds to the so-called Foldy–Lax model [52, 74, 75], which takes into account these interactions. In this case, the exciting field for one given obstacle is the superposition of the incident field and the waves scattered by all the other obstacles, i.e.,

$$w_p^{\varepsilon,\infty} := w(s_p) + \sum_{q \neq p} \sigma_q^\varepsilon\, w_q^{\varepsilon,\infty}\, G(s_p - s_q) \quad \text{for } p = 1, \dots, P. \tag{4.7}$$

If we denote by $W^{\varepsilon,\infty}$ and W the vectors of $\mathbb{C}^P$ with components $w_p^{\varepsilon,\infty}$ and $w(s_p)$ respectively, this coupling between the exciting fields can be written equivalently as

$$(\mathbb{I} + \mathbb{M}^\varepsilon)\, W^{\varepsilon,\infty} = W, \tag{4.8}$$

where $\mathbb{M}^\varepsilon$ is the $P \times P$ matrix defined by

$$\mathbb{M}^\varepsilon_{pq} := -\sigma_q^\varepsilon\, G(s_p - s_q) \quad \text{if } q \neq p \quad \text{and} \quad \mathbb{M}^\varepsilon_{pp} := 0.$$

Between the cases $k = 0$ and $k = \infty$, one can consider intermediate models which take into account the successive reflections between the scatterers. Indeed, instead of (4.7), the exciting field is defined recursively by

$$w_p^{\varepsilon,k+1} := w(s_p) + \sum_{q \neq p} \sigma_q^\varepsilon w_q^{\varepsilon,k} G(s_p - s_q) \quad \text{for } p = 1, \dots, P.$$

It is readily seen that this relation amounts to approximating the inverse of operator $\mathbb{I} + \mathbb{M}^\varepsilon$ involved in (4.8) by a truncated Neumann series, so that we can summarize these different models by the formula

$$W^{\varepsilon,k} := \sum_{\ell=0}^{k} (-\mathbb{M}^\varepsilon)^\ell\, W \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, \infty. \tag{4.9}$$

The aim of this paper is to prove the following error estimates between the solution u^ε of our initial problem (4.3)–(4.5) and the different levels of approximations $u^{\varepsilon,k}$ given by (4.6) and (4.9).

Theorem 4.2.1 *For every compact subset K of $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{p=1}^P \{s_p\}$ and every $s \geq 0$, there exists a constant $C_{K,s} > 0$ independent of ε such that for ε small enough,*

$$\left\| u^\varepsilon - u^{\varepsilon,k} \right\|_{H^s(K)} \leq \begin{cases} \left| \dfrac{C_{K,s}}{\log \varepsilon} \right|^{k+2} & \text{if } k \in \mathbb{N}, \\[2ex] \dfrac{C_{K,s}\ \varepsilon}{|\log \varepsilon|} & \text{if } k = \infty, \end{cases}$$

where $\| \cdot \|_{H^s(K)}$ denotes the norm of the usual Sobolev space $H^s(K)$.

This result tells us that for the Foldy–Lax model ($k = \infty$), the magnitude of the approximation error is the same as for the single scattering problem (see, e.g. [81]), whereas for the intermediate models ($k \in \mathbb{N}$), it corresponds to the first neglected reflections between the scatterers, that is, the reflections of order $k+1$. For instance, if $k = 1$, the wave scattered by one of the scatterer is $O((\log \varepsilon)^{-1})$ so that the first reflections of this wave by the other scatterers are $O((\log \varepsilon)^{-2})$ and the magnitude of the approximation error is $O((\log \varepsilon)^{-3})$ which corresponds to second-order reflections. However it is important to notice that the constant $C_{K,s}$ involved in these estimates depends on the layout of the scatterers. In particular, $C_{K,s}$ is likely to be an increasing function of the scatterer density. For a high density, $C_{K,s}$ may be large, which means that the Foldy–Lax approximation will be valid for very small scatterers. To a certain extent, the above theorem only tells us that the Foldy–Lax model becomes efficient for small enough scatterers, but it does not give us a quantitative interpretation of the expression "small enough". Unfortunately, we did not find a quantitative estimate of the $C_{K,s}$ parameter with respect to the layout of the scatterers. This is a challenging but open question. Maybe the two-scale approach developed in [83] in a different context could be used for our problem.

4.3 An asymptotic point of view

In this section, we revisit the asymptotic models defined by (4.6) and (4.9) by a more rigorous approach which will allow us to prove Theorem 4.2.1 in section 4.4. The idea is to rewrite the initial problem (4.3)–(4.5) in an equivalent form using standard tools for multiple scattering and Fourier series.

4.3.1 Rewriting the scattering problem

In a first step, we consider a representation of u^ε which transforms our *multiple scattering* problem into a family of P coupled *single scattering* problems. This representation consists in splitting u^ε as follows (see [10]) :

$$u^\varepsilon = \sum_{p=1}^{P} u_p^\varepsilon, \tag{4.10}$$

where $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, \dots, u_P^\varepsilon$ are the outgoing (in the sense of (4.5)) solutions to

$$\Delta u_p^\varepsilon + \omega^2 u_p^\varepsilon = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}_p^\varepsilon}, \tag{4.11}$$

$$u_p^\varepsilon = -w - \sum_{q\neq p} u_q^\varepsilon \quad \text{on } \partial\mathcal{O}_p^\varepsilon, \tag{4.12}$$

for $p = 1, \dots, P$. This representation of u^ε makes clear the notion of *exciting field* introduced in the previous section. Indeed each function u_p^ε represents the wave scattered by the p-th obstacle illuminated by the exciting field $w + \sum_{q\neq p} u_q^\varepsilon$.

The next step consists in taking advantage of the particular shape of the scatterers by using Fourier series expansions of the single scattering fields u_p^ε. We briefly recall here the main results ; all details can be found in [81]. We equip $\mathbb{R}^2$ with a Cartesian coordinate system (O, e_1, e_2) and define for each $p = 1, \dots, P$ the local polar coordinates by (ρ_p, θ_p) where $\rho_p := |x - s_p|$ and $\theta_p \in [0, 2\pi)$ is the angle between e_1 and $x - s_p$. We denote by $x(\rho_p, \theta_p)$ or simply (ρ_p, θ_p) (if there is no ambiguity) a point of $\mathbb{R}^2$ defined by its local polar coordinates, so that a function of x can be considered equivalently as a function of (ρ_p, θ_p) without change of notation.

As u_p^ε is an outgoing solution to the homogeneous Helmholtz equation outside $\overline{\mathcal{O}_p^\varepsilon}$, it has a modal decomposition on the Hankel functions $H_m^{(1)}$ (see [1]) :

$$u_p^\varepsilon(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c_{p,m}^\varepsilon}{H_m^{(1)}(\omega r_p^\varepsilon)}\, \mathcal{H}_{p,m}(x) \ \text{ for all } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}_p^\varepsilon} \quad \text{where} \quad c_{p,m}^\varepsilon := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_p^\varepsilon(r_p^\varepsilon, \theta_p)\, e^{-im\theta_p}\, \mathrm{d}\theta_p \tag{4.13}$$

is the m-th Fourier coefficient of $u_p^\varepsilon(r_p^\varepsilon, \cdot)$ and $\mathcal{H}_{p,m}(x)$ denotes the local outgoing cylindrical wave-functions associated with the p-th scatterer defined by

$$\mathcal{H}_{p,m}(x) := H_m^{(1)}(\omega\rho_p)\, e^{im\theta_p} \quad \text{for } x \neq s_p.$$

Similarly, w is a solution to the homogeneous Helmholtz equation (4.2), thus it has an analogous modal decomposition on the Bessel functions J_m [1]. We shall use such a decomposition by choosing $r_0 > 0$ such that ωr_0 is smaller than the smallest zero of J_0 (which ensures that $J_m(\omega r_0) \neq 0$ for all $m \in \mathbb{Z}$). Then we have

$$w(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{d_{p,m}}{J_m(\omega r_0)}\, J_m(\omega\rho_p)\, e^{im\theta_p} \ \text{ for all } x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{where} \quad d_{p,m} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(r_0, \theta_p)\, e^{-im\theta_p}\, \mathrm{d}\theta_p \tag{4.14}$$

is the m-th Fourier coefficient of $w(r_0, \cdot)$.

The idea is to use the Fourier coefficients $c^\varepsilon_{p,m}$ as new unknowns, more precisely to express the coupling boundary condition (4.12) by means of the above decompositions (4.13) and (4.14), which yields the relation between $c^\varepsilon_{p,m}$ and the Fourier coefficients $d_{p,m}$ of the incident field. Thanks to the Graf's addition formula [1]

$$\mathcal{H}_{q,m}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_{q,m-n}(s_p)\, J_n(\omega\rho_p) e^{in\theta_p} \quad \text{for } p \neq q \text{ and } \rho_p < |s_p - s_q|\,, \tag{4.15}$$

condition (4.12) becomes

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} c^\varepsilon_{p,m}\, e^{im\theta_p} + \sum_{q\neq p}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c^\varepsilon_{q,m}}{H^{(1)}_m(\omega r^\varepsilon_q)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_{q,m-n}(s_p)\, J_n(\omega r^\varepsilon_p)\, e^{in\theta_p} = -\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{d_{p,m}}{J_m(\omega r_0)}\, J_m(\omega r^\varepsilon_p)\, e^{im\theta_p}, \tag{4.16}$$

for all $\theta_p \in [0, 2\pi)$. Interchanging the order of summation in the second term of the left-hand side (which will be justified in the next section, see Remark 4.4.2) and using the fact that a Fourier series vanishes for all $\theta_p \in [0, 2\pi)$ if and only if all the Fourier coefficients vanish, this equation writes equivalently as

$$c^\varepsilon_{p,m} + J_m(\omega r^\varepsilon_p) \sum_{q\neq p}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\mathcal{H}_{q,n-m}(s_p)}{H^{(1)}_n(\omega r^\varepsilon_q)}\, c^\varepsilon_{q,n} = -\frac{J_m(\omega r^\varepsilon_p)}{J_m(\omega r_0)}\, d_{p,m} \quad \text{for all } m \in \mathbb{Z},$$

which can be expressed in a more concise form as

$$(\mathbb{I} + \mathbb{K}^\varepsilon)\, c^\varepsilon = f^\varepsilon, \tag{4.17}$$

where c^ε is the vector $(c^\varepsilon_1, \dots, c^\varepsilon_P)^\top$ whose components c^ε_p are the sequences of Fourier coefficients $(c^\varepsilon_{p,m})_{m\in\mathbb{Z}}$. Moreover $\mathbb{K}^\varepsilon$ can be defined in matrix form by

$$\mathbb{K}^\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K}^\varepsilon_{12} & \dots & \mathbb{K}^\varepsilon_{1P} \\ \mathbb{K}^\varepsilon_{21} & 0 & \dots & \mathbb{K}^\varepsilon_{2P} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{K}^\varepsilon_{P1} & \mathbb{K}^\varepsilon_{P2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

where each term $\mathbb{K}^\varepsilon_{pq}$, for $p \neq q$, is an operator which represents the action of the q-th obstacle on the p-th obstacle, defined by

$$\mathbb{K}^\varepsilon_{pq}\, c_q := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}^\varepsilon_{pq,mn}\, c_{q,n} \right)_{m\in\mathbb{Z}} \quad \text{where} \quad \mathbb{K}^\varepsilon_{pq,mn} := \frac{\mathcal{H}_{q,n-m}(s_p)\, J_m(\omega r^\varepsilon_p)}{H^{(1)}_n(\omega r^\varepsilon_q)}.$$

Finally the right-hand side f^ε of (4.17) is the vector $(f^\varepsilon_1, \dots, f^\varepsilon_P)^\top$ whose components f^ε_p are the sequences

$$f^\varepsilon_p = \left(f^\varepsilon_{p,m}\right)_{m\in\mathbb{Z}} := -\left(\frac{J_m(\omega r^\varepsilon_p)}{J_m(\omega r_0)}\, d_{p,m} \right)_{m\in\mathbb{Z}}.$$

Note that f^ε_p is the sequence of Fourier coefficients of $-w(r^\varepsilon_p, \cdot)$. Indeed from (4.14), we have

$$-w(r^\varepsilon_p, \theta_p) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f^\varepsilon_{p,m}\, e^{im\theta_p}. \tag{4.18}$$

Thanks to (4.13) and (4.14), the linear equation (4.17) is clearly equivalent to the family of P coupled problems (4.11)–(4.12), hence also to our initial problem (4.3)–(4.5). It provides us a numerical strategy for multiple scattering (see [5] for a detailed analysis). Here we shall use this equivalent formulation to derive the asymptotic models exhibited in section 4.2 and to prove Theorem 4.2.1.

4.3.2 Asymptotic models

Using the asymptotic behavior (4.28) of Bessel and Hankel functions for small arguments and the fact that $w(s_p) = d_{p,0}/J_0(\omega r_0)$ (which follows from (4.14)), it is easy to see that for $p \neq q$,

$$\mathbb{K}^{\varepsilon}_{pq,mn} = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{H}_{q,0}(s_p)}{H_0^{(1)}(\omega r_q^{\varepsilon})} + O\left(\dfrac{\varepsilon^2}{\log \varepsilon}\right) = O\left(\dfrac{1}{\log \varepsilon}\right) & \text{if } (m,m) = (0,0), \\ O(\varepsilon) & \text{else,} \end{cases}$$

and

$$f^{\varepsilon}_{p,m} = \begin{cases} -w(s_p) + O(\varepsilon^2) & \text{if } m = 0, \\ O(\varepsilon) & \text{else.} \end{cases}$$

So the dominant coefficients of $\mathbb{K}^{\varepsilon}_{pq}$ and f^{ε}_{p} are reached respectively for $(m,n) = (0,0)$ and $m = 0$. As a consequence, a formal approximation of order ε of (4.17) is given by

$$(\mathbb{I} + \widetilde{\mathbb{K}}^{\varepsilon})\, c^{\varepsilon} = f^0, \tag{4.19}$$

where $\widetilde{\mathbb{K}}^{\varepsilon}$ and f^0 are defined as $\mathbb{K}^{\varepsilon}$ and f^{ε} by replacing $\mathbb{K}^{\varepsilon}_{pq,mn}$ and $f^{\varepsilon}_{p,m}$ by

$$\widetilde{\mathbb{K}}^{\varepsilon}_{pq,mn} := \delta_{m,0}\,\delta_{n,0}\,\frac{\mathcal{H}_{q,0}(s_p)}{H_0^{(1)}(\omega r_q^{\varepsilon})} \quad \text{and} \quad f^0_{p,m} := -\delta_{m,0}\, w(s_p) = -\delta_{m,0}\,\frac{1}{J_0(\omega r_0)}\, d_{p,0}.$$

The above approximate system (4.19) is equivalent to the Foldy–Lax model (4.8). Indeed, following the notations introduced in section 4.2, let $c^{\varepsilon,k}$, for $k \in \mathbb{N}$, denote the approximation of the solution to (4.19) obtained by a truncated Neumann series of the inverse of $\mathbb{I} + \widetilde{\mathbb{K}}^{\varepsilon}$, and $c^{\varepsilon,\infty}$, the exact solution, i.e.,

$$c^{\varepsilon,k} := \sum_{\ell=0}^{k} (-\widetilde{\mathbb{K}}^{\varepsilon})^{\ell}\, f^0 \quad \text{for } k = 0, 1, \ldots, \infty,$$

which shows in particular that $c^{\varepsilon,k}_{p,m} = 0$ for all p and $m \neq 0$ in view of the above definition of $\widetilde{\mathbb{K}}^{\varepsilon}$ and f^0. The acoustic field associated with these Fourier coefficients by (4.13) is then given by

$$u^{\varepsilon,k}(x) := \sum_{p=1}^{P} \frac{c^{\varepsilon,k}_{p,0}}{H_0^{(1)}(\omega r_p^{\varepsilon})}\, H_0^{(1)}(\omega |x - s_p|) \quad \text{for } k = 0, 1, \ldots, \infty. \tag{4.20}$$

This expression is nothing but the field (4.6) obtained by the physical approach, which is readily verified by noticing that $\widetilde{\mathbb{K}}^{\varepsilon}_{pq,00} = \mathbb{M}^{\varepsilon}_{pq}$ and $f^0_{p,0} = -W_p$ (thanks to the definitions of the reflection coefficients σ^{ε}_p and of the Green's function), thus $c^{\varepsilon,k}_{p,0} = -W^{\varepsilon,k}_p$.

4.4 A mathematical point of view

4.4.1 Functional framework

As we shall see in the sequel, the natural function space for each component c^{ε}_p of the solution c^{ε} to (4.17) is $\ell^2(\mathbb{Z})$, that is, the Hilbert space composed of the sequences $c_p = (c_{p,m})_{m\in\mathbb{Z}}$ such that $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_{p,m}|^2 < \infty$, equipped with the following inner product and associated norm :

$$(c_p, c'_p)_{\ell^2(\mathbb{Z})} := \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{p,m}\, \overline{c'_{p,m}} \quad \text{and} \quad \|c_p\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \left\{(c_p, c_p)_{\ell^2(\mathbb{Z})}\right\}^{1/2}.$$

Moreover, for $s > 0$, we denote by $h^s(\mathbb{Z})$ the subspace of $\ell^2(\mathbb{Z})$ composed of the sequences $c_p = (c_{p,m})_{m\in\mathbb{Z}}$ such that $\|c_p\|^2_{h^s(\mathbb{Z})} := \sum_{m\in\mathbb{Z}}(1+m^2)^s|c_{p,m}|^2$ is finite.

Proposition 4.4.1 *On the assumption that the scatterers are disjoint, $\mathbb{K}^\varepsilon$ is a compact operator in $\ell^2(\mathbb{Z})^P$.*

Proof. Let us first prove that $\mathbb{K}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z})^P)$, i.e., that $\mathbb{K}^\varepsilon$ is a bounded operator in $\ell^2(\mathbb{Z})^P$. It is enough to verify that each operator $\mathbb{K}^\varepsilon_{pq}$ is bounded in $\ell^2(\mathbb{Z})$. Instead of working with $\mathbb{K}^\varepsilon_{pq}$, we define its formal adjoint by

$$\mathbb{L}^\varepsilon_{qp}\, c_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{L}^\varepsilon_{qp,mn}\, c_{p,n}\right)_{m\in\mathbb{Z}} \quad \text{with} \quad \mathbb{L}^\varepsilon_{qp,mn} := \overline{\mathbb{K}^\varepsilon_{pq,nm}} = \frac{\overline{\mathcal{H}_{q,m-n}(s_p)\, J_n(\omega r^\varepsilon_p)}}{\overline{H^{(1)}_m(\omega r^\varepsilon_q)}}.$$

Let $c_p \in \ell^2(\mathbb{Z})$ and $m \in \mathbb{Z}$. Using the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{L}^\varepsilon_{qp,mn}\, c_{p,n}\right|^2 \le \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\mathcal{H}_{q,m-n}(s_p)\, J_n(\omega r^\varepsilon_p)\right|^2}{\left|H^{(1)}_m(\omega r^\varepsilon_q)\right|^2}\ \|c_p\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,. \tag{4.21}$$

The main advantage of working with $\mathbb{L}^\varepsilon_{qp}$ instead of $\mathbb{K}^\varepsilon_{pq}$ lies in the observation that the sum in the right-hand side is nothing but the sum of the squared moduli of the Fourier coefficients which appear in the Graf's addition formula (4.15) for $x = (r^\varepsilon_p, \theta_p)$. Hence the Parseval identity yields

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\mathcal{H}_{q,m-n}(s_p)\, J_n(\omega r^\varepsilon_p)\right|^2 = \left\|\mathcal{H}_{q,m}(r^\varepsilon_p,\cdot)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\mathcal{H}_{q,m}(r^\varepsilon_p,\theta_p)\right|^2 \mathrm{d}\theta_p.$$

Summing over $m \in \mathbb{Z}$ in (4.21), we obtain

$$\left\|\mathbb{L}^\varepsilon_{qp}\, c_p\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} \le \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\left\|\mathcal{H}_{q,m}(r^\varepsilon_p,\cdot)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)}}{\left|H^{(1)}_m(\omega r^\varepsilon_q)\right|^2}\right)\ \|c_p\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,. \tag{4.22}$$

We prove in section 4.5 (see Lemma 4.5.2) that for disjoints obstacles, the series in the right-hand side is convergent, so $\mathbb{L}^\varepsilon_{qp} \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$. This justifies the fact that $\mathbb{L}^\varepsilon_{qp}$ and $\mathbb{K}^\varepsilon_{pq}$ are adjoint to each other, so $\mathbb{K}^\varepsilon_{pq}$ is also bounded in $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Using the same arguments, we can verify that for all $s > 0$, $\mathbb{L}^\varepsilon_{qp}$ is bounded from $\ell^2(\mathbb{Z})$ to the space $h^s(\mathbb{Z})$ defined above. Indeed, instead of (4.22), we obtain

$$\left\|\mathbb{L}^\varepsilon_{qp}\, c_p\right\|^2_{h^s(\mathbb{Z})} \le \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} (1+m^2)^s \frac{\left\|\mathcal{H}_{q,m}(r^\varepsilon_p,\cdot)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)}}{\left|H^{(1)}_m(\omega r^\varepsilon_q)\right|^2}\right)\ \|c_p\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,,$$

where Lemma 4.5.2 tells us that the series in the right-hand side is convergent. As $h^s(\mathbb{Z})$ is compactly embedded in $\ell^2(\mathbb{Z})$, the compactness of $\mathbb{L}^\varepsilon_{qp}$ follows. Hence its adjoint is also compact in $\ell^2(\mathbb{Z})$. ∎

Remark 4.4.2 It is easy to see that the convergence of the series which appears in (4.22) allows us to interchange the order of summation of the double series in (4.16).

Proposition 4.4.3 *On the assumption that the scatterers are disjoint, the multiple scattering problem* (4.17) *as well as the Foldy–Lax approximation* (4.19) *are well-posed in* $\ell^2(\mathbb{Z})^P$.

Proof. Proposition 4.4.1 tells us that (4.17) is a Fredholm equation in the space $\ell^2(\mathbb{Z})^P$ (note that the right-hand side f^ε belongs to $\ell^2(\mathbb{Z})^P$ since each f_p^ε is the sequence of Fourier coefficients of $-w(r_p^\varepsilon,\cdot)$, see (4.18)). By virtue of Fredholm's alternative, the well-posedness of this equation follows from the uniqueness of the solution to our initial problem (4.3)–(4.5). Indeed, it is well-known that this problem has a unique solution $u^\varepsilon \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega^\varepsilon)$ where $\Omega^\varepsilon := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{p=1}^P \overline{\mathcal{O}_p^\varepsilon}$. Suppose then that $c^\varepsilon \in \ell^2(\mathbb{Z})^P$ is a solution to $(\mathbb{I} + \mathbb{K}^\varepsilon)\, c^\varepsilon = 0$. We have seen in the proof of Proposition 4.4.1 that $\mathbb{K}^\varepsilon$ is bounded from $\ell^2(\mathbb{Z})^P$ to $h^s(\mathbb{Z})^P$. Hence $c^\varepsilon = -\mathbb{K}^\varepsilon\, c^\varepsilon$ belongs to $h^s(\mathbb{Z})^P$ for all $s > 0$. This shows that the associated function u^ε defined by (4.10) and (4.13) is a smooth solution to (4.3)–(4.5) with $w = 0$. So $u^\varepsilon = 0$, which implies that $c^\varepsilon = 0$.

For the Foldy–Lax approximation (4.19), the proof is very different. As mentioned in section 4.3.2, this equation is equivalent to the finite dimensional system (4.8). Noticing that $\left|H_0^{(1)}(\cdot)\right|$ is decreasing on $(0,+\infty)$ (which can be easily deduced from formula (4.31)), we infer that

$$\left|\mathbb{M}^\varepsilon_{pq}\right| = \left|\sigma_q^\varepsilon\, G(s_p - s_q)\right| = \frac{\left|H_0^{(1)}(\omega|s_p - s_q|)\right|}{\left|H_0^{(1)}(\omega r_q^\varepsilon)\right|} < 1 \quad \text{for all } p,q \in \{1,\dots,P\} \text{ with } p \neq q.$$

As a consequence, $\|\mathbb{M}^\varepsilon\|_\infty := \sup_{p,q\,\in\,\{1,\dots,P\}} \left|\mathbb{M}^\varepsilon_{pq}\right| < 1$, thus $\mathbb{I} + \mathbb{M}^\varepsilon$ is invertible. ∎

4.4.2 Error analysis

The proof of Theorem 4.2.1 is mainly based on the following error estimates.

Proposition 4.4.4 *There exits a constant* $C > 0$ *such that for* ε *small enough,*

$$\|\mathbb{K}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z})^P)} \leq \frac{C}{|\log\varepsilon|}\,, \tag{4.23}$$

$$\left\|\mathbb{K}^\varepsilon - \widetilde{\mathbb{K}}^\varepsilon\right\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z})^P)} \leq C\,\varepsilon\,, \tag{4.24}$$

$$\left\|f^\varepsilon - f^0\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})^P} \leq C\,\varepsilon. \tag{4.25}$$

Proof. For inequality (4.23), we follow the same approach as in the proof of Proposition 4.4.1. The announced estimate simply results from (4.22) and Lemma 4.5.3.

To prove formula (4.24), we use similar arguments. First notice that the adjoint of the finite rank operator $\widetilde{\mathbb{K}}^\varepsilon_{pq}$ is clearly the operator $\widetilde{\mathbb{L}}^\varepsilon_{qp}$ of $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ defined by

$$\widetilde{\mathbb{L}}^\varepsilon_{qp}\, c_p := \left(\delta_{m,0}\, \frac{\overline{\mathcal{H}_{q,0}(s_p)}}{H_0^{(1)}(\omega r_q^\varepsilon)}\, c_{p,0}\right)_{m\in\mathbb{Z}}.$$

Hence, for $c_p \in \ell^2(\mathbb{Z})$, we have

$$\left\|\left(\mathbb{L}^\varepsilon_{qp} - \widetilde{\mathbb{L}}^\varepsilon_{qp}\right) c_p\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{|m|>0} \left|\left(\mathbb{L}^\varepsilon_{qp}\, c_p\right)_m\right|^2 + \left|\left((\mathbb{L}^\varepsilon_{qp} - \widetilde{\mathbb{L}}^\varepsilon_{qp})\, c_p\right)_0\right|^2.$$

On one hand, following the same lines as in the proof of Proposition 4.4.1 and using Lemma 4.5.3, we obtain

$$\sum_{|m|>0} \left|\left(\mathbb{L}^{\varepsilon}_{qp}\, c_p\right)_m\right|^2 \leq \left(\sum_{|m|>0} \frac{\left\|\mathcal{H}_{q,m}(r^{\varepsilon}_p,\cdot)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)}}{\left|H^{(1)}_m(\omega r^{\varepsilon}_q)\right|^2}\right) \|c_p\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq C\,\varepsilon^2\,\|c_p\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,,$$

for ε small enough. On the other hand, applying the Cauchy-Schwarz inequality, we get

$$\left|\left((\mathbb{L}^{\varepsilon}_{qp}-\widetilde{\mathbb{L}}^{\varepsilon}_{qp})\, c_p\right)_0\right|^2 \leq \frac{\sum_{|n|>0}\left|\mathcal{H}_{q,-n}(s_p)\,J_n(\omega r^{\varepsilon}_p)\right|^2 + \left|(J_0(\omega r^{\varepsilon}_p)-1)\,\mathcal{H}_{q,0}(s_p))\right|^2}{\left|H^{(1)}_0(\omega r^{\varepsilon}_q)\right|^2}\,\|c_p\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,.$$

Again thanks to the Graf's addition formula (4.15) and the Parseval identity, we see that the numerator of the fraction in the right-hand side is nothing but $\left\|\mathcal{H}_{q,0}(r^{\varepsilon}_p,\cdot)-\mathcal{H}_{q,0}(s_p)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)}$. As $\mathcal{H}_{q,0}(x)$ is a smooth function near $x=s_p$, this quantity is $O(\varepsilon^2)$ for small ε. Noticing that $H^{(1)}_0(\omega r^{\varepsilon}_q)=O(|\log\varepsilon|)$ (see (4.28)), we conclude that

$$\left|\left((\mathbb{L}^{\varepsilon}_{qp}-\widetilde{\mathbb{L}}^{\varepsilon}_{qp})\, c_p\right)_0\right|^2 \leq C\,\varepsilon^2\,|\log\varepsilon|^{-2}\;\|c_p\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,.$$

which completes the proof of (4.24).

It remains to prove (4.25). From the respective definitions of f^{ε}_p and f^0_p, we have

$$\left\|f^{\varepsilon}_p-f^0_p\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} A^{\varepsilon}_{p,m}\;|d_{p,m}|^2\,,$$

where

$$A^{\varepsilon}_{p,0} := \left|\frac{J_0(\omega r^{\varepsilon}_p)-1}{J_0(\omega r_0)}\right|^2 \quad\text{and}\quad A^{\varepsilon}_{p,m} := \left|\frac{J_m(\omega r^{\varepsilon}_p)}{J_m(\omega r_0)}\right|^2 \text{ if } m\neq 0.$$

Using the asymptotic behaviors of J_m for small arguments (see (4.28)) and for large orders (see (4.29)), we infer that there exists $C>0$ independent of m such that

$$A^{\varepsilon}_{p,0} \leq C\,\left(\frac{r^{\varepsilon}_p}{r_0}\right)^4 \quad\text{and}\quad A^{\varepsilon}_{p,m} \leq C\,\left(\frac{r^{\varepsilon}_p}{r_0}\right)^{2m} \text{ if } m\neq 0.$$

This shows that the dominant coefficient is obtained for $m=1$, so $\sup_{m\in\mathbb{Z}} A^{\varepsilon}_{p,m} \leq C\,\varepsilon^2$. As a consequence,

$$\left\|f^{\varepsilon}_p-f^0_p\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq C\,\varepsilon^2\,\|d_p\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,,$$

where $\|d_p\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$ is finite since d_p is the sequence of Fourier coefficients of $w(r_0,\cdot)$ (see (4.14)). ■

Corollary 4.4.5 *There exits a constant $C>0$ such that for ε small enough,*

$$\left\|c^{\varepsilon}-c^{\varepsilon,k}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})^P} \leq \begin{cases} \left|\dfrac{C}{\log\varepsilon}\right|^{k+1} & \text{if } k\in\mathbb{N}, \\ C\,\varepsilon & \text{if } k=\infty. \end{cases}$$

Proof. The case $k = \infty$ is a consequence of Proposition 4.4.4 using standard approximation results [72, Theorem 10.1]. The case $k \in \mathbb{N}$ then follows by noticing that

$$\left\|c^\varepsilon - c^{\varepsilon,k}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})^P} \leq \|c^\varepsilon - c^{\varepsilon,\infty}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})^P} + \left\|c^{\varepsilon,\infty} - c^{\varepsilon,k}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})^P} \quad \text{where} \quad \|c^\varepsilon - c^{\varepsilon,\infty}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})^P} \leq C\,\varepsilon$$

and

$$\left\|c^{\varepsilon,\infty} - c^{\varepsilon,k}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})^P} = \left\|\sum_{\ell=k+1}^{\infty} (-\widetilde{\mathbb{K}}^\varepsilon)^\ell\, f^0\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})^P} \leq \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \left\|\widetilde{\mathbb{K}}^\varepsilon\right\|^\ell_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z})^P)} \left\|f^0\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})^P} \leq C' \left|\frac{C}{\log\varepsilon}\right|^{k+1},$$

where the last inequality derives from (4.23) and (4.24). ∎

We are now able to prove Theorem 4.2.1. We first deal with the case $s = 0$, that is, local L^2 error estimates. Let K be a compact subset of $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{p=1,P}\{s_p\}\right)$ and $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. For a given $p \in \{1, \ldots, P\}$, there exists $\rho_* > 0$ and $\rho^* > \rho_*$ such that K is contained in the domain $\Xi_p := \{x \in \mathbb{R}^2;\ \rho_* \leq |x - s_p| \leq \rho^*\}$. Moreover for ε small enough, the obstacle $\mathcal{O}_p^\varepsilon$ is outside Ξ_p. Thanks to formulas (4.13) and (4.20) (recall that $c_{p,m}^{\varepsilon,k} = 0$ for all p and $m \neq 0$), Parseval identity yields

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|u_p^\varepsilon(\rho_p,\theta_p) - u_p^{\varepsilon,k}(\rho_p,\theta_p)\right|^2 \mathrm{d}\theta_p = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|c_{p,m}^\varepsilon - c_{p,m}^{\varepsilon,k}\right|^2 \left|\frac{H_m^{(1)}(\omega\rho_p)}{H_m^{(1)}(\omega r_p^\varepsilon)}\right|^2 \quad \text{for all } \rho_p \in (\rho_*,\rho^*).$$

Using the same arguments as in the proof of Lemma 4.5.3, it is easy to see that there exists some positive constant C such that for ε small enough, we have

$$\left|\frac{H_m^{(1)}(\omega\rho_p)}{H_m^{(1)}(\omega r_p^\varepsilon)}\right|^2 \leq C\,|\log\varepsilon|^{-2} \quad \text{for all } m \in \mathbb{Z} \text{ and } \rho_p \in (\rho_*,\rho^*).$$

Hence,

$$\left\|u_p^\varepsilon - u_p^{\varepsilon,k}\right\|^2_{L^2(K)} \leq \int_{\rho_*}^{\rho^*}\int_0^{2\pi} \left|u_p^\varepsilon(\rho_p,\theta_p) - u_p^{\varepsilon,k}(\rho_p,\theta_p)\right|^2 \rho_p\, d\theta_p\, \mathrm{d}\rho_p \leq C\,|\log\varepsilon|^{-2} \left\|c_p^\varepsilon - c_p^{\varepsilon,k}\right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})},$$

which shows finally that

$$\left\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon,k}\right\|_{L^2(K)} \leq \sum_{p=1}^{P} \left\|u_p^\varepsilon - u_p^{\varepsilon,k}\right\|_{L^2(K)} \leq C\,|\log\varepsilon|^{-1} \left\|c^\varepsilon - c^{\varepsilon,k}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})^P}.$$

The conclusion then follows from Corollary 4.4.5.

In order to deal with the case $s > 0$, we simply have to use some classical interior regularity results for second order elliptic equations (see, e.g., [49, Theorem 2, p. 314]). Indeed, noticing that

$$\Delta(u^\varepsilon - u^{\varepsilon,k}) + \omega^2(u^\varepsilon - u^{\varepsilon,k}) = 0 \quad \text{in } K,$$

we infer that for any compact set K' contained in the interior of K, $u^\varepsilon - u^{\varepsilon,k}$ belongs to $H^s(K)$ for all $s > 0$ and there exists $C_s > 0$ (depending only of s, K and K') such that :

$$\left\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon,k}\right\|_{H^s(K')} \leq C_s \left\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon,k}\right\|_{L^2(K)}.$$

This completes the proof of Theorem 4.2.1.

4.5 Technical lemnas

We collect in this section different results about Bessel functions which are used in the paper. First recall some well-known properties (see, e.g., [1]) :

– Symmetry relations : for all $n \in \mathbb{N}$,

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \text{ for } x \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad H^{(1)}_{-n}(x) = (-1)^n H^{(1)}_n(x) \text{ for } x \in (0, +\infty). \tag{4.26}$$

– Recurrence formulas : for all $n \in \mathbb{Z}$,

$$H^{(1)}_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} H^{(1)}_n(x) - H^{(1)}_{n-1}(x) \text{ for } x \in (0, +\infty). \tag{4.27}$$

– Asymptotic behaviors for small arguments : when $n \in \mathbb{N}$ is fixed (see (4.26) if $n < 0$) and $x \searrow 0$,

$$J_n(x) = \begin{cases} 1 + O(x^2) & \text{if } n = 0, \\ O(x^n) & \text{else,} \end{cases} \quad \text{and} \quad H^{(1)}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2i}{\pi} \log\left(\dfrac{x}{2}\right) + O(1) & \text{if } n = 0, \\ \dfrac{(n-1)!}{i\pi} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-n} + O(x^{-n+1}) & \text{else.} \end{cases} \tag{4.28}$$

– Asymptotic behaviors for large orders : when $n \to +\infty$ (see (4.26) for $n \to -\infty$),

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\, n!} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ uniformly on compact subsets of } [0, +\infty), \tag{4.29}$$

$$H^{(1)}_n(x) = \frac{2^n\, (n-1)!}{i\pi\, x^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ uniformly on compact subsets of } (0, +\infty). \tag{4.30}$$

The following apparently non usual inequality plays an essential role in our estimates.

Lemma 4.5.1 *For all integer $n \geq 2$ and $x \in (0, 1)$, we have*

$$\left| \frac{1}{H^{(1)}_n(x)} \right| \leq \frac{2x^{n-2}}{n! \left| H^{(1)}_2(x) \right|}.$$

Proof. First notice that for all $n \in \mathbb{N}$ and $x \in (0, +\infty)$, we have

$$\left| H^{(1)}_n(x) \right| \leq \left| H^{(1)}_{n+1}(x) \right|,$$

which can be easily derived from the following formula (see [111, p. 444]) :

$$\left| H^{(1)}_n(x) \right|^2 = \frac{8}{\pi^2} \int_0^\infty K_0(2x \sinh t) \cosh(2nt)\, \mathrm{d}t \quad \text{where} \quad K_0(x) := \int_0^\infty e^{-x \cosh s}\, \mathrm{d}s \tag{4.31}$$

is the modified Bessel function of order 0. Hence, from the recurrence relation (4.27), we deduce

$$\left| H^{(1)}_n(x) \right| \geq \left| \frac{2n-2}{x} H^{(1)}_{n-1}(x) \right| - \left| H^{(1)}_{n-2}(x) \right| \geq \frac{n}{x} \left| H^{(1)}_{n-1}(x) \right| \quad \text{for } n \geq 3 \text{ and } x \in (0, 1).$$

Applying this inequality recursively, the conclusion follows. ∎

The following lemmas concern the convergence and the order of magnitude of the series involved in (4.22).

Lemma 4.5.2 *For a fixed $\varepsilon > 0$, if the obstacles $\mathcal{O}_p^\varepsilon$ and $\mathcal{O}_q^\varepsilon$ are disjoint, then for all $s \geq 0$,*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} (1+m^2)^s \frac{\left\|\mathcal{H}_{q,m}(r_p^\varepsilon,\cdot)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)}}{\left|H_m^{(1)}(\omega r_q^\varepsilon)\right|^2} < \infty.$$

Proof. Thanks to the symmetry relation (4.26), we can consider the series for $m \in \mathbb{N}$. The asymptotic behavior (4.30) shows that for a fixed $\varepsilon > 0$, when $m \to +\infty$,

$$\frac{1}{\left|H_m^{(1)}(\omega r_q^\varepsilon)\right|^2} = O\left(\frac{\left\{\omega r_q^\varepsilon\right\}^{2m}}{2^{2m}\,(m-1)!^2}\right), \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{H}_{q,m}(r_p^\varepsilon,\cdot)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|H_m^{(1)}\left(\omega|x(r_p^\varepsilon,\theta_p)-s_q|\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta_p \\ &= O\left(\frac{2^{2m}\,(m-1)!^2}{\left\{\omega\left(|s_p-s_q|-r_p^\varepsilon\right)\right\}^{2m}}\right),\end{aligned} \tag{4.33}$$

where the last equality follows from the fact that $|x(r_p^\varepsilon,\theta_p)-s_q| \geq |s_p-s_q|-r_p^\varepsilon$ for all $\theta_p \in (0,2\pi)$. As a consequence

$$(1+m^2)^s \frac{\left\|\mathcal{H}_{q,m}(r_p^\varepsilon,\cdot)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)}}{\left|H_m^{(1)}(\omega r_q^\varepsilon)\right|^2} = O\left(m^{2s}\left(\frac{r_q^\varepsilon}{|s_p-s_q|-r_p^\varepsilon}\right)^{2m}\right) \quad \text{as } m \to +\infty.$$

Hence the series is convergent since $r_p^\varepsilon + r_q^\varepsilon < |s_p - s_q|$ (for the obstacles are disjoint). ∎

Lemma 4.5.3 *Let $N \in \mathbb{N}$ and $p \neq q$. For $\varepsilon > 0$ small enough, we have*

$$\sum_{|m|\geq N} \frac{\left\|\mathcal{H}_{q,m}(r_p^\varepsilon,\cdot)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)}}{\left|H_m^{(1)}(\omega r_q^\varepsilon)\right|^2} = \begin{cases} O\left(|\log\varepsilon|^{-2}\right) & \text{if } N=0, \\ O\left(\varepsilon^{2N}\right) & \text{else.}\end{cases}$$

Proof. We proceed as in the proof of Lemma 4.5.2. We denote by

$$h_m(\varepsilon) = \frac{\left\|\mathcal{H}_{q,m}(r_p^\varepsilon,\cdot)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)}}{\left|H_m^{(1)}(\omega r_q^\varepsilon)\right|^2}$$

the term of order m of the above series. On one hand, formula (4.32) is no more valid for small ε since (4.30) cannot be used for small arguments. We use instead Lemma 4.5.1 as well as the asymptotic behavior (4.28) of $H_2^{(1)}$ for small arguments, which shows that there exists $C > 0$ and $\varepsilon_0 > 0$ such that

$$\frac{1}{\left|H_m^{(1)}(\omega r_q^\varepsilon)\right|^2} \leq C\,\frac{\left\{\omega r_q^\varepsilon\right\}^{2m}}{m!^2} \quad \text{for all } m \geq 2 \text{ and } \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

On the other hand, formula (4.33) holds. Noticing that $|s_p - s_q| - r_p^\varepsilon \geq |s_p - s_q|/2$ for small enough ε, say $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, we infer that there exists $C' > 0$ and $M \geq 2$ such that

$$\left\|\mathcal{H}_{q,m}(r_p^\varepsilon, \cdot)\right\|^2_{L^2(0,2\pi)} \leq C' \, \frac{4^{2m}\,(m-1)!^2}{\{\omega\,|s_p - s_q|\}^{2m}} \quad \text{for all } m \geq M \text{ and } \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

As a consequence,

$$h_m(\varepsilon) \leq \frac{C''}{m^2} \, \left(\frac{4r_q^\varepsilon}{|s_p - s_q|}\right)^{2m} \quad \text{for all } m \geq M \text{ and small enough } \varepsilon.$$

This shows that $\sum_{m=M}^{\infty} h_m(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{2M}\right)$. Moreover, from the asymptotic behavior (4.28) of $H_n^{(1)}$ for small arguments, we have

$$h_0(\varepsilon) \leq C_0 \, |\log \varepsilon|^{-2} \quad \text{and} \quad h_m(\varepsilon) \leq C_m \, \varepsilon^{2m} \text{ for } 0 < m < M.$$

This completes the proof. ∎

4.6 Conclusion

We have proposed in this paper a justification of different levels of asymptotic models available in the physical literature, including the Foldy-Lax model, for the two-dimensional scattering of an acoustic wave by an arbitrary number of sound-soft circular obstacles. In the models considered here, each obstacle has an isotropic behavior in the sense that in the series (4.13) which describes the wave scattered by one obstacle, we only keep the dominant contribution, associated with $m = 0$, which does not depend on θ_p. As shown in [108], the method we have presented can be seen as the first order of a more general approach which allows higher order approximations that take into account the angular dependence of the field scattered by each obstacle. Instead of keeping only the radial component ($m = 0$) in the series (4.13), we simply have to truncate this series at $|m| = \ell$ for some $\ell \geq 1$: the new unknowns are the Fourier coefficients $c_{p,m}^\varepsilon$ for $p = 1, \ldots, P$ and $m = -\ell, \ldots, +\ell$. Instead of (4.19), we are then led to an approximation of order $\varepsilon^{\ell+1}$ of (4.17) which amounts to a linear system of size $P(2\ell + 1)$. Using the same arguments as in section 4.4, we will obtain an error estimate similar to that of Theorem 4.2.1 (for $k = \infty$) where $\varepsilon/|\log \varepsilon|$ will be replaced by $\varepsilon^{\ell+1}/|\log \varepsilon|$. Such an improved Foldy-Lax model may become useful when the scatterer density is high. Moreover, a numerical comparison between the original Foldy-Lax model and a high order approximation could help us to quantify the value of $C_{K,s}$ in Theorem 4.2.1.

What about the possible generalizations of our study ? First notice that our approach should also apply for other boundary conditions on circular scatterers (Neumann or Robin) as well as for penetrable obstacles, since the scattered wave can still be represented by means of Fourier series. However, for such boundary conditions, the asymptotic behavior of each scatterer is no more isotropic : higher order terms in the multipole expansion of the scattered field must be kept. Hence the implementation of a Foldy–Lax model in such situations is similar to the higher order approximations mentioned above. In the three-dimensional case for spherical obstacles, the same ideas apply using spherical harmonics expansions instead of Fourier series. The main difference lies in the fact that the asymptotic expansions will only involve powers of ε whereas the expansions considered in the present paper also involve powers of $|\log \varepsilon|$. Let us finally mention that if we consider non-circular or non-spherical scatterers, the results we have obtained are likely to hold, but the method we have used does no longer apply, for the scattered wave

can no longer be represented by Fourier series. Other techniques such as matched asymptotic expansions, multiple scale methods or layered potentials representation [84, 83, 88, 34] should be used.

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIE SPECTRALE ET PRINCIPE D'AMPLITUDE LIMITE POUR UN DIOPTRE COMPOSÉ D'UN DIÉLECTRIQUE ET D'UN MÉTAMATÉRIAU

CHAPITRE CINQ

CADRE PHYSIQUE ET MATHÉMATIQUE

Sommaire

5.1 Équations de Maxwell dans les matériaux de Lorentz 87
5.1.1 Lois constitutives des matériaux 87
5.1.2 Système de Lorentz en régime transitoire 89
5.2 Description du problème physique traité 90
5.2.1 Modélisation du problème 90
5.2.2 Modes TE et TM 92
5.2.3 Une équation d'évolution de Schrödinger 93
5.2.4 Un problème de Cauchy bien posé 95

Ce premier chapitre a pour but de situer dans un cadre physique et mathématique général le problème traité dans cette seconde partie. Il s'organise de la manière suivante. Nous commençons par décrire les particularités des équations de Maxwell dans les matériaux de Lorentz pour nous restreindre par la suite à un dioptre, milieu composé d'un diélectrique classique et d'un matériau de Lorentz particulier : le matériau de Drude. Puis, nous introduisons dans un tel milieu la décomposition classique des équations de Maxwell en systèmes TE (Transverse Électrique) et TM (Transverse Magnétique). Enfin, après avoir choisi de façon arbitraire de travailler avec le système TM, nous le modélisons comme une équation d'évolution de Schrödinger dont nous allons étudier les propriétés mathématiques (essentiellement d'un point de vue spectral) dans les chapitres suivants.

5.1 Équations de Maxwell dans les matériaux de Lorentz

5.1.1 Lois constitutives des matériaux

Nous considérons ici un matériau de Lorentz homogène non dissipatif occupant un ouvert $\mathcal{O}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ (des modèles de matériaux de Lorentz dissipatifs sont présentés dans [55]). Pour un point $\boldsymbol{x} \in \mathcal{O}$ et un instant t, nous désignons par :

$-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ le champ électrique, $-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)$ l'induction électrique,

$-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)$ le champ magnétique, $-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ l'induction magnétique.

De manière classique en l'absence de terme source, ces champs vérifient les équations de Maxwell

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t \boldsymbol{D} - \mathbf{Rot}\, \boldsymbol{H} = 0, \\ \partial_t \boldsymbol{B} + \mathbf{Rot}\, \boldsymbol{E} = 0. \end{array} \right. \tag{5.1}$$

Les matériaux de Lorentz sont caractérisés par leurs relations constitutives qui relient respectivement l'induction électrique au champ électrique et l'induction magnétique au champ magnétique. Elles sont plus facilement formulables en régime fréquentiel :

$$\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{x}, \omega) = \varepsilon(\omega)\, \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x}, \omega), \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}, \omega) = \mu(\omega)\, \boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{x}, \omega) \end{array} \right. \tag{5.2}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ désignent respectivement les transformées de Fourier en temps de $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$. Les fonctions ε et μ représentent la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du matériau. Leur dépendance en ω exprime le caractère dispersif du matériau. Pour les matériaux de Lorentz, cette dépendance est rationnelle (cf. [56, 76]) :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2}\right) \quad \text{et} \quad \mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \frac{\Omega_m^2}{\omega^2 - \omega_m^2}\right), \tag{5.3}$$

où d'une part Ω_e, Ω_m, ω_e et ω_m sont des constantes réelles positives et d'autre part ε_0 et μ_0 sont des réels strictement positifs. Effectuons quelques commentaires sur les relations constitutives décrites par les équations (5.2) et (5.3) :

- Tout d'abord, lorsque Ω_e et Ω_m sont nulles, on retrouve les lois constitutives d'un diélectrique classique dont les matériaux de Lorentz sont une généralisation dès que Ω_e et Ω_m sont non nulles.
- Ensuite, le fait que les fonctions ε et μ sont à valeurs réelles exprime ici le caractère non dissipatif du milieu.
- Puis, on constate que
$$\lim_{\omega \to \infty} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \to \infty} \mu(\omega) = \mu_0.$$
Ces matériaux sont donc peu dispersifs à hautes fréquences, régime où ils se comportent comme des diélectriques classiques.
- Enfin, la principale particularité de ces matériaux est qu'il existe des intervalles fréquentiels pour lesquels $\varepsilon(\omega)$ ou $\mu(\omega)$ sont négatifs. Plus précisément :
$$\left| \begin{array}{lll} \varepsilon(\omega) < 0 & \Longleftrightarrow & |\omega| \in]\omega_e, \omega_{e,+}[\quad \text{où} \quad \omega_{e,+} := \sqrt{\omega_e^2 + \Omega_e^2}, \\ \mu(\omega) < 0 & \Longleftrightarrow & |\omega| \in]\omega_m, \omega_{m,+}[\quad \text{où} \quad \omega_{m,+} := \sqrt{\omega_m^2 + \Omega_m^2}. \end{array} \right.$$
Les intervalles fréquentiels où $\varepsilon(\omega)$ et $\mu(\omega) < 0$ sont très importants du point de vue des applications physiques (cf. intro). De plus, il existe un couple de fréquences particulières où le rapport $\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0$ ou $\mu(\omega)/\mu_0$, appelé respectivement permittivité et perméabilité relative, est égal à -1. En effet :
$$\left| \begin{array}{lll} \dfrac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = -1 & \Longleftrightarrow & \omega = \pm\omega_{e,*} \quad \text{où} \quad \omega_{e,*} := \sqrt{\omega_e^2 + \dfrac{\Omega_e^2}{2}}, \\ \dfrac{\mu(\omega)}{\mu_0} = -1 & \Longleftrightarrow & \omega = \pm\omega_{m,*} \quad \text{où} \quad \omega_{m,*} := \sqrt{\omega_m^2 + \dfrac{\Omega_m^2}{2}}. \end{array} \right. \tag{5.4}$$

On remarque que ces deux rapports sont simultanément égaux à -1 si et seulement si

$$\omega_e^2 + \frac{\Omega_e^2}{2} = \omega_m^2 + \frac{\Omega_m^2}{2}.$$

Toutes ces propriétés sont résumées graphiquement dans la figure 5.1.

Introduisons maintenant les lois constitutives d'un matériau de Lorentz particulier : le matériau de Drude, qui nous intéressera par la suite. Un matériau de Drude est défini comme un matériau de Lorentz pour lequel les constantes ω_e et ω_m sont nulles (cf. [110]). Les équations (5.3) deviennent alors

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}\right) \quad \text{et} \quad \mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \frac{\Omega_m^2}{\omega^2}\right). \tag{5.5}$$

L'allure de ces fonctions est représentée dans le second graphique de la figure 5.1.

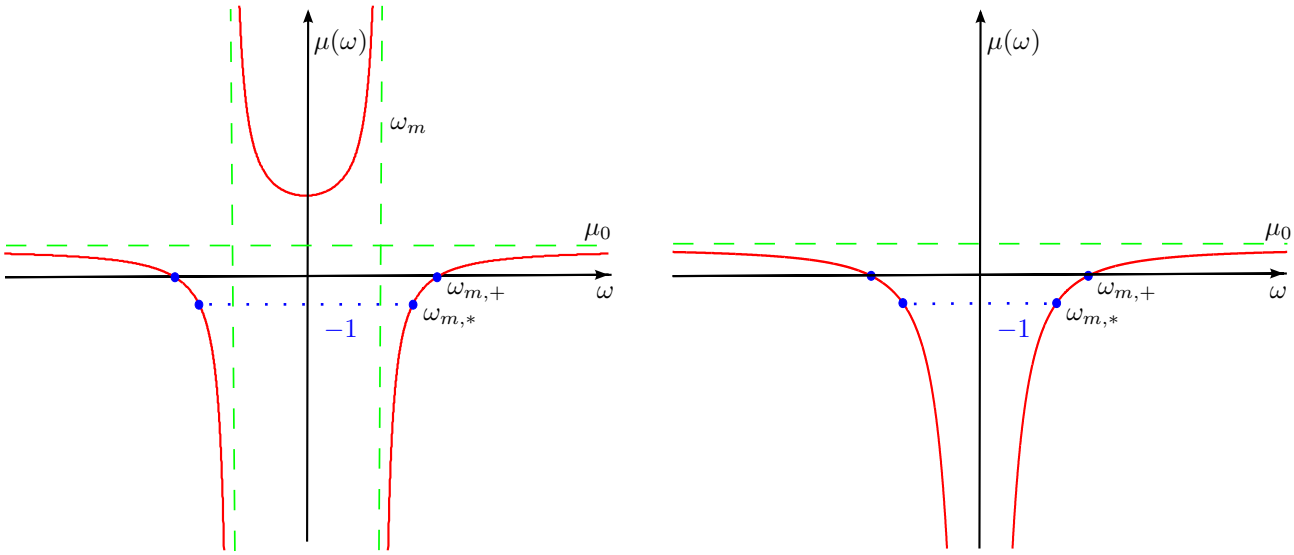

FIGURE 5.1 – Allure de la courbe de perméabilité (cf. (5.3) et (5.5)) pour un marériau de Lorentz (à gauche) et pour un matériau de Drude (à droite).

Remarque 5.1.1 *Enfin, on peut considérer une forme fractionnaire plus générale dans (5.3) pour modéliser les matériaux de Lorentz en posant (cf. [55]) :*

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{\Omega_{e,n}^2}{\omega^2 - \omega_{e,n}^2}\right) \quad et \quad \mu(\omega) = \mu_0 \left(1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{\Omega_{m,n}^2}{\omega^2 - \omega_{m,n}^2}\right).$$

Notons que de telles lois constitutives ont été justifiées par des techniques d'homogénéisation fort contraste de matériaux périodiques (cf. [23, 24]).

5.1.2 Système de Lorentz en régime transitoire

Nous cherchons maintenant à écrire les équations (5.1) et (5.2) comme un système d'évolution en temps. A cette fin, il nous faut introduire deux champs auxiliaires : la polarisation électrique $\boldsymbol{P}$ et la polarisation magnétique $\boldsymbol{M}$ (cf. [76]) dont les transformées de Fourier en temps sont

notées $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{M}}$.[1] A l'aide de ces champs, on peut reformuler la relation (5.2) et (5.3) de la manière suivante

$$\left|\begin{array}{lll} \boldsymbol{\mathcal{D}} = \varepsilon_0 \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \Omega_e^2 \, \boldsymbol{\mathcal{P}}\right) & \text{où} & (\omega_e^2 - \omega^2)\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}, \\ \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu_0 \left(\boldsymbol{\mathcal{H}} + \Omega_m^2 \, \boldsymbol{\mathcal{M}}\right) & \text{où} & (\omega_m^2 - \omega^2)\boldsymbol{\mathcal{M}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}. \end{array}\right. \tag{5.6}$$

En passant (5.6) dans le domaine temporel, il vient

$$\left|\begin{array}{lll} \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \left(\boldsymbol{E} + \Omega_e^2 \, \boldsymbol{P}\right) & \text{où} & \partial_t^2 \boldsymbol{P} + \omega_e^2 \, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \Omega_m^2 \, \boldsymbol{M}\right) & \text{où} & \partial_t^2 \boldsymbol{M} + \omega_m^2 \, \boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}. \end{array}\right. \tag{5.7}$$

En substituant (5.7) dans (5.1), on obtient un problème d'évolution sur les quatre champs $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{M})$:

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon_0 \, \partial_t \boldsymbol{E} - \mathbf{Rot}\, \boldsymbol{H} + \varepsilon_0 \, \Omega_e^2 \, \partial_t \boldsymbol{P} = 0, \\ \mu_0 \, \partial_t \boldsymbol{H} + \mathbf{Rot}\, \boldsymbol{E} + \mu_0 \, \Omega_m^2 \, \partial_t \boldsymbol{M} = 0, \\ \partial_t^2 \boldsymbol{P} + \omega_e^2 \boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}, \\ \partial_t^2 \boldsymbol{M} + \omega_m^2 \boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}. \end{array}\right. \tag{5.8}$$

5.2 Description du problème physique traité

5.2.1 Modélisation du problème

Nous considérons un dioptre dans l'espace $\mathbb{R}^3$ composé d'un diélectrique et d'un matériau de Drude, tous deux homogènes, occupant respectivement les domaines $\mathbb{R}^3_- = \{(x, y, z) \mid x < 0\}$ et $\mathbb{R}^3_+ = \{(x, y, z) \mid x > 0\}$. Nous désignons par $(\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y}, \boldsymbol{e_z})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La composante d'un vecteur selon $\boldsymbol{e_x}$ est donc appelée composante normale dans le sens où elle est normale à l'interface, les composantes selon $\boldsymbol{e_y}$ et $\boldsymbol{e_z}$ sont par opposition les composantes tangentielles.

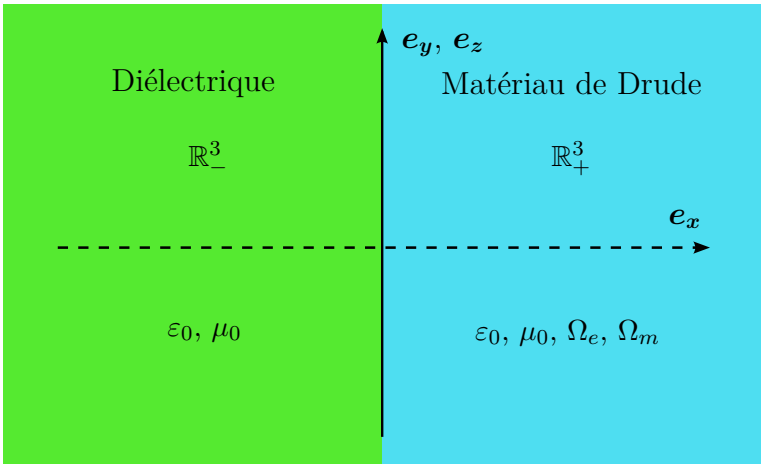

FIGURE 5.2 – Description du dioptre.

1. Remarquons que cette définition n'est pas universelle. Dans certains ouvrages, on appelle respectivement polarisation électrique et polarisation magnétique les quantités $\epsilon_0 \, \Omega_e^2 \, \boldsymbol{P}$ et $\mu_0 \, \Omega_m^2 \, \boldsymbol{M}$.

Dans le diélectrique où les relations constitutives prennent la forme simplifiée $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\,\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{H}$, les équations de Maxwell (5.1) sont alors décrites par

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon_0\,\partial_t \boldsymbol{E} - \mathbf{Rot}\,\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{J} \quad (\mathbb{R}^3_-), \\ \mu_0\,\partial_t \boldsymbol{H} + \mathbf{Rot}\,\boldsymbol{E} = 0 \quad (\mathbb{R}^3_-), \end{array}\right. \tag{5.9}$$

où la donnée $\boldsymbol{J}$ représente la densité de courant. La permittivité électrique ε_0 et la permittivité magnétique μ_0 sont encore des constantes strictement positives.

Le matériel de Drude, quant à lui, suit les relations constitutives définies par (5.2) et (5.5). Nous supposons, en considérant Ω_e et Ω_m strictement positifs, qu'il constitue un milieu dispersif, différent d'un diélectrique classique. Signalons également que par souci de simplicité, nous avons choisi de prendre ε_0 et μ_0 égaux de part et d'autre de l'interface $x = 0$. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, le modèle de Drude est un cas particulier du modèle de Lorentz pour lequel $\omega_e = \omega_m = 0$; les équations de Maxwell dans ce milieu se déduisent donc aisément de (5.8) :

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon_0\,\partial_t \boldsymbol{E} - \mathbf{Rot}\,\boldsymbol{H} + \varepsilon_0\,\Omega_e^2\,\partial_t \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{J} \quad (\mathbb{R}^3_+), \\ \mu_0\,\partial_t \boldsymbol{H} + \mathbf{Rot}\,\boldsymbol{E} + \mu_0\,\Omega_m^2\,\partial_t \boldsymbol{M} = 0 \quad (\mathbb{R}^3_+), \\ \partial_t^2 \boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \quad (\mathbb{R}^3_+), \\ \partial_t^2 \boldsymbol{M} = \boldsymbol{H} \quad (\mathbb{R}^3_+). \end{array}\right. \tag{5.10}$$

Enfin classiquement, les équations (5.9) et (5.10) doivent être complétées par les conditions de transmissions suivantes

$$[\boldsymbol{e_x} \times \boldsymbol{E}(\cdot,t)]_{x=0} = 0 \;\text{ et }\; [\boldsymbol{e_x} \times \boldsymbol{H}(\cdot,t)]_{x=0} = 0, \tag{5.11}$$

où $\times$ et $[\,\cdot\,]_{x=0}$ désignent respectivement le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et le saut d'une fonction en $x = 0$. Ces conditions expriment la continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique à la traversée de l'interface $x = 0$.

A chaque instant, nous supposons que les champs $\boldsymbol{E}(\cdot,t)$, $\boldsymbol{H}(\cdot,t)$, $\boldsymbol{P}(\cdot,t)$, $\boldsymbol{M}(\cdot,t)$, $\mathbf{Rot}\,\boldsymbol{E}(\cdot,t)$ et $\mathbf{Rot}\,\boldsymbol{H}(\cdot,t)$, satisfaisant (5.9), (5.10) et (5.11), sont de carré intégrable. Cette considération conduit naturellement à introduire les espaces fonctionnels

$$\boldsymbol{L}^2(\mathcal{O}) = \left\{\boldsymbol{u} \mid \int_{\mathcal{O}} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty\right\} \;\text{ et }\; \boldsymbol{H}_{\mathbf{Rot}}(\mathcal{O}) = \left\{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\mathcal{O}^3) \mid \mathbf{Rot}\,\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\mathcal{O}^3)\right\},$$

où $\|\cdot\|$ et $\mathcal{O}$ sont respectivement la norme euclidienne et un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^3$. Pour un $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3)$ donné, nous cherchons donc des champs $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \partial_t \boldsymbol{P}, \partial_t \boldsymbol{M})$ dans $(\boldsymbol{H}_{\mathbf{Rot}}(\mathbb{R}^3))^2 \times (\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3_+))^2$. Remarquons que l'espace $\boldsymbol{H}_{\mathbf{Rot}}(\mathbb{R}^3)$ peut être caractérisé (cf. [86]) de la manière suivante :

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_{\mathbf{Rot}}(\mathbb{R}^3) \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \boldsymbol{u}|_{\mathbb{R}^3_-} \in \boldsymbol{H}_{\mathbf{Rot}}(\mathbb{R}^3_-), \\ \boldsymbol{u}|_{\mathbb{R}^3_+} \in \boldsymbol{H}_{\mathbf{Rot}}(\mathbb{R}^3_+), \\ [\boldsymbol{e_x} \times \boldsymbol{u}]_{x=0} = 0. \end{array}\right.$$

Ainsi, les conditions de transmissions (5.11) des champs électrique et magnétique sont contenues dans l'appartenance à l'espace fonctionnel $\boldsymbol{H}_{\mathbf{Rot}}(\mathbb{R}^3)$. Afin de réécrire les systèmes d'équations (5.9), (5.10), (5.11) en un seul système, nous introduisons les opérateurs de prolongement par zéro et de restriction suivants :

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\Pi} : & \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3_+) & \longrightarrow & \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3) \\ & \boldsymbol{f} & \longmapsto & \boldsymbol{f} \text{ sur } \mathbb{R}^3_+ \text{ et } 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3_- \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \mathbf{R} : & \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3_+) \\ & \boldsymbol{f} & \longmapsto & \boldsymbol{f}|_{\mathbb{R}^3_+}. \end{array}$$

En utilisant ces opérateurs, on peut reformuler les équations (5.9), (5.10) et (5.11) sous la forme d'un système d'évolution :

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon_0\,\partial_t \boldsymbol{E} - \mathbf{Rot}\,\boldsymbol{H} + \varepsilon_0\,\Omega_e^2\,\mathbf{\Pi}\,\partial_t \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{J} \quad (\mathbb{R}^3), \\ \mu_0\,\partial_t \boldsymbol{H} + \mathbf{Rot}\,\boldsymbol{E} + \mu_0\,\Omega_m^2\,\mathbf{\Pi}\,\partial_t \boldsymbol{M} = 0 \quad (\mathbb{R}^3), \\ \partial_t^2 \boldsymbol{P} = \mathbf{R}\,\boldsymbol{E} \quad (\mathbb{R}^3_+), \\ \partial_t^2 \boldsymbol{M} = \mathbf{R}\,\boldsymbol{H} \quad (\mathbb{R}^3_+), \end{array}\right. \tag{5.12}$$

où les champs $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \partial_t \boldsymbol{P}, \partial_t \boldsymbol{M})$ appartiennent à $(\boldsymbol{H}_{\mathbf{Rot}}(\mathbb{R}^3))^2 \times (\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3_+))^2$.

5.2.2 Modes TE et TM

Dans cette partie, nous allons exploiter les propriétés d'invariance par translation de notre milieu pour simplifier les équations de (5.12). A cette fin, nous faisons l'hypothèse :

-(H_1) la densité de courant $\boldsymbol{J}$ ne dépend spatialement que du couple de variables (x, y).

Ainsi, l'ensemble du problème (géométrie, coefficients physiques et données) est invariant par rapport à z et nous pouvons faire la simplification : $\partial_z = 0$. Suivant cette logique, nous scindons tout champ $\boldsymbol{U}$ en une composante $\boldsymbol{U}_\perp := (U_x, U_y)$ transverse à la direction d'invariance $\boldsymbol{e_z}$ et une composante $U_\parallel = U_z$ parallèle à cette dernière. Le rotationnel se décompose donc de la manière suivante

$$\mathbf{Rot}\,\boldsymbol{U} = \mathbf{rot}\,U_\parallel + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}_\perp\,\boldsymbol{e_z}$$

où $\mathbf{rot}\,U_\parallel = (\partial_y U_z, -\partial_x U_z)^\top$ et $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}_\perp = \partial_x U_y - \partial_y U_x$. Remarquons que les conditions de transmission (5.11) sur les champs électrique et magnétique prennent alors la forme de conditions de transmissions sur les composantes parallèles $E_\parallel$ et $H_\parallel$:

$$[E_z]_{x=0} = 0 \;\text{ et }\; [H_z]_{x=0} = 0 \tag{5.13}$$

et transverses $\boldsymbol{E}_\perp$ et $\boldsymbol{H}_\perp$:

$$[E_y]_{x=0} = 0 \;\text{ et }\; [H_y]_{x=0} = 0 \tag{5.14}$$

de ces champs. Chercher des champs $(\boldsymbol{E}(\cdot,t), \boldsymbol{H}(\cdot,t), \partial_t \boldsymbol{P}(\cdot,t), \partial_t \boldsymbol{M}(\cdot,t))$ solutions de (5.12) satisfaisant la décomposition en champs parallèle et transverse, nous conduit naturellement à introduire les espaces adaptés

$$H^1(\mathbb{R}^2) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \;|\; \boldsymbol{\nabla} u \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^2)\} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{rot}}(\mathbb{R}^2) := \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^2) \;|\; \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

L'appartenance de $E_\parallel$ et $H_\parallel$ à $H^1(\mathbb{R}^2)$ et de $\boldsymbol{E}_\perp$ et $\boldsymbol{H}_\perp$ à $\boldsymbol{H}_{\mathrm{rot}}(\mathbb{R}^2)$ imposent alors respectivement les conditions (5.13) et (5.14). Classiquement, on observe qu'il apparaît ainsi un découplage des équations (5.12) en deux nouveaux systèmes indépendants. Le premier met en jeu les inconnues $(\boldsymbol{E}_\perp, H_\parallel, \partial_t \boldsymbol{P}_\perp, \partial_t M_\parallel) \in \boldsymbol{H}_{\mathrm{rot}}(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2) \times \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^2_+) \times L^2(\mathbb{R}^2_+)$:

$$(TE)\quad \left|\begin{array}{l} \varepsilon_0\,\partial_t \boldsymbol{E}_\perp - \mathbf{rot}\,H_\parallel + \varepsilon_0\,\Omega_e^2\,\mathbf{\Pi}\,\partial_t \boldsymbol{P}_\perp = -\boldsymbol{J}_\perp \quad (\mathbb{R}^2), \\ \mu_0\,\partial_t H_\parallel + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_\perp + \mu_0\,\Omega_m^2\,\Pi\,\partial_t M_\parallel = 0 \quad (\mathbb{R}^2), \\ \partial_t^2 \boldsymbol{P}_\perp = \mathbf{R}\,\boldsymbol{E}_\perp \quad (\mathbb{R}^2_+), \\ \partial_t^2 M_\parallel = \mathrm{R}\,H_\parallel \quad (\mathbb{R}^2_+) \end{array}\right.$$

où $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ [2]. Il est appelé (TE) pour transverse électrique dans la mesure où le champ électrique $\boldsymbol{E}_\perp$ est transverse à la direction d'invariance de l'ensemble du problème, c'est-à-dire $\boldsymbol{e_z}$. Le second régit les champs $(E_\parallel, \boldsymbol{H}_\perp, \partial_t P_\parallel, \partial_t \boldsymbol{M}_\perp) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times \boldsymbol{H}_{\rm rot}(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2_+) \times \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R}^2_+)$:

$$(TM) \left| \begin{array}{l} \varepsilon_0\, \partial_t E_\parallel - \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_\perp + \varepsilon_0\, \Omega_e^2\, \Pi\, \partial_t P_\parallel = -J_\parallel \quad (\mathbb{R}^2), \\ \mu_0\, \partial_t \boldsymbol{H}_\perp + \mathbf{rot}\, E_\parallel + \mu_0\, \Omega_m^2\, \boldsymbol{\Pi}\, \partial_t \boldsymbol{M}_\perp = 0 \quad (\mathbb{R}^2), \\ \partial_t^2 P_\parallel = \mathrm{R}\, E_\parallel \quad (\mathbb{R}^2_+), \\ \partial_t^2 \boldsymbol{M}_\perp = \mathbf{R}\, \boldsymbol{H}_\perp \quad (\mathbb{R}^2_+). \end{array} \right.$$

Il est dénommé de manière analogue (TM) pour transverse magnétique. Dans ces deux systèmes, $\boldsymbol{\Pi}$ et Π désignent respectivement les opérateurs de prolongement par 0 de $\mathbb{R}^2_+$ sur $\mathbb{R}^2$ d'une fonction vectorielle et d'une fonction scalaire. $\mathbf{R}$ et R sont quant à eux les opérateurs de restriction d'une fonction scalaire et d'une fonction vectorielle sur $\mathbb{R}^2_+$.

5.2.3 Une équation d'évolution de Schrödinger

Nous choisissons, de façon assez arbitraire compte tenu de la similarité mathématique des systèmes (TE) et (TM), de travailler en mode TM. Dans ce paragraphe, nous cherchons à mettre les équations de ce système sous la forme d'une équation d'évolution de Schrödinger :

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}\,t} + i\,\mathbb{A}\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \tag{5.15}$$

où $\mathbb{A}$ est un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
Pour définir le cadre fonctionnel de (5.15), nous munissons l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2_+) \times \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R}^2_+),$$

du produit scalaire :

$$(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = (u_E, v_E)_{\varepsilon_0} + (\boldsymbol{u_H}, \boldsymbol{v_H})_{\mu_0} + (u_P, v_P)_{\varepsilon_0\,\Omega_e^2} + (\boldsymbol{u_M}, \boldsymbol{v_M})_{\mu_0\,\Omega_m^2}$$

où $\boldsymbol{U} = (u_E,\, \boldsymbol{u_H},\, u_P,\, \boldsymbol{u_M})^\top$ et $\boldsymbol{V} := (v_E,\, \boldsymbol{v_H},\, v_P,\, \boldsymbol{v_M})^\top$. Pour ρ strictement positif, les produits scalaires à poids $(f,g)_\rho$ sont définis par

$$(f,g)_\rho = \int_{\mathcal{O}} \rho\, f.\, \overline{g}\, \mathrm{d}X \quad (\text{avec } \mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^2_+ \text{ selon les cas}).$$

Notons ici que lorsque $\rho = 1$, il est omis dans cette notation. Nous désignerons par la suite par $\|\cdot\|_\rho$ les normes associées à ces produits scalaires. En posant :

$$\boldsymbol{U} := \left(E_\parallel,\, \boldsymbol{H}_\perp,\, \partial_t P_\parallel,\, \partial_t \boldsymbol{M}_\perp\right)^\top,\ \boldsymbol{F} := \left(-\frac{J_\parallel}{\varepsilon_0}, 0\,,\, 0,\, 0\right)^\top$$

et

$$\mathbb{A} := \quad i \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\mathrm{rot}}{\varepsilon_0} & -\Omega_e^2\,\Pi & 0 \\ -\dfrac{\mathbf{rot}}{\mu_0} & 0 & 0 & -\Omega_m^2\,\boldsymbol{\Pi} \\ \mathrm{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

2. De même, nous utiliserons par la suite la notation $\mathbb{R}^2_-$ pour l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$.

défini sur le domaine

$$D(\mathbb{A}) := H^1(\mathbb{R}^2) \times \boldsymbol{H}_{\rm rot}(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2_+) \times \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R}^2_+) \subset \mathcal{H},$$

le système (TM) se réécrit sous la forme (5.15). Les conditions de transmission sont ici contenues dans le domaine de l'opérateur. Il nous reste à montrer :

Proposition 5.2.1 *L'opérateur* $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ *est autoadjoint.*

Preuve. Démontrons tout d'abord que $\mathbb{A}$ est symétrique. Soient $\boldsymbol{U} := (u_E,\, \boldsymbol{u_H},\, u_P,\, \boldsymbol{u_M})^\top$ et $\boldsymbol{V} := (v_E,\, \boldsymbol{v_H},\, v_P,\, \boldsymbol{v_M})^\top \in D(\mathbb{A})$,

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}\,\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = i \Big[&(\operatorname{rot} \boldsymbol{u_H}, v_E) - \varepsilon_0\, \Omega_e^2\, (\Pi\, u_P, v_E) - (\mathbf{rot}\, u_E, \boldsymbol{v_H}) \\ &-\mu_0\, \Omega_m^2 (\mathbf{\Pi}\, \boldsymbol{u_M}, \boldsymbol{v_H}) + \varepsilon_0\, (\mathrm{R}\, u_E, \Omega_e^2 v_P) + \mu_0\, (\mathbf{R}\, \boldsymbol{u_H}, \Omega_m^2 \boldsymbol{v_M})\Big], \end{aligned} \tag{5.17}$$

En utilisant la relation classique

$$\forall (u_1, \boldsymbol{u_2}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times \boldsymbol{H}_{\rm rot}(\mathbb{R}^2), \quad (\mathbf{rot}\, u_1, \boldsymbol{u_2}) = (u_1, \operatorname{rot} \boldsymbol{u_2}),$$

et le fait que $\Pi^* = \mathrm{R}$ et $\mathbf{\Pi}^* = \mathbf{R}$ respectivement pour les produits scalaires usuels (de poids $\rho = 1$) de $L^2(\mathbb{R}^2)$ et de $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^2)$, on obtient à partir de (5.17) que

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}\,\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = i \Big[&(\boldsymbol{u_H}, \mathbf{rot}\, v_E) - \varepsilon_0\, \Omega_e^2 (u_P, \mathrm{R}\, v_E) - (u_E, \operatorname{rot} \boldsymbol{v_H}) \\ &-\mu_0\, \Omega_m^2 (\boldsymbol{u_M}, \mathbf{R} \boldsymbol{v_H}) + \varepsilon_0\, (u_E, \Omega_e^2\, \Pi\, v_P) + \mu_0\, (\boldsymbol{u_H}, \Omega_m^2\, \mathbf{\Pi}\, \boldsymbol{v_M})\Big], \end{aligned}$$

Ce qui conduit à la relation

$$(\mathbb{A}\,\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = (\boldsymbol{U}, \mathbb{A}\,\boldsymbol{V})_{\mathcal{H}}. \tag{5.18}$$

qui exprime le caractère symétrique de l'opérateur $\mathbb{A}$.
$D(\mathbb{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$, nous pouvons donc définir l'opérateur adjoint de $\mathbb{A}$, noté $\mathbb{A}^*$, de domaine

$$D(\mathbb{A}^*) = \{\boldsymbol{W} \in \mathcal{H} \mid \exists \boldsymbol{W}^* \in \mathcal{H} \mid (\boldsymbol{W}, \mathbb{A}\,\boldsymbol{U})_{\mathcal{H}} = (\boldsymbol{W}^*, \boldsymbol{U})_{\mathcal{H}}.$$

Étant symétrique d'après (5.18), le caractère autoadjoint de $\mathbb{A}$ découle alors de l'égalité des domaines de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^*$. L'inclusion $D(\mathbb{A}) \subset D(\mathbb{A}^*)$ étant facilement vérifiée à l'aide de (5.18), montrons la seconde inclusion.
Soit $\boldsymbol{V} \in D(\mathbb{A}^*)$, il existe donc $\boldsymbol{V}^* \in \mathcal{H}$ tel que

$$(\boldsymbol{V}, \mathbb{A}\,\boldsymbol{U})_{\mathcal{H}} = (\boldsymbol{V}^*, \boldsymbol{U})_{\mathcal{H}},\ \forall \boldsymbol{U} \in D(\mathbb{A}). \tag{5.19}$$

Choisissons alors $\boldsymbol{U}$ de la forme $\boldsymbol{U} = (u_E,\, 0,\, 0, 0)^\top$, avec $u_E \in D(\mathbb{R}^2)$ (ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^2$). L'expression (5.19) devient donc :

$$(\boldsymbol{v_H}, -\mathbf{rot}\, u_E) + \Big(v_P, \varepsilon_0 \Omega_E^2\, \mathrm{R}\, u_E\Big) = (v_E^*, \varepsilon_0 u_E)\,. \tag{5.20}$$

En introduisant le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre l'espace de distributions $D'(\mathbb{R}^2)$ et l'espace de fonctions tests $D(\mathbb{R}^2)$, (5.20) se réecrit sous la forme

$$\langle \boldsymbol{v_H}, -\mathbf{rot}\, u_E \rangle + \langle v_P, \varepsilon_0 \Omega_E^2\, \mathrm{R}\, u_E \rangle = \langle v_E^*, \varepsilon_0 u_E \rangle, \quad \forall u_E \in D(\mathbb{R}^2).$$

Il s'ensuit

$$\langle -\operatorname{rot} \boldsymbol{v_H}, u_E \rangle + \langle \varepsilon_0 \Omega_e^2\, \Pi\, v_P, u_E \rangle = \langle \varepsilon_0 v_E^*, u_E \rangle,$$

et par conséquent

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v_H} = \varepsilon_0\, \Omega_e^2\, \Pi\, v_P - \varepsilon_0 v_E^* \ \text{ dans } D'(\mathbb{R}^2). \tag{5.21}$$

Le second membre de (5.21) étant dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, l'équation (5.21) est également vraie dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Il en découle que $\boldsymbol{v_H} \in \boldsymbol{H}_{\rm rot}(\mathbb{R}^2)$. On montrerait de même en choisissant des $\boldsymbol{U}$ de la forme $\boldsymbol{U} = (0,\, \boldsymbol{u_H},\, 0,\, 0)^\top$ avec $\boldsymbol{u_H} \in \boldsymbol{D}(\mathbb{R}^2)$ que $v_E \in H^1(\mathbb{R}^2)$. On a donc finalement $\boldsymbol{V} \in D(\mathbb{A})$.
■

5.2.4 Un problème de Cauchy bien posé

Nous nous intéressons maintenant au problème de Cauchy associé à l'équation d'évolution (5.15)

$$(\mathcal{C}) \left| \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} + i\,\mathbb{A}\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}, \\ \boldsymbol{U}(0) = \boldsymbol{U}_0 \in D(\mathbb{A}). \end{array} \right. \tag{5.22}$$

L'opérateur $\mathbb{A}$ étant autoadjoint, ce problème est bien posé car il rentre dans le cadre classique du théorème de Hille-Yosida suivant (cf. [25]) :

Théorème 5.2.2 *Si $\boldsymbol{F} \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ alors le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ admet une unique solution $\boldsymbol{U} \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}^+, D(\mathbb{A}))$ donnée*[3] *pour tout $t \geq 0$ par la formule de la variation de la constante :*

$$\boldsymbol{U}(t) = e^{-i\mathbb{A}\,t}\,\boldsymbol{U}_0 + \int_0^t e^{-i\mathbb{A}\,(t-s)}\,\boldsymbol{F}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{5.23}$$

où $(e^{-i\mathbb{A}\,t})_{t\geq 0}$ est le groupe d'opérateurs unitaires associé à l'équation de Schrödinger (5.15).

On observe que si le second membre $\boldsymbol{F} = 0$ dans $(\mathcal{C})$, l'opérateur $e^{-i\mathbb{A}\,t}$ étant unitaire, la solution $\boldsymbol{U}$ vérifie

$$\|\boldsymbol{U}(t)\|_{\mathcal{H}} = \|\boldsymbol{U}_0\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Le système est conservatif. La norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ est constante au cours du temps. Classiquement, l'énergie électromagnétique du système (TM) est d'ailleurs définie de la manière suivante

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathscr{E}_{el} + \mathscr{E}_m,$$

où

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_{el} &:= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon_0\,|E_\parallel|^2\,\mathrm{d}X + \int_{\mathbb{R}^2_+} \varepsilon_0\Omega_e^2\,|\partial_t P_\parallel|^2\,\mathrm{d}X\right), \\ \mathscr{E}_m &:= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^2} \mu_0\,|\boldsymbol{H}_\perp|^2\,\mathrm{d}X + \int_{\mathbb{R}^2_+} \mu_0\Omega_m^2\,|\partial_t \boldsymbol{M}_\perp|^2\,\mathrm{d}X\right). \end{aligned}$$

représentent respectivement l'énergie électrique et l'énergie magnétique du problème.

La question qui va nous préoccuper par la suite est le comportement en temps long des solutions de $(\mathcal{C})$ dans le cas où l'on excite le système par une densité de courant en régime sinusoïdal forcé définie pour tout $t \geq 0$ par

$$\boldsymbol{F}(t) := \left(\frac{-J_\parallel}{\varepsilon_0},\, 0,\, 0,\, 0\right)^\top e^{-i\,\omega\,t} \quad \text{où} \quad J_\parallel \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \omega \in \mathbb{R}^*. \tag{5.24}$$

Dans ce cas particulier, on déduit aisément de (5.23) et du caractère unitaire de l'opérateur $e^{-i\mathbb{A}\,t}$ l'inégalité suivante

$$\|\boldsymbol{U}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|J_\parallel\|\,t + \|\boldsymbol{U}_0\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.25}$$

L'inégalité (5.25) nous livre une première indication sur le comportement de $\boldsymbol{U}(t)$ au cours du temps. La croissance de la norme de $\boldsymbol{U}$ est au pire affine. Nous allons cependant essayer d'être plus précis en nous intéressant au comportement local (en espace) de $\boldsymbol{U}(t)$ en temps long. Intuitivement, l'onde générée par un régime sinusoïdal forcé devrait converger vers un régime établi

3. Dans ce théorème, $D(\mathbb{A})$ a été muni de la topologie hilbertienne associée à la norme du graphe :

$$\|\boldsymbol{U}\|_{D(\mathbb{A})}^2 = \|\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\mathbb{A}\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

.

dans la mesure où "la mise en route de l'excitation" (appelée régime transitoire en physique) génère une onde non entretenue qui ne devrait plus être perceptible localement pour un temps suffisamment long. Cette propriété est connue sous le nom de principe d'amplitude limite (cf. [47]). Dans le cas de l'équation des ondes en milieu homogène et en dimension impaire, il est démontré dans [101] à l'aide du principe de Huygens qui affirme que la solution de l'équation des ondes sans second membre en un point (x_0, t) ne dépend que de la valeur des conditions initiales sur la sphère $|x - x_0| = c\,t$ où c est la célérité du son dans le milieu. Cette propriété permet de justifier élégamment que l'onde non entretenue associée au régime transitoire va tendre localement en espace vers 0 quand $t \to \infty$. Néanmoins, le principe de Huygens n'est pas nécessaire pour démonter le principe d'amplitude limite. Qu'en est-il pour les équations de Maxwell dans notre dioptre où nous ne disposons pas d'un tel argument ? Le principe d'amplitude est-il toujours vérifié ? Nous verrons que la réponse à cette question dépend fortement de la fréquence d'excitation ω et des paramètres physiques Ω_e et Ω_m. Pour étudier ce problème, nous allons suivre la démarche proposée dans [47, 63], qui consiste à déterminer la décomposition modale (point de vue physique) ou spectrale (point de vue mathématique) de l'opérateur autoadjoint $\mathbb{A}$ pour en déduire des propriétés sur le comportement en temps long de $\boldsymbol{U}(t)$.

CHAPITRE SIX

APPROCHE MODALE

Sommaire

6.1 Modes propres et modes propres généralisés 97
6.2 Séparation des variables spatiales 98
6.3 Réduction à un problème scalaire 100
6.4 Coupures spectrales 102
6.5 Expression des éléments propres de l'opérateur réduit 106

L'idée directrice d'une décomposition modale est très simple. Elle consiste à représenter à chaque instant la solution d'un problème d'évolution sur une famille d'éléments appelés modes de vibrations libres (ou modes propres) qui ne dépendent que des coordonnées spatiales. La solution $\boldsymbol{U}$ du problème pourra ainsi s'écrire comme une superposition (série ou intégrale) dont chaque terme est le produit d'un mode et d'une fonction ne dépendant que du temps (pouvant être interprétée à chaque instant comme la coordonnée de $\boldsymbol{U}(t)$ sur ce mode). On a ainsi séparé les variables spatiales et temporelles.

Dans notre cas, nous nous intéressons à la décomposition modale associée à l'équation de Schrödinger (5.15). Ce chapitre peut être considéré comme "une mise en bouche". Il nous semblait nécessaire pour pouvoir digérer "le plat de consistance" cuisiné au chapitre suivant. L'objectif est ici d'exhiber de façon formelle une famille modale. Nous verrons qu'à l'issue de notre calcul, sa connaissance ne sera que partielle dans le sens où sa normalisation et sa complétude requièrent un cadre plus fondamental faisant appel à des notions de théorie spectrale qui seront présentées dans le chapitre suivant.

6.1 Modes propres et modes propres généralisés

La méthode modale consiste à représenter chaque état de notre système à l'aide des ses modes de vibrations libres, c'est-à-dire des solutions périodiques en temps de l'équation de Schrödinger (5.15) sans second membre de la forme $\mathrm{R}e\left(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})e^{-i\,\lambda\,t}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie alors immédiatement que la fonction $\boldsymbol{U}$ doit satisfaire

$$\mathbb{A}\,\boldsymbol{U} = \lambda\,\boldsymbol{U} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Chercher les modes de vibrations libres de notre problème revient donc à trouver les éléments propres de $\mathbb{A}$. En effet, toute solution non triviale $\boldsymbol{U}$ de (6.1) appartenant à $D(\mathbb{A})$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Le milieu $\mathbb{R}^2$ n'étant pas borné, le spectre de notre opérateur n'est pas simplement constitué de valeurs propres. Les vecteurs propres ne permettent donc pas

à eux seuls de former une famille modale complète. Nous devons ici compléter cette famille par la recherche d'autres éléments propres les vecteurs propres généralisés en relaxant la condition $\boldsymbol{U} \in D(\mathbb{A})$ dans (6.1). Nous allons alors résoudre l'équation (6.1) dans un espace fonctionnel qui ne suppose plus que les solutions soient d'énergie finie. A cette fin, nous chercherons des solutions $\boldsymbol{U} = (u_E, \boldsymbol{u_H}, u_P, \boldsymbol{u_M})$ bornées du système

$$\left|\begin{array}{l} i\left(\dfrac{\operatorname{rot} \boldsymbol{u_H}}{\varepsilon_0} - \Omega_e^2\, \Pi\, u_P\right) = \lambda\, u_E, \\ i\left(\dfrac{-\mathbf{rot}\, u_E}{\mu_0} - \Omega_m^2\, \mathbf{\Pi}\, \boldsymbol{u_M}\right) = \lambda\, \boldsymbol{u_H}, \\ i\, \mathrm{R}\, u_E = \lambda u_P, \\ i\, \mathbf{R}\, \boldsymbol{u_H} = \lambda \boldsymbol{u_M}. \end{array}\right. \tag{6.2}$$

Notons que de telles solutions vérifient les conditions de transmission à l'interface

$$[u_E]_{x=0} = 0 \quad \text{et } [u_{Hy}]_{x=0} = 0.$$

Les modes de vibrations libres se divisent alors en deux catégories : les modes propres (ou vecteurs propres) et les modes propres généralisés (ou vecteurs propres généralisés). Les modes propres sont les solutions de (6.2) dans $D(\mathbb{A})$. Ce sont des états d'énergie du système. Ils définissent le spectre ponctuel de $\mathbb{A}$. Les modes propres généralisés sont, quant à eux, des solutions bornées de (6.2) qui n'ont pas une décroissance à l'infini suffisante pour appartenir à $D(\mathbb{A})$. Ils sont donc d'énergie infinie. Formellement (ceci sera confirmé de façon rigoureuse au chapitre suivant), ils caractérisent le spectre continu de l'opérateur [1]. Ce spectre est constitué des intervalles en λ pour lesquels l'équation (6.2) n'admet aucune solution non triviale dans $D(\mathbb{A})$ mais admet une solution bornée.

6.2 Séparation des variables spatiales

La géométrie de notre milieu nous conduit à chercher des modes de vibrations libres, solutions de (6.2), comme des fonctions à variables séparées de la forme :

$$\boldsymbol{U}(x,y) = \hat{\boldsymbol{U}}(x)\, e^{iky} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}, \tag{6.3}$$

où $\hat{\boldsymbol{U}} := (\hat{u}_E, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}, \hat{u}_P, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}})$. Nous verrons au chapitre suivant que considérer des modes à variables séparées de cette forme, nous permet de construire une famille modale complète au sens où à chaque instant t positif, tout état de notre système pourra se décomposer sur une telle famille. L'opération de dérivation partielle par y ayant été ainsi substituée par la multiplication par $i\,k$, en injectant (6.3) dans (6.2), on obtient à k fixé le système suivant sur $\hat{\boldsymbol{U}}$:

$$\left|\begin{array}{ll} i\left(\dfrac{\operatorname{rot}_k \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}}{\varepsilon_0} - \Omega_e^2\, \Pi\, \hat{u}_P\right) = \lambda\, \hat{u}_E, & \text{(6.4a)} \\ i\left(\dfrac{-\mathbf{rot_k}\, \hat{u}_E}{\mu_0} - \Omega_m^2\, \mathbf{\Pi}\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}\right) = \lambda\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}, & \text{(6.4b)} \\ i\, \mathrm{R}\, \hat{u}_E = \lambda \hat{u}_P, & \text{(6.4c)} \\ i\, \mathbf{R}\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = \lambda \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}} & \text{(6.4d)} \end{array}\right.$$

1. Les définitions des spectres ponctuel et continu d'un opérateur auto-adjoint sont données dans le résumé de théorie spectrale au chapitre suivant.

où les opérateurs rot_k et $\mathbf{rot_k}$ sont respectivement définis par

$$\mathrm{rot}_k\,\hat{\boldsymbol{u}} := \mathrm{d}\hat{u}_y/\,\mathrm{d}x - ik\,\hat{u}_x \;\text{ et }\; \mathbf{rot_k}\,\hat{u} := (ik\hat{u}, -\,\mathrm{d}\hat{u}/\,\mathrm{d}x)^\top .$$

Quant aux opérateurs de prolongement et de restriction Π, $\mathbf{\Pi}$, R et $\mathbf{R}$, ils sont définis de la même manière qu'au chapitre précédent mais s'appliquent ici à des fonctions d'une seule variable. Remarquons que le système (6.4) contient implicitement les conditions de transmission à l'interface :

$$[\hat{u}_E]_{x=0} = 0 \;\text{ et }\; [\hat{u}_{Hy}]_{x=0} = 0. \tag{6.5}$$

Chercher des solutions d'énergie finie du système (6.4) revient à chercher les vecteurs propres de l'opérateur réduit $\hat{\mathbb{A}}_k$ défini de la même manière que $\mathbb{A}$:

$$\hat{\mathbb{A}}_k := \; i \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\mathrm{rot}_k}{\varepsilon_0} & -\Omega_e^2\,\Pi & 0 \\ -\dfrac{\mathbf{rot_k}}{\mu_0} & 0 & 0 & -\Omega_m^2\,\mathbf{\Pi} \\ \mathrm{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{6.6}$$

en remplaçant respectivement rot et $\mathbf{rot}$ par rot_k et $\mathbf{rot_k}$. Montrons que l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ de domaine $D(\hat{\mathbb{A}}_k)$ (que nous devons préciser) est également auto-adjoint. Dans ce but, définissons le cadre fonctionnel qui lui est associé. Nous munissons l'espace de Hilbert [2]

$$\hat{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}_+) \times \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R}_+), \tag{6.7}$$

du produit scalaire [3] :

$$(\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}} = (\hat{u}_1, \hat{v}_1)_{\varepsilon_0} + (\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{2}}, \hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}})_{\mu_0} + (\hat{u}_3, \hat{v}_3)_{\varepsilon_0\,\Omega_e^2} + (\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{4}}, \hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{4}})_{\mu_0\,\Omega_m^2}. \tag{6.8}$$

En introduisant, à l'instar du chapitre précédent, les espaces

$$H_1(\mathbb{R}) := \{\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}) \;|\; \frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}x} \in L^2(\mathbb{R})\} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{rot}_k}(\mathbb{R}) := \{\hat{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R}) \;|\; \mathrm{rot}_k\,\hat{\boldsymbol{u}} \in L^2(\mathbb{R})\},$$

qui contiennent respectivement les conditions de transmission $[\hat{u}_E]_{x=0} = 0$ et $[\hat{u}_{Hy}]_{x=0} = 0$, il vient :

Proposition 6.2.1 *L'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ défini sur le domaine $D(\hat{\mathbb{A}}_k) := H^1(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{rot}_k}(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}_+) \times \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R}_+) \subset \hat{\mathcal{H}}$ est auto-adjoint.*

Preuve. La preuve est ici similaire à celle de la proposition 5.2.1. ∎

De la même manière que pour l'opérateur $\mathbb{A}$, on peut définir également les vecteurs propres généralisés de $\hat{\mathbb{A}}_k$ comme étant des solutions bornées du système (6.4) qui n'appartiennent pas à $D(\hat{\mathbb{A}}_k)$. Nous allons procéder de la manière suivante. A λ fixé, nous chercherons tout d'abord des vecteurs propres, c'est-à-dire des solutions du système (6.4) dans $D(\hat{\mathbb{A}}_k)$. Si le système n'admet pas de telles solutions, nous chercherons alors des vecteurs propres généralisés de $\hat{\mathbb{A}}_k$.

2. Notons que par souci d'homogénéité des notations avec les cas bidimensionnel et tridimensionnel, $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ désignent ici les ouverts $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Nous ferons donc par la suite la distinction entre les ensembles $\mathbb{R}_\pm$ et $\mathbb{R}^\pm$ (qui contiennent 0).

3. Les produits scalaires à poids sont ici définis comme dans le chapitre précédent, mais pour des fonctions à une seule variable. Nous les notons donc de la même façon.

6.3 Réduction à un problème scalaire

La séparation de variables nous a permis de réduire la dimension de 1. C'est d'ailleurs à ce titre qu'on parle d'opérateur réduit pour $\hat{\mathbb{A}}_k$. Le fait de travailler avec des fonctions de la seule variable x va nous permettre d'effectuer un calcul explicite des solutions du système (6.4). Nous allons ici exprimer toutes les inconnues du système en fonction de la variable scalaire $\hat{u}_E$. Pour écrire $\hat{u}_P$ et $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}$ en fonction de $\hat{u}_E$ et $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}$ (équations (6.4d) et (6.4c)), nous avons besoin de supposer que $\lambda \neq 0$. Traitons donc d'abord le cas particulier $\lambda = 0$.

Cas où $\lambda = 0$:

On déduit immédiatement de (6.4d) et (6.4c) que $\mathrm{R}\,\hat{u}_E = 0$ et $\mathbf{R}\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = 0$. Il en découle avec (6.4a) et (6.4b) que $\hat{u}_P = 0$ et $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}} = 0$. Tous les champs sont donc nuls dans $\mathbb{R}_+$ (matériau de Drude). Du côté du diélectrique, les équations (6.4a), (6.4b) et les conditions de transmission à l'interface (6.5) vérifiées par $\hat{u}_E$ et $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}$ impliquent que

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{rot}_k\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = 0 \ \text{ sur } \ \mathbb{R}_-, \ \text{ et} \\ \hat{u}_{\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}}(0) = 0, \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \mathbf{rot}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{u}_E = 0 \text{ sur } \ \mathbb{R}_-, \\ \hat{u}_E(0) = 0. \end{array}\right.$$

En cherchant des solutions $\hat{\boldsymbol{U}}$ de (6.4) dans $D(\hat{\mathbb{A}}_k)$, il vient

$$\left|\begin{array}{l} \hat{u}_E = 0, \\ \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{\phi}, \ \text{ avec } \ \hat{\phi} \in H_0^1(\mathbb{R}_-), \end{array}\right.$$

où $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{\phi} := \left(\dfrac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}x}, ik\,\hat{\phi}\right)^\top$. Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k) = \{(0, \widetilde{\mathbf{\Pi}}\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{\phi}, 0, 0)^\top, \ \hat{\phi} \in H_0^1(\mathbb{R}_-)\}, \tag{6.9}$$

où $\widetilde{\mathbf{\Pi}}$ est l'opérateur de prolongement défini de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\mathbf{\Pi}} : & \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}_-) & \longrightarrow & \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}) \\ & \boldsymbol{f} & \longmapsto & \boldsymbol{f} \text{ sur } \mathbb{R}_- \ \text{ et } \ 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+, \end{array}$$

0 est donc une valeur propre de multiplicité infinie de $\hat{\mathbb{A}}_k$.

On suppose désormais que $\lambda \neq 0$ dans la suite des calculs. Ainsi les équations (6.4d) et (6.4c) deviennent

$$\hat{u}_P = i\,\frac{\mathrm{R}\,\hat{u}_E}{\lambda} \ \text{ et } \ \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}} = i\,\frac{\mathbf{R}\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}}{\lambda}. \tag{6.10}$$

En éliminant $\hat{u}_P$ et $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}$ à l'aide de (6.10) dans (6.4a) et (6.4b), il vient

$$\left|\begin{array}{l} i\,\dfrac{\mathrm{rot}_k\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}}{\varepsilon_0} + \left(\dfrac{\Omega_e^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}}{\lambda} - \lambda\right)\hat{u}_E = 0, \\ -i\,\dfrac{\mathbf{rot}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{u}_E}{\mu_0} + \left(\dfrac{\Omega_m^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}}{\lambda} - \lambda\right)\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = 0. \end{array}\right. \tag{6.11}$$

où $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ est le fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$. Pour exprimer $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}$ en fonction de $\hat{u}_E$ dans la deuxième équation de (6.11), il faut maintenant supposer que $\lambda \neq \pm\Omega_m$. Examinons également ce cas particulier.

Cas où $\lambda = \pm\Omega_m$:

On obtient de la deuxième équation de (6.11) que $\mathbf{rot_k}\,\hat{u}_E = 0$ dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi, le champ électrique $\hat{u}_E$ est nul dans $\mathbb{R}_+$ (matériau de Drude). Il en est de même pour $\hat{u}_P$ avec (6.10). Du côté du diélectrique ($\mathbb{R}_-$), on tire des deux équations de (6.11) et de la condition de transmission à l'interface sur $\hat{u}_E$ que

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\mathrm{d}^2\hat{u}_E}{\mathrm{d}x^2} + (k^2 - \varepsilon_0\,\mu_0\,\Omega_m^2)\hat{u}_E = 0 \ \text{ sur } \ \mathbb{R}_-, \\ \hat{u}_E(0) = 0. \end{array}\right. \tag{6.12}$$

Cherchons encore des solutions de (6.4) dans $D(\hat{\mathbb{A}}_k)$. L'équation (6.12) n'admettant pas de solution dans $H^1(\mathbb{R}_-)$, il en résulte que $\hat{u}_E = 0$ dans $\mathbb{R}_-$. On déduit alors de la deuxième équation de (6.11) que $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = 0$ sur $\mathbb{R}_-$.
Revenons maintenant au cas du champ magnétique dans le matériau de Drude ($\mathbb{R}_+$). En injectant la nullité du champ électrique dans la première équation de (6.11) et en utilisant la condition de transmission à l'interface vérifiée par le champ magnétique $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}$ (qui est nul sur $\mathbb{R}_-$), il s'ensuit :

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{rot}_k\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = 0, \ \ \text{dans } \ \mathbb{R}_+, \\ \hat{u}_{\boldsymbol{Hy}}(0) = 0. \end{array}\right.$$

Soit,

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{\nabla_k}\,\hat{\phi} \ \text{ et } \ \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}} = \pm i\,\frac{\boldsymbol{\nabla_k}\,\hat{\phi}}{\Omega_m} \ \text{ avec } \ \hat{\phi} \in H_0^1(\mathbb{R}_+).$$

En conclusion, on obtient que :

$$\mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k \mp \Omega_m) = \left\{ \left(0,\, \boldsymbol{\Pi}\,\boldsymbol{\nabla_k}\,\hat{\phi},\, 0,\, \pm i\,\frac{\boldsymbol{\nabla_k}\,\hat{\phi}}{\Omega_m}\right)^{\top},\ \hat{\phi} \in H_0^1(\mathbb{R}_+) \right\}. \tag{6.13}$$

$\pm\Omega_m$ sont donc également des valeurs propres de multiplicité infinie de $\hat{\mathbb{A}}_k$.

Cas où $\lambda \notin \{-\Omega_m,\, 0, \Omega_m\}$:

Nous posons :

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon(x,\lambda) = \varepsilon_0 \left(1 - \dfrac{\Omega_e^2}{\lambda^2}\,\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+}(x)\right), \\ \mu(x,\lambda) = \mu_0 \left(1 - \dfrac{\Omega_m^2}{\lambda^2}\,\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+}(x)\right). \end{array}\right. \tag{6.14}$$

Les équations (6.11) s'écrivent alors de façon équivalente :

$$\left|\begin{array}{l} i\,\dfrac{\mathrm{rot}_k\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}}{\lambda} - \varepsilon(\cdot,\lambda)\,\hat{u}_E = 0, \\ -i\,\dfrac{\mathbf{rot_k}\,\hat{u}_E}{\lambda} - \mu(\cdot,\lambda)\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = 0. \end{array}\right.$$

Comme $\mu(\cdot,\lambda) \neq 0$ (car $\lambda \neq \pm\Omega_m$), il vient que :

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{rot}_k\ \left(\dfrac{\mathbf{rot_k}\,\hat{u}_E}{\mu(\cdot,\lambda)}\right) - \lambda^2\,\varepsilon(\cdot,\lambda)\,\hat{u}_E = 0, \\ \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = \dfrac{-i\,\mathbf{rot_k}\,\hat{u}_E}{\mu(\cdot,\lambda)\,\lambda}. \end{array}\right. \tag{6.15}$$

Ainsi, d'après (6.10) et (6.15) :

$$\hat{\boldsymbol{U}} = \mathbb{V}_{\lambda,k}\,\hat{u}_E, \tag{6.16}$$

où l'opérateur $\mathbb{V}_{\lambda,k}$ est formellement [4] défini par :

$$\mathbb{V}_{\lambda,k}\,\hat{u}_E := \left(\hat{u}_E,\ \frac{-i\,\mathbf{rot_k}\,\hat{u}_E}{\mu(\cdot,\lambda)\,\lambda},\ i\,\frac{\mathrm{R}\,\hat{u}_E}{\lambda},\ \frac{\mathbf{R}\,\mathbf{rot_k}\,\hat{u}_E}{\mu(\cdot,\lambda)\,\lambda^2}\right). \tag{6.17}$$

Déterminer $\hat{\boldsymbol{U}}$ est alors équivalent à déterminer $\hat{u}_E$. Ceci nous amène après réécriture de la première équation de (6.15) à résoudre l'équation différentielle scalaire, dite de Sturm-Liouville, suivante :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\mu(\cdot,\lambda)}\frac{\mathrm{d}\hat{u}_E}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{1}{\mu(\cdot,\lambda)}\,(k^2 - \lambda^2\,\varepsilon(\cdot,\lambda)\mu(\cdot,\lambda))\hat{u}_E = 0, \tag{6.18}$$

Une telle fonction $\hat{u}_E$ vérifie les conditions de transmission à l'interface :

$$[\hat{u}_E]_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{1}{\mu(\cdot,\lambda)}\frac{\mathrm{d}\hat{u}_E}{\mathrm{d}x}\right]_{x=0} = 0.$$

Notons que nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 6.3.1 *Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$, on a alors les deux assertions suivantes :*

1. *$\hat{u}_E \in H^1(\mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle (6.18) si et seulement si $\hat{\boldsymbol{U}} = \mathbb{V}_{\lambda,k}\,\hat{u}_E$ est un vecteur propre de $\hat{\mathbb{A}}_k$ associé à la valeur propre λ.*
2. *$\hat{u}_E$ est une solution bornée de (6.18) si et seulement si $\hat{\boldsymbol{U}} = \mathbb{V}_{\lambda,k}\,\hat{u}_E$ est un vecteur propre généralisé de $\hat{\mathbb{A}}_k$.*

Trouver les modes propres de $\hat{\mathbb{A}}_k$ est donc équivalent à trouver des solutions $\hat{u}_E$ de (6.18) dans $H^1(\mathbb{R})$. Nous examinerons donc dans un premier temps si (6.18) admet des solutions dans cet espace ; si elle n'en admet pas, en cherchant ses solutions bornées, nous obtiendrons des vecteurs propres généralisés de $\hat{\mathbb{A}}_k$.

Remarque 6.3.2 *L'équation différentielle de Sturm-Liouville (6.18) n'est pas "classique" au sens où sa partie principale dépend de façon non linéaire de la variable spectrale λ. C'est une conséquence du caractère dispersif du matériau de Drude. De plus, son coefficient : $1/\mu(\cdot,\lambda)$ change de signe (du côté $x > 0$) selon la valeur de λ. Ceci résulte encore de la présence du matériau de Drude qui se comporte comme un matériau négatif en basses fréquences.*

6.4 Coupures spectrales

Les solutions de l'équation différentielle (6.18) vérifient

$$-\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}_E}{\mathrm{d}x^2} + \Theta_{\lambda,k}\,\hat{u}_E = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+,$$

où la fonction $\Theta_{\lambda,k}$ est constante par morceaux et définie par

$$\Theta_{\lambda,k}(x) := \left|\begin{array}{l} \Theta^-_{\lambda,k} = k^2 - \varepsilon_0\,\mu_0\,\lambda^2 \ \text{ sur } \ \mathbb{R}_-, \\ \Theta^+_{\lambda,k} = k^2 - \varepsilon^+(\lambda)\,\mu^+(\lambda)\,\lambda^2 \ \text{ sur } \ \mathbb{R}_+. \end{array}\right. \tag{6.19}$$

4. Le mot formel exprime ici le fait que nous ne précisons pas son domaine. Cette question sera abordée au chapitre suivant

$\varepsilon^+(\lambda) = \varepsilon_0\,(1-\Omega_e^2/\lambda^2)$ et $\mu^+(\lambda) = \mu_0\,(1-\Omega_m^2/\lambda^2)$ désignent ici les lois constitutives du matériau de Drude (5.5).

Les signes de $\Theta^-_{\lambda,k}$ et de $\Theta^+_{\lambda,k}$ vont être cruciaux pour déterminer le comportement de $\hat{u}_E$ de part et d'autre de l'interface. En effet, lorsque $\Theta^-_{\lambda,k} < 0$, les solutions de (6.18) sur $\mathbb{R}_-$ sont des fonctions oscillantes qui se propagent sans atténuation ; on parle alors de modes propagatifs dans le diélectrique. Lorsque $\Theta^-_{\lambda,k} > 0$, le fait de chercher des solutions $\hat{u}_E$ bornées ou d'énergie finie impose un comportement exponentiellement décroissant du côté $x < 0$; on dit alors que les modes sont évanescents dans le diélectrique. Nous pouvons bien entendu effectuer le même commentaire avec $\Theta^+_{\lambda,k}$ dans le matériau de Drude. Il est donc essentiel d'étudier le signe de ces quantités en fonction de k et de λ. Les lieux géométriques dans le plan (k,λ), où $\Theta^-_{\lambda,k}$ et $\Theta^+_{\lambda,k}$ s'annulent, sont appelés par la suite coupures spectrales au sens où une apparition ou disparition de modes se produit lors de leur traversée. Dans le lemme suivant, nous résumons toutes les informations nécessaires pour tracer ces courbes et connaître le signe de $\Theta^-_{\lambda,k}$ et $\Theta^+_{\lambda,k}$. La parité en k et en λ nous permet de nous restreindre aux cas où k et λ sont positifs. La démonstration de ce lemme, qui ne reposent que sur des calculs algébriques simples, peut être sautée lors d'une première lecture. Tous ses résultats sont illustrés par la figure 6.2.

Lemme 6.4.1 *Soit $(k,\lambda) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ avec k fixé, alors on a les propriétés suivantes :*

1. $\Theta^-_{\lambda,k} \leq 0$ *si et seulement si* $\lambda \in \left[k/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, \infty\right[$.

2. $\Theta^+_{\lambda,k} \leq 0$ *si et seulement si* $\lambda \in \,]0, \lambda_1(k)] \cup [\lambda_2(k), \infty[$, $\lambda_1(k)$ *et* $\lambda_2(k)$ *étant définies de la manière suivante :*
   - $0 \leq \lambda_1(k) \leq \lambda_2(k)$,
   - $\lambda_1^2(k)$ *et* $\lambda_2^2(k)$ *sont les racines du polynôme*

$$P_k(X) = -\varepsilon_0\,\mu_0\,X^2 + \left(k^2 + \varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2+\Omega_m^2)\right)\,X - \varepsilon_0\,\mu_0\Omega_e^2\Omega_m^2. \tag{6.20}$$

3. λ_1 *est une fonction continue, strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^+$, C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *dont l'image est* $]0, \min(\Omega_e,\Omega_m)]$. *Quant à* λ_2, *elle est strictement croissante, continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$. *Elle a pour image* $[\max(\Omega_e,\Omega_m), \infty[$ *et pour asymptote la droite* $\lambda = k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ *en* $k = \infty$.

4. *Soit* $k_c = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\Omega_e\,\Omega_m/\sqrt{\Omega_e^2+\Omega_m^2}$, *alors on obtient les inégalités suivantes :*

$$\left|\begin{array}{l} 0 \leq \dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \leq \lambda_1(k) \leq \lambda_2(k) \quad si \;\; k \leq k_c, \\ 0 < \lambda_1(k) < \dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} < \lambda_2(k) \quad si \;\; k > k_c. \end{array}\right.$$

   De plus, les coupures spectrales $\lambda = k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$, $\lambda_1(\cdot)$ *et* $\lambda_2(\cdot)$ *ne peuvent se croiser que dans deux situations. D'une part, lorsque* $k = 0$ *et* $\Omega_e = \Omega_m$ *où* $\lambda_1(0) = \lambda_2(0)$, *d'autre part lorsque* $k = k_c$ *où* $\lambda_1(k_c) = k_c/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Preuve. Le signe de $\Theta^-_{\lambda,k}$ se déduit immédiatement de (6.19). Par contre, pour obtenir le signe de $\Theta^+_{\lambda,k}$, il faut effectuer un petit calcul algébrique. En effet, l'inégalité

$$\Theta^+_{\lambda,k} = k^2 - \varepsilon_0\,\mu_0\,\lambda^2\,\left(1-\frac{\Omega_e^2}{\lambda^2}\right)\,\left(1-\frac{\Omega_m^2}{\lambda^2}\right) \leq 0$$

est équivalente après multiplication par $\lambda^2 \neq 0$ à

$$P_k(\lambda^2) \leq 0,$$

où le polynôme $P_k(X)$ qui est de degré 2 a été défini dans (6.20). En développant l'expression de son discriminant Δ_k, on obtient :

$$\Delta_k = k^4 + (\varepsilon_0\,\mu_0)^2\,(\Omega_e^2 - \Omega_m^2)^2 + 2\,k^2\varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2 + \Omega_m^2) \geq 0.$$

Ainsi P_k possède deux racines réelles $\Lambda_1(k)$ et $\Lambda_2(k)$ distinctes (à l'exception du cas $k = 0$ et $\Omega_e = \Omega_m$ où la racine est double) données par les formules suivantes :

$$\Lambda_1(k) = \frac{k^2 + \varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2 + \Omega_m^2) - \sqrt{\Delta_k}}{2\varepsilon_0\,\mu_0} \quad \text{et} \quad \Lambda_2(k) = \frac{k^2 + \varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2 + \Omega_m^2) + \sqrt{\Delta_k}}{2\varepsilon_0\,\mu_0}. \tag{6.21}$$

Il découle du signe des coefficients de P_k que ces deux racines sont strictement positives. On peut donc définir $\lambda_1(k) = \sqrt{\Lambda_1(k)}$ et $\lambda_2(k) = \sqrt{\Lambda_2(k)}$ avec $\lambda_1(k) \leq \lambda_2(k)$. Il apparaît alors clairement que

$$\Theta^+_{\lambda,k} \leq 0 \iff \lambda \in\,]0, \lambda_1(k)] \cup [\lambda_2(k), \infty[\,.$$

Examinons maintenant quelques propriétés des coupures spectrales : λ_1 et λ_2 du matériau de Drude. De la formule (6.21), on tire que λ_2 est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement croissante à image dans $[\lambda_2(0), \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_2(k)[= [\max(\Omega_e, \Omega_m), \infty[$. Il est également facile de montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_2(k) - k/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 0$, ainsi λ_2 a pour asymptote la droite $\lambda = k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ (coupure spectrale du diélectrique) en $k = \infty$. Quant à λ_1, elle vérifie les mêmes hypothèses de régularité que λ_2. Elle est par contre strictement décroissante car la relation sur le produit des racines de P_k : $\Lambda_1(k)\,\Lambda_2(k) = \Omega_e^2\,\Omega_m^2$ implique que $\lambda_1(k) = \Omega_e\,\Omega_m/\lambda_2(k)$. Son image est donnée par l'intervalle $]\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_1(k),\ \lambda_1(0)] =]0,\ \min(\Omega_e, \Omega_m)]$.

Intéressons nous maintenant à la position relative des coupures spectrales sur $\mathbb{R}^+$. Ont-elles des points d'intersection ? Remarquons à l'aide de la formule (6.21) que l'inégalité $\lambda_1(k) < \lambda_2(k)$ est toujours vérifiée à l'exception du cas $\Omega_e = \Omega_m$ où λ_1 et λ_2 se coupent en $k = 0$. Il est également aisé de constater avec (6.21) que $\lambda_2(k) > k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$. Il nous reste donc à étudier la position de λ_1 par rapport à la droite $\lambda = k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$. La stricte monotonie de ces deux courbes et leur image sur $\mathbb{R}^+$ imposent qu'elles n'auront qu'un seul point d'intersection. On le détermine en résolvant l'équation suivante : $\Lambda_1(k) = k^2/(\varepsilon_0\,\mu_0)$ dont l'unique solution sur $\mathbb{R}^+$ est $k_c = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\Omega_e\,\Omega_m/\sqrt{\Omega_e^2 + \Omega_m^2}$. On en conclut que d'une part pour $k < k_c$, $\lambda_1(k) > k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ et que d'autre part pour $k > k_c$, $\lambda_1(k) < k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$. ∎

Regardons séparément ce qui se passe de chaque côté de l'interface. On obtient alors les coupures spectrales données par la figure 6.1. On observe que le diélectrique possède une coupure spectrale : la droite $\lambda = k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ qui définit deux zones spectrales dans le quart de plan qui régissent le comportement des modes. En effet, ces derniers sont propagatifs au-dessus de cette droite et évanescents en-dessous. En ce qui concerne le matériau de Drude, il possède deux coupures spectrales : $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ qui définissent trois zones spectrales. Au-dessus de la courbe $\lambda_2(\cdot)$, zone où il se comporte comme un diélectrique (car le fait que λ soit strictement supérieur à $\max(\Omega_e, \Omega_m)$ implique que $\varepsilon^+(\lambda)$ et $\mu^+(\lambda)$ sont strictement positifs), les modes sont propagatifs. Il sont également propagatifs en-dessous de la courbe $\lambda_1(\cdot)$, où il se comporte par contre comme un NIM, c'est à dire un métamatériau de permittivité $\varepsilon^+(\lambda)$ et perméabilité $\mu^+(\lambda)$ strictement négatives (car λ est strictement inférieur à $\min(\Omega_e, \Omega_m)$ dans cette partie du quart de plan). Entre ces deux courbes, les modes sont évanescents.

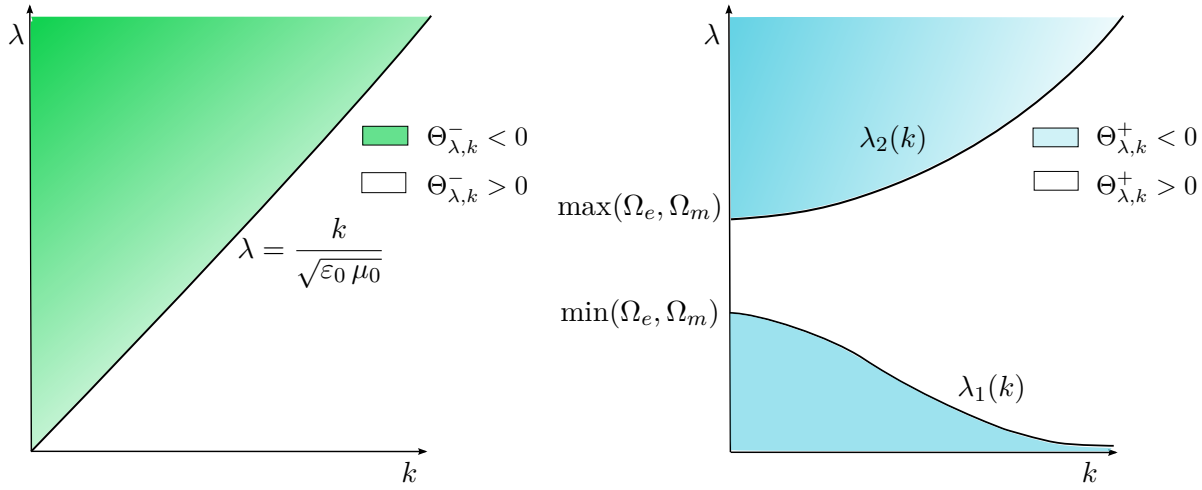

FIGURE 6.1 – Zones spectrales d'un matériau homogène composé uniquement du diélectrique (à gauche) ou du matériau de Drude (à droite)

Superposons maintenant les deux graphiques de la figure (6.1) pour obtenir les zones spectrales du dioptre (cf. figure 6.2). Signalons que le point d'intersection des coupures spectrales $\lambda = k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ et λ_1, défini dans le lemme 6.4.1, est noté (k_c, λ_c). Les trois coupures spectrales :

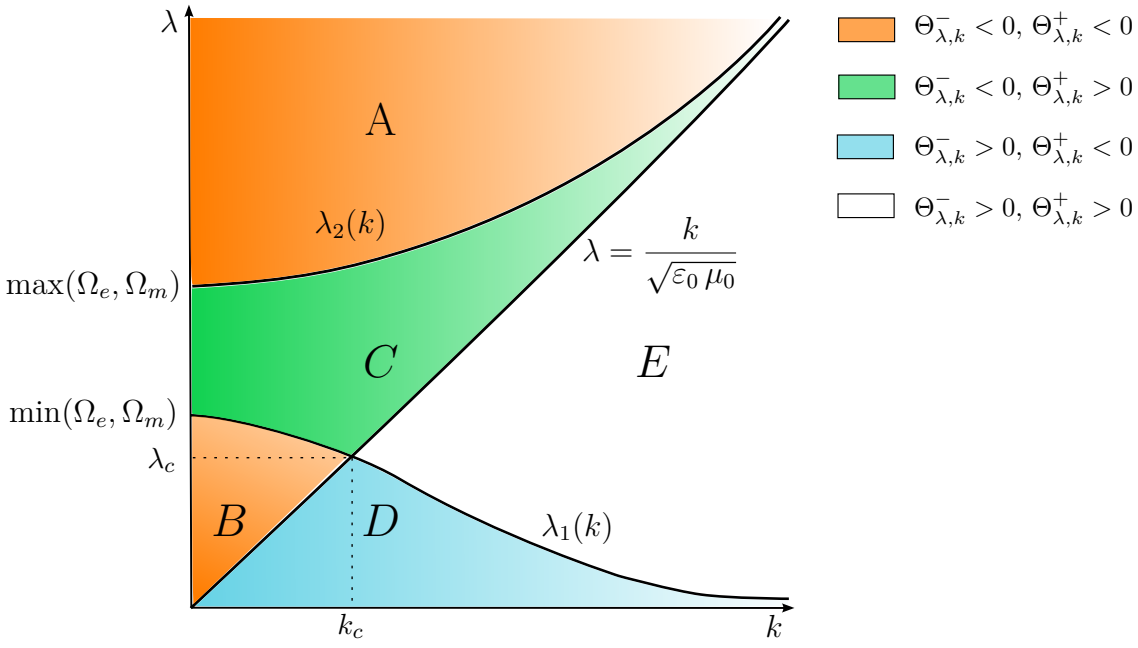

FIGURE 6.2 – Zones spectrales associées au dioptre

$\lambda = k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$, $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ définissent alors d'après le lemme 6.4.1 cinq zones :

- $\mathrm{A} = \Big\{(k,\lambda) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid \lambda > \lambda_2(k)\Big\}$,
- $B = \left\{(k,\lambda) \in [0, k_c[\times \mathbb{R}^+ \mid \dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} < \lambda < \lambda_1(k)\right\}$,
- $C = \left\{(k,\lambda) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{\Omega_m\}) \mid \max\left(\lambda_1(k), \dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}\right) < \lambda < \lambda_2(k)\right\}$,

– $D = \left\{ (k,\lambda) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid 0 < \lambda < \min\left(\lambda_1(k), \dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} \right) \right\}$,

– $E = \left\{ (k,\lambda) \in]k_c, \infty[\times (\mathbb{R}^+ \setminus \{\Omega_m\}) \mid \lambda_1(k) < \lambda < \dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} \right\}$.

Effectuons quelques petits commentaires sur ces différentes zones spectrales. Dans A et B, les modes sont propagatifs de part et d'autre de l'interface $x = 0$. Ce qui distingue ces zones est le comportement du matériau de Drude qui agit soit comme un diélectrique dans A, soit comme un NIM dans B. Dans C, les modes sont propagatifs dans le diélectrique et évanescents dans le matériau de Drude. Dans D, la situation est inversée : ils sont propagatifs dans le matériau de Drude alors qu'ils sont évanescents dans le diélectrique. Notons que le matériau de Drude se comporte ici également comme un NIM. Enfin dans E, ils sont évanescents de part et d'autre de l'interface.

6.5 Expression des éléments propres de l'opérateur réduit

Une base canonique de solutions de l'équation de Sturm-Liouville

Nous allons maintenant introduire une base particulière de solutions de l'équation différentielle (6.18). A cette fin, nous définissons la fonction (de x) constante par morceaux

$$\theta_{\lambda,k}(x) := \sqrt{\Theta_{\lambda,k}}(x), \tag{6.22}$$

dont les valeurs de part et d'autre de l'interface sont $\theta^{\pm}_{\lambda,k} = \sqrt{\Theta^{\pm}_{\lambda,k}}$. Ici $\sqrt{\cdot}$ désigne la détermination suivante de la racine d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$:

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}}\, e^{i \arg z/2} \quad \text{si} \quad \arg z \in [-\pi, \pi[. \tag{6.23}$$

Notons que cette manière de définir la racine implique d'une part que c'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et d'autre part que nous l'avons prolongée sur la coupure $\mathbb{R}^-$ par sa limite depuis le demi-plan inférieur $\mathbb{C}_- = \{z \mid Im(z) < 0\}$. Il s'ensuit que la racine d'un réel négatif x est égal à $-i\ |x|^{\frac{1}{2}}$. Introduisons les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{c}_{\lambda,k}(x) \\ \mathrm{s}_{\lambda,k}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\theta_{\lambda,k}(x)\,x) \\ \dfrac{\mu(x,\lambda)\,\mathrm{sh}(\theta_{\lambda,k}(x)\,x)}{\theta_{\lambda,k}(x)} \end{pmatrix}. \tag{6.24}$$

Elles forment une base canonique de solutions de (6.18), au sens où

$$\left| \begin{array}{lll} \mathrm{c}_{\lambda,k}(0) = 1 & \text{et} & \left(\dfrac{1}{\mu(\cdot,\lambda)} \dfrac{\mathrm{dc}_{\lambda,k}}{\mathrm{d}x} \right)(0) = 0, \\ \mathrm{s}_{\lambda,k}(0) = 0 & \text{et} & \left(\dfrac{1}{\mu(\cdot,\lambda)} \dfrac{\mathrm{ds}_{\lambda,k}}{\mathrm{d}x} \right)(0) = 1. \end{array} \right.$$

Affranchissons nous, pour un court instant, de l'hypothèse qui suppose que $\hat{u}_E$ doit être $H^1(\mathbb{R})$ ou bornée. Dans ce cas, toute solution de (6.18) est une combinaison linéaire de $\mathrm{c}_{\lambda,k}$ et $\mathrm{s}_{\lambda,k}$, ce que l'on écrira

$$\hat{u}_E = (a_{\lambda,k,1},\, a_{\lambda,k,2})^{\top}\, \boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}} \quad \text{où} \quad (a_{\lambda,k,1},\, a_{\lambda,k,2}) \in \mathbb{C}^2. \tag{6.25}$$

Dans chaque zone spectrale, notre but (cf. proposition 6.3.1) est maintenant de chercher parmi les fonctions $\hat{u}_E$ données par la relation (6.25) celles qui sont $H^1(\mathbb{R})$, puis s'il n'y en pas, celles qui sont bornées.

Expression des éléments propres dans les différentes zones spectrales

Nous allons expliciter la forme de $\hat{u}_E$ dans les zones A, B, C, D et E décrites par la figure 6.2. Remarquons au préalable que dans A, B, C ou D un des coefficients $\Theta^{\pm}_{\lambda,k}$ est strictement négatif, ce qui induit un comportement oscillant des solutions (6.25) d'un ou des deux côtés de l'interface $x = 0$. Il n'y a donc pas de solutions $H^1(\mathbb{R})$ et par conséquent de vecteurs propres dans ces zones. Nous chercherons dans ce cas des vecteurs propres généralisés et donc des solutions bornées de (6.18). De même, nous constatons que sur "les coupures spectrales", l'un des paramètre $\Theta^{\pm}_{\lambda,k}$ s'annulant (voire les deux en (k_c, λ_c)), les solutions de (6.18) sont affines d'un côté de l'interface. Il n'y a ainsi pas de solutions d'énergie finie et donc de vecteurs propres sur ces courbes. Enfin dans E, nous avons noté que les solutions de (6.18) devaient être évanescentes de part et d'autre de l'interface et donc nécessairement $H^1(\mathbb{R})$. Nous rechercherons donc des vecteurs propres de $\hat{\mathbb{A}}_k$ dans cet ensemble. Pour des raisons didactiques, nous ne suivrons pas l'ordre alphabétique pour énumérer leur forme dans ces différentes zones. Nous commencerons par les zones C et D qui, nous verrons, ne comportent qu'un seul vecteur propre généralisé.

Zone C :

Dans cet ensemble, $\Theta^-_{\lambda,k} < 0$ et $\Theta^+_{\lambda,k} > 0$ (cf. figure 6.2), les fonctions définies par (6.25) sont donc bornées et oscillantes dans le diélectrique, mais pas nécessairement bornées dans le matériau de Drude où elles s'expriment comme une combinaison linéaire de fonctions exponentielles croissantes et décroissantes en $+\infty$. La combinaison (6.25) ne doit pas être exponentiellement croissante en $+\infty$. Les fonctions de base $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}$ vérifiant

$$\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{\theta^+_{\lambda,k}\, x}}{2} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \\ \dfrac{\mu^+(\lambda)\, e^{\theta^+_{\lambda,k}\, x}}{2\,\theta^+_{\lambda,k}} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \end{pmatrix} \quad o\grave{u} \quad \theta^+_{\lambda,k} > 0,$$

il résulte que les solutions bornées de (6.18) sont de la forme

$$\hat{u}_E = a_{\lambda,k}\, (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top\, \boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}} \quad \text{avec} \quad a_{\lambda,k} \in \mathbb{C}, \tag{6.26}$$

où $\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k}$ désigne le vecteur

$$\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu^+(\lambda)^{-1}\, \theta^+_{\lambda,k} \end{pmatrix}. \tag{6.27}$$

Elles représentent ici des ondes propagatives dans le diélectrique et évanescentes dans le matériau de Drude. A (k, λ) fixé, elles engendrent un espace vectoriel de dimension un. Nous choisissons

$$\hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,1} = (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top\, \boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}$$

(en omettant l'indice E pour alléger les notations) pour représenter cet espace dans notre famille modale. Son expression développée est donnée par :

$$\hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,1} = \left| \begin{array}{l} A_{\lambda,k,1}\; e^{-\theta^-_{\lambda,k}\, x} + B_{\lambda,k,1}\; e^{\theta^-_{\lambda,k}\, x} \quad \text{si } x < 0, \\ e^{-\,\theta^+_{\lambda,k}\, x} \quad \text{si } x > 0, \end{array} \right. \tag{6.28}$$

$$\text{avec} \quad A_{\lambda,k,1} = \frac{\mu^+(\lambda)^{-1}\, \theta^+_{\lambda,k} + \mu_0^{-1}\, \theta^-_{\lambda,k}}{2\,\mu_0^{-1}\, \theta^-_{\lambda,k}} \quad \text{et} \quad B_{\lambda,k,1} = \frac{-\,\mu^+(\lambda)^{-1}\, \theta^+_{\lambda,k} + \mu_0^{-1}\, \theta^-_{\lambda,k}}{2\,\mu_0^{-1}\, \theta^-_{\lambda,k}}.$$

Rappelons que dans ces expressions

$$\theta^-_{\lambda,k} = -i\, \left|\theta^-_{\lambda,k}\right| \quad \text{et} \quad \theta^+_{\lambda,k} > 0.$$

Zone D :

Dans cet ensemble $\Theta^-_{\lambda,k} > 0$ et $\Theta^+_{\lambda,k} < 0$ (cf. figure 6.2), les fonctions définies par (6.25) ont donc un comportement similaire à celui de l'ensemble C en échangeant la rôle du diélectrique et du matériau de Drude. Pour que la combinaison linéaire donnée par (6.25) ne soit pas exponentiellement croissante en $-\infty$, il est facile de vérifier qu'on doit avoir similairement à (6.26) :

$$\hat{u}_E = a_{\lambda,k}\,(\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}} \quad \text{avec} \quad a_{\lambda,k} \in \mathbb{C}, \tag{6.29}$$

où le vecteur de $\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}$ est donné par :

$$\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_0^{-1}\,\theta^-_{\lambda,k} \end{pmatrix}. \tag{6.30}$$

Ce sont des ondes évanescentes dans le diélectrique et propagatives dans le matériau de Drude. A (k,λ) fixé, elles engendrent encore un espace vectoriel de dimension un. Nous choisissons

$$\hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,1} = (\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}(x)$$

donnée par

$$\hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,-1} = \left| \begin{array}{l} e^{\theta^-_{\lambda,k}\,x} \quad \text{si } x < 0, \\ A_{\lambda,k,-1}\; e^{-\,\theta^+_{\lambda,k}\,x} + B_{\lambda,k,-1}\; e^{\theta^+_{\lambda,k}\,x} \quad \text{si } x > 0, \end{array} \right. \tag{6.31}$$

$$\text{avec} \quad A_{\lambda,k,-1} = \frac{\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k} - \mu_0^{-1}\,\theta^-_{\lambda,k}}{2\,\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}} \quad \text{et} \quad B_{\lambda,k,-1} = \frac{\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k} + \mu_0^{-1}\,\theta^-_{\lambda,k}}{2\,\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}}, \tag{6.32}$$

pour représenter cet espace dans notre famille modale. Notons que dans ces formules

$$\theta^-_{\lambda,k} > 0 \quad \text{et} \quad \theta^+_{\lambda,k} = -i\,\left|\theta^+_{\lambda,k}\right|.$$

Zones A et B :

Dans ces ensembles $\Theta^-_{\lambda,k}$ et $\Theta^+_{\lambda,k}$ sont strictement négatifs (cf. figure 6.2). Ainsi, les solutions de (6.18) définies par (6.25) sont des fonctions oscillantes bornées dans le diélectrique et dans le matériau de Drude et donc bornées sur $\mathbb{R}$. Elles représentent des ondes propagatives de part et d'autre de l'interface. Remarquons que à (k,λ) fixé, elles engendrent un espace vectoriel de dimension deux. Une manière de choisir alors une base particulière, que nous notons $(\hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,-1}, \hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,1})$, de cet espace est d'interpréter les solutions $\hat{u}_E$ en termes d'ondes progressives de fréquence λ : $\mathrm{R}e(\hat{u}_E(x)\,e^{-i\,\lambda\,t})$. En utilisant le fait que $\theta^\pm_{\lambda,k} = -i\,\left|\theta^\pm_{\lambda,k}\right|$ dans ces zones, on peut exprimer, de part et d'autre de l'interface $\mathrm{c}_{\lambda,k}$ et $\mathrm{s}_{\lambda,k}$ en fonction de $e^{i\left|\theta^\pm_{\lambda,k}\right|x}$ et $e^{-i\left|\theta^\pm_{\lambda,k}\right|x}$. Les fonctions $\hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,j}$ sont donc une superposition d'ondes entrantes et sortantes. Une façon particulière de sélectionner notre base (à un coefficient de normalisation près) consiste à rechercher des $\hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,j}$, $j = \pm 1$ qui ne possèdent soit pas de composante entrante, soit pas de composante sortante d'un côté ou de l'autre de l'interface. On peut ainsi choisir dans la zone A la base de solutions suivante :

$$\hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,1} = (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}} \quad \text{et} \quad \hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,-1} = (\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}. \tag{6.33}$$

Par contre dans la zone B, nous formons notre base en prenant

$$\hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,1} = (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}} \quad \text{et} \quad \hat{u}_{\,\lambda,\,k,\,-1} = (\overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}. \tag{6.34}$$

Les expressions développées (6.33) et (6.34) de $\hat{u}_{\lambda,k,1}$ et (6.33) de $\hat{u}_{\lambda,k,-1}$ sont identiques à celles définies en (6.28) et (6.31), insistons par contre sur le fait que dans ces zones :

$$\theta^-_{\lambda,k} = -i\,\left|\theta^-_{\lambda,k}\right| \quad \text{et} \quad \theta^+_{\lambda,k} = -i\,\left|\theta^+_{\lambda,k}\right|.$$

Quant à la fonction $\hat{u}_{\lambda,k,-1}$, elle prend dans la zone B l'allure suivante :

$$\hat{u}_{\lambda,k,-1} = \left| \begin{array}{l} e^{\theta^-_{\lambda,k}\,x} \quad \text{si } x<0, \\ B_{\lambda,k,-1}\; e^{-\,\theta^+_{\lambda,k}\,x} + A_{\lambda,k,-1}\; e^{\theta^+_{\lambda,k}\,x} \quad \text{si } x>0, \end{array} \right. \tag{6.35}$$

où les coefficients $B_{\lambda,k,-1}$ et $A_{\lambda,k,-1}$ ont été introduits en (6.32).

Zone E :

Ici, $\Theta^-_{\lambda,k} > 0$ et $\Theta^+_{\lambda,k} > 0$, les fonctions définies par (6.25) sont donc des combinaisons d'exponentielles croissantes et décroissantes de part et d'autre de l'interface. Afin d'assurer le caractère borné et même $H^1(\mathbb{R})$ des solutions en $\pm\infty$, il faut que $\hat{u}_E$ vérifie

$$\hat{u}_E = a_{\lambda,k}\,(\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}(x) = b_{\lambda,k}\,(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}(x) \quad \text{où} \quad a_{\lambda,k} \text{ et } b_{\lambda,k} \in \mathbb{C}, \tag{6.36}$$

où $\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k}$ et $\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}$ sont respectivement définis en (6.27) et (6.30). L'équation (6.18) admet donc des solutions non triviales si et seulement si $a_{\lambda,k}\,(\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^\top = b_{\lambda,k}(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top$, ce qui implique que $a_{\lambda,k} = b_{\lambda,k}$ et

$$\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\lambda,k} = -\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}. \tag{6.37}$$

Nous sommes donc amenés à chercher des couples (k,λ) dans E vérifiant la relation de dispersion (6.37). A cette fin, nous énonçons le lemme suivant dont la démonstration peut être également sautée lors d'une première lecture.

Lemme 6.5.1 *L'équation (6.37) admet dans l'ensemble E à k fixé un unique couple solution $(k,\lambda_p(k))$. De plus, la courbe λ_p est C^∞ sur $]k_c,\infty[$. Sa monotonie et son image dépendent des paramètres Ω_e et Ω_m. Elles sont décrites par les assertions suivantes :*

- *Si $\Omega_m < \Omega_e$, λ_p est une fonction strictement décroissante dont l'image est l'intervalle $]\lambda_c,\Omega_m/\sqrt{2}[$. Elle a pour asymptote la droite $\lambda = \Omega_m/\sqrt{2}$ en $k=\infty$.*
- *Si $\Omega_m > \Omega_e$, λ_p est une fonction strictement croissante dont l'image est l'intervalle $]\Omega_m/\sqrt{2},\lambda_c[$. Elle a également pour asymptote la droite $\lambda = \Omega_m/\sqrt{2}$ en $k=\infty$.*
- *Si $\Omega_m = \Omega_e$, $\lambda_p = \lambda_c = \Omega_m/\sqrt{2}$ est une fonction constante.*

Preuve. Soit $(k,\lambda) \in E$. Montrons tout d'abord que l'équation (6.37), n'admet pas de solution si $\lambda > \Omega_m$. En effet, dans ce cas, on constate que $\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\lambda,k} > 0$ alors que $-\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k} < 0$, ce qui est contradictoire avec $\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\lambda,k} = -\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}$. Nous nous restreignons donc à des couples $(k,\lambda) \in E$ avec $\lambda < \Omega_m$. Dans cet ensemble, on obtient l'équivalence :

$$\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\lambda,k} + \mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k} = 0 \Longleftrightarrow (\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\lambda,k})^2 - (\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k})^2 = 0, \tag{6.38}$$

(car le terme $\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\lambda,k} - \mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k} > 0$ car $\mu^+(\lambda) < 0$ pour $\lambda < \Omega_m$). En multipliant maintenant la seconde équation de (6.38) par $\mu^+(\lambda)^2\,\lambda^4 \neq 0$ et en développant l'expression résultante, il vient :

$$\varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2 - \Omega_m^2)\lambda^4 + \Omega_m^2\left(2k^2 - \varepsilon_0\,\mu_0(\Omega_e^2 - \Omega_m^2)\right)\lambda^2 - k^2\,\Omega_m^4 = 0. \tag{6.39}$$

Ainsi, en posant $X = \lambda^2$, on est amené à calculer les racines du polynôme suivant :

$$Q_k(X) = \varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2 - \Omega_m^2)X^2 + \Omega_m^2\left(2k^2 - \varepsilon_0\,\mu_0(\Omega_e^2 - \Omega_m^2)\right)X - k^2\,\Omega_m^4. \tag{6.40}$$

• Lorsque $\Omega_e \neq \Omega_m$, le polynôme Q_k est du second degré. Son discriminant Δ_k s'écrit après simplification :

$$\Delta_k = \Omega_m^4\,\left(4\,k^4 + (\varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2 - \Omega_m^2))^2\right).$$

Δ_k est donc strictement positif sur E. Il s'ensuit que les deux racines de Q_k sont réelles et données par :

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \frac{\Omega_m^2}{2} + \frac{k^2\,\Omega_m^2}{\varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_m^2 - \Omega_e^2)} - \Omega_m^2\sqrt{\frac{k^4}{(\varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_m^2 - \Omega_e^2))^2} + \frac{1}{4}} \\ \text{et} \quad X_2(k) &= \frac{\Omega_m^2}{2} + \frac{k^2\,\Omega_m^2}{\varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_m^2 - \Omega_e^2)} + \Omega_m^2\sqrt{\frac{k^4}{(\varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_m^2 - \Omega_e^2))^2} + \frac{1}{4}}. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Nous devons maintenant examiner les racines de (6.41) pour déterminer celles qui sont le carré d'un λ vérifiant $(k,\lambda) \in E$ et $\lambda < \Omega_m$. A cette fin, nous devons distinguer les deux cas : $\Omega_m < \Omega_e$ et $\Omega_m > \Omega_e$.

• Supposons que $\Omega_m < \Omega_e$. Les signes des coefficients dominant et constant de Q_k sont alors opposés, les racines de Q_k sont donc de signe contraire. Il en découle que $X_1(k) < 0 < X_2(k)$. Nous pouvons donc éliminer la racine X_1. Étudions le sens de variation de la fonction C^∞ $\sqrt{X_2}$ sur l'intervalle $]k_c, \infty[$. En dérivant X_2, il est aisé de montrer que $X_2'(k) < 0$. $\sqrt{X_2}$ est donc une fonction strictement décroissante. Calculons ses limites. Le couple (k_c, λ_c) étant solution de (6.37) car $\theta^{\pm}_{\lambda_c,k_c} = 0$ (cf. lemme 6.4.1), on a donc nécessairement $\sqrt{X_2(k_c)} = \lambda_c$. Un petit calcul conduit à $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{X_2(k)} = \Omega_m/\sqrt{2}$. Ainsi l'image de la fonction $\sqrt{X_2}$ sur l'intervalle $]k_c, \infty[$ est $]\Omega_m/\sqrt{2}, \lambda_c[$ (avec $\lambda_c < \Omega_m$). Nous devons enfin montrer que $\left(k, \sqrt{X_2(k)}\right) \in E$, c'est-à-dire que $\lambda_1(k) < \sqrt{X_2(k)} < k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ pour tout $k \in]k_c, \infty[$. A cette fin, remarquons d'abord que pour k assez grand, la courbe $\sqrt{X_2}$ entre donc dans la zone E car $0 = \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_1(k) < \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{X_2(k)} = \Omega_m/\sqrt{2} < \lim\limits_{k\to\infty} k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0} = \infty$. De plus, pour $k > k_c$, elle ne peut pas en sortir. En effet, la courbe $\sqrt{X_2}$ ne peut pas croiser les coupures spectrales λ_1 et $k \mapsto k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ sur $]k_c, \infty[$ car d'après l'équation (6.37), cela forcerait $\theta^-_{\lambda,k}$ et $\theta^-_{\lambda,k}$ à être simultanément nulles, ce qui n'est possible d'après le lemme 6.4.1 qu'en $k = k_c$: point d'intersection de ces courbes. $\sqrt{X_2}$ est donc contenue dans E pour $k \in]k_c, \infty[$. La courbe $\lambda_p = \sqrt{X_2}$ est alors le lieu géométrique des solutions de (6.37).

• Supposons maintenant que $\Omega_m > \Omega_e$. On observe alors que $X_2(k) > \Omega_m^2$. $\sqrt{X_2}$ n'est donc jamais solution (6.37). En considérant, la fonction C^∞ $\sqrt{X_1}$ sur l'intervalle $]k_c, \infty[$, on montrerait par un raisonnement analogue au cas $\Omega_m < \Omega_e$ que c'est une fonction qui est strictement croissante, dont l'image est l'intervalle $]\lambda_c, \Omega_m/\sqrt{2}[$. On conclurait de même que la courbe $\lambda_p = \sqrt{X_1}$, contenue dans E, est le lieu géométrique des solutions de (6.37).

• Afin d'achever cette démonstration, traitons le cas particulier $\Omega_e = \Omega_m$. Ici, l'équation (6.39) prend la forme triviale $2\,\lambda^2 = \Omega_m^2$. Ainsi, la droite constante $\lambda_p = \Omega_m/\sqrt{2} = \lambda_c$ sur $]k_c, \infty[$ donne le lieu géométrique des solutions de (6.37). ∎

L'équation différentielle (6.18) admet alors des solutions $H^1(\mathbb{R})$ si et seulement si le couple $(k,\lambda) \in E$ est sur la courbe décrite par $\{(k, \lambda_p(k)), k \in]k_c, \infty[\}$, appelée courbe de dispersion.

Pour un tel couple $(k, \lambda_p(k))$, ces solutions sont données par la formule (6.36). Elles engendrent un espace de dimension 1. Ce sont des ondes évanescentes de part et d'autre de l'interface. Pour représenter cet espace, nous choisissons la fonction

$$\hat{u}_{\lambda_p(k),\,k,1} = (\boldsymbol{C}^{-}_{\lambda_p(k),k})^{\top} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda_p(k),k}} = \left| \begin{array}{l} e^{\theta^{-}_{\lambda_p(k),k}\, x} \quad \text{si } x < 0, \\ e^{-\theta^{+}_{\lambda_p(k),k}\, x} \quad \text{si } x > 0. \end{array} \right. \tag{6.42}$$

On peut alors conclure ce paragraphe en explicitant notre famille modale à l'aide de la relation (6.17). Ainsi, dans A, B, C et D une base de vecteurs propres généralisés est donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}} = \mathbb{V}_{\lambda,k}\, \hat{u}_{\lambda,\,k,\,j}, \ \forall j \in J_{\lambda,k}.$$

où $J_{\lambda,k} = \{-1\}$, $\{1\}$ et $\{-1, 1\}$ selon les zones spectrales. Enfin dans la zone E,

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda_p(k),k,1}} = \mathbb{V}_{\lambda,k}\, \hat{u}_{\lambda_p(k),\,k,1} \in D(\hat{\mathbb{A}}_k),$$

est un vecteur propre de l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ pour la valeur propre de multiplicité un $\lambda_p(k)$. Classiquement en physique, de tels modes propres sont dénommés plasmons de surface dans la mesure où ils sont localisés spatialement au voisinage de l'interface $x = 0$.

Remarque 6.5.2 *La connaissance des modes propres sur le quart de plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est suffisante. En effet, la parité en k et λ de la première composante (liée au champ électrique) des modes propres, ainsi que la formule (6.16) prolongent leur expression au plan tout entier.*

A l'aide de la remarque 6.5.2, l'étude de ce chapitre peut se résumer aux trois figures 6.3, 6.4 et 6.5 qui décrivent le comportement des modes propres de $\hat{\mathbb{A}}_k$ dans chaque région du quart de plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ pour les trois configurations suivantes : $\Omega_m < \Omega_e$, $\Omega_m = \Omega_e$ et $\Omega_m > \Omega_e$.

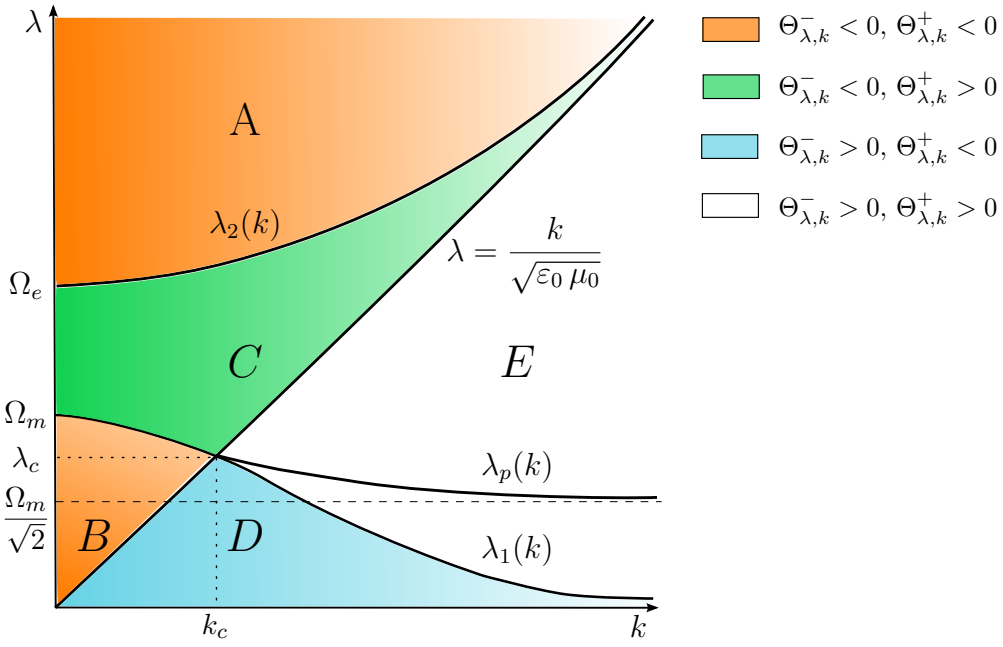

FIGURE 6.3 – Coupures spectrales et courbe de dispersion : cas $\Omega_m < \Omega_e$

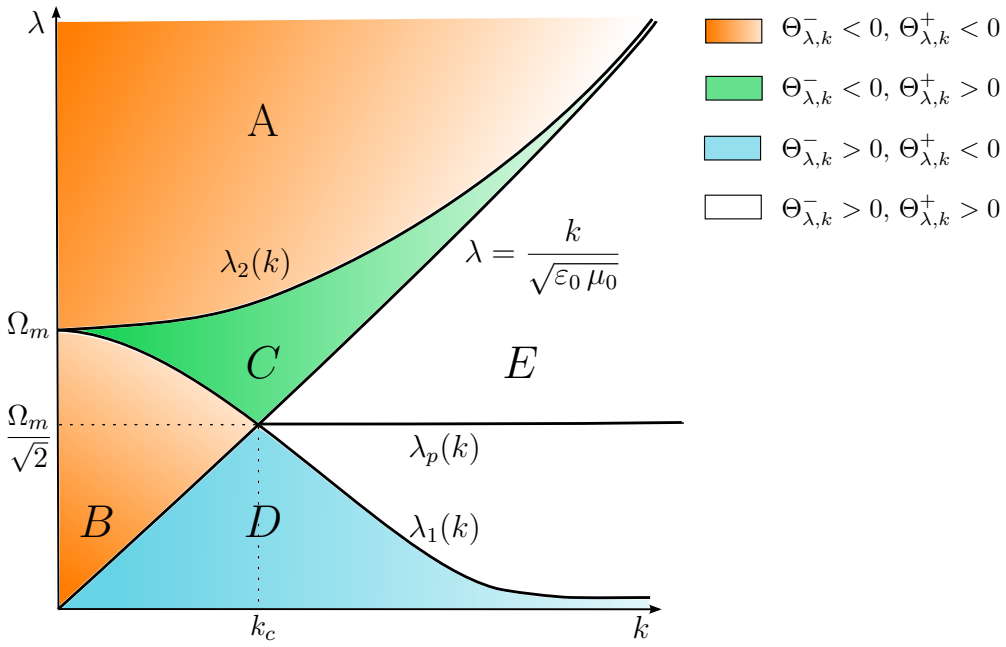

FIGURE 6.4 – Coupures spectrales et courbe de dispersion : cas $\Omega_m = \Omega_e$

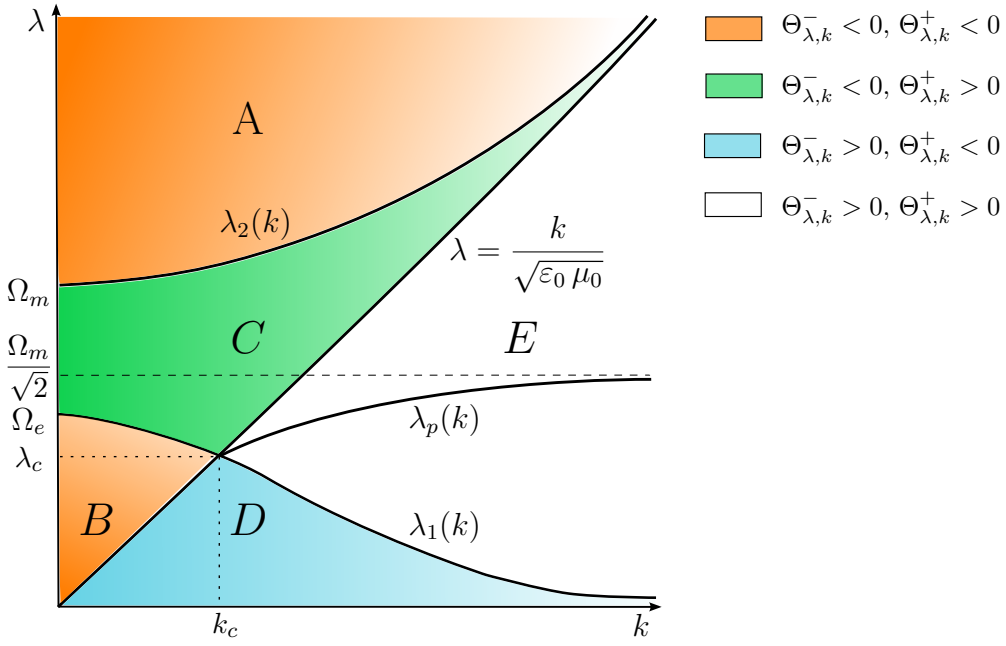

FIGURE 6.5 – Coupures spectrales et courbe de dispersion : cas $\Omega_m > \Omega_e$

CHAPITRE SEPT

DÉCOMPOSITION SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER

Sommaire

7.1 Théorie spectrale de l'opérateur réduit $\hat{\mathbb{A}}_k$ 114
7.1.1 Calcul de la résolvante de $\hat{\mathbb{A}}_k$ 114
7.1.2 Fonction de Green de l'équation de Sturm-Liouville 118
7.1.3 Famille spectrale de l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ 122
7.1.4 Diagonalisation de l'opérateur réduit 138
7.2 Théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger 145
7.2.1 De la théorie spectrale de $\hat{\mathbb{A}}_k$ à celle $\mathbb{A}$ 145
7.2.2 Famille modale de l'opérateur de Schrödinger 145
7.2.3 Diagonalisation de l'opérateur de Schrödinger 150
7.3 Annexe : un peu de théorie spectrale 155
7.3.1 Résolvante et spectre d'un opérateur auto-adjoint 155
7.3.2 Le théorème spectral 156
7.3.3 Décomposition de la mesure spectrale 159
7.3.4 Opérateurs décomposables 160

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit l'allure et le comportement d'une famille modale associée à l'équation de Schrödinger (5.15). Néanmoins, nous n'avons pas pu donner un sens mathématique au terme décomposition modale. En effet, nous n'avons pas extrait une famille modale "normalisée" complète sur laquelle se décomposerait à chaque instant toute solution de (5.15). Dans ce chapitre qui constitue le cœur de cette deuxième partie, nous cherchons à établir de façon rigoureuse une telle décomposition. Dans ce but, nous devons utiliser un cadre mathématique : la théorie spectrale d'un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert sur lequel s'appuie une décomposition modale. De plus, en introduisant le concept d'opérateur décomposable, la théorie spectrale nous permet également d'établir de façon rigoureuse le lien entre l'opérateur de Schrödinger $\mathbb{A}$ et la famille d'opérateurs réduits $\hat{\mathbb{A}}_k$.

Dans un tel cadre, suivant la démarche développée par [113, 117] pour étudier la propagation des ondes dans les milieux stratifiés, nous établirons dans un premier temps une décomposition modale des opérateurs $\hat{\mathbb{A}}_k$. Puis, à partir de celle-ci, nous construirons une transformation unitaire $\tilde{\mathbb{U}}_k$ permettant de diagonaliser $\hat{\mathbb{A}}_k$. Nous montrerons qu'à l'aide de la notion d'opérateur décomposable, il est aisé de transférer à l'opérateur $\mathbb{A}$ les résultats obtenus sur la famille d'opérateurs réduits $\hat{\mathbb{A}}_k$. Notons enfin que tout au long de ce chapitre, nous nous réfèrerons à son annexe qui résume les différentes notions de théorie spectrale utilisées.

7.1 Théorie spectrale de l'opérateur réduit $\hat{\mathbb{A}}_k$

Cette partie est ici dédiée à la théorie spectrale de l'opérateur auto-adjoint $\hat{\mathbb{A}}_k$ défini en (6.6). Son objectif est de construire une transformation unitaire qui permet de le diagonaliser. A cette fin, la première étape consiste à obtenir la décomposition spectrale de cet opérateur en calculant la famille spectrale $\hat{\mathbb{E}}_k(\cdot)$ qui lui est associée par le théorème spectral 7.3.6. Dans ce but, nous allons appliquer la formule de Stone (cf. proposition 7.3.10) :

$$\hat{\mathbb{E}}_k(I)\, u = \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{\delta\to 0^+} \int_{C_{\varepsilon,\delta}(I)} R_k(\zeta)\, u \,\mathrm{d}\zeta,\ \forall u \in \mathcal{H},$$

où $R_k(\zeta) := (\hat{\mathbb{A}}_k - \zeta)^{-1}$ et I sont respectivement la résolvante de $\hat{\mathbb{A}}_k$ et un intervalle de $\mathbb{R}$.

7.1.1 Calcul de la résolvante de $\hat{\mathbb{A}}_k$

La formule de Stone nécessitant de connaître la résolvante de $\hat{\mathbb{A}}_k$ au voisinage de l'axe réel, nous allons déterminer son expression. A cette fin, définissons au préalable les fonctions $\varepsilon(\cdot,\zeta)$ et $\mu(\cdot,\zeta)$ pour des valeurs de ζ complexes non nulles :

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon(x,\zeta) = \varepsilon_0 \left(1 - \dfrac{\Omega_e^2}{\zeta^2}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\right), \\ \mu(x,\zeta) = \mu_0 \left(1 - \dfrac{\Omega_m^2}{\zeta^2}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\right). \end{array}\right. \tag{7.1}$$

Elles constituent un prolongement de $\varepsilon(\cdot,\lambda)$ et $\mu(\cdot,\lambda)$ exprimées en (6.14) pour λ réel.

Soient $\hat{\boldsymbol{F}} \in \hat{\mathcal{H}}$, $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$. Exprimer la résolvante sous la forme $\hat{\boldsymbol{U}} = \hat{R}_k(\zeta)\hat{\boldsymbol{F}}$ équivaut à chercher $\hat{\boldsymbol{U}}$ appartenant à $D(\hat{\mathbb{A}}_k)$ solution de

$$(\hat{\mathbb{A}}_k - \zeta)\, \hat{\boldsymbol{U}} = \hat{\boldsymbol{F}}. \tag{7.2}$$

D'après la définition (6.6) de $\hat{\mathbb{A}}_k$, l' équation (7.2) prend la forme du système suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} i\left(\dfrac{\mathrm{rot}_k\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}}{\varepsilon_0} - \Omega_e^2\, \Pi\, \hat{u}_P\right) - \zeta\, \hat{u}_E = \hat{f}_E, & \text{(7.3a)} \\ i\left(\dfrac{-\mathbf{rot_k}\, \hat{u}_E}{\mu_0} - \Omega_m^2\, \mathbf{\Pi}\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}\right) - \zeta\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{H}}, & \text{(7.3b)} \\ i\,\mathrm{R}\,\hat{u}_E - \zeta \hat{u}_P = \hat{f}_P, & \text{(7.3c)} \\ i\,\mathbf{R}\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}} - \zeta \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}} = \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{M}}, & \text{(7.3d)} \end{array}\right.$$

où l'inconnue $\hat{\boldsymbol{U}} := (\hat{u}_E,\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}},\, \hat{u}_P,\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}) \in D(\hat{\mathbb{A}}_k)$ et la donnée $\hat{\boldsymbol{F}} = (\hat{f}_E,\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{H}},\, \hat{f}_P,\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{M}}) \in \hat{\mathcal{H}}$.
Tout comme dans le calcul des modes propres de l'opérateur réduit $\hat{\mathbb{A}}_k$ dans le chapitre précédent, nous allons ramener le calcul de la résolvante $\hat{R}_k(\zeta)$ à la résolution d'une équation scalaire sur le champ $\hat{u}_E$. Dans cette optique, nous devons exprimer toutes les autres inconnues en fonction de $\hat{u}_E$ et de la donnée $\boldsymbol{F}$. Tout d'abord, afin d'éliminer $\hat{u}_P$ et $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}$ des équations (7.3a) et (7.3b), réécrivons les égalités (7.3c) et (7.3d) de la manière suivante :

$$\hat{u}_P = \frac{i\,\mathrm{R}\,\hat{u}_E}{\zeta} - \frac{\hat{f}_P}{\zeta} \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}} = \frac{i\,\mathbf{R}\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}}{\zeta} - \frac{\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{M}}}{\zeta}. \tag{7.4}$$

En remplaçant à l'aide de (7.4) $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}$ dans (7.3b), il vient :

$$\zeta \left(1 - \frac{\Omega_m^2}{\zeta^2}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}\right) \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = \frac{-i\, \mathbf{rot}_{\boldsymbol{k}}\, \hat{u}_E}{\mu_0} - \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{H}} + \frac{i\, \Omega_m^2\, \mathbf{\Pi}\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{M}}}{\zeta}.$$

Soit :

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}} = \frac{-i\, \mathbf{rot}_{\boldsymbol{k}}\, \hat{u}_E}{\mu(\cdot,\zeta)\, \zeta} - \frac{\mu_0\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{H}}}{\mu(\cdot,\zeta)\, \zeta} + \frac{i\, \mu_0\, \Omega_m^2\, \mathbf{\Pi}\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{M}}}{\mu(\cdot,\zeta)\, \zeta^2}, \tag{7.5}$$

où $\mu(\cdot,\zeta)$ est donnée en (7.1). On peut désormais à l'aide des équations (7.4) et (7.5) exprimer $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}$ en fonction de $\hat{u}_E$:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}} = \frac{\mathbf{R}\, \mathbf{rot}_{\boldsymbol{k}}\, \hat{u}_E}{\mu(\cdot,\zeta)\, \zeta^2} - \frac{i\mu_0\, \mathbf{R}\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{H}}}{\mu(\cdot,\zeta)\, \zeta^2} - \frac{\mu_0\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{M}}}{\mu(\cdot,\zeta)\, \zeta}. \tag{7.6}$$

Les inconnues $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}$, $\hat{u}_P$ et $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}$ sont maintenant explicitées par les formules (7.5), (7.4) et (7.6) en fonction de $\hat{u}_E$ et de la donnée $\hat{\boldsymbol{F}}$. Afin de déduire une équation scalaire sur $\hat{u}_E$, il nous faut encore éliminer dans (7.3a) $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}$ et $\hat{u}_P$. Dans cette optique, multiplions (7.3a) par $\varepsilon_0\, \zeta \neq 0$ et remplaçons $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}$ à l'aide de (7.5). Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}_k \left(\frac{\mathbf{rot}_{\boldsymbol{k}}\, \hat{u}_E}{\mu(\cdot,\zeta)}\right) - i\, \varepsilon_0\, \Omega_e^2\, \zeta\, \Pi\, \hat{u}_P - \varepsilon_0\, \zeta^2\, \hat{u}_E \\ &= \varepsilon_0\, \zeta\, \hat{f}_E + i\, \mu_0\, \mathrm{rot}_k \left(\frac{\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{H}}}{\mu(\cdot,\zeta)}\right) + \frac{\mu_0\, \Omega_m^2}{\zeta}\, \mathrm{rot}_k \left(\frac{\mathbf{\Pi}\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{M}}}{\mu(\cdot,\zeta)}\right). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Puis, en substituant $\hat{u}_P$ avec (7.4), il découle de (7.7) l'équation différentielle, dite de Sturm-Liouville,

$$\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}\frac{\mathrm{d}\hat{u}_E}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}(k^2 - \zeta^2\, \varepsilon(\cdot,\zeta)\mu(\cdot,\zeta))\hat{u}_E \\ &= \varepsilon_0\, \zeta\, \hat{f}_E + i\, \mu_0\, \mathrm{rot}_k \left(\frac{\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{H}}}{\mu(\cdot,\zeta)}\right) - i\, \varepsilon_0\, \Omega_e^2\, \zeta\, \Pi\, \hat{f}_P + \frac{\mu_0\, \Omega_m^2}{\zeta}\, \mathrm{rot}_k \left(\frac{\mathbf{\Pi}\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{M}}}{\mu(\cdot,\zeta)}\right), \end{aligned} \tag{7.8}$$

où $\varepsilon(\cdot,\zeta)$ est définie en (7.1). Dans le but de réécrire le second membre de cette équation, définissons l'opérateur

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k} :\ \hat{\mathcal{H}} &\longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}) \\ (\hat{f}_E,\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{H}},\, \hat{f}_P,\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{M}}) &\longmapsto \varepsilon_0\, \hat{f}_E + \frac{i\, \mu_0}{\zeta}\, \mathrm{rot}_k \left(\frac{\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{H}}}{\mu(\cdot,\zeta)}\right) \\ &\qquad -i\, \varepsilon_0\, \Omega_e^2 \frac{\Pi\, \hat{f}_P}{\zeta} + \frac{\mu_0\, \Omega_m^2}{\zeta^2}\, \mathrm{rot}_k \left(\frac{\mathbf{\Pi}\, \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{M}}}{\mu(\cdot,\zeta)}\right). \end{aligned} \tag{7.9}$$

L'opérateur rot_k étant borné de $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R})$ dans $H^{-1}(\mathbb{R})$, l'opérateur $\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}$ ainsi défini est borné. L'équation de Sturm-Liouville (7.8) devient alors :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}\frac{\mathrm{d}\hat{u}_E}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}(k^2 - \zeta^2\, \varepsilon(\cdot,\zeta)\mu(\cdot,\zeta))\hat{u}_E = \zeta\, \hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\, \hat{\boldsymbol{F}}. \tag{7.10}$$

Montrons que cette équation différentielle est bien posée en énonçant le lemme suivant.

Lemme 7.1.1 *Soient $\hat{f} \in H^{-1}(\mathbb{R})$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$, alors l'équation de Sturm-Liouville :*

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}(k^2-\zeta^2\,\varepsilon(\cdot,\zeta)\mu(\cdot,\zeta))\hat{u}=\hat{f} \tag{7.11}$$

admet une unique solution $\hat{u} \in H^1(\mathbb{R})$. De plus :

$$\begin{array}{rccc} \hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}: & H^{-1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}) \\ & \hat{f} & \longmapsto & \hat{u} \end{array} \tag{7.12}$$

est un opérateur borné dont l'adjoint pour le crochet de dualité $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}),H^1(\mathbb{R})}$ est l'opérateur $\hat{\mathbb{C}}_{\bar{\zeta},k}$.

Preuve. De manière classique, on montre que résoudre l'équation de Sturm-Liouville (7.11) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver } \hat{u} \in H^1(\mathbb{R}) \text{ tel que } \; b_{\zeta,k}(\hat{u},\hat{v}) = \langle \hat{f},\hat{v}\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}),H^1(\mathbb{R})}, \; \forall \hat{v} \in H^1(\mathbb{R}),$$

où

$$b_{\zeta,k}(\hat{u},\hat{v}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}x}\,\overline{\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}x}} + \frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}(k^2-\zeta^2\,\varepsilon(\cdot,\zeta)\mu(\cdot,\zeta))\hat{u}\,\bar{\hat{v}}\;\mathrm{d}x$$

est une forme sesquilinéaire continue sur $H^1(\mathbb{R})^2$ et $\langle\hat{f},\cdot\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}),H^1(\mathbb{R})}$ définit une forme linéaire continue sur $H^1(\mathbb{R})$. Prouvons que la forme $b_{\zeta,k}$ est coercive et la démonstration du lemme découlera alors d'une simple application du théorème de Lax-Millgram. Soit $\hat{u} \in H^1(\mathbb{R})$, on a

$$|b_{\zeta,k}(\hat{u},\hat{u})| = \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}\left(\left|\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}x}\right|^2 + k^2|\hat{u}|^2\right) - \zeta^2\,\varepsilon(\cdot,\zeta)|\hat{u}|^2\,\mathrm{d}x\right|, \tag{7.13}$$

avec

$$\frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)} = \mu_0^{-1}\left(\frac{|\zeta|^4-\Omega_m^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}\zeta^2}{|\zeta^2-\Omega_m^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}|^2}\right) \quad \text{et} \quad -\zeta^2\,\varepsilon(\cdot,\zeta) = \varepsilon_0(\Omega_e^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}-\zeta^2). \tag{7.14}$$

De (7.14), on tire que $\mathrm{I}m(1/\mu(\cdot,\zeta))$ et $\mathrm{I}m(-\zeta^2\,\varepsilon(\cdot,\zeta))$ sont du signe de $-\mathrm{I}m(\zeta^2)$. Il s'ensuit avec (7.13) que :

$$|b_{\zeta,k}(\hat{u},\hat{u})| \geq |\mathrm{I}m\, b_{\zeta,k}(\hat{u},\hat{u})| \geq C_1\left(\|\boldsymbol{\nabla}\hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|\hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right), \tag{7.15}$$

$$\text{où} \;\; C_1 = \min\left(\frac{\mu_0^{-1}\Omega_m^2\,|\mathrm{I}m(\zeta^2)|}{|\zeta^2-\Omega_m^2|}, \varepsilon_0\,\Omega_e^2\,|\mathrm{I}m(\zeta^2)|\right) > 0, \quad \text{si } \mathrm{I}m(\zeta^2) \neq 0.$$

• Traitons alors en premier lieu le cas $\mathrm{I}m(\zeta^2) \neq 0$. Compte tenu de l'inégalité (7.15), pour obtenir la coercivité de $b_{\zeta,k}$, il nous suffit de minorer le terme $|b_{\zeta,k}(\hat{u},\hat{u})|$ par $C_2\,\|\boldsymbol{\nabla}\hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_-)}$ avec $C_2 > 0$. Dans ce but, choisissons $e^{i\,\beta} \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{R}e(e^{i\,\beta}\zeta^2) = 0$ (par exemple $e^{i\,\beta} = i\overline{\zeta^2}/|\zeta^2|$), on obtient alors d'après (7.14) que

$$\mathrm{R}e\left(\frac{e^{i\,\beta}}{\mu(\cdot,\zeta)}\right) = \frac{\mu_0^{-1}|\zeta|^4\,\cos(\beta)}{|\zeta^2-\Omega_m^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}|^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}e(-e^{i\,\beta}\zeta^2\,\varepsilon(\cdot,\zeta)) = \varepsilon_0\Omega_e^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}\cos(\beta). \tag{7.16}$$

Ainsi avec (7.13) et (7.16), il découle que

$$|b_{\zeta,k}(\hat{u},\hat{u})| = |e^{i\,\beta}\,b_{\zeta,k}(\hat{u},\hat{u})| \geq |\mathrm{R}e(\,e^{i\,\beta}\,b_{\zeta,k}(\hat{u},\hat{u}))| \geq C_2\|\boldsymbol{\nabla}\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}_-)}, \;\; \text{où} \;\; C_2 = \mu_0^{-1}|\zeta|^2\,|\cos(\beta)| > 0,$$

(car $\mathrm{R}e(e^{i\beta}\zeta^2) = \cos(\beta)\mathrm{R}e(\zeta^2) - \sin(\beta)\mathrm{I}m(\zeta^2) = 0$ et $\mathrm{I}m(\zeta^2) \neq 0$ impliquent que $\cos(\beta) \neq 0$).

• Traitons maintenant le cas $\mathrm{I}m(\zeta^2) = 0$. Comme $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il vient $\zeta = i\,\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Il résulte alors que

$$\frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)} = \frac{\mu_0^{-1}\lambda^2}{(\lambda^2 + \Omega_m^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+})} \quad \text{et} \quad -\zeta^2\,\varepsilon(\cdot,\zeta) = \varepsilon_0(\Omega_e^2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} + \lambda^2).$$

On déduit finalement avec (7.13) que

$$|b_{\zeta,k}(\hat{u},\hat{u})| \geq C_3\,\|\hat{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R})}, \quad \text{où} \quad C_3 = \min(\mu_0^{-1}\lambda^2/(\lambda^2+\Omega_m^2),\,\varepsilon_0\lambda^2) > 0.$$

Enfin, l'égalité $(\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k})^* = \hat{\mathbb{C}}_{\overline{\zeta},k}$ découle immédiatement de la relation suivante sur les formes bilinéaires :

$$b_{\overline{\zeta},k}(u,v) = \overline{b_{\zeta,k}(v,u)}, \quad \forall u,\,v \in H^1(\mathbb{R}).$$

■

L'équation (7.10) se réécrit donc à l'aide du lemme 7.1.1 sous la forme :

$$\hat{u}_E = \zeta\,\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{F}} \;\text{ avec } \hat{u}_E \in H^1(\mathbb{R}). \tag{7.17}$$

Définissons maintenant d'une part l'opérateur

$$\begin{array}{rccl} \hat{\mathbb{V}}_{\zeta,k}: & H^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \hat{\mathcal{H}} \\ & \hat{u}_E & \longmapsto & \left(\hat{u}_E,\, \dfrac{-i\,\mathbf{rot_k}\,\hat{u}_E}{\mu(\cdot,\zeta)\,\zeta},\, i\,\dfrac{\mathrm{R}\,\hat{u}_E}{\zeta},\, \dfrac{\mathbf{R}\,\mathbf{rot_k}\,\hat{u}_E}{\mu(\cdot,\zeta)\,\zeta^2}\right) \end{array} \tag{7.18}$$

qui est un prolongement de $\hat{\mathbb{V}}_{\lambda,k}$, défini en (6.17) pour λ réel, à des valeurs de ζ complexes et d'autre part l'opérateur $\hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k} : \hat{\mathcal{H}} \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}$ où

$$\hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-\mu_0}{\mu(\cdot,\zeta)\,\zeta} & 0 & \dfrac{i\,\mu_0\,\Omega_m^2\,\mathbf{\Pi}}{\mu(\cdot,\zeta)\,\zeta^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{-1}{\zeta} & 0 \\ 0 & \dfrac{-i\,\mu_0\,\Omega_m^2\,\mathbf{R}}{\mu(\cdot,\zeta)\,\zeta^2} & 0 & \dfrac{-\mu_0}{\mu(\cdot,\zeta)\,\zeta} \end{pmatrix}. \tag{7.19}$$

Il découle alors des équations (7.4), (7.5), (7.6) et (7.17) la relation :

$$\hat{\boldsymbol{U}} = (\hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k} + \zeta\,\hat{\mathbb{V}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k})\,\hat{\boldsymbol{F}},$$

et la proposition suivante :

Proposition 7.1.2 *Soient $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$, la résolvante de $\hat{\mathbb{A}}_k$, opérateur borné de $\hat{\mathcal{H}}$ dans $\hat{\mathcal{H}}$, a pour expression :*

$$\hat{R}_k(\zeta) = \hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k} + \zeta\,\hat{\mathbb{V}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k},$$

où les opérateurs $\hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k}$, $\hat{\mathbb{V}}_{\zeta,k}$, $\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}$ et $\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}$ sont respectivement définis en (7.19), (7.18), (7.12) *et* (7.9).

Remarque 7.1.3 *Intéressons nous ici aux adjoints des opérateurs intervenant dans l'expression de la résolvante $\hat{R}_k(\zeta)$. On montre facilement que*

$$(\hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}},\,\hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}} = (\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\mathbb{T}}_{\overline{\zeta},k}\,\hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}},\ \forall \hat{\boldsymbol{U}},\,\hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\mathcal{H}}$$

et que

$$\langle \hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{v}_E\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}),\,H^1(\mathbb{R})} = (\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\mathbb{V}}_{\overline{\zeta},k}\,\hat{v}_E)_{\hat{\mathcal{H}}},\ \forall (\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{v}_E) \in \hat{\mathcal{H}} \times H^1(\mathbb{R}). \tag{7.20}$$

Ainsi les adjoints des opérateurs $\hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k}$ et $\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}$ sont donnés par les relations :

$$\hat{\mathbb{T}}^*_{\zeta,k} = \hat{\mathbb{T}}_{\overline{\zeta},k} \quad \textit{et} \quad \hat{\mathbb{S}}^*_{\zeta,k} = \hat{\mathbb{V}}_{\overline{\zeta},k}. \tag{7.21}$$

L'opérateur $\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}$ satisfaisant d'après le lemme (7.1.1) : $\hat{\mathbb{C}}^*_{\zeta,k} = \hat{\mathbb{C}}_{\overline{\zeta},k}$, on retrouve alors avec (7.20) et (7.21) la propriété classique $\hat{R}_k(\zeta)^* = \hat{R}_k(\overline{\zeta})$ sur la résolvante d'un opérateur auto-adjoint.

7.1.2 Fonction de Green de l'équation de Sturm-Liouville

Avant d'appliquer la formule de Stone, nous cherchons maintenant à trouver une forme plus exploitable de la résolvante en explicitant l'opérateur $\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}$ dans la formule (7.1.1). Dans cette optique, calculons la fonction de Green $\hat{g}_{\zeta,k}$ associée à l'équation de Sturm-Liouville (7.11). L'opérateur $\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}$ prendra ainsi la forme d'un opérateur à noyau [1] :

$$(\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k} f)(y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}_{\zeta,k}(x,y)\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La fonction de Green $\hat{g}_{\zeta,k}$ est définie de la manière suivante : pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $\hat{g}_{\zeta,k}(\cdot, y)$ est l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R})$ (cf. lemme 7.1.1) de

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}\frac{\partial \hat{g}_{\zeta,k}(\cdot,y)}{\partial x}\right) + \frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}(k^2 - \zeta^2\,\varepsilon(\cdot,\zeta)\mu(\cdot,\zeta))\hat{g}_{\zeta,k}(\cdot,y) = \delta_y \tag{7.22}$$

où $\delta_y \in H^{-1}(\mathbb{R})$ est la masse de Dirac placée en y. Nous nous contentons dans un premier temps de résumer son expression dans la proposition suivante, que nous justifierons par la suite par un petit calcul. L'énoncé de cette proposition fait intervenir les notations : $\Theta_{\zeta,k}(\cdot)$, $\theta_{\zeta,k}(\cdot)$, $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}$, $\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k}$ et $\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k}$ définies au chapitre précédent respectivement en (6.19), (6.22), (6.24), (6.27) et (6.30) pour λ réel et qui sont ici étendues à des valeurs de ζ complexes. Pour plus de lisibilité, nous les rappelons ici :

– La fonction $\Theta_{\zeta,k}(\cdot)$ est exprimée par :

$$\Theta_{\zeta,k} := \left| \begin{array}{l} \Theta^-_{\zeta,k} = k^2 - \varepsilon_0\,\mu_0\,\zeta^2 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_-, \\ \Theta^+_{\zeta,k} = k^2 - \varepsilon^+(\zeta)\,\mu^+(\zeta)\,\zeta^2 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+, \end{array} \right.$$

où $\varepsilon^+(\zeta) = \varepsilon_0(1 - \Omega_e^2/\zeta^2)$ et $\mu^+(\zeta) = \mu_0(1 - \Omega_m^2/\zeta^2)$;

– $\theta_{\zeta,k}(\cdot) = \sqrt{\Theta_{\zeta,k}(\cdot)}$ (la racine complexe ayant été définie en (6.23)). Ses valeurs de part et d'autre de l'interface sont $\theta^\pm_{\zeta,k} = \sqrt{\Theta^\pm_{\zeta,k}}$;

1. L'écriture sous forme intégrale étant valable pour des sources f dans $L^2(\mathbb{R})$, pour des seconds membres moins réguliers dans $H^{-1}(\mathbb{R})$, il faudrait remplacer l'intégrale par un crochet de dualité : $(\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k} f)(y) = \left\langle f, \overline{\hat{g}_{\zeta,k}(\cdot,y)} \right\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}),H^1(\mathbb{R})}$.

– Les fonctions

$$\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{c}_{\zeta,k}(x) \\ \mathrm{s}_{\zeta,k}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\theta_{\zeta,k}(x)\, x) \\ \dfrac{\mu(x,\zeta)\,\mathrm{sh}(\theta_{\zeta,k}(x)\, x)}{\theta_{\zeta,k}(x)} \end{pmatrix}$$

forment une base de solutions de l'équation différentielle (7.22) sans second membre. Cette base est canonique, au sens où

$$\left| \begin{array}{lll} \mathrm{c}_{\zeta,k}(0) = 1 & \text{et} & \left(\dfrac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}\dfrac{\mathrm{dc}_{\zeta,k}}{\mathrm{d}x}\right)(0) = 0, \\ \mathrm{s}_{\zeta,k}(0) = 0 & \text{et} & \left(\dfrac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}\dfrac{\mathrm{ds}_{\zeta,k}}{\mathrm{d}x}\right)(0) = 1; \end{array} \right.$$

– Les vecteurs $\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k}$ et $\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k}$ sont donnés par :

$$\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k} = (1,\, \mu_0^{-1}\,\theta^-_{\zeta,k})^\top \;\text{ et }\; \boldsymbol{C}^+_{\zeta,k} = (1,\, -\mu^+(\zeta)^{-1}\,\theta^+_{\zeta,k})^\top. \tag{7.23}$$

Proposition 7.1.4 *Soient $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$, La fonction de Green $\hat{g}_{\zeta,k}$ de l'équation de Sturm-Liouville (7.11) s'exprime sous la forme :*

$$\hat{g}_{\zeta,k}(x,y) = \boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(x)^\top\, \hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y)\, \boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y),$$

$\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y)$ étant une matrice carrée de taille 2 constante de part et d'autre de la diagonale $x = y$:

$$\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y) := \left| \begin{array}{ll} \hat{\mathbb{G}}^-_{\zeta,k} = a_{\zeta,k}\, \boldsymbol{C}^-_{\zeta,k}\, (\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k})^\top & \textit{si } x \le y, \\ \hat{\mathbb{G}}^+_{\zeta,k} = a_{\zeta,k}\, \boldsymbol{C}^+_{\zeta,k}\, (\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k})^\top & \textit{si } x \ge y, \end{array} \right. \tag{7.24}$$

où $a_{\zeta,k} = (\mu_0^{-1}\theta^-_{\zeta,k} + \mu^+(\zeta)^{-1}\theta^+_{\zeta,k})^{-1}$.

Afin de démontrer cette proposition, nous allons résoudre l'équation (7.22) en suivant la démarche proposée dans [63]. D'après (7.22), pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, la fonction de Green $\hat{g}_{\zeta,k}(\cdot,y)$ est solution de

$$\frac{\partial^2\, \hat{g}_{\zeta,k}(\cdot,y)}{\partial x^2} + \Theta^\pm_{\zeta,k}\, \hat{g}_{\zeta,k}(\cdot,y) = \delta_y$$

séparément sur $x > 0$ et $x < 0$ et satisfait les conditions de transmissions :

$$[\hat{g}_{\zeta,k}(\cdot,y)]_{x=0} = 0 \;\text{ et }\; \left[\frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}\frac{\partial \hat{g}_{\zeta,k}(\cdot,y)}{\partial x}\right]_{x=0} = 0.$$

On en déduit en particulier que de part et d'autre de la diagonale $x = y$, $\hat{g}_{\zeta,k}(\cdot,y)$ s'exprime comme une combinaison linéaire des fonctions de base $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}$ définies en (6.25). Ainsi,

$$\hat{g}_{\zeta,k}(x,y) = \left| \begin{array}{ll} (a^-_{\zeta,k,1}(y),\, a^-_{\zeta,k,2}(y))^\top\, \boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(x) & \text{si } x < y, \\ (a^+_{\zeta,k,1}(y),\, a^+_{\zeta,k,2}(y))^\top\, \boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(x) & \text{si } x > y, \end{array} \right. \tag{7.25}$$

où $(a^\pm_{\zeta,k,1}(y),\, a^\pm_{\zeta,k,2}(y)) \in \mathbb{C}^2$. $\hat{g}_{\zeta,k}(\cdot,y) \in H^1(\mathbb{R})$, la combinaison linéaire (7.25) ne doit donc pas être exponentiellement croissante lorsque $|x| \mapsto \infty$. Pour obtenir le comportement de $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}$ en $\pm\infty$, il est nécessaire de caractériser la position de $\Theta^\pm_{\lambda,k}$ dans le plan complexe pour obtenir des informations sur la partie réelle de sa racine : $\mathrm{R}e(\theta_{\zeta,k})$. C'est l'objet du lemme suivant dont la démonstration peut être sautée lors d'une première lecture.

Lemme 7.1.5 *Soit $k \in \mathbb{R}$. On a $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \Theta^-_{\zeta,k} \in \mathbb{R}^-\} \cup \{\zeta \in \mathbb{C}^* \mid \Theta^+_{\zeta,k} \in \mathbb{R}^-\} \subset \mathbb{R}$. La fonction $\theta_{\zeta,k}(\cdot) = \sqrt{\Theta_{\zeta,k}(\cdot)}$ est alors analytique en ζ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et vérifie (par définition de la racine cf. (6.23)) $\mathrm{Re}(\theta_{\zeta,k}(\cdot)) > 0$ sur cet ensemble.*

Preuve. Soit $\zeta = x + i\,y \in \mathbb{C}$. Résolvons d'abord de manière algébrique les deux équations $\mathrm{I}m(\Theta^{\pm}_{\zeta,k}) = 0$ afin de déterminer les paramètres ζ pour lesquels $\Theta^{\pm}_{\zeta,k} \in \mathbb{R}$.

- Il est facile de vérifier que

$$\mathrm{I}m(\Theta^-_{\zeta,k}) = -2\varepsilon_0\,\mu_0 x\,y. \tag{7.26}$$

Ainsi,

$$\mathrm{I}m(\Theta^-_{\zeta,k}) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Or pour $x = 0$ et $y \neq 0$, $\mathrm{R}e(\Theta^-_{\zeta,k}) = k^2 + \varepsilon_0\,\mu_0\,y^2 > 0$, l'ensemble $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \Theta^-_{\zeta,k} \in \mathbb{R}^-\}$ est donc inclus dans $\mathbb{R}$.

- Examinons maintenant l'équation $\mathrm{I}m(\Theta^+_{\zeta,k}) = 0$. Soit $\zeta \neq 0$, par un petit calcul, on obtient :

$$\Theta^+_{\zeta,k} = k^2 - \frac{\varepsilon_0\,\mu_0\left(\zeta^2 - \Omega_e^2)(|\zeta|^4 - \Omega_m^2\,\overline{\zeta^2}\right)}{|\zeta|^4}. \tag{7.27}$$

En prenant la partie imaginaire de $\Theta^+_{\zeta,k}$ dans (7.27), il vient après factorisation :

$$\mathrm{I}m(\Theta^+_{\zeta,k}) = -\frac{2\varepsilon_0\,\mu_0\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}\,\left((x^2+y^2)^2 - \Omega_e^2\,\Omega_m^2\right). \tag{7.28}$$

Ainsi d'après (7.28),

$$\mathrm{I}m(\Theta^+_{\zeta,k}) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \;\text{ ou }\; y = 0 \;\text{ ou }\; (x^2+y^2) = \Omega_e\Omega_m.$$

Pour conclure, montrons que si $x = 0$ ou $(x^2+y^2) = \Omega_e\Omega_m$ et $y \neq 0$, $\Theta^+_{\zeta,k} > 0$.
- Si $x = 0$ et $y \neq 0$, il découle immédiatement de (7.27) que

$$\Theta^+_{\zeta,k} = k^2 + \varepsilon_0\,\mu_0\,y^2\left(1 + \frac{\Omega_e^2}{y^2}\right)\left(1 + \frac{\Omega_m^2}{y^2}\right) > 0.$$

- Si $(x^2+y^2) = \Omega_e\Omega_m$ et $y \neq 0$, en remplaçant $|\zeta|^2$ par $\Omega_e^2\,\Omega_m^2$ dans (7.27), il s'ensuit que :

$$\Theta^+_{\zeta,k} = k^2 - \frac{\varepsilon_0\,\mu_0\left(\zeta^2 - \Omega_e^2)(\Omega_e^2\,\Omega_m^2 - \Omega_m^2\,\overline{\zeta^2}\right)}{\Omega_e^2\,\Omega_m^2},$$

En simplifiant cette dernière équation par Ω_m^2, on a finalement :

$$\Theta^+_{\zeta,k} = k^2 + \frac{\varepsilon_0\,\mu_0\,\left(|\zeta^2 - \Omega_e^2|^2\right)}{\Omega_e^2} > 0$$

(car comme on a supposé $y \neq 0$, ζ n'est pas réel et est donc différent $\pm\Omega_e$). L'analyticité en ζ de $\theta_{\zeta,k}(\cdot)$ est alors une conséquence immédiate du choix de la racine effectué en (6.23). ∎

En utilisant la stricte positivité de $\mathrm{Re}(\theta_{\zeta,k})$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, il est alors facile de montrer (à l'instar de (6.26) et (6.29) au chapitre précédent) que la combinaison linéaire (7.25) n'est pas exponentiellement croissante quand $|x|\mapsto\infty$ si et seulement si :

$$\hat{g}_{\zeta,k}(x,y)=\left|\begin{array}{ll} a^-_{\zeta,k}(y)\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(x)^\top\,\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k} & \text{si } x<y,\\ a^+_{\zeta,k}(y)\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(x)^\top\,\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k} & \text{si } x>y,\end{array}\right. \tag{7.29}$$

où $\boldsymbol{C}^\pm_{\zeta,k}$ sont définis en (7.23). La dernière étape du calcul consiste à déterminer les fonctions $a^\pm_{\zeta,k}(\cdot)$ en utilisant "la formule des sauts" en $x=y$. Cette dernière impose les conditions :

$$[\hat{g}_{\zeta,k}(x,y)]_{x=y}=0\ \text{ et }\ \left[\frac{1}{\mu(\cdot,\zeta)}\frac{\partial\hat{g}_{\zeta,k}(x,y)}{\partial x}\right]_{x=y}=-1. \tag{7.30}$$

Lemme 7.1.6 *Soient $k\in\mathbb{R}$, $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}^*$,*

$$\left|\begin{array}{l} a^-_{\zeta,k}(y)=a_{\zeta,k}\,(\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y),\\ a^+_{\zeta,k}(y)=a_{\zeta,k}\,(\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y),\end{array}\right.$$

où $a_{\zeta,k}=(\mu_0^{-1}\theta^-_{\zeta,k}+\mu^+(\zeta)^{-1}\theta^+_{\zeta,k})^{-1}$.

Preuve. Les conditions de transmissions (7.30) sont équivalentes au système suivant

$$\mathbb{M}_{\zeta,k}(y)\begin{pmatrix}a^-_{\zeta,k}(y)\\ a^+_{\zeta,k}(y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} \tag{7.31}$$

$$\text{où }\ \mathbb{M}_{\zeta,k}(y):=\begin{pmatrix} -\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)^\top\,\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k} & \boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)^\top\,\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k}\\ \dfrac{-1}{\mu(y,\zeta)}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)}{\mathrm{d}y}^\top\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k} & \dfrac{1}{\mu(y,\zeta)}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)}{\mathrm{d}y}^\top\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k}\end{pmatrix}.$$

Explicitons le déterminant de ce système,

$$\det(\mathbb{M}_{\zeta,k}(y))=\mu(y,\zeta)^{-1}(\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k})^\top\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)}{\mathrm{d}y}\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)^\top-\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)}{\mathrm{d}y}^\top\right)\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k}. \tag{7.32}$$

Par un petit calcul, on vérifie :

$$\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)}{\mathrm{d}y}^\top-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)}{\mathrm{d}y}\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y)^\top=\mu(y,\zeta)\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

Il vient alors avec (7.23) et (7.32) :

$$\det(\mathbb{M}_{\zeta,k}(y))=(\mu_0^{-1}\theta^-_{\zeta,k}+\mu^+(\zeta)^{-1}\theta^+_{\zeta,k}).$$

Montrons maintenant que le système (7.31) est inversible en s'assurant que $\det(\mathbb{M}_{\zeta,k}(y))\neq0$. On est donc amené à prouver que l'équation :

$$\mu_0^{-1}\theta^-_{\zeta,k}=-\mu^+(\zeta)^{-1}\theta^+_{\zeta,k} \tag{7.33}$$

n'admet pas de solution sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Remarquons que (7.33) n'est en fait que le prolongement à des ζ complexes de l'équation (6.37) définie au chapitre précédent et étudiée dans le lemme 6.5.1. A l'instar de la démonstration de ce lemme, en élevant (7.33) au carré, puis en multipliant l'équation résultante par $\mu^+(\zeta)^2\,\zeta^4 \neq 0$, il découle que

$$Q_k(\zeta^2) = 0, \tag{7.34}$$

où le polynôme

$$Q_k(X) = \varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2 - \Omega_m^2)X^2 + \Omega_m^2\left(2k^2 - \varepsilon_0\,\mu_0(\Omega_e^2 - \Omega_m^2)\right)X - k^2\,\Omega_m^4$$

est défini en (6.40).

Supposons par l'absurde que $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est solution de (7.33). Un tel ζ satisfait la relation (7.34). Or le polynôme Q_k ne possède que des racines réelles (cf. démonstration du lemme 6.5.1), ζ^2 est donc réel et $\zeta = i\,\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est imaginaire pur. Il est alors aisé de constater qu'un tel ζ n'est pas solution de (7.33). En effet, d'après le lemme 7.1.5, en prenant la partie réelle des deux membres de l'équation (7.33), on observe que

$$\mu_0^{-1}\mathrm{R}e(\theta^-_{\zeta,k}) > 0 \;\text{ alors que }\; -\mathrm{R}e(\mu^+(\zeta)^{-1}\theta^+_{\zeta,k}) = \frac{-\mu_0^{-1}\,\lambda^2}{(\lambda^2+\Omega_m^2)}\,\mathrm{R}e(\theta^+_{\zeta,k}) < 0.$$

$\det(\mathbb{M}_{\zeta,k}(y))$ étant non nul, les formules de Cramer nous permettent d'inverser le système (7.31) :

$$a^-_{\zeta,k}(y) = \det(\mathbb{M}_{\zeta,k}(y))^{-1}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(y)^\top\,\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k} \;\text{ et }\; a^+_{\zeta,k}(y) = \det(\mathbb{M}_{\zeta,k}(y))^{-1}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(y)^\top\,\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k}.$$

Soit finalement en transposant ces deux dernières relations et en posant $a_{\zeta,k} = \det(\mathbb{M}_{\zeta,k}(y))^{-1}$,

$$a^-_{\zeta,k}(y) = a_{\zeta,k}\,(\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(y) \;\text{ et }\; a^+_{\zeta,k}(y) = a_{\zeta,k}\,(\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(y).$$

■

Le lemme 7.1.6 permet alors de conclure en réécrivant la relation (7.29) de la manière suivante :

$$\hat{g}_{\zeta,k}(x,y) := \left|\begin{array}{ll} a_{\zeta,k}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(x)^\top\,\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k}\,(\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(y) & \text{si } x \leq y, \\ a_{\zeta,k}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(x)^\top\,\boldsymbol{C}^+_{\zeta,k}\,(\boldsymbol{C}^-_{\zeta,k})^\top\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(y) & \text{si } x \geq y. \end{array}\right.$$

7.1.3 Famille spectrale de l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$

Maintenant que nous avons une formulation explicite de la résolvante, nous allons pouvoir utiliser la formule de Stone (cf. 7.109), que nous rappelons ici, pour calculer la famille spectrale $\hat{\mathbb{E}}_k(\cdot)$. Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$, l'expression du projecteur spectral $\hat{\mathbb{E}}_k(I)$ s'obtient par le passage à la limite suivant :

$$(\hat{\mathbb{E}}_k(I)\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}} = \frac{-1}{2i\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{\delta\to 0^+}\int_{C_{\varepsilon,\delta}(I)}\left(\hat{R}_k(\zeta)\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}\mathrm{d}\zeta,\;\forall\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\in\hat{\mathcal{H}}. \tag{7.35}$$

Notons ici que nous allons en fait nous restreindre à des intervalles bornés I inclus dans $I_0 = \mathbb{R}\setminus\{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$ puisque l'on sait déjà que 0 et $\pm\Omega_m$ sont des valeurs propres de multiplicité infinie dont les sous-espaces propres ont été donnés au chapitre précédent (cf. 6.9 et 6.13). Pour calculer la limite (7.35), nous allons suivre une démarche s'inspirant de [63, 82]. Celle-ci consiste tout d'abord à réécrire sous forme intégrale l'opérateur résolvant.

Expression intégrale de la résolvante

Le terme $\left(R_k(\zeta)\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}$ se réécrit à l'aide de la proposition (7.1.2) de la manière suivante :

$$\left(\hat{R}_k(\zeta)\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}=\left(\hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}+\zeta\,\left(\hat{\mathbb{V}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}. \tag{7.36}$$

En utilisant le fait que $\hat{\mathbb{V}}^*_{\zeta,k}=\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}$ (cf. remarque 7.1.3), le second terme de (7.36) devient :

$$\left(\hat{\mathbb{V}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}=\left\langle\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}},\,\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}\,\hat{\boldsymbol{V}}\right\rangle_{H^1(\mathbb{R}),\,H^{-1}(\mathbb{R})}. \tag{7.37}$$

Par commodité, pour pouvoir exprimer cette dernière expression à l'aide d'intégrales, nous allons choisir des $\hat{\boldsymbol{U}}$ et $\hat{\boldsymbol{V}}$ dans un espace de fonctions plus régulières $\hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$, dense dans $\hat{\mathcal{H}}$. Nous effectuerons alors le passage à la limite dans la formule de Stone pour des $\hat{\boldsymbol{U}}$ et $\hat{\boldsymbol{V}}$ dans $\hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$. L'opérateur $\hat{\mathbb{E}}_k(I)$ étant borné, nous pourrons prolonger par densité l'expression obtenue à $\hat{\boldsymbol{U}}$ et $\hat{\boldsymbol{V}}$ dans $\hat{\mathcal{H}}$. Décrivons ici brièvement les propriétés de cet espace :

- D'une part, afin d'interpréter le crochet de dualité dans la relation (7.37) comme un produit scalaire, l'espace $\hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$ doit vérifier $\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}(\hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}})\subset L^2(\mathbb{R})$. D'après (7.9), une fonction $\hat{\boldsymbol{U}}=(\hat{u}_E,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}},\hat{u}_P,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}})$ de $\hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$ doit donc appartenir à l'espace $L^2(\mathbb{R})\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{rot}_k}(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R}_+)\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{rot}_k}(\mathbb{R}_+)$ et satisfaire les conditions de raccord $\hat{u}_{H_y}(0)=0$ et $\hat{u}_{M_y}(0)=0$ afin que les termes $\mathrm{rot}_k\,(\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}/\mu(\cdot,\zeta))$ et $\mathrm{rot}_k\,(\boldsymbol{\Pi}\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}/\mu(\cdot,\zeta))$ soient $L^2(\mathbb{R})$.
- D'autre part, nous supposerons que les fonctions de $\hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$ sont à support compact, ce qui apparaîtra naturellement au cours du calcul pour assurer la convergence de certaines intégrales.

Pour des fonctions $\hat{\boldsymbol{U}}$ et $\hat{\boldsymbol{V}}\in\hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$, le crochet de dualité dans (7.37) s'exprime alors à l'aide du produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R})$:

$$\left\langle\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}},\,\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}\,\hat{\boldsymbol{V}}\right\rangle_{H^1(\mathbb{R}),\,H^{-1}(\mathbb{R})}=\left(\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}},\,\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}\,\hat{\boldsymbol{V}}\right).$$

Ainsi en explicitant dans la relation (7.37) l'opérateur $\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}$ à l'aide de son noyau $\hat{g}_{\zeta,k}$ donné par la proposition (7.1.4), il vient :

$$\left(\hat{\mathbb{V}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{C}}_{\zeta,k}\,\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}=\int_{\mathbb{R}^2}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(x)^{\top}\,\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y)\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(y)(\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}})(x)(\overline{\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}\,\hat{\boldsymbol{V}}})(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Soit finalement avec (7.36) :

$$\left(\hat{R}_k(\zeta)\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}=\left(\hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}+\zeta\int_{\mathbb{R}^2}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(x)^{\top}\,\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y)\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{k}}(y)(\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\hat{\boldsymbol{U}})(x)(\overline{\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}\hat{\boldsymbol{V}}})(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{7.38}$$

pour toutes fonctions $\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\in\hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$.

Régularité en ζ au voisinage de l'axe réel

Pour effectuer le passage à la limite $\varepsilon\mapsto 0^+$ et $\delta\mapsto 0^+$ dans la formule de Stone (7.35), il nous faut maintenant regarder le comportement en ζ au voisinage de l'axe réel des différents termes intervenant dans l'expression de la résolvante (7.38).

Remarquons tout d'abord qu'à $\hat{\boldsymbol{U}}$ et $\hat{\boldsymbol{V}}$ fixés (cf. (7.19) et (7.9)), les applications : $\zeta\mapsto\left(\hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}$, $\zeta\mapsto\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\hat{\boldsymbol{U}}$, et $\zeta\mapsto\overline{\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}\hat{\boldsymbol{V}}}$ sont méromorphes sur $\mathbb{C}$ et analytiques sur $\mathbb{C}\setminus\{-\Omega_m,0,\Omega_m\}$.

Concernant les fonctions de base $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}$, elles sont analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Une façon de constater cette analyticité est de remarquer que le développement en série entière de $\mathrm{c}_{\zeta,k}$ et $\mathrm{s}_{\zeta,k}$ ne fait intervenir que des puissances paires de $\theta_{\zeta,k}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}$ a donc le même domaine d'analyticité que $\Theta_{\zeta,k} = \theta_{\zeta,k}^2$.

Compte tenu de l'analyticité de $\zeta \mapsto \left(\hat{\mathbb{T}}_{\zeta,k}\,\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}}$ au voisinage de $I \subset I_0 = \mathbb{R}\backslash\{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$ et de la relation (7.38), la formule de Stone se réécrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&(\hat{\mathbb{E}}_k(I)\,\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}}\\ &= \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{\delta\to 0^+} \int_{C_{\varepsilon,\delta}(I)} \zeta \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(x)^\top\, \hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y)\, \boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(y) (\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\hat{\boldsymbol{U}})(x) (\overline{\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}\hat{\boldsymbol{V}}})(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned} \tag{7.39}$$

Cherchons maintenant à faire apparaître de façon plus explicite la partie non analytique de la matrice $\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y)$ sur l'axe réel. Dans ce but, décomposons $\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y)$ en deux parties symétrique et antisymétrique :

$$\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y) = \hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}^{Sym} + \hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}^{anti}(x,y) \quad \text{où}$$

$$\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}^{Sym} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y) + \hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(y,x)) \quad \text{et} \quad \hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}^{Sym}(x,y) = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y) - \hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(y,x)),$$

soit en utilisant la définition (7.24)

$$\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}^{Sym} = a_{\zeta,k} \begin{pmatrix} 1 & (\mu_0^{-1}\,\theta_{\zeta,k}^- - \mu^+(\zeta)^{-1}\,\theta_{\zeta,k}^+)/2 \\ (\mu_0^{-1}\,\theta_{\zeta,k}^- - \mu^+(\zeta)^{-1}\,\theta_{\zeta,k}^+)/2 & -\mu_0^{-1}\,\theta_{\zeta,k}^-\,\mu^+(\zeta)^{-1}\,\theta_{\zeta,k}^+ \end{pmatrix}, \tag{7.40}$$

$$\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}^{anti}(x,y) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (+ \text{ si } x > y \text{ et } - \text{ si } x < y).$$

En constatant que $\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}^{anti}(x,y)$ est analytique dans tout le plan complexe (et pour cause : elle ne dépend pas de ζ), on en déduit que dans (7.39), on peut remplacer $\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}(x,y)$ par $\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}^{Sym}$. Comme de plus $\hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}^{Sym}$ ne dépend pas de x et y, en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on peut séparer les intégrales en x et y. Il s'ensuit finalement que :

$$(\hat{\mathbb{E}}_k(I)\,\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}} = \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{\delta\to 0^+} \int_{C_{\varepsilon,\delta}(I)} \left(\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}\left\{\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\hat{\boldsymbol{U}}\right\}\right)^\top \zeta\, \hat{\mathbb{G}}_{\zeta,k}^{sym}\, \boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}\left\{\overline{\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}\hat{\boldsymbol{V}}}\right\}\,\mathrm{d}\zeta, \tag{7.41}$$

où

$$\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}\left\{\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\hat{\boldsymbol{U}}\right\} = \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}(x)(\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\hat{\boldsymbol{U}})(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 7.1.7 *Notons que pour appliquer le théorème de Fubini-Tonelli et donner un sens aux intégrales :* $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}\left\{\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\hat{\boldsymbol{U}}\right\}$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}\left\{\overline{\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}\hat{\boldsymbol{V}}}\right\}$*, il est nécessaire que* $\hat{\boldsymbol{U}}$ *et* $\hat{\boldsymbol{V}}$ *soient à support compact (hypothèse vérifiée dans l'espace* $\hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$*) car les fonctions* $\mathrm{c}_{\zeta,k}$ *et* $\mathrm{s}_{\zeta,k}$ *sont exponentiellement croissantes à l'infini.*

Les fonctions $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}\left\{\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\hat{\boldsymbol{U}}\right\}$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\zeta,k}}\left\{\overline{\hat{\mathbb{S}}_{\overline{\zeta},k}\hat{\boldsymbol{V}}}\right\}$ étant analytiques au voisinage de l'axe réel, on peut alors vérifier à l'aide du théorème de convergence dominée (cf.[44]) que l'on peut permuter les limites en ϵ et δ et l'intégrale pour obtenir la proposition suivante [2].

Proposition 7.1.8 *L'expression (7.41) de la famille spectrale peut être réécrite sous la forme*

$$(\hat{\mathbb{E}}_k(I)\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_I(\lambda)\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}\left\{\hat{\mathbb{S}}_{\lambda,k}\hat{\boldsymbol{U}}\right\}\,\mathrm{d}\mathbb{M}_k(\lambda)\,\boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}\left\{\overline{\hat{\mathbb{S}}_{\lambda,k}\hat{\boldsymbol{V}}}\right\}, \tag{7.42}$$

où

$$\mathbb{M}_k(I) = \frac{-1}{2i\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{\delta\to 0^+}\int_{C_{\varepsilon,\delta}(I)} \zeta\,\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}\,\mathrm{d}\zeta,\ \forall I \text{ borné } \subset \mathbb{R}\setminus\{-\Omega_m,0,\Omega_m\}. \tag{7.43}$$

Calcul de la matrice spectrale $\mathbb{M}_k(I)$

Pour déterminer la mesure matricielle $\mathrm{d}\mathbb{M}_k(\lambda)$, il nous reste à évaluer la limite (7.43). La fonction $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ étant paire en k, cette limite ne dépend pas du signe de k. Nous supposerons donc désormais que k est positif. Au vu de l'expression de $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ (cf. (7.40)), cette limite est entièrement caractérisée par le comportement de $\theta^{\pm}_{\zeta,k}$ et $a_{\zeta,k} = (\mu_0^{-1}\theta^{-}_{\zeta,k} + \mu^{+}(\zeta)^{-1}\theta^{+}_{\zeta,k})^{-1}$ au voisinage de l'axe réel. $\theta^{\pm}_{\zeta,k}$ étant définie comme la racine du terme $\Theta^{\pm}_{\zeta,k}$ (qui est analytique en ζ sur $\mathbb{C}^*$), les limites de $\theta^{\pm}_{\zeta,k}$ quand $\zeta\to\lambda\pm i0$ sont entièrement décrites par le signe du réel $\Theta^{\pm}_{\lambda,k}$ et par celui de $Im(\Theta^{\pm}_{\zeta,k})$. En effet, quand $\Theta^{\pm}_{\lambda,k}$ est négatif, la fonction $\theta^{\pm}_{\zeta,k}$ possède alors un saut en λ (dû à la coupure de la racine) et ses limites unilatérales en $\lambda\pm i0$ sont données par le signe de $Im(\Theta_{\zeta,k})$ au voisinage de l'axe réel. Remarquons ici que les signes de $\Theta^{\pm}_{\lambda,k}$ ont été énoncés dans le lemme 6.4.1. Quant aux signes de $Im(\Theta^{\pm}_{\zeta,k})$, on les déduit aisément des formules (7.26) et (7.28) : le signe de $Im(\Theta^{-}_{\lambda,k})$ change à la traversée des axes des abscisses et des ordonnées alors que celui de $Im(\Theta^{+}_{\lambda,k})$ est déterminé par la position de ζ par rapport à ces deux axes et au cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\Omega_e\,\Omega_m}$. Ces informations sont ici résumées par les figures 7.1 et 7.2.

Notons que dans la figure 7.2 pour placer le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\Omega_e\,\Omega_m}$ par rapport au coupures spectrales $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ du matériau de Drude, nous avons utilisé les inégalités suivantes :

$$\lambda_1(k) \le \lambda_1(0) = \min(\Omega_e,\Omega_m) \le \sqrt{\Omega_e\,\Omega_m} \le \lambda_2(0) = \max(\Omega_e,\Omega_m) \le \lambda_2(k),$$

à prendre au sens strict pour $k\neq 0$ ou $\Omega_e\neq\Omega_m$. Celles-ci sont une conséquence immédiate de la monotonie des coupures spectrales λ_1 et λ_2 décrite dans le lemme 6.4.1.

Pour déterminer le comportement de $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ au voisinage de l'axe réel, superposons les schémas 7.1 et 7.2. Ceci nous invite à encore utiliser les zones spectrales A, B, C, D et E, définies au chapitre précédent par :

- $\mathrm{A} = \left\{(k,\lambda)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \mid \lambda > \lambda_2(k)\right\}$,
- $B = \left\{(k,\lambda)\in[0,k_c[\times\mathbb{R}^+ \mid \dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} < \lambda < \lambda_1(k)\right\}$,

2. Au voisinage des points $\pm\lambda_p(k)$ (définis par le lemme 6.5.1), nous verrons que la matrice $\zeta\,\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ est méromorphe car elle possède un pôle simple en $\pm\lambda_p(k)$ où le coefficient $a_{\zeta,k}$ devient singulier. Notons alors que dans ce cas particulier, il est préférable de justifier la proposition 7.1.8 par une simple application du théorème des résidus plutôt qu'avec le théorème de convergence dominée (car la limite $\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{\delta\to0^+}\zeta\,\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ n'est pas intégrable au voisinage de $\pm\lambda_p(k)$).

– $C = \left\{(k,\lambda) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{\Omega_m\}) \mid \max\left(\lambda_1(k), \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}\right) < \lambda < \lambda_2(k)\right\}$,

– $D = \left\{(k,\lambda) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid 0 < \lambda < \min\left(\lambda_1(k), \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}\right)\right\}$,

– $E = \left\{(k,\lambda) \in]k_c, \infty[\times (\mathbb{R}^+ \setminus \{\Omega_m\}) \mid \lambda_1(k) < \lambda < \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}\right\}$,

(où $k_c = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\Omega_e\,\Omega_m/\sqrt{\Omega_e^2+\Omega_m^2}$ désigne le point d'intersection de la courbe λ_1 et de la droite $k \mapsto k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$, cf. lemme (6.4.1)). Pour la visualisation de ces zones, nous renvoyons le lecteur aux figures 6.3, 6.5 et 6.4.

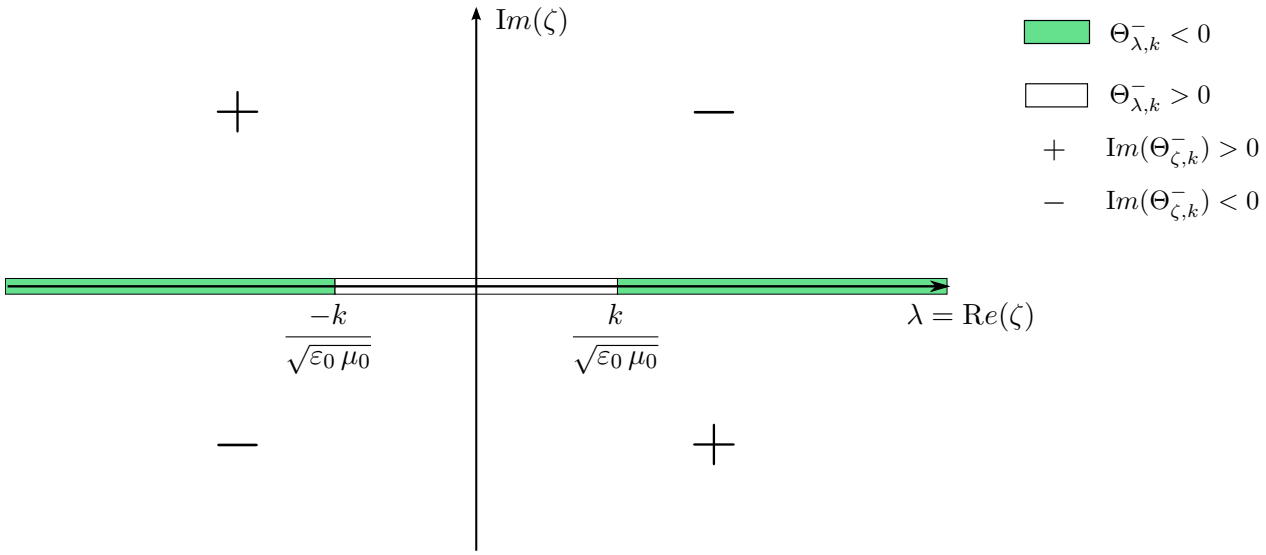

FIGURE 7.1 – Comportement à k fixé du paramètre $\Theta^-_{\zeta,k}$ au voisinage de l'axe réel

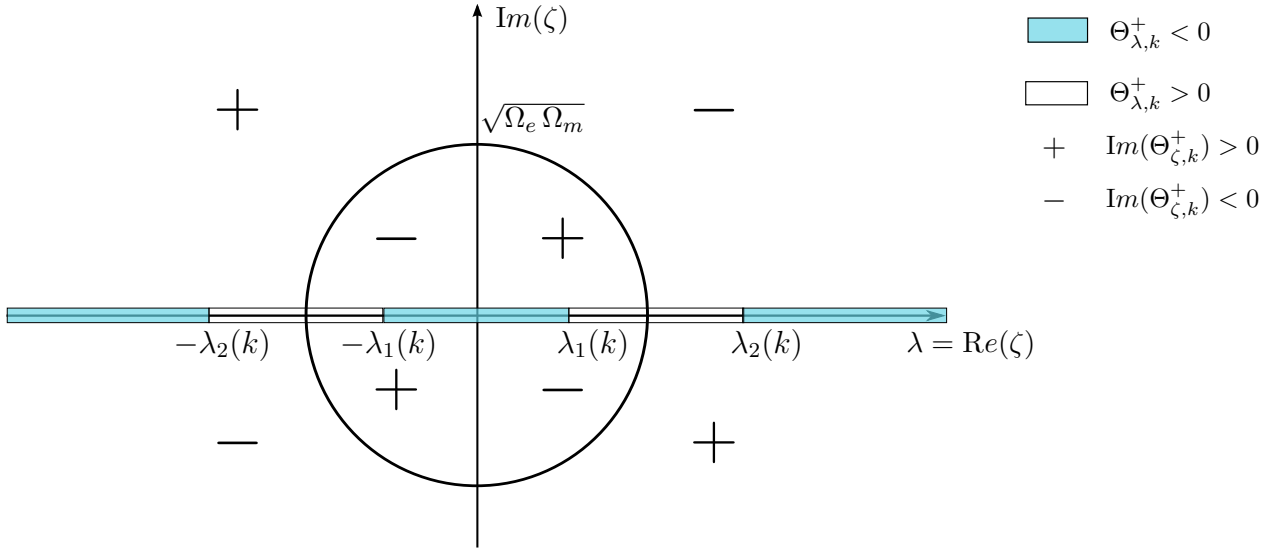

FIGURE 7.2 – Comportement à k fixé du paramètre $\Theta^+_{\zeta,k}$ au voisinage de l'axe réel

En utilisant un tel découpage sur les variables $(k, |\lambda|)$, nous montrerons que la fonction $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ possède en λ soit une discontinuité découlant des limites unilatérales des fonctions $\theta^{\pm}_{\zeta,k}$ de part

et d'autre de l'axe réel (zones A, B, C et D), soit un comportement polaire dû à une singularité du coefficient $a_{\zeta,k}$ (zone E). Pour des raisons didactiques, nous ne suivons encore pas l'ordre alphabétique pour énumérer les différents cas.

Cas où $(k, |\lambda|) \in C$

Dans cette partie du plan, (k, λ) vérifie $\max\left(\lambda_1(k), k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}\right) < |\lambda| < \lambda_2(k)$. Il est alors aisé de constater à l'aide des schémas 7.1 et 7.2 que :

$$\theta^-_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \mp i\, sgn(\lambda)\, \left|\theta^-_{\lambda,k}\right| \quad \text{et} \quad \theta^+_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \theta^+_{\lambda,k} \quad \text{avec } \theta^+_{\lambda,k} > 0,$$

où la fonction signe $sgn(\lambda)$ a pour valeur 1 si $\lambda > 0$ et -1 si $\lambda < 0$. Ainsi, seule la fonction $\theta^-_{\zeta,k}$ est discontinue. Le coefficient $a_{\zeta,k}$ admet donc une limite de part et d'autre de l'axe réel donnée par

$$a_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \left(\mp i\, sgn(\lambda)\mu_0^{-1}\left|\theta^-_{\lambda,k}\right| + \mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^{-1}.$$

Dans cette zone, la mesure spectrale $\mathrm{d}\mathbb{M}_k(\lambda)$ va donc être déterminée par le saut

$$[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda = \hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\lambda+i0,\,k} - \hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\lambda-i0,\,k}$$

de la fonction $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ à la traversée de l'axe réel. Un petit calcul permet alors d'exprimer le saut de $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ sous la forme :

$$[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda = 2\,i\,\pi\, sgn(\lambda)\, c^+_{\lambda,k}\, \overline{\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k}}(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \tag{7.44}$$

où

$$c^+_{\lambda,k} = \frac{\pi^{-1}\,\mu_0^{-1}\,\left|\theta^-_{\lambda,k}\right|}{\left(\mu_0^{-1}\left|\theta^-_{\lambda,k}\right|\right)^2 + \left(\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^2}\,. \tag{7.45}$$

Cas où $(k, |\lambda|) \in D$

Ici, λ vérifie $0 < \lambda < \min\left(\lambda_1(k), k/\sqrt{\epsilon_0\,\mu_0}\right)$. On se trouve donc dans une situation similaire à la zone C, seule une des fonctions $\theta_{\zeta,k}$ est discontinue, c'est ici $\theta^+_{\zeta,k}$. On en déduit que :

$$\theta^-_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \theta^-_{\lambda,k} \quad \text{avec } \theta^-_{\lambda,k} > 0 \quad \text{et} \quad \theta^+_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \pm i\, sgn(\lambda)\, \left|\theta^+_{\lambda,k}\right|,$$

et

$$a_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \left(\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k} \pm i\, sgn(\lambda)\mu^+(\lambda)^{-1}\,\left|\theta^+_{\lambda,k}\right|\right)^{-1}.$$

En se souvenant que $\mu^+(\lambda) < 0$ dans la zone D où le matériau de Drude se comporte comme un N.I.M. (métamatériau à indice de réfraction négative), on tire alors de ces limites le saut de $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ qui prend ici la forme suivante [3] :

$$[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda = 2\,i\,\pi\, sgn(\lambda)\, c^-_{\lambda,k}\, \overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}}(\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^\top \tag{7.46}$$

avec

$$c^-_{\lambda,k} = \frac{\pi^{-1}\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\left|\theta^+_{\lambda,k}\right|}{\left(\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^2 + \left(\mu^+(\lambda)^{-1}\left|\theta^+_{\lambda,k}\right|\right)^2}\,. \tag{7.47}$$

3. Notons que dans les zones C et D, les vecteurs $\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k}$ et $\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}$ sont réels. Nous les conjuguons pour uniformiser l'écriture du saut $[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda$ entre les différentes zones.

Cas où $(k,|\lambda|) \in \mathrm{A}$

Rappelons que dans cette zone $|\lambda| > \lambda_2(k)$. Il en découle que

$$\theta^{\pm}_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \mp i\, sgn(\lambda)\, \left|\theta^{\pm}_{\lambda,k}\right|,$$

et

$$a_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \mp i\, sgn(\lambda)\, \left(\mu_0^{-1}\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right| + \mu^+(\lambda)^{-1}\left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right|\right)^{-1}.$$

Le calcul du saut de $[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda$ ne soulève alors aucune difficulté, on trouve :

$$[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda = \frac{2\,i\,sgn(\lambda)}{\left(\mu_0^{-1}\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right| + \mu^+(\lambda)^{-1}\left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right|\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_0^{-1}\,\mu^+(\lambda)^{-1}\,\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right|\left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right| \end{pmatrix}.$$

Pour uniformiser l'expression du saut avec les zones C et D, cette dernière expression peut être réécrite sous la forme [4]

$$[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda = 2\,i\,\pi\, sgn(\lambda)\left(c^+_{\lambda,k}\,\overline{\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k}}(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top + c^-_{\lambda,k}\,\overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}}(\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^\top\right)$$

où

$$c^-_{\lambda,k} = \frac{\pi^{-1}\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right|}{\left(\mu_0^{-1}\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right| + |\mu^+(\lambda)|^{-1}\left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right|\right)^2} \quad \text{et} \quad c^+_{\lambda,k} = \frac{\pi^{-1}\mu_0^{-1}\,\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right|}{\left(\mu_0^{-1}\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right| + |\mu^+(\lambda)|^{-1}\left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right|\right)^2}. \tag{7.48}$$

Cas où $(k,|\lambda|) \in B$

Ici, $k/\sqrt{\epsilon_0\,\mu_0} < |\lambda| < \lambda_1(k)$, il vient alors que

$$\theta^{-}_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \mp i\, sgn(\lambda)\, \left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right| \quad \text{et} \quad \theta^{+}_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \pm i\, sgn(\lambda)\, \left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right|.$$

Il en résulte que

$$a_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \mp i\, sgn(\lambda)\, \left(\mu_0^{-1}\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right| - \mu^+(\lambda)^{-1}\left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right|\right)^{-1}.$$

Notons que cette limite existe car $\mu_0^{-1}\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right| - \mu^+(\lambda)^{-1}\left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right| > 0$ dans la mesure où $\mu^+(\lambda) < 0$ dans cette zone où le matériau de Drude se comporte comme un NIM. La fonction $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ est ici discontinue, son saut à travers l'axe réel est donné par la même formule que dans la zone A :

$$[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda = \frac{2\,i\,sgn(\lambda)}{\left(\mu_0^{-1}\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right| + |\mu^+(\lambda)|^{-1}\left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right|\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_0^{-1}\,\left|\mu^+(\lambda)\right|^{-1}\,\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right|\left|\theta^{+}_{\lambda,k}\right| \end{pmatrix}.$$

Ici, on peut reformuler cette dernière relation sous la forme :

$$[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda = 2\,i\,\pi\, sgn(\lambda)\left(c^+_{\lambda,k}\,\overline{\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k}}(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top + c^-_{\lambda,k}\,\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}(\overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}})^\top\right)$$

où $c^-_{\lambda,k}$ et $c^+_{\lambda,k}$ sont les constantes décrites par la formule (7.48).

4. Rappelons (cf. 6.23) que la racine d'un réel x négatif est égale à $-i\,|x|^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, dans les zones A et B, nous avons $\theta^{\pm}_{\lambda,k} = -i\left|\theta^{\pm}_{\lambda,k}\right|$.

Remarque 7.1.9 *Que devient l'expression du saut $[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda$, défini par les formules (7.1.3), (7.1.3), (7.44) et (7.46), lorsque $(k,|\lambda|)$ appartient à la frontière d'une des zones* A, *B, C ou D (c'est-à-dire aux coupures spectrales) où les paramètres $\theta^\pm_{\lambda,k}$ s'annulent. Notons tout d'abord qu'à la traversée d'une seule coupure spectrale, donc lorsqu'un seul des paramètres $\theta^\pm_{\lambda,k}$ s'annule, il est facile de vérifier que le saut $[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda$ n'est pas singulier et qu'il est même continu d'une zone à l'autre. Constatons ensuite que la seule singularité de $[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda$ apparaît en $k = k_c$ et $|\lambda| = \lambda_c = k_c/(\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0})$ (intersection des coupures spectrales λ_1 et $k \mapsto k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$) lorsque les fonctions $\theta^\pm_{\lambda,k}$ sont simultanément nulles. On se trouve (cf. figure (6.2)) à la jonction des zones spectrales C et D (ou de leur symétrique par rapport à l'axe des abscisses pour $\lambda = -\lambda_c$). Un petit calcul montre alors que les singularités des sauts (7.44) et (7.46) en ces points sont en $\left(\sqrt{|\lambda-\lambda_c|}\right)^{-1}$ et restent donc intégrables.*

Cas où $(k,|\lambda|) \in E$

Dans cette zone, λ satisfait l'inégalité suivante $\lambda_1(k) < |\lambda| < k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$. Les fonctions $\theta_{\zeta,k}$ sont alors toutes deux continues (et même analytiques) au voisinage de λ :

$$\theta^-_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \theta^-_{\lambda,k} \quad \text{et} \quad \theta^+_{\zeta,k} \underset{\zeta\to\lambda\pm i0}{\longrightarrow} \theta^+_{\lambda,k} \quad \text{avec } \theta^\pm_{\lambda,k} > 0.$$

A la différence des autres zones, c'est ici le coefficient $a_{\zeta,k}$ qui va caractériser la mesure spectrale $\mathrm{d}\mathbb{M}_\lambda(k)$. En effet, $a_{\zeta,k}$ possède deux singularités polaires en $\zeta = \pm\lambda_p(k)$, valeurs de λ pour lesquelles (k,λ) vérifie la relation de dispersion (6.37) (cf. lemme 6.5.1) [5] :

$$\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\lambda,k} = -\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}.$$

A k fixé, $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ possède ainsi deux pôles [6] isolés en $\lambda = \pm\lambda_p(k)$.

Lorsque I ne rencontre pas les pôles : $\pm\lambda_p(k)$, $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ est analytique sur un voisinage de I (car les fonctions $\theta^\pm_{\zeta,k}$ et $a_{\zeta,k}$ sont analytiques), ainsi le passage à la limite dans la formule (7.43) donne $\mathbb{M}_k(I) = 0$. Il nous suffit donc de calculer la mesure $\mathbb{M}_k$ sur les singletons $\{\pm\lambda_p(k)\}$. Les points $\pm\lambda_p(k)$ étant isolés, on vérifie alors facilement que le contour $C_{\varepsilon,\delta}(\{\pm\lambda_p(k)\})$ dans la relation (7.43) peut être refermé en traversant l'axe réel, car la fonction y est analytique. Le théorème des résidus nous permet alors d'exprimer $\mathbb{M}_k(\{\pm\lambda_p(k)\})$:

$$\mathbb{M}_k(\{\pm\lambda_p(k)\}) = Res(-\zeta\,\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k)). \tag{7.49}$$

où la notation $Res(-\zeta\,\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k)))$ désigne les résidus de $-\zeta\,\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}$ en $\pm\lambda_p(k)$.

Calculons maintenant les quantités $Res(-\zeta\,\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k))$. Il est tout d'abord aisé de constater à l'aide de la relation (6.37) satisfaite par les couples $(k, \pm\lambda_p(k))$ que :

$$\begin{pmatrix} 1 & (\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\zeta,k} - \mu^+(\zeta)^{-1}\,\theta^+_{\zeta,k})/2 \\ (\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\zeta,k} - \mu^+(\zeta)^{-1}\,\theta^+_{\zeta,k})/2 & -\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\zeta,k}\,\mu^+(\zeta)^{-1}\,\theta^+_{\zeta,k} \end{pmatrix} \underset{\zeta\to\pm\lambda_p(k)}{\longrightarrow} \boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k}(\boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k})^\top$$

(où ici d'après (6.37) $\boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k} = \boldsymbol{C}^+_{\lambda_p(k),k}$). Avec (7.49), il vient alors :

$$\mathbb{M}_k(\{\pm\lambda_p(k)\}) = Res(-\zeta\,a_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k))\,\boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k}(\boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k})^\top. \tag{7.50}$$

Le calcul de $Res(-\zeta\,\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k))$ se résume donc avec (7.50) à celui de $Res(-\zeta a_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k))$ que nous allons expliciter dans la démonstration du lemme suivant.

5. En raison de la parité en λ de la relation de dispersion (6.37), nous avions restreint son étude dans le lemme 6.5.1 à λ positif. Pour $(k,|\lambda|) \in E$, cette relation a deux couples de solutions : $(k, \pm\lambda_p(k))$.

6. Les points $\pm\lambda_p(k)$ étant des singularités isolées de la résolvante d'un opérateur auto-adjoint, la théorie spectrale nous renseigne sur leur nature. Il ne peut s'agir que de pôles simples de la résolvante $R_k(\zeta)$.

Lemme 7.1.10 *Les résidus $Res(-\zeta\, a_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k))$ sont donnés par :*

$$Res(-\zeta a_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k)) = \frac{\lambda_p(k)^4\ |\mu^+(\lambda_p(k))|\ \theta^+_{\lambda_p(k),k}}{\Omega_m^2\sqrt{4\,k^4 + (\varepsilon_0\,\mu_0)^2(\Omega_e^2-\Omega_m^2)^2}}.$$

Preuve. Pour calculer $Res(-\zeta\, a_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k))$, réécrivons l'expression $\zeta\, a_{\zeta,k}$ sous la forme :

$$\zeta\, a_{\zeta,k} = \zeta\frac{\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k} - \mu_0^{-1}\,\theta^-_{\zeta,k}}{(\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k})^2 - (\mu_0^{-1}\,\theta^-_{\zeta,k})^2}. \tag{7.51}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction (7.51) par $\mu^+(\zeta)^2\,\zeta^4$, il vient

$$\zeta\, a_{\zeta,k} = \frac{\zeta^5\,\mu^+(\zeta)^2}{Q_k(\zeta^2)}\left(\mu^+(\lambda)^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k} - \mu_0^{-1}\,\theta^-_{\zeta,k}\right) \tag{7.52}$$

où le polynôme $Q_k(X) = \varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2-\Omega_m^2)X^2 + \Omega_m^2\,(2k^2 - \varepsilon_0\,\mu_0(\Omega_e^2-\Omega_m^2))\,X - k^2\,\Omega_m^4$, a été défini en (6.40). Le réel $\lambda_p^2(k)$ est une des racines de ce polynôme (cf. preuve du lemme 6.5.1). Nous allons donc factoriser Q_k afin de faire apparaître de façon explicite le comportement polaire de $a_{\zeta,k}$ en $\pm\lambda_p(k)$. Le degré de Q_k dépendant des paramètres Ω_e et Ω_m, il nous faut maintenant distinguer les cas $\Omega_e \neq \Omega_m$ et $\Omega_e = \Omega_m$.

• Si $\Omega_e \neq \Omega_m$, le polynôme Q_k est de degré 2. En notant $\tilde\lambda_p^2(k)$ sa seconde racine complexe, il se factorise de la manière suivante :

$$Q_k(\zeta^2) = \varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2-\Omega_m^2)(\zeta^2-\lambda_p^2(k))\,(\zeta^2-\tilde\lambda_p^2(k)).$$

En utilisant alors l'équation (7.52), la factorisation de Q_k, la relation de dispersion (6.37) satisfaite par $\lambda = \pm\lambda_p(k)$ et le fait que $\mu^+(\lambda_p(k)) < 0$, il vient après simplification :

$$Res(-\zeta\, a_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k)) = \frac{\lambda_p(k)^4\ |\mu^+(\lambda_p(k))|\ \theta^+_{\lambda_p(k),k}}{\varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2-\Omega_m^2)(\lambda_p^2(k)-\tilde\lambda_p^2(k))}.$$

Il est alors aisé de constater en distinguant les cas $\Omega_e < \Omega_m$ et $\Omega_m < \Omega_e$ (cf. démonstration du lemme 6.5.1) que le coefficient $\varepsilon_0\,\mu_0\,(\Omega_e^2-\Omega_m^2)(\lambda_p^2(k)-\tilde\lambda_p^2(k))$ (où les deux racines $\lambda_p^2(k)$ et $\tilde\lambda_p^2(k)$ de Q_k sont données par (6.41)) est égal à $\Omega_m^2\sqrt{4\,k^4 + (\varepsilon_0\,\mu_0)^2(\Omega_e^2-\Omega_m^2)^2}$.

• Si $\Omega_e = \Omega_m$, le polynôme Q_k n'est plus que de degré 1 et il admet la factorisation suivante :

$$Q_k(\zeta^2) = 2k^2\,\Omega_m^2(\zeta-\lambda_p(k))\,(\zeta+\lambda_p(k)).$$

L'équation (7.52), la factorisation de Q_k et la relation de dispersion (6.37) conduisent alors à

$$Res(-\zeta\, a_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k)) = \frac{\lambda_p(k)^4\ |\mu^+(\lambda_p(k))|\ \theta^+_{\lambda_p(k),k}}{2k^2\,\Omega_m^2}.$$

■

En se rappelant que $\boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k}$ est à coefficients réels, on obtient donc finalement avec (7.50) l'égalité suivante :

$$\mathbb{M}_k(\{\pm\lambda_p(k)\}) = c^-_{\lambda_p(k),k}\,\overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k}}\,(\boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k})^\top \tag{7.53}$$

où

$$c^-_{\lambda_p(k),k} = Res(-\zeta\, a_{\zeta,k}, \pm\lambda_p(k)) \ \text{ est donné par le lemme 7.1.10 .} \tag{7.54}$$

Remarque 7.1.11 *L'expression (7.53) prend une forme particulièrement simple lorsque* $\Omega_e = \Omega_m$ *dans la mesure où* $\lambda_p(k) = \Omega_m/\sqrt{2}$. *En effet, la perméabilité du matériau de Drude vérifie alors* $\mu^+(\lambda_p(k)) = -\mu_0$ *(cf. (5.4)) et l'on a par conséquent* $\theta^-_{\lambda_p(k),k} = \theta^+_{\lambda_p(k),k}$ *(cf. (6.37)). Il vient ainsi que :*

$$\mathbb{M}_k(\{\pm\lambda_p(k)\}) = c^-_{\Omega_m/\sqrt{2},k}\,\overline{\boldsymbol{C}^-_{\Omega_m/\sqrt{2},k}}(\boldsymbol{C}^-_{\Omega_m/\sqrt{2},k})^\top \quad o\grave{u} \quad c^-_{\Omega_m/\sqrt{2},k} = \frac{\mu_0\,\Omega_m^2\,\theta^-_{\Omega_m/\sqrt{2},k}}{8\,k^2}.$$

En constatant que les sauts $[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda$ sont des fonctions intégrables sur les intervalles considérés (cf. remarque 7.1.9), les passages à la limite $\varepsilon \mapsto 0^+$ et $\delta \mapsto 0^+$ dans (7.43), nous conduisent immédiatement aux limites suivantes [7]

– Si $|k| \leq k_c$,

$$\mathbb{M}_k(I) = \frac{1}{2\,i\pi}\int_I \lambda\,[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda\,\mathrm{d}\lambda,$$

– Si $|k| > k_c$,

$$\mathbb{M}_k(I) = \frac{1}{2\,i\pi}\int_I \lambda\,[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda\,\mathrm{d}\lambda + \mathbb{M}_k(\{\lambda_p(k)\})\,\delta_{\lambda_p(k)} + \mathbb{M}_k(\{-\lambda_p(k)\})\,\delta_{-\lambda_p(k)},$$

où nous avons prolongé par parité les résultats obtenus pour k positif à k négatif [8]. En résumé, nous obtenons la

Proposition 7.1.12 *La mesure spectrale matricielle* $\mathrm{d}\mathbb{M}_k(\lambda)$ *qui caractérise les projecteurs spectraux* $\hat{\mathbb{E}}_k(I)$ *pour tout intervalle borné* $I \subset I_0$ *est donnée par :*

– *Si* $|k| \leq k_c$,

$$\mathrm{d}\mathbb{M}_k(\lambda) = \frac{\lambda}{2i\,\pi}\,[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda\,\mathrm{d}\lambda,$$

– *Si* $|k| > k_c$,

$$\mathrm{d}\mathbb{M}_k(\lambda) = \frac{\lambda}{2i\,\pi}\,[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda\,\mathrm{d}\lambda + \mathbb{M}_k(\{\lambda_p(k)\})\,\delta_{\lambda_p(k)} + \mathbb{M}_k(\{-\lambda_p(k)\})\,\delta_{-\lambda_p(k)}.$$

Dans ces formules, la matrice auto-adjointe positive $\lambda[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda$ *a pour expression :*

$$\lambda[\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{\zeta,k}]_\lambda = |\lambda| \left| \begin{array}{l} c^+_{\lambda,k}\,\overline{\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k}}(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top + c^-_{\lambda,k}\,\overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}}(\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^\top, \quad \textit{pour } (|k|\,,|\lambda|) \in \mathrm{A}, \\ c^+_{\lambda,k}\,\overline{\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k}}(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top + c^-_{\lambda,k}\,\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}(\overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}})^\top, \quad \textit{pour } (|k|\,,|\lambda|) \in B, \\ c^+_{\lambda,k}\,\overline{\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k}}(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top, \quad \textit{pour } (|k|\,,|\lambda|) \in C, \\ c^-_{\lambda,k}\,\overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}}(\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^\top, \quad \textit{pour } (|k|\,,|\lambda|) \in D. \end{array} \right.$$

7. Un cas particulier est le cas limite $k = \pm k_c$ et $I = \{\pm\lambda_c\}$. En effet, nous n'avons pas étudié le comportement de $\hat{\mathbb{G}}^{sym}_{k,\zeta}$ au voisinage des points $\pm\lambda_c$. Nous n'avons donc pas prouvé par le calcul que $\mathbb{M}_{\pm k_c}(\{\pm\lambda_c\}) = 0$. Cependant, nous disposions déjà de cette information. En effet, nous savons (cf. chapitre précédent) que $\pm\lambda_c$ n'est pas une valeur propre de $\hat{\mathbb{A}}_{\pm k_c}$, ainsi les projecteurs spectraux $\hat{\mathbb{E}}_{\pm k_c}(\{\pm\lambda_c\})$ sont nuls et donc $\mathbb{M}_{\pm k_c}(\{\pm\lambda_c\}) = 0$ (d'après la formule (7.42)).

8. A ce titre, la courbe de dispersion λ_p est prolongée par parité sur $]-\infty, -k_c[$. Par la suite, nous supposerons également que les coupures spectrales λ_1 et λ_2 ont été prolongées par parité à tout $k \in \mathbb{R}$.

où les coefficients $c^+_{\lambda,k}$ et $c^-_{\lambda,k}$ sont respectivement décrits par la formule (7.48) sur les ensembles A *et* B *et par (7.45) et (7.47) sur* C *et* D.
Quant aux matrices auto-adjointes positives $\mathbb{M}_k(\{\pm\lambda_p(k)\})$, elles s'écrivent de la manière suivante :

$$\mathbb{M}_k(\{\pm\lambda_p(k)\}) = c^-_{\lambda_p(k),k}\overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k}}(\boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k})^\top,$$

où $c^-_{\lambda_p(k),k}$ est donné par la formule (7.54).

Forme diagonale des projecteurs spectraux

Nous cherchons maintenant à l'aide des deux propositions 7.1.8 et 7.1.12 à exprimer notre famille spectrale sous la forme diagonale suivante :

$$(\hat{\mathbb{E}}_k(I)\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_I(\lambda) \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}} \right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} \overline{\left\langle \hat{\boldsymbol{V}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}} \right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}}\, \mathrm{d}m_k(\lambda), \tag{7.55}$$

où l' intervalle I est inclus dans $I_0 = \mathbb{R}\backslash\{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$ et les fonctions $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}}$ sont, à un coefficient de normalisation près, les vecteurs propres et vecteurs propres généralisés introduits au chapitre précédent pour construire notre famille modale. Sur les intervalles $I \subset I_0$, la mesure spectrale de l'opérateur de $\hat{\mathbb{A}}_k$ sera alors donnée par

$$\mathrm{d}\left(\hat{\mathbb{E}}_{k,\lambda}\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}} = \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}} \right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} \overline{\left\langle \hat{\boldsymbol{V}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}} \right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}}\, \mathrm{d}m_k(\lambda). \tag{7.56}$$

Commentons l'expression (7.55). L'ensemble $J_{\lambda,k} \subset \{-1,1\}$ (cette inclusion peut être stricte), son cardinal représente la multiplicité de λ en tant qu'élément du spectre de $\hat{\mathbb{A}}_k$. Quant à la notation $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}$, elle désigne un crochet de dualité. L'utilisation de ce crochet est motivée par le fait que les vecteurs propres généralisés sont bornés mais ne sont pas d'énergie finie. Ils appartiennent à un espace $\hat{\mathcal{H}}_\uparrow$ contenant $\hat{\mathcal{H}}$, construit à l'aide d'espaces "L^2 à poids polynomiaux" :

$$\hat{\mathcal{H}}_\uparrow = L^2_{-s}(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{-s}}(\mathbb{R}) \times L^2_{-s}(\mathbb{R}_+) \times \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{-s}}(\mathbb{R}_+), \quad \text{avec } s > \frac{1}{2},$$

où les espaces $L^2_s(\mathcal{O})$ et $\boldsymbol{L}^2_s(\mathcal{O})$ sont définis de la manière suivante pour $s \in \mathbb{R}$ et pour $\mathcal{O} = \mathbb{R}_+$ où $\mathbb{R}$:

$$L^2_s(\mathcal{O}) = \left\{\hat{u} \mid (1+x^2)^{\frac{s}{2}}\,\hat{u} \in L^2_s(\mathcal{O})\right\} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{L}^2_s(\mathcal{O}) = \left\{\hat{\boldsymbol{u}} \mid (1+x^2)^{\frac{s}{2}}\,\hat{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{L}^2_s(\mathcal{O})\right\}.$$

Le choix de s est ici justifié par le fait que les fonctions bornées appartiennent à l'espace $\hat{\mathcal{H}}_\uparrow$ pour des $s > 1/2$.
Les fonctions de $\hat{\mathcal{H}}_\uparrow$ sont alors testées contre les éléments de son dual :

$$\hat{\mathcal{H}}_\downarrow = L^2_s(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{s}}(\mathbb{R}) \times L^2_s(\mathbb{R}_+) \times \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{s}}(\mathbb{R}_+),$$

sous-espace dense dans $\hat{\mathcal{H}}$. Le crochet de dualité $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}$ entre $\hat{\mathcal{H}}_\downarrow$ et $\hat{\mathcal{H}}_\uparrow$ est alors une extension du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\hat{\mathcal{H}}}$ au sens où :

$$\left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}} \right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} = (\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}},\ \forall\, \hat{\boldsymbol{U}} \in \hat{\mathcal{H}}_\downarrow \text{ et } \hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\mathcal{H}}.$$

Notons alors que les formules (7.55) et (7.56) ne sont valables que pour des fonctions $\hat{\boldsymbol{U}}$ et $\hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\mathcal{H}}_\downarrow$.

Expression des vecteurs propres et vecteurs propres généralisés

Nous allons ici construire une famille modale de vecteurs propres et vecteurs propres généralisés $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}$ dans laquelle l'expression des projecteurs spectraux $\hat{\mathbb{E}}_k(I)$ (pour I inclus dans I_0) prend la forme diagonale (7.55).

A cette fin déterminons tout d'abord la mesure m_k dans l'équation (7.55) de manière à ce que son support coïncide avec celui de la mesure matricielle $\mathbb{M}_k$. D'après la proposition 7.1.12, il nous suffit en fait de choisir :

– Si $|k| \leq k_c$,
$$\mathrm{d}m_k(\lambda) = \mathrm{d}\lambda,$$
– Si $|k| > k_c$,
$$\mathrm{d}m_k(\lambda) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\left\{\lambda,\,|\,|\lambda|\in]\lambda_1(k),\,|k|/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}[\right\}}\,\mathrm{d}\lambda + \delta_{\lambda_p(k)} + \delta_{-\lambda_p(k)}.$$

Notons alors que compte tenu de la proposition 7.1.12, la relation (7.42) prend la forme suivante

$$(\hat{\mathbb{E}}_k(I)\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_I(\lambda) \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{u}_{\lambda,\,k,\,j}}(\hat{\mathbb{S}}_{\zeta,k}\hat{\boldsymbol{U}})(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\top} \left(\overline{\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{u}_{\lambda,\,k,\,j}}(\hat{\mathbb{S}}_{\lambda,k}\hat{\boldsymbol{V}})(y)\,\mathrm{d}y}\right) \mathrm{d}m_k(\lambda), \tag{7.57}$$

pour tout $\hat{\boldsymbol{U}}$ et $\hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$. Les fonctions $\hat{u}_{\lambda,\,k,\,j}$ sont ici définies à un coefficient complexe de module 1 près que nous notons $o_{\lambda,k,j}$. Précisons leur expression, ainsi que celle de l'ensemble $J_{\lambda,k}$ dans chaque zone spectrale :

– Dans A, $J_{\lambda,k} = \{-1, 1\}$ et
$$\hat{u}_{\lambda,\,k,\,1} = o_{\lambda,k,1}\,(|\lambda|\,c^+_{\lambda,k})^{\frac{1}{2}}\,(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^{\top}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}} \quad\text{et}\quad \hat{u}_{\lambda,\,k,\,-1} = o_{\lambda,k,-1}\,(|\lambda|\,c^-_{\lambda,k})^{\frac{1}{2}}\,(\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^{\top}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}},$$
– Dans B, $J_{\lambda,k} = \{-1, 1\}$ et
$$\hat{u}_{\lambda,\,k,\,1} = o_{\lambda,k,1}\,(|\lambda|\,c^+_{\lambda,k})^{\frac{1}{2}}\,(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^{\top}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}} \quad\text{et}\quad \hat{u}_{\lambda,\,k,\,-1} = o_{\lambda,k,-1}\,(|\lambda|\,c^-_{\lambda,k})^{\frac{1}{2}}\,(\overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}})^{\top}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}},$$
– Dans C, $J_{\lambda,k} = \{1\}$ et
$$\hat{u}_{\lambda,\,k,\,1} = o_{\lambda,k,1}\,(|\lambda|\,c^+_{\lambda,k})^{\frac{1}{2}}\,(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^{\top}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}},$$
– Dans D, $J_{\lambda,k} = \{-1\}$ et
$$\hat{u}_{\lambda,\,k,\,-1} = o_{\lambda,k,-1}\,(|\lambda|\,c^-_{\lambda,k})^{\frac{1}{2}}\,(\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k})^{\top}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}},$$

Enfin dans la zone E, $J_{\lambda,k} = \{1\}$ et
$$\hat{u}_{\pm\lambda_p(k),\,k,\,1} = o_{\pm\lambda_p(k),k,1}(c^-_{\lambda_p(k),k})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{C}^-_{\lambda_p(k),k})^{\top}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda_p(k)},\boldsymbol{k}},$$

où les constantes $c^+_{\lambda,k}$ et $c^-_{\lambda,k}$ sont respectivement données par la formule (7.48) sur les ensembles A et B, par (7.45) et (7.47) sur C et D et par (7.54) dans E.

En vue d'obtenir des propriétés de continuités des fonctions $\hat{u}_{\lambda,\,k,\,j}$ à la traversée des coupures spectrales (cf. remarque 7.1.13), choisissons les coefficients de module un $o_{\lambda,k,j}$ de la manière

suivante :

$$o_{\lambda,k,j} = \left| \begin{array}{l} 1, \quad \text{pour } (|k|,|\lambda|) \in \mathrm{A} \cup B \cup E \text{ et } j \in J_{\lambda,k}, \\ \dfrac{\left(\left(\mu_0^{-1} \left|\theta_{\lambda,k}^{-1}\right|\right)^2 + \left(\mu^+(\lambda)^{-1}\, \theta_{\lambda,k}^+\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{i\ |\mu^+(\lambda)|^{-1}\, \theta_{\lambda,k}^+ + \mu_0^{-1} \left|\theta_{\lambda,k}^-\right|}, \quad \text{pour } (|k|,|\lambda|) \in C \text{ et } \ j = 1 \\ \dfrac{\left(\left(\mu_0^{-1}\theta_{\lambda,k}^{-1}\right)^2 + \left(\mu^+(\lambda)^{-1} \left|\theta_{\lambda,k}^+\right|\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{i\mu_0^{-1}\theta_{\lambda,k}^- + |\mu^+(\lambda)|^{-1} \left|\theta_{\lambda,k}^+\right|}, \quad \text{pour } (|k|,|\lambda|) \in D \text{ et } \ j = -1. \end{array} \right.$$

Les fonctions $\hat{u}_{\lambda,k,j}$ s'expriment alors de la manière suivante :

$$\hat{u}_{\lambda,k,1} = \tilde{c}_{\lambda,k}^+ \, (\boldsymbol{C}_{\lambda,k}^+)^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda,k}} \ \text{ pour } \ (|k|,|\lambda|) \in \mathrm{A} \cup B \cup C, \tag{7.58}$$

$$\hat{u}_{\lambda,k,-1} = \tilde{c}_{\lambda,k}^- \left| \begin{array}{l} (\boldsymbol{C}_{\lambda,k}^-)^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda,k}} \ \text{ pour } \ (|k|,|\lambda|) \in \mathrm{A} \cup D, \\ (\overline{\boldsymbol{C}_{\lambda,k}^-})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda,k}} \ \text{ pour } \ (|k|,|\lambda|) \in B, \end{array} \right. \tag{7.59}$$

et

$$\hat{u}_{\pm\lambda_p(k),k,1} = \tilde{c}_{\lambda_p(k),k}^- \, (\boldsymbol{C}_{\lambda_p(k),k}^-)^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda_p(k),k}} \ \text{ pour } \ |k| > k_c, \tag{7.60}$$

où les constantes $\tilde{c}_{\lambda,k}^+$, $\tilde{c}_{\lambda,k}^-$ et $\tilde{c}_{\lambda_p(k),k}^-$ sont respectivement données par

$$\tilde{c}_{\lambda,k}^+ = \frac{(\pi^{-1}\,|\lambda|\,\mu_0^{-1}\,\left|\theta_{\lambda,k}^-\right|)^{\frac{1}{2}}}{i\,\left(\mu_0^{-1}\theta_{\lambda,k}^- + |\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta_{\lambda,k}^+\right)}, \ \tilde{c}_{\lambda,k}^- = \frac{(\pi^{-1}\,|\lambda|\ |\mu^+(\lambda)|^{-1}\ \left|\theta_{\lambda,k}^+\right|)^{\frac{1}{2}}}{i\,\left(\mu_0^{-1}\theta_{\lambda,k}^- + |\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta_{\lambda,k}^+\right)} \ \text{ et } \ \tilde{c}_{\lambda_p(k),k}^- = (c_{\lambda_p(k),k}{}^-)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.61}$$

($c_{\lambda_p(k),k}^-$ étant définie par (7.54)).

Nous pouvons maintenant conclure ce calcul en donnant l'expression des vecteurs propres et vecteurs propres généralisés $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}}$. En effet, on montre par intégration par parties que pour tout $\hat{\boldsymbol{U}} \in \hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{u}_{\lambda,k,j}} (\hat{\mathbb{S}}_{\lambda,k} \hat{\boldsymbol{U}})(x)\, \mathrm{d}x = \left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \mathbb{V}_{\lambda,k}\, \hat{u}_{\lambda,k,j} \right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}.$$

où l'application $\mathbb{V}_{\lambda,k}$ a été définie au chapitre précédent en (6.17) par

$$\mathbb{V}_{\lambda,k}\, \hat{u}_{\lambda,k,j} = \left(\hat{u}_{\lambda,k,j},\ \frac{-i\, \mathbf{rot_k}\, \hat{u}_{\lambda,k,j}}{\mu(\cdot,\lambda)\,\lambda},\ i\, \frac{\mathrm{R}\, \hat{u}_{\lambda,k,j}}{\lambda},\ \frac{\mathbf{R}\, \mathbf{rot_k}\, \hat{u}_{\lambda,k,j}}{\mu(\cdot,\lambda)\,\lambda^2} \right).$$

Ainsi, en posant dans les zones spectrales A, B, C, D,

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}} = \mathbb{V}_{\lambda,k}\, \hat{u}_{\lambda,k,j}, \ \forall j \in J_{\lambda,k} \tag{7.62}$$

et

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\pm\lambda_p(k),k,1} = \mathbb{V}_{\pm\lambda_p(k),k}\, \hat{u}_{\pm\lambda_p(k),k,1} \in D(\hat{\mathbb{A}}_k) \ \text{ pour } \ |k| > k_c, \tag{7.63}$$

on obtient à partir de la relation (7.57) la forme diagonale (7.55) des projecteurs spectraux $\hat{\mathbb{E}}_k(I)$. Notons alors que nous retrouvons bien à un facteur de normalisation près les modes $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}}$ introduits au chapitre précédent.

Remarque 7.1.13 *A ce stade, nous n'avons démontré l'expression (7.55) que pour des fonctions $\hat{\boldsymbol{U}}$ et $\hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$ et des intervalles I bornés de $\mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$. En fait, celle-ci se prolonge d'une part aisément*[9] *par densité à des fonctions $\hat{\boldsymbol{U}}$ et $\hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\mathcal{H}}_{\downarrow}$. Sa généralisation à des intervalles I quelconques de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$ découle immédiatement de la définition 7.3.3 (car un intervalle I non borné peut être vu comme une union dénombrable d'intervalles bornés disjoints).*

Remarque 7.1.14 *Notons que le vecteur propre généralisé $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}}$ défini par les relations (7.58) et (7.62) a une expression qui se prolonge de la zone* A *à la zone C à la traversée de la coupure spectrale $\lambda_2(\cdot)$, de la zone C à la zone B en passant par $\lambda_1(\cdot)$. Il en est de même pour $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,-1}}$ (décrit par (7.59) et (7.62)) dont la définition se prolonge également de la zone B à la zone D à travers la droite $\lambda = k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ (car $\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k} = \overline{\boldsymbol{C}^-_{\lambda,k}}$ dans D).*

De l'expression de la famille spectrale, on tire alors le corollaire suivant sur la structure du spectre de l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ (cf. proposition 7.3.9 et définition 7.3.13).

Corollaire 7.1.15 *La structure du spectre $\sigma(\hat{\mathbb{A}}_k)$ de l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ dépend du paramètre k :*

- *Si $|k| \leq k_c$, $\sigma(\hat{\mathbb{A}}_k) = \mathbb{R}$ et il se subdivise en*

$$\sigma_p(\hat{\mathbb{A}}_k) = \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\} \quad et \quad \sigma_c(\hat{\mathbb{A}}_k) = \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\},$$

  où les valeurs propres $-\Omega_m$, 0 et Ω_m sont de multiplicité infinie. Quant à la seconde décomposition du spectre (liée à la structure de la mesure spectrale), elle est donnée par :

$$\sigma_{pp}(\hat{\mathbb{A}}_k) = \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\},\ \sigma_{ac}(\hat{\mathbb{A}}_k) = \mathbb{R} \quad et \quad \sigma_{sc}(\hat{\mathbb{A}}_k) = \varnothing.$$

- *Si $|k| > k_c$, $\sigma(\hat{\mathbb{A}}_k)$ se partitionne de la manière suivante :*

$$\sigma_p(\hat{\mathbb{A}}_k) = \{-\Omega_m, -\lambda_p(k), 0, \lambda_p(k), \Omega_m\} \text{ et } \sigma_c(\mathbb{A}_k) = \{\lambda \in \mathbb{R}^*,\ |\ |\lambda| \notin]\lambda_1(k),\, |k|/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}[\}\,,$$

  les valeurs propres $-\Omega_m$, 0 et Ω_m étant encore de multiplicité infinie tandis que $\pm\lambda_p(k)$ est de multiplicité 1. Notons qu'ici :

$$\sigma_{pp}(\hat{\mathbb{A}}_k) = \{-\Omega_m, -\lambda_p(k), 0, \lambda_p(k), \Omega_m\},\ \sigma_{ac}(\mathbb{A}_k) = \{\lambda \in \mathbb{R},\ |\ |\lambda| \notin]\lambda_1(k),\, |k|/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}[\}\,,$$
$$et\ \sigma_{sc}(\hat{\mathbb{A}}_k) = \varnothing.$$

Interprétation physique des fonctions $\hat{u}_{\lambda,k,j}$

Nous proposons ici d'interpréter physiquement les fonctions $\hat{u}_{\lambda,k,j}$ (composante liée au champ électrique des modes $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}}$) en terme d'onde progressive : $Re(\hat{u}_{\lambda,k,j}\, e^{-i\lambda t})$. A cette fin, développons dans chaque zone spectrale leur expression sur les fonctions exponentielles $e^{\pm\theta^{\pm}_{\lambda,k}\, x}$. Définissons au préalable les coefficients suivants qui vont intervenir dans ces expressions :

$$R_{\lambda,k} = \frac{|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k} - \mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}}{|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k} + \mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}} \quad \text{et} \quad T_{\lambda,k} = \frac{2\left(|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\,\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}}{|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k} + \mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}}. \tag{7.64}$$

9. A l'instar du lemme 8.5 dans [117] , on pourrait montrer aisément que les différentes fonctions propres et les fonctions propres généralisées $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}}$ de $\hat{\mathbb{A}}_k$ sont uniformément bornées en x pour des paramètres spectraux (k,λ) tels que $(|k|\,,|\lambda|)$ appartiennent à un compact inclus dans une des cinq zones spectrales A, B, C, D et E. Le prolongement par densité découle alors d'une simple application du théorème de convergence dominée.

Cas où $(|k|, |\lambda|) \in C$

En explicitant (à l'aide de (6.28)) l'expression (7.58) de $\hat{u}_{\lambda,k,1}$ dans la zone C où $\mu^+(\lambda) > 0$, $\theta^-_{\lambda,k} = -i\left|\theta^-_{\lambda,k}\right|$ et $\theta^+_{\lambda,k} > 0$, il vient :

$$\hat{u}_{\lambda,k,1} = |\lambda|^{\frac{1}{2}} \begin{cases} \dfrac{e^{-\theta^-_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} - R_{\lambda,k}\,\dfrac{e^{\theta^-_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x < 0, \\ T_{\lambda,k}\,\dfrac{e^{-\,\theta^+_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{7.65}$$

La fonction $\hat{u}_{\lambda,k,1}$ peut alors être interprétée physiquement comme le résultat d'un processus de diffraction. Du côté $x < 0$, elle est la superposition d'une onde incidente en $e^{-\theta^-_{\lambda,k}\,x}$ (entrante ou sortante selon le signe de λ) et d'une onde réfléchie en $e^{\theta^-_{\lambda,k}\,x}$. Du côté $x > 0$, il s'agit d'une onde transmise en $e^{-\,\theta^+_{\lambda,k}\,x}$. La renormalisation de ces différentes ondes, nous permet d'interpréter respectivement $R_{\lambda,k}$ et $T_{\lambda,k}$ (définis en (7.64)) comme des coefficients de réflexion et de transmission. On vérifie ici que $R_{\lambda,k}$ est de module 1, il s'agit donc d'une réflexion totale : toute l'énergie de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie (l'onde transmise étant évanescente, elle ne transporte pas d'énergie).
Insistons enfin sur le fait que les ondes incidente et réfléchie sont dispersives car le module de leur vitesse phase : $\left|\theta^-_{\lambda,k}\right| / |\lambda|$ dépend de λ.

Cas où $(|k|, |\lambda|) \in D$

Pour la zone D où $\mu^+(\lambda) < 0$, $\theta^-_{\lambda,k} > 0$ et $\theta^+_{\lambda,k} = -i\left|\theta^+_{\lambda,k}\right|$, on obtient à partir de (7.59) (en utilisant (6.31)) :

$$\hat{u}_{\lambda,k,-1} = |\lambda|^{\frac{1}{2}} \begin{cases} T_{\lambda,k}\,\dfrac{e^{\theta^-_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{e^{-\theta^+_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} + R_{\lambda,k}\dfrac{e^{\theta^+_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En échangeant ici les rôles de $x > 0$ et $x < 0$, on peut interpréter la fonction $\hat{u}_{\lambda,k,-1}$ de la même façon que la fonction $\hat{u}_{\lambda,k,1}$ dans la zone C . Il s'agit encore d'une réflexion totale où l'onde transmise en $e^{\theta^-_{\lambda,k}\,x}$ est évanescente dans le diélectrique. Notons par contre que dans le matériau de Drude, qui se comporte ici comme un NIM, les signes des vitesses de phases de l'onde incidente et de l'onde réfléchie sont opposés à ceux que l'on obtiendrait pour une réflexion totale entre deux diélectriques (cf. [119]).

Cas où $(|k|, |\lambda|) \in \mathrm{A}$

Dans la zone A où $\mu^+(\lambda) > 0$, $\theta^-_{\lambda,k} = -i\left|\theta^-_{\lambda,k}\right|$ et $\theta^+_{\lambda,k} = -i\left|\theta^+_{\lambda,k}\right|$, développer (à l'aide de (6.28)) la formule (7.58) mène à une expression de $\hat{u}_{\lambda,k,1}$ identique à celle définie en (7.65) :

$$\hat{u}_{\lambda,k,1} = |\lambda|^{\frac{1}{2}} \begin{cases} \dfrac{e^{-\theta^-_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} - R_{\lambda,k}\,\dfrac{e^{\theta^-_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x<0, \\ T_{\lambda,k}\,\dfrac{e^{-\,\theta^+_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x>0, \end{cases}$$

Par contre pour $\hat{u}_{\lambda,k,-1}$, on obtient à partir de (7.59) (en utilisant (6.31)) :

$$\hat{u}_{\lambda,k,-1} = |\lambda|^{\frac{1}{2}} \begin{cases} T_{\lambda,k}\,\dfrac{e^{\theta^-_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x<0, \\ R_{\lambda,k}\dfrac{e^{-\theta^+_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{e^{\theta^+_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x>0, \end{cases}$$

Les fonctions $\hat{u}_{\lambda,k,1}$ et $\hat{u}_{\lambda,k,-1}$ peuvent encore être interprétées comme le résultat d'un processus de diffraction. Notons par contre que dans ce cas, les ondes transmises étant propagatives, la conservation de l'énergie de l'onde incidente se retrouve dans le fait que les coefficients de réflexion $R_{\lambda,k}$ et de transmission $T_{\lambda,k}$, définis en (7.64), vérifient ici $R^2_{\lambda,k} + T^2_{\lambda,k} = 1$.

Cas où $(|k|, |\lambda|) \in B$

Dans B où $\mu^+(\lambda) < 0$, $\theta^-_{\lambda,k} = -i\,\left|\theta^-_{\lambda,k}\right|$ et $\theta^+_{\lambda,k} = -i\,\left|\theta^+_{\lambda,k}\right|$, il vient à partir de (7.58) et (7.59) (en utilisant (6.28) et (6.35) :

$$\hat{u}_{\lambda,k,1} = |\lambda|^{\frac{1}{2}} \begin{cases} -R_{\lambda,k}\dfrac{e^{-\theta^-_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{e^{\theta^-_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x<0, \\ T_{\lambda,k}\,\dfrac{e^{-\,\theta^+_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x>0, \end{cases}$$

et

$$\hat{u}_{\lambda,k,-1} = |\lambda|^{\frac{1}{2}} \begin{cases} T_{\lambda,k}\,\dfrac{e^{-\theta^-_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\mu_0^{-1}\theta^-_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x<0, \\ R_{\lambda,k}\dfrac{e^{-\theta^+_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{e^{\theta^+_{\lambda,k}\,x}}{2\sqrt{\pi}\,\left(i\,|\mu^+(\lambda)|^{-1}\,\theta^+_{\lambda,k}\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x>0, \end{cases}$$

Tout comme dans la zone A, toutes les ondes : incidentes, réfléchies et transmises sont propagatives. La conservation de l'énergie de l'onde incidente s'exprime encore dans la relation $R^2_{\lambda,k} + T^2_{\lambda,k} = 1$ vérifiée par les coefficients de réflexion et de transmission : $R_{\lambda,k}$ et $T_{\lambda,k}$, définis en (7.64).

Nous constatons ensuite que dans le matériau de Drude qui se comporte ici comme un NIM, les signes des vitesses de phase de l'onde transmise pour $\hat{u}_{\lambda,k,1}$ et des ondes incidentes et réfléchies pour $\hat{u}_{\lambda,k,-1}$ sont l'opposé de ceux que l'on obtiendrait dans un processus de diffraction entre deux diélectriques. On parle en physique d'ondes inverses. Ce changement de signe est en fait lié à l'indice optique négatif du NIM qui modifie le trajet des ondes lumineuses régit par les lois de réflexion de Snell-Descartes (cf. figure 3). Pour plus de précisions à ce sujet, nous renvoyons le lecteur à [119].

Cas où $(|k|, |\lambda|) \in E$

Dans la zone E, en utilisant (6.42), la fonction $\hat{u}_{\pm\lambda_p(k),\,k,\,1}$ définie en (7.60) s'exprime directement par :

$$\hat{u}_{\pm\lambda_p(k),\,k,\,1} = \tilde{c}^-_{\lambda_p(k)} \left| \begin{array}{ll} e^{\theta^-_{\lambda_p(k),k}\,x} & \text{si } x < 0, \\ e^{-\theta^+_{\lambda_p(k),k}\,x} & \text{si } x > 0. \end{array} \right. \tag{7.66}$$

Ici, la solution évanescente de part et d'autre de l'interface ne peut être interprétée comme la réflexion d'une onde incidente sur l'interface. Il s'agit, par contre, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, d'un plasmon de surface localisé spatialement au voisinage de l'interface.

Remarque 7.1.16 *Lorsque $\Omega_e = \Omega_m$, $\lambda_p(k)$ est constant et égal à $\Omega_m/\sqrt{2}$ sur $|k| > k_c$. Ainsi l'expression (7.66) prend alors une forme particulièrement simple (cf. remarque 7.1.11) :*

$$\hat{u}_{\pm\lambda_p(k),\,k,\,1} = \frac{(\mu_0\,\theta^-_{\Omega_m/\sqrt{2},\,k})^{\frac{1}{2}}\,\Omega_m}{2\sqrt{2}\,|k|} \left| \begin{array}{ll} e^{\theta^-_{\Omega_m/\sqrt{2},\,k}\,x} & \textit{si } x < 0, \\ e^{-\theta^-_{\Omega_m/\sqrt{2},\,k}\,x} & \textit{si } x > 0. \end{array} \right. \tag{7.67}$$

Dans ce cas particulier où $\theta^-_{\Omega_m/\sqrt{2},\,k} = \theta^+_{\Omega_m/\sqrt{2},\,k} = \sqrt{k^2 - \varepsilon_0\,\mu_0\Omega_m^2/2}$, le plasmon $\hat{u}_{\,\lambda_p(k),\,k,\,1}$ est symétrique de part et d'autre de l'interface $x = 0$.

7.1.4 Diagonalisation de l'opérateur réduit

Nous cherchons ici à diagonaliser l'opérateur auto-adjoint $\hat{\mathbb{A}}_k$, c'est-à-dire à construire une application unitaire $\tilde{\mathbb{U}}_k$ de $\hat{\mathcal{H}}$ dans un espace de Hilbert $\tilde{\mathcal{L}}_k$ (que nous dénommerons par la suite espace spectral) telle que pour toute fonction borélienne f, l'opérateur $f(\mathbb{A})$ soit unitairement équivalent (par la transformation $\tilde{\mathbb{U}}_k$) à un opérateur de multiplication par la fonction f dans l'espace spectral $\tilde{\mathcal{L}}_k$. Un résultat de théorie spectrale : "le théorème de diagonalisation" (dû aux mathématiciens Von Neumann et Dixmier), nous garantit l'existence d'un tel opérateur $\tilde{\mathbb{U}}_k$. Nous allons ici le construire explicitement.

Remarque 7.1.17 *Dans le cas où $f(\lambda) = \lambda$, il s'agit ici de généraliser le résultat bien connu de diagonalisation d'une matrice symétrique $\mathbb{T}$: moyennant un changement de base, l'action de la matrice se résume à une simple multiplication par un scalaire : une valeur propre suivant chacune des directions définies par les vecteurs propres :*

$$\mathbb{T} = \mathbb{U}^* \lambda \mathbb{U},$$

où λ est ici la matrice diagonale (dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de $\mathbb{T}$) et $\mathbb{U}$ une matrice unitaire de passage de la base canonique à une base orthonormale de vecteurs propres. Dans notre situation, la diagonalisation de l'opérateur auto-adjoint $\hat{\mathbb{A}}_k$ conserve la même représentation : "l'opérateur unitaire de passage" $\tilde{\mathbb{U}}_k$ va seulement prendre une forme plus compliquée. Cette complexité résulte de la présence d'un continuum d'éléments propres (les vecteurs propres généralisés) lié au spectre continu de l'opérateur.

Nous allons en fait nous contenter de construire ici un opérateur $\tilde{\mathbb{U}}_k$ unitaire sur un sous-espace de $\hat{\mathcal{H}}$, c'est-à-dire de diagonaliser $\hat{\mathbb{A}}_k$ sur ce sous-espace. Ce dernier est défini comme l'orthogonal de l'espace $\hat{\mathcal{H}}_k = \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k - \Omega_m) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k + \Omega_m)$. Les éléments de $\hat{\mathcal{H}}_k$ sont des gradients (cf. formules (6.9) et (6.13)), travailler dans l'orthogonal de $\hat{\mathcal{H}}_k$ consiste donc à éliminer ces champs. Caractérisons l'espace $\hat{\mathcal{H}}_k^\perp$ à l'aide du

Lemme 7.1.18 *L'espace $\hat{\mathcal{H}}_k^\perp$ se réécrit de la façon suivante*

$$\hat{\mathcal{H}}_k^\perp = \Big\{\hat{\boldsymbol{U}} = (\hat{u}_E, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}, \hat{u}_P, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}) \in \hat{\mathcal{H}} \mid \mathrm{div}_k\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}|_{\mathbb{R}_-} = 0,\ \mathrm{div}_k\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}|_{\mathbb{R}_+} = 0 \text{ et } \mathrm{div}_k\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}} = 0\Big\}$$

où div_k *est défini au sens des distributions par* $\mathrm{div}_k u = \dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} + i\,k u_y$.

Preuve. Tout d'abord notons que $\hat{\mathcal{H}}_k^\perp = \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k)^\perp \cap \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k - \Omega_m)^\perp \cap \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k + \Omega_m)^\perp$. Explicitons alors l'intersection de ces trois sous-espaces. Remarquons tout d'abord que d'après (6.9),

$$\hat{\boldsymbol{U}} = (\hat{u}_E, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}, \hat{u}_P, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}) \in \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k)^\perp \iff \int_{\mathbb{R}_-} \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}\, \overline{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\, \hat{\phi}}\, \mathrm{d}x = 0,\ \forall \hat{\phi} \in H_0^1(\mathbb{R}_-).$$

$D(\mathbb{R}_-)$ étant dense dans $H_0^1(\mathbb{R}_-)$, cette dernière expression est équivalente à

$$\Big\langle \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}|_{\mathbb{R}_-}, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\, \hat{\phi} \Big\rangle = 0,\ \forall \hat{\phi} \in D(\mathbb{R}_-),$$

soit encore à

$$\Big\langle \mathrm{div}_k\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}|_{\mathbb{R}_-}, \hat{\phi} \Big\rangle = 0,\ \forall \hat{\phi} \in D(\mathbb{R}_-)$$

et à

$$\mathrm{div}_k\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}|_{\mathbb{R}_-} = 0 \ \text{ dans } \ D'(\mathbb{R}_-).$$

De la même manière, on montrerait avec (6.13) que :

$$\hat{\boldsymbol{U}} \in \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k \mp \Omega_m)^\perp \iff \mathrm{div}_k \left(\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}|_{\mathbb{R}_+} \pm i\Omega_m \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}}\right) = 0 \text{ dans } D'(\mathbb{R}_+),$$

et ainsi que :

$$\hat{\boldsymbol{U}} \in \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k - \Omega_m)^\perp \cap \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k + \Omega_m)^\perp \iff \mathrm{div}_k\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{H}}|_{\mathbb{R}_+} = 0 \text{ et } \mathrm{div}_k\, \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{M}} = 0 \text{ dans } D'(\mathbb{R}_+).$$

■

La famille modale de $\hat{\mathbb{A}}_k$ étant définie à partir des zones spectrales A, B, C, D et E, l'espace $\tilde{\mathcal{L}}_k$ va être également construit à partir de ces zones. A cette fin, nous définissons les ensembles :

- $\Lambda_{\mathrm{A}}(k) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (|k|, |\lambda|) \in \mathrm{A}\}$, $\Lambda_C(k) = \{\lambda \mid (|k|, |\lambda|) \in C\}$,
  $\Lambda_D(k) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (|k|, |\lambda|) \in D\}$, pour $k \in \mathbb{R}$,
- $\Lambda_B(k) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (|k|, |\lambda|) \in B\}$, pour $|k| < k_c$,
- $\Lambda_E(k) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (|k|, |\lambda|) \in E\} = \{-\lambda_p(k), \lambda_p(k)\}$, pour $|k| > k_c$.

Remarque 7.1.19 *Notons que l'union disjointe :* $\Lambda_{\mathrm{A}}(k) \cup \Lambda_B(k) \cup \Lambda_C(k) \cup \Lambda_D(k)$ *si* $|k| < k_c$ *et* $\Lambda_{\mathrm{A}}(k) \cup \Lambda_C(k) \cup \Lambda_D(k) \cup \Lambda_E(k)$ *si* $|k| > k_c$ *est un ensemble de mesure pleine pour* m_k *(cf. 7.1.12). Elle a donc la même mesure que l'ensemble* $I_0 = \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$*, ainsi les projecteurs spectraux associés à ces deux ensembles sont égaux (cf. 7.55).*

Nous définissons alors l'espace spectral $\tilde{\mathcal{L}}_k$ de la façon suivante [10] :

$$\tilde{\mathcal{L}}_k = \left| \begin{array}{ll} L^2(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))^2 \oplus L^2(\Lambda_B(k))^2 \oplus L^2(\Lambda_C(k)) \oplus L^2(\Lambda_D(k)) & \text{si } \ |k| < k_c, \\ L^2(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))^2 \oplus L^2(\Lambda_C(k)) \oplus L^2(\Lambda_D(k)) \oplus \mathbb{C}^2 & \text{si } \ |k| > k_c. \end{array} \right.$$

Cet espace est alors muni de la norme $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{L}}_k}$ suivante :

10. On pourrait diagonaliser l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ pour $|k| = k_c$ en définissant l'espace spectral $\tilde{\mathcal{L}}_k = L^2(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))^2 \oplus L^2(\Lambda_C(k)) \oplus L^2(\Lambda_D(k))$ car tout le raisonnement qui suit reste valable dans ce cas limite. Néanmoins, cette information serait inutile pour diagonaliser l'opérateur $\hat{\mathbb{A}} = \int_\oplus \hat{\mathbb{A}}_k\, \mathrm{d}k$, car l'ensemble $\{-k_c, k_c\}$ n'a pas de masse dans l'intégrale hilbertienne définissant $\mathbb{A}$.

– Pour $|k| < k_c$ et $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}(\cdot,-1), \tilde{u}(\cdot,1), \tilde{u}(\cdot,-1), \tilde{u}(\cdot,1), \tilde{u}(\cdot,1), \tilde{u}(\cdot,-1)) \in \tilde{\mathcal{L}}_k$

$$\begin{aligned}\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{\tilde{\mathcal{L}}_k} &= \|\tilde{u}(\cdot,-1)\|^2_{L^2(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))} + \|\tilde{u}(\cdot,1)\|^2_{L^2(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))} + \|\tilde{u}(\cdot,-1)\|^2_{L^2(\Lambda_B(k))} \\ &\quad + \|\tilde{u}(\cdot,1)\|^2_{L^2(\Lambda_B(k))} + \|\tilde{u}(\cdot,1)\|^2_{L^2(\Lambda_C(k))} + \|\tilde{u}(\cdot,-1)\|^2_{L^2(\Lambda_D(k))}\,.\end{aligned}$$

– Pour $|k| > k_c$ et $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}(\cdot,-1), \tilde{u}(\cdot,1), \tilde{u}(\cdot,1), \tilde{u}(\cdot,-1), \tilde{u}(\lambda_p(k),1), \tilde{u}(-\lambda_p(k),1)) \in \tilde{\mathcal{L}}_k$

$$\begin{aligned}\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{\tilde{\mathcal{L}}_k} &= \|\tilde{u}(\cdot,-1)\|^2_{L^2(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))} + \|\tilde{u}(\cdot,1)\|^2_{L^2(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))} + \|\tilde{u}(\cdot,1)\|^2_{L^2(\Lambda_C(k))} \\ &\quad + \|\tilde{u}(\cdot,-1)\|^2_{L^2(\Lambda_D(k))} + |\tilde{u}(\lambda_p(k),1)|^2 + |\tilde{u}(-\lambda_p(k),1))|^2\,.\end{aligned}$$

Tous les espaces L^2 sont munis ici de leur norme usuelle. Puis, nous introduisons l'application $\tilde{\mathbb{U}}_k : \hat{\mathcal{H}}_\downarrow \longmapsto \tilde{\mathcal{L}}_k$,

$$\tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}} = \left| \begin{array}{ll} \left(\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}, \tilde{\mathbb{U}}^{B}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}, \tilde{\mathbb{U}}^{C}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}, \tilde{\mathbb{U}}^{D}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}\right) & \text{si} \quad |k| < k_c, \\ \left(\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}, \tilde{\mathbb{U}}^{C}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}, \tilde{\mathbb{U}}^{D}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}, \tilde{\mathbb{U}}^{E}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}\right) & \text{si} \quad |k| > k_c. \end{array} \right.$$

où les applications $\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}}_k : \hat{\mathcal{H}}_\downarrow \longmapsto L^2(\Lambda_A(k))^2$, $\tilde{\mathbb{U}}^{B}_k : \hat{\mathcal{H}}_\downarrow \longmapsto L^2(\Lambda_B(k))^2$, $\tilde{\mathbb{U}}^{C}_k : \hat{\mathcal{H}}_\downarrow \longmapsto L^2(\Lambda_C(k))$, $\tilde{\mathbb{U}}^{D}_k : \hat{\mathcal{H}}_\downarrow \longmapsto L^2(\Lambda_D(k))$, $\tilde{\mathbb{U}}^{E}_k : \hat{\mathcal{H}}_\downarrow \longmapsto \mathbb{C}^2$ s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}}_k\hat{\boldsymbol{U}}(\lambda) = \left(\left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,-1}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}, \left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}\right),\ \tilde{\mathbb{U}}^{B}_k\hat{\boldsymbol{U}}(\lambda) = \left(\left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,-1}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}, \left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}\right), \\ &\tilde{\mathbb{U}}^{C}_k\hat{\boldsymbol{U}}(\lambda) = \left(\left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}\right),\ \tilde{\mathbb{U}}^{D}_k\hat{\boldsymbol{U}}(\lambda) = \left(\left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,-1}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}\right), \\ &\tilde{\mathbb{U}}^{E}_k\hat{\boldsymbol{U}} = \left(\left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda_p(k),k,1}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}, \left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{-\lambda_p(k),k,1}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}\right). \end{aligned} \tag{7.68}$$

Pour décrire l'opérateur $\tilde{\mathbb{U}}_k$, il nous faut introduire la notion d'isométrie partielle (cf. [70]).

Définition 7.1.20 *Soient $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_1)$ et $(\mathcal{H}_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces de Hilbert. Un opérateur $\mathbb{T}$ borné de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ est appelé isométrie partielle s'il existe un sous-espace $\mathcal{M}_1$ fermé dans $\mathcal{H}_1$ tel que*

$$\|\mathbb{T}\,u\|_2 = \|\mathbb{P}_1\,u\|_1\,,\ \forall u \in \mathcal{H}_1, \tag{7.69}$$

où $\mathbb{P}_1$ désigne la projection orthogonale de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{M}_1$.

Remarque 7.1.21 *Il est aisé de montrer (cf. [70]) à partir de la définition 7.1.20 que l'adjoint $\mathbb{T}^*$ d'une isométrie partielle est aussi une isométrie partielle au sens où il vérifie*

$$\|\mathbb{T}^*\,u\|_1 = \|\mathbb{P}_2\,u\|_2\,,\ \forall u \in \mathcal{H}_2,$$

où $\mathbb{P}_2$ est la projection orthogonale de $\mathcal{H}_2$ sur $Im(\mathbb{T})$ (qui est bien un sous-espace fermé d'après la relation (7.69)).

Théorème 7.1.22 *L'application $\tilde{\mathbb{U}}_k$ se prolonge par densité en une isométrie partielle de $\hat{\mathcal{H}}$ dans $\tilde{\mathcal{L}}_k$ satisfaisant :*

$$\tilde{\mathbb{U}}^*_k\,\tilde{\mathbb{U}}_k = \hat{\mathbb{E}}_k(I_0)$$

où $I_0 = \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$ et $\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)$ est la projection orthogonale de $\hat{\mathcal{H}}$ sur le sous-espace $\hat{\mathcal{H}}^\perp_k$ défini par le lemme 7.1.18. Pour toute fonction borélienne f et $\hat{\boldsymbol{U}} \in \hat{\mathcal{H}}$ telles que $\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)\,\hat{\boldsymbol{U}} \in D(f(\hat{\mathbb{A}}_k))$, le vecteur $f(\hat{\mathbb{A}}_k)\,\hat{\boldsymbol{U}}$ s'écrit alors :

$$f(\hat{\mathbb{A}}_k)\,\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)\hat{\boldsymbol{U}} = \tilde{\mathbb{U}}^*_k\,f(\lambda)\,\tilde{\mathbb{U}}_k\hat{\boldsymbol{U}}. \tag{7.70}$$

L'opérateur $f(\hat{\mathbb{A}}_k)$ admet ainsi sur l'ensemble $D(f(\hat{\mathbb{A}}_k)) \cap \hat{\mathcal{H}}^\perp_k$ la forme diagonale suivante :

$$f(\hat{\mathbb{A}}_k) = \tilde{\mathbb{U}}^*_k\,f(\lambda)\,\tilde{\mathbb{U}}_k. \tag{7.71}$$

Preuve. A l'aide de (7.55), nous savons que pour tout intervalle $I \subset I_0 = \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$,

$$\left\|\hat{\mathbb{E}}_k(I)\,\hat{\boldsymbol{U}}\right\|^2_{\hat{\mathcal{H}}} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_I(\lambda) \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \left|\left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}\right|^2 \mathrm{d}m_k(\lambda),\ \forall \hat{\boldsymbol{U}} \in \hat{\mathcal{H}}_{\downarrow}. \tag{7.72}$$

Pour $I = I_0$, on constate que $\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)$ est la projection orthogonale sur $\hat{\mathcal{H}}_k^{\perp} = \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k)^{\perp} \cap \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k - \Omega_m)^{\perp} \cap \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k + \Omega_m)^{\perp}$. Il vient alors avec (7.72) que

$$\left\|\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)\,\hat{\boldsymbol{U}}\right\|^2_{\hat{\mathcal{H}}} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \left|\tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}(\lambda,j)\right|^2 \mathrm{d}m_k(\lambda) = \left\|\tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}\right\|^2_{\tilde{\mathcal{L}}_k},\ \forall \hat{\boldsymbol{U}} \in \hat{\mathcal{H}}_{\downarrow}. \tag{7.73}$$

La relation (7.73) montre qu'on peut prolonger $\tilde{\mathbb{U}}_k$ à $\hat{\mathcal{H}}$ tout entier (par densité de $\hat{\mathcal{H}}_{\downarrow}$ dans $\hat{\mathcal{H}}$) et que ce prolongement vérifie encore la propriété $\left\|\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)\,\hat{\boldsymbol{U}}\right\|_{\hat{\mathcal{H}}} = \left\|\tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_k}$: c'est donc une isométrie partielle de $\hat{\mathcal{H}}$ dans l'espace spectral $\tilde{\mathcal{L}}_k$. De (7.73), on tire alors que $\tilde{\mathbb{U}}_k^*\,\tilde{\mathbb{U}}_k = \hat{\mathbb{E}}_k(I_0)$.

Prouvons maintenant l'égalité (7.71). L'équation (7.72) montre que l'expression (7.56) de la mesure spectrale sur des boréliens $I \subset I_0$ se prolonge à $\hat{\mathcal{H}}$ tout entier de la manière suivante :

$$\mathrm{d}\left(\hat{\mathbb{E}}_{k,\lambda}\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{U}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}} = \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \left|\tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}(\lambda,j)\right|^2 \mathrm{d}m_k(\lambda),\ \forall \hat{\boldsymbol{U}} \in \hat{\mathcal{H}}.$$

Avec l'identité de polarisation, on obtient alors que

$$\mathrm{d}\left(\hat{\mathbb{E}}_{k,\lambda}\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}} = \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}(\lambda,j)\,\overline{\tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{V}}(\lambda,j)}\,\mathrm{d}m_k(\lambda),\ \forall \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\mathcal{H}}.$$

Or d'après le théorème spectral 7.3.6 et la remarque 7.3.8, pour un élément $\hat{\boldsymbol{U}} \in \hat{\mathcal{H}}$ tel que $\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)\,\hat{\boldsymbol{U}} \in D(f(\hat{\mathbb{A}}_k))$, nous avons

$$(f(\hat{\mathbb{A}}_k)\,\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}} = ((f\mathbb{1}_{I_0})(\hat{\mathbb{A}}_k)\,\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}} = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathbb{1}_{I_0}(\lambda)\,\mathrm{d}\left(\hat{\mathbb{E}}_{k,\lambda}\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\hat{\mathcal{H}}},\ \forall \hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\mathcal{H}}. \tag{7.74}$$

Il vient alors

$$(f(\hat{\mathbb{A}}_k)\,\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}})_{\hat{\mathcal{H}}} = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}(\lambda,j)\,\overline{\tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{V}}(\lambda,j)}\,\mathrm{d}m_k(\lambda) = (f(\cdot)\,\hat{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}}, \tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{V}})_{\tilde{\mathcal{L}}_k}.$$

Soit

$$f(\hat{\mathbb{A}}_k)\,\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)\hat{\boldsymbol{U}} = \tilde{\mathbb{U}}_k^*\,f(\lambda)\,\tilde{\mathbb{U}}_k\hat{\boldsymbol{U}},$$

qui se simplifie en

$$f(\hat{\mathbb{A}}_k)\,\hat{\boldsymbol{U}} = \tilde{\mathbb{U}}_k^*\,f(\lambda)\,\tilde{\mathbb{U}}_k\,\hat{\boldsymbol{U}},$$

pour $\hat{\boldsymbol{U}} \in D(f(\hat{\mathbb{A}}_k)) \cap \hat{\mathcal{H}}_k^{\perp}$. ∎

Ce théorème nous montre que la famille des $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}}$ est complète dans $\hat{\mathcal{H}}_k^{\perp}$. En effet $\tilde{\mathbb{U}}_k$ étant une isométrie sur $\hat{\mathcal{H}}_k^{\perp}$ (cf. 7.73), on sait que si $\left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} = 0$ pour tout λ et tout j qui caractérisent l'espace spectral $\tilde{\mathcal{L}}_k$ alors $\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)\hat{\boldsymbol{U}} = 0$. Nous verrons avec la proposition suivante qu'elle est "orthonormale" car les $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}}$ associés à un même λ sont linéairement indépendants. Sous cette hypothèse, montrons en effet la

Proposition 7.1.23 *L'opérateur $\tilde{\mathbb{U}}_k^*$ est une isométrie partielle vérifiant :*

$$\tilde{\mathbb{U}}_k\,\tilde{\mathbb{U}}_k^* = \mathbb{I}d_{\tilde{\mathcal{L}}_k}.$$

Preuve. L'opérateur $\tilde{\mathbb{U}}_k$ étant une isométrie partielle, nous savons alors (cf. remarque 7.1.21) que $\tilde{\mathbb{U}}_k^*$ est également une isométrie partielle vérifiant :

$$\left\|\tilde{\mathbb{U}}_k^* \tilde{\boldsymbol{u}}\right\|_{\hat{\mathcal{H}}} = \left\|\tilde{\mathbb{P}}_k \tilde{\boldsymbol{u}}\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_k}, \ \forall \tilde{\boldsymbol{u}} \in \tilde{\mathcal{L}}_k, \tag{7.75}$$

où $\tilde{\mathbb{P}}_k$ est la projection orthogonale de $\tilde{\mathcal{L}}_k$ sur $Im(\tilde{\mathbb{U}}_k)$. De (7.75), on tire aisément que $\tilde{\mathbb{U}}_k \tilde{\mathbb{U}}_k^* = \tilde{\mathbb{P}}_k$. Il nous reste donc à vérifier que l'opérateur $\tilde{\mathbb{U}}_k$ est surjectif (c'est-à-dire que $Im(\tilde{\mathbb{U}}_k) = \tilde{\mathcal{L}}_k$). A cette fin, prouvons que $\tilde{\mathbb{U}}_k^*$ est injectif. Soit donc $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \tilde{\mathcal{L}}_k$ tel que $\tilde{\mathbb{U}}_k^* \tilde{\boldsymbol{u}} = 0$, autrement dit

$$\left(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\mathbb{U}}_k \hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\tilde{\mathcal{L}}_k} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in J_{\lambda,k}} \tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda, j) \, \overline{\tilde{\mathbb{U}}_k \hat{\boldsymbol{V}}(\lambda, j)} \, \mathrm{d}m_k(\lambda) = 0, \ \forall \hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\mathcal{H}}.$$

Pour un intervalle $I \subset I_0$, remplaçons $\hat{\boldsymbol{V}}$ par $\hat{\mathbb{E}}_k(I) \hat{\boldsymbol{V}}$ dans cette formule et admettons (pour un instant) que

$$\tilde{\mathbb{U}}_k \left(\hat{\mathbb{E}}_k(I) \hat{\boldsymbol{V}}\right)(\lambda, j) = \mathbb{1}_I \tilde{\mathbb{U}}_k \hat{\boldsymbol{V}}(\lambda, j), \tag{7.76}$$

il s'ensuit que

$$\left(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\mathbb{U}}_k \hat{\boldsymbol{V}}\right)_{\tilde{\mathcal{L}}_k} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_I(\lambda) \sum_{j \in J_{\lambda,k}} \tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda, j) \, \overline{\left\langle \hat{\boldsymbol{V}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}} \right\rangle}_{\hat{\mathcal{H}}} \, \mathrm{d}m_k(\lambda) = 0, \ \forall \hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\mathcal{H}}_{\downarrow}.$$

L'intervalle I étant un intervalle quelconque inclus dans I_0, ceci signifie que

$$\sum_{j \in J_{\lambda,k}} \tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda, j) \, \overline{\left\langle \hat{\boldsymbol{V}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}} \right\rangle}_{\hat{\mathcal{H}}} = 0, \ \forall \hat{\boldsymbol{V}} \in \hat{\mathcal{H}}_{\downarrow}, \ \text{pour } \mathrm{d}m_k(\lambda) \text{ presque tout } \lambda,$$

soit encore

$$\sum_{j \in J_{\lambda,k}} \tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda, j) \, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}} = 0 \ \text{ dans } \ \hat{\mathcal{H}}_{\uparrow}, \ \text{ pour } \mathrm{d}m_k(\lambda) \text{ presque tout } \lambda.$$

Les fonctions modales $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,j}}$ étant linéairement indépendantes, $\tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda, j) = 0$, et la conclusion en découle.

Pour montrer (7.76), appliquons (7.70) pour $f = \mathbb{1}_I$. Il vient alors : $\hat{\mathbb{E}}_k(I)\hat{\boldsymbol{U}} = \hat{\mathbb{U}}_k^* \, \mathbb{1}_I \, \hat{\mathbb{U}}_k \hat{\boldsymbol{U}}$ qui se réécrit de manière équivalente :

$$\tilde{\mathbb{U}}_k \, \hat{\mathbb{E}}_k(I) \, \hat{\boldsymbol{U}} = \tilde{\mathbb{P}}_k \, \mathbb{1}_I \tilde{\mathbb{U}}_k \, \hat{\boldsymbol{U}}.$$

Pour supprimer l'opérateur de projection $\tilde{\mathbb{P}}_k$ dans cette expression, notons qu'en appliquant (7.74) à $f(\hat{\mathbb{A}}_k) = \hat{\mathbb{E}}_k(I)^2$, on obtient :

$$\left\|\hat{\mathbb{E}}_k(I) \, \hat{\boldsymbol{U}}\right\|_{\hat{\mathcal{H}}}^2 = \left\|\tilde{\mathbb{U}}_k \, \hat{\mathbb{E}}_k(I) \, \hat{\boldsymbol{U}}\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_k}^2 = \left\| \, \mathbb{1}_I \tilde{\mathbb{U}}_k \, \hat{\boldsymbol{U}}\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_k}^2.$$

■

Remarque 7.1.24 *Il découle du théorème 7.1.22 et de la proposition 7.1.23 que la restriction de $\tilde{\mathbb{U}}_k$ à $\hat{\mathcal{H}}_k^{\perp}$ est un opérateur unitaire de $\hat{\mathcal{H}}_k^{\perp}$ dans $\tilde{\mathcal{L}}_k$.*

Plus précisément, on montrerait de la même façon le corollaire suivant :

Corollaire 7.1.25 *Les opérateurs $\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}}$, $\tilde{\mathbb{U}}_k^{B}$, $\tilde{\mathbb{U}}_k^{C}$, $\tilde{\mathbb{U}}_k^{D}$ et $\tilde{\mathbb{U}}_k^{E}$ se prolongent par densité sur $\mathcal{H}$ en des isométries partielles vérifiant :*

$$\begin{array}{llll}
(\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}})^*\,\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}} = \hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{\mathrm{A}}(k)) & et & \tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}}\,(\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}})^* = \mathbb{I}d_{L^2(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))^2}, \\
(\tilde{\mathbb{U}}_k^{B})^*\,\tilde{\mathbb{U}}_k^{B} = \hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{B}(k)) & et & \tilde{\mathbb{U}}_k^{B}\,(\tilde{\mathbb{U}}_k^{B})^* = \mathbb{I}d_{L^2(\Lambda_{B}(k))^2}, \\
(\tilde{\mathbb{U}}_k^{C})^*\,\tilde{\mathbb{U}}_k^{C} = \hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{C}(k)) & et & \tilde{\mathbb{U}}_k^{C}\,(\tilde{\mathbb{U}}_k^{C})^* = \mathbb{I}d_{L^2(\Lambda_{C}(k))}, \\
(\tilde{\mathbb{U}}_k^{D})^*\,\tilde{\mathbb{U}}_k^{D} = \hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{D}(k)) & et & \tilde{\mathbb{U}}_k^{D}\,(\tilde{\mathbb{U}}_k^{D})^* = \mathbb{I}d_{L^2(\Lambda_{D}(k))}, \\
(\tilde{\mathbb{U}}_k^{E})^*\,\tilde{\mathbb{U}}_k^{E} = \hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{E}(k)) & et & \tilde{\mathbb{U}}_k^{D}\,(\tilde{\mathbb{U}}_k^{D})^* = \mathbb{I}d_{\mathbb{C}^2}.
\end{array}$$

où les images des projecteurs orthogonaux : $\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))$, $\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{B}(k))$, $\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{C}(k))$, $\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{D}(k))$ et $\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{E}(k))$ forment une somme directe orthogonale de l'espace $Im(\mathbb{E}_k(I_0)) = \hat{\mathcal{H}}_k^{\perp}$ [11] *:*

$$\hat{\mathcal{H}}_k^{\perp} = \left| \begin{array}{ll}
Im(\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))) \overset{\perp}{\oplus} Im(\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{B}(k))) \overset{\perp}{\oplus} Im(\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{C}(k))) \overset{\perp}{\oplus} Im(\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{D}(k))) & si \quad |k| < k_c, \\
Im(\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))) \overset{\perp}{\oplus} Im(\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{C}(k))) \overset{\perp}{\oplus} Im(\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{D}(k))) \overset{\perp}{\oplus} Im(\hat{\mathbb{E}}_k(\Lambda_{E}(k))) & si \quad |k| > k_c.
\end{array} \right.$$

Suivant cette décomposition orthogonale de l'espace $\hat{\mathcal{H}}_k^{\perp}$, l'opérateur $f(\hat{\mathbb{A}}_k)$ s'exprime sur l'espace $D(\boldsymbol{f}(\hat{\mathbb{A}}_k)) \cap \hat{\mathcal{H}}_k^{\perp}$ sous la forme diagonale suivante :

$$f(\hat{\mathbb{A}}_k) = \left| \begin{array}{ll}
(\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}})^*\, f(\lambda)\, \tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}} \oplus (\tilde{\mathbb{U}}_k^{B})^*\, f(\lambda)\, \tilde{\mathbb{U}}_k^{B} \oplus (\tilde{\mathbb{U}}_k^{C})^*\, f(\lambda)\, \tilde{\mathbb{U}}_k^{C} \oplus (\tilde{\mathbb{U}}_k^{D})^*\, f(\lambda)\, \tilde{\mathbb{U}}_k^{D} & si \quad |k| < k_c, \\
(\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}})^*\, f(\lambda)\, \tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}} \oplus (\tilde{\mathbb{U}}_k^{C})^*\, f(\lambda)\, \tilde{\mathbb{U}}_k^{C} \oplus (\tilde{\mathbb{U}}_k^{D})^*\, f(\lambda)\, \tilde{\mathbb{U}}_k^{D} \oplus (\tilde{\mathbb{U}}_k^{E})^*\, f(\lambda)\, \tilde{\mathbb{U}}_k^{E} & si \quad |k| > k_c.
\end{array} \right.$$

Construction explicite de la transformation adjointe $\tilde{\mathbb{U}}_k^*$

Dans le paragraphe précédent, nous avons diagonalisé l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ sur l'espace $\hat{\mathcal{H}}_0^{\top}$ en construisant une isométrie partielle $\tilde{\mathbb{U}}_k : \hat{\mathcal{H}} \longmapsto \tilde{\mathcal{L}}_k$ dont la restriction à $\hat{\mathcal{H}}_k^{\perp}$ est une transformation unitaire. Nous cherchons ici à exprimer l'adjoint de cette transformation : $\tilde{\mathbb{U}}_k^*$. La définition de l'opérateur $\tilde{\mathbb{U}}_k$ nous invite à expliciter $\tilde{\mathbb{U}}_k^* : \tilde{\mathcal{L}}_k \longmapsto \hat{\mathcal{H}}$ en fonction des opérateurs $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{B})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{C})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{D})^*$ et $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{E})^*$:

– Si $|k| < k_c$, l'opérateur borné $\tilde{\mathbb{U}}_k^*$ est défini de la manière suivante, $\forall \tilde{\boldsymbol{u}} \in \tilde{\mathcal{L}}_k$, :

$$\tilde{\mathbb{U}}_k^* \tilde{\boldsymbol{u}} = \left(\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}}\right)^* (\tilde{u}(\cdot,-1), \tilde{u}(\cdot,1)) + \left(\tilde{\mathbb{U}}_k^{B}\right)^* (\tilde{u}(\cdot,-1), \tilde{u}(\cdot,1)) + \left(\tilde{\mathbb{U}}_k^{C}\right)^* \tilde{u}(\cdot,1) + \left(\tilde{\mathbb{U}}_k^{D}\right)^* \tilde{u}(\cdot,-1),$$

– Si $|k| > k_c$, l'opérateur borné $\tilde{\mathbb{U}}_k^*$ est décrit, pour tout $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \tilde{\mathcal{L}}_k$, par :

$$\tilde{\mathbb{U}}_k^* \tilde{\boldsymbol{u}} = \left(\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}}\right)^* (\tilde{u}(\cdot,-1), \tilde{u}(\cdot,1)) + \left(\tilde{\mathbb{U}}_k^{C}\right)^* \tilde{u}(\cdot,1) + \left(\tilde{\mathbb{U}}_k^{D}\right)^* \tilde{u}(\cdot,-1) + (\tilde{\mathbb{U}}_k^{E})^* (\tilde{u}(\lambda_p(k),1), \tilde{u}(-\lambda_p(k),1)).$$

Il nous reste maintenant à expliciter les opérateurs $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{B})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{C})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{D})^*$ et $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{E})^*$ avec le lemme suivant.

Proposition 7.1.26 *Les opérateurs bornés $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}})^* : \Lambda_{\mathrm{A}}(k)^2 \longmapsto \hat{\mathcal{H}}$, $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{B})^* : \Lambda_{B}(k)^2 \longmapsto \hat{\mathcal{H}}$, $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{C})^* : \Lambda_{C}(k) \longmapsto \hat{\mathcal{H}}$ et $(\tilde{\mathbb{U}}_k^{D})^* : \Lambda_{C}(k) \longmapsto \hat{\mathcal{H}}$ sont respectivement définis comme le prolongement par densité des expressions suivantes :*

11. Cette décomposition orthogonale est une conséquence directe de la définition 7.3.3 d'une famille spectrale. En effet, les intervalles des projecteurs spectraux considérés étant disjoints, leurs images sont en somme directe orthogonale. De plus, l'union de ces intervalles étant un ensemble de mesure pleine pour m_k (tout comme I_0), la somme directe de l'image de ces projecteurs est égale à $Im(\hat{\mathbb{E}}_k(I_0)) = \hat{\mathcal{H}}_k^{\perp}$ (cf. 7.1.19).

– $\forall \tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}(\cdot,-1), \tilde{u}(\cdot,1)) \in D(\Lambda_{\mathrm{A}}(k))^2$,

$$(\tilde{\mathbb{U}}_k^{\mathrm{A}})^* \tilde{\boldsymbol{u}} = \int_{\Lambda_{\mathrm{A}}(k)} \tilde{u}(\lambda,-1)\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,-1}} + \tilde{u}(\lambda,1)\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}}\, \mathrm{d}\lambda, \tag{7.77}$$

– $\forall \tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}(\cdot,-1), \tilde{u}(\cdot,1)) \in D(\Lambda_B(k))^2$,

$$(\tilde{\mathbb{U}}_k^{B})^* \tilde{\boldsymbol{u}} = \int_{\Lambda_B(k)} \tilde{u}(\lambda,-1)\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,-1}} + \tilde{u}(\lambda,1)\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}}\, \mathrm{d}\lambda, \tag{7.78}$$

– $\forall \tilde{u}(\cdot,1) \in D(\Lambda_C(k))$,

$$(\tilde{\mathbb{U}}_k^{C})^* \tilde{u} = \int_{\Lambda_C(k)} \tilde{u}(\lambda,1)\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}}\, \mathrm{d}\lambda, \tag{7.79}$$

– $\forall \tilde{u}(\cdot,-1) \in D(\Lambda_D(k))$,

$$(\tilde{\mathbb{U}}_k^{D})^* \tilde{u} = \int_{\Lambda_D(k)} \tilde{u}(\lambda,-1)\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,-1}}\, \mathrm{d}\lambda,\ \forall \tilde{u} \in D(\Lambda_D(k)). \tag{7.80}$$

Quant à l'opérateur borné $(\tilde{\mathbb{U}}_k^E)^* : \mathbb{C}^2 \longmapsto \hat{\mathcal{H}}$*, il est défini de la manière suivante :*

$$(\tilde{\mathbb{U}}_k^E)^* \tilde{\boldsymbol{u}} = \tilde{u}(\lambda_p(k),1)\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda_p(k),k,1}} + \tilde{\boldsymbol{u}}(-\lambda_p(k),1)\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{-\lambda_p(k),k,1}}, \tag{7.81}$$

$\forall \tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}(\lambda_p(k),1), \tilde{u}(-\lambda_p(k),1)) \in \mathbb{C}^2$.

Preuve. Les relations (7.77), (7.78), (7.79) et (7.80) se démontrant de la même manière, nous nous restreignons ici à la preuve de (7.79). Quant à l'expression (7.81) de l'opérateur $(\tilde{\mathbb{U}}_k^E)^*$, elle est ici aisée à vérifier à partir de la définition (7.68) de l'opérateur $\tilde{\mathbb{U}}_k^E$. Soient $\hat{\boldsymbol{U}} \in \hat{\mathcal{H}}_{\downarrow}$ et $\tilde{v} \in D(\Lambda_D(k))$. On a alors par définition :

$$\left(\tilde{\mathbb{U}}_k^C\, \hat{\boldsymbol{U}}, \tilde{v}\right)_{\Lambda_C(k)} = \int_{\Lambda_C(k)} \left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}} \right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} \overline{\tilde{v}(\lambda,1)}\, \mathrm{d}\lambda.$$

Par le théorème de Fubini [12], on peut alors inverser le crochet de dualité et l'intégrale, il s'ensuit que

$$\left(\tilde{\mathbb{U}}_k^C\, \hat{\boldsymbol{U}}, \tilde{v}\right)_{\Lambda_C(k)} = \left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, \int_{\Lambda_C(k)} \tilde{v}(\lambda,1)\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}}\, \mathrm{d}\lambda \right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}. \tag{7.82}$$

Or par continuité de l'opérateur $\tilde{\mathbb{U}}_k^C$, nous savons que :

$$\left(\tilde{\mathbb{U}}_k^C\, \hat{\boldsymbol{U}}, \tilde{v}\right)_{\Lambda_C(k)} = (\hat{\boldsymbol{U}}, (\tilde{\mathbb{U}}_k^C)^* \tilde{v})_{\hat{\mathcal{H}}} = \left\langle \hat{\boldsymbol{U}}, (\tilde{\mathbb{U}}_k^C)^* \tilde{v} \right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}. \tag{7.83}$$

Ainsi par identification des expressions (7.82) et (7.83), il vient finalement que

$$(\tilde{\mathbb{U}}_k^C)^* \tilde{v} = \int_{\Lambda_C(k)} \tilde{v}(\lambda,1)\, \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}}\, \mathrm{d}\lambda.$$

■

12. Ici, l'application du théorème de Fubini se justifie encore par le fait que pour λ appartenant à un ensemble compact de $\Lambda_C(k)$, les vecteurs propres généralisés $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda,k,1}}$ sont des fonctions de x uniformément bornées en λ.

7.2 Théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger

7.2.1 De la théorie spectrale de $\hat{\mathbb{A}}_k$ à celle $\mathbb{A}$

Nous allons ici établir le lien entre l'opérateur de Schrödinger $\mathbb{A}$ défini (5.16) et la famille d'opérateurs réduits $\hat{\mathbb{A}}_k$. Dans ce but, définissons la transformation de Fourier partielle en y, notée $\mathcal{F}$:

$$(\mathcal{F}\boldsymbol{u})(x,k) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\,\pi} \int_{-M}^{M} \boldsymbol{u}(x,y)\, e^{-i\,k\,y}\, \mathrm{d}y.$$

C'est un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$ muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$. Son inverse est défini par :

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{\boldsymbol{u}})(x,y) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \hat{\boldsymbol{u}}(x,k)\, e^{i\,k\,y}\, \mathrm{d}k.$$

Chercher des solutions de (5.15) dans le domaine de Fourier revient à définir l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}$ suivant :

$$\hat{\mathbb{A}} = \mathcal{F}\,\mathbb{A}\,\mathcal{F}^{-1} \quad \text{où} \quad D(\hat{\mathbb{A}}) = \mathcal{F}(D(\mathbb{A})). \tag{7.84}$$

On déduit alors des propriétés de la transformée de Fourier partielle que cet opérateur est décomposable (au sens de la définition (7.3.15)) sur les opérateurs réduits $\hat{\mathbb{A}}_k$ (définis par (6.6)) :

$$\hat{\mathbb{A}} = \int_{\oplus} \hat{\mathbb{A}}_k \,\mathrm{d}k \tag{7.85}$$

sur $\mathcal{H} = \int_{\oplus} \hat{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}k$ où l'espace de Hilbert $\hat{\mathcal{H}}$ a été muni de son produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\hat{\mathcal{H}}}$ (cf. (6.7) et (6.8)). L'invariance de notre milieu, selon la direction $\boldsymbol{e_y}$, nous a donc permis de décomposer $\mathbb{A}$, par le biais d'une transformée de Fourier partielle, sur la famille d'opérateurs auto-adjoints $\hat{\mathbb{A}}_k$.

Nous cherchons maintenant à tirer de l'étude spectrale de l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ celle de l'opérateur $\mathbb{A}$, c'est-à-dire dans un premier temps à construire une famille modale de $\mathbb{A}$ à l'aide des modes $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}$ de $\hat{\mathbb{A}}_k$ et dans un second temps à établir la diagonalisation de $\mathbb{A}$ à partir de celle de $\hat{\mathbb{A}}_k$. Tout reposera donc, d'après ce qui précède, sur l'utilisation de deux outils : la notion d'intégrale directe permettant de décomposer l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}$ sur les opérateurs $\hat{\mathbb{A}}_k$ (cf. (7.85)) et la transformée de Fourier partielle en y (cf. (7.84)) reliant $\hat{\mathbb{A}}$ à $\mathbb{A}$.

7.2.2 Famille modale de l'opérateur de Schrödinger

Soit $\boldsymbol{U} \in \mathcal{H}$ et $I \subset \mathbb{R}$. Relions d'abord $\mathbb{E}(I)$ au projecteur spectral $\hat{\mathbb{E}}(I)$ de l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}$. L'opérateur $\mathbb{A}$ étant unitairement équivalent à $\hat{\mathbb{A}}$: $\mathbb{A} = \mathcal{F}^{-1}\,\hat{\mathbb{A}}\,\mathcal{F}$, le calcul fonctionnel de $\mathbb{A}$ est "transporté" par l'opérateur unitaire $\mathcal{F}$:

$$f(\mathbb{A}) = \mathcal{F}^{-1}\, f(\hat{\mathbb{A}})\, \mathcal{F}.$$

En particulier, les projecteurs spectraux $\mathbb{E}(I)$ et $\hat{\mathbb{E}}(I)$ vérifient donc

$$\mathbb{E}(I) = \mathcal{F}^{-1}\,\hat{\mathbb{E}}(I)\,\mathcal{F}. \tag{7.86}$$

Nous pouvons maintenant utiliser notre second outil : la notion d'intégrale directe permettant de relier le calcul fonctionnel de $\hat{\mathbb{A}}$ à celui de $\hat{\mathbb{A}}_k$ (cf. théorème 7.3.16) afin d'exprimer $\hat{\mathbb{E}}(I)$ en fonction de $\hat{\mathbb{E}}_k$:

$$\hat{\mathbb{E}}(I) = \int_{\oplus} \hat{\mathbb{E}}_k(I)\,\mathrm{d}k \tag{7.87}$$

où l'espace $\mathcal{H}$ est alors identifié à l'intégrale directe $\int_{\oplus} \hat{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}k$.

Cas où $I \subset I_0$

Nous voulons ici exprimer les projecteurs spectraux $\mathbb{E}(I)$ en fonction d'une famille modale à variables séparables de la forme (6.3) faisant intervenir les vecteurs propres et vecteurs propres généralisés $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}$ de l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$.

De la relation (7.86) et de l'identité de Parseval-Plancherel, il découle :

$$(\mathbb{E}(I)\,\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})_{\mathcal{H}} = (\hat{\mathbb{E}}(I)\,\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{U}})_{\mathcal{H}} \quad \text{où} \quad \hat{\boldsymbol{U}} = \mathcal{F}(\boldsymbol{U}).$$

En vertu de (7.87), cette relation devient :

$$(\mathbb{E}(I)\,\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} (\hat{\mathbb{E}}_k(I)\,\hat{\boldsymbol{U}}(\cdot,k),\hat{\boldsymbol{U}}(\cdot,k))_{\hat{\mathcal{H}}}\,\mathrm{d}k.$$

Dans le but de réécrire le terme $(\hat{\mathbb{E}}_k(I)\,\hat{\boldsymbol{U}}(\cdot,k),\hat{\boldsymbol{U}}(\cdot,k))_{\hat{\mathcal{H}}}$ sous la forme diagonale (7.55), choisissons un élément $\boldsymbol{U} \in D(\mathbb{R}^2) \times \boldsymbol{D}(\mathbb{R}^2) \times D(\mathbb{R}^2_+) \times \boldsymbol{D}(\mathbb{R}^2_+)$, ce qui implique en particulier que la fonction $\hat{\boldsymbol{U}}(\cdot,k) \in \hat{\mathcal{H}}_{\downarrow}$. On a alors :

$$(\mathbb{E}(I)\,\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \mathbb{1}_I(\lambda)\,\left|\left\langle \hat{\boldsymbol{U}}(\cdot,k),\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}\right|^2 \mathrm{d}m_k(\lambda)\,\mathrm{d}k. \tag{7.88}$$

En utilisant alors le fait que

$$\hat{\boldsymbol{U}}(x,k) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{U}(x,y)\,e^{-i\,k\,y}\,\mathrm{d}y,$$

il vient (avec le théorème de Fubini pour intervertir le crochet de dualité et l'intégrale en y) :

$$\left\langle \hat{\boldsymbol{U}}(\cdot,k),\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} = \langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}(x,y) = \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}(x)\,\frac{e^{i\,k\,y}}{2\pi}. \tag{7.89}$$

A l'instar de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}$, la notation $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ désigne ici un crochet de dualité entre un espace :

$$\mathcal{H}_{\uparrow} = L^2_{-s}(\mathbb{R}^2) \times \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{-s}}(\mathbb{R}^2) \times L^2_{-s}(\mathbb{R}^2_+) \times \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{-s}}(\mathbb{R}^2_+), \quad \text{avec } s>1 \tag{7.90}$$

contenant $\mathcal{H}$ et son dual $\mathcal{H}_{\downarrow}$

$$\mathcal{H}_{\downarrow} = L^2_{s}(\mathbb{R}^2) \times \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{s}}(\mathbb{R}^2) \times L^2_{s}(\mathbb{R}^2_+) \times \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{s}}(\mathbb{R}^2_+), \tag{7.91}$$

dense dans $\mathcal{H}$ où les espaces $L^2_s(\mathcal{O})$ et $\boldsymbol{L}^2_s(\mathcal{O})$ sont définis pour $s \in \mathbb{R}$ et pour $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2_+$ où $\mathbb{R}^2$ par :

$$L^2_s(\mathcal{O}) = \left\{u \mid (1+x^2+y^2)^{\frac{s}{2}}\,u \in L^2_s(\mathcal{O})\right\} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{L}^2_s(\mathcal{O}) = \left\{\boldsymbol{u} \mid (1+x^2+y^2)^{\frac{s}{2}}\,\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2_s(\mathcal{O})\right\}.$$

Les fonctions $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}$ étant bornées sur $\mathbb{R}^2$, elles appartiennent naturellement à l'espace $\mathcal{H}_{\uparrow}$ pour $s>1$. Ce sont en fait des vecteurs propres généralisés de l'opérateur $\mathbb{A}$ s'exprimant (cf. (6.3)) comme le produit d'un vecteur propre ou vecteur propre généralisé de $\hat{\mathbb{A}}_k$ par une exponentielle $e^{i\,k\,y}$ (la constante $1/(2\pi)$ étant un facteur de renormalisation).

En revenant à l'expression (7.88), nous obtenons :

$$(\mathbb{E}(I)\,\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_I(\lambda) \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \left|\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 \mathrm{d}m_k(\lambda)\,\mathrm{d}k$$

qui se prolonge [13] (par densité de $D(\mathbb{R}^2) \times \boldsymbol{D}(\mathbb{R}^2) \times D(\mathbb{R}^2_+) \times \boldsymbol{D}(\mathbb{R}^2_+)$ dans $\mathcal{H}_\downarrow$) à tout $\boldsymbol{U} \in \mathcal{H}_\downarrow$. Finalement, par identité de polarisation, nous trouvons une décomposition modale des projecteurs spectraux :

$$(\mathbb{E}(I)\,\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_I(\lambda) \sum_{j \in J_{\lambda,k}} \langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w_{\lambda,k,j}} \rangle_{\mathcal{H}} \, \overline{\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w_{\lambda,k,j}} \rangle}_{\mathcal{H}} \, \mathrm{d}m_k(\lambda)\, \mathrm{d}k, \ \forall \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_\downarrow. \quad (7.92)$$

Explicitons maintenant la variation de la mesure spectrale de l'opérateur $\mathbb{A}$ sur des intervalles I contenus dans I_0. En effet, $\mathbb{A}$ et $\hat{\mathbb{A}}$ étant unitairement équivalent, leurs mesures spectrales vérifient :

$$\mathrm{d}(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \mathrm{d}(\hat{\mathbb{E}}_\lambda \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}})_{\mathcal{H}}, \ \forall \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathcal{H}.$$

De plus, par la relation (7.115) du théorème 7.3.16, nous avons :

$$\mathrm{d}(\hat{\mathbb{E}}_\lambda \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}})_{\mathcal{H}} = \int_{k \in \mathbb{R}} \mathrm{d}(\hat{\mathbb{E}}_{k,\lambda} \hat{\boldsymbol{U}}(\cdot, k), \hat{\boldsymbol{V}}(\cdot, k))\, \mathrm{d}k.$$

Or nous avons (cf. (7.56) et (7.89)) que pour des fonctions $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_\downarrow$:

$$\mathrm{d}(\hat{\mathbb{E}}_{k,\lambda}\, \hat{\boldsymbol{U}}(\cdot, k), \hat{\boldsymbol{V}}(\cdot, k))_{\hat{\mathcal{H}}} = \sum_{j \in J_{\lambda,k}} \langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w_{\lambda,k,j}} \rangle_{\mathcal{H}} \, \overline{\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w_{\lambda,k,j}} \rangle}_{\mathcal{H}} \, \mathrm{d}m_k(\lambda).$$

Ainsi, il vient finalement :

$$\mathrm{d}(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in J_{\lambda,k}} \langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w_{\lambda,k,j}} \rangle_{\mathcal{H}} \, \overline{\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w_{\lambda,k,j}} \rangle}_{\mathcal{H}} \, \mathrm{d}m_k(\lambda)\, \mathrm{d}k, \ \forall \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_\downarrow. \quad (7.93)$$

Remarque 7.2.1 *Effectuons quelques petits commentaires sur l'expression des projecteurs spectraux (7.92). Il est aisé de constater que*

- *Si $\Omega_e \neq \Omega_m$, $\mathbb{E}(\{\lambda\}) = 0$ pour tout $\lambda \in I_0$. Ainsi, l'opérateur $\mathbb{A}$ ne possède pas de valeurs propres dans I_0. Cette conclusion peut être également tirée du théorème 7.3.16 appliqué à $\hat{\mathbb{A}}$ et donc à $\mathbb{A}$ (car comme $\mathbb{A}$ et $\hat{\mathbb{A}}$ sont unitairement équivalents, leurs spectres sont égaux et admettent la même décomposition (7.103) en terme de spectre continu et spectre ponctuel). Ce théorème stipule d'une part que $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\mu(\{k \mid \sigma(\hat{\mathbb{A}}_k) \cap]\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon[\neq \varnothing\}) > 0,$$

et d'autre part que $\lambda \in \sigma_p(\mathbb{A})$ si et seulement si

$$\mu(\{k \mid \lambda \in \sigma_p(\hat{\mathbb{A}}_k)\}) > 0$$

(μ étant ici la mesure de Lebesgue). Ainsi, les valeurs propres de $\hat{\mathbb{A}}_k$: $\pm\lambda_p(k)$ qui sont strictement monotones en k (cf. figures 6.3 et 6.5) appartiennent au spectre continu de $\mathbb{A}$.

- *Si $\Omega_m = \Omega_e$, il existe deux valeurs de $\lambda \in I_0$: $\pm\lambda_p = \pm\Omega_m/\sqrt{2}$ pour lesquelles $\mathbb{E}(\{\lambda\}) \neq 0$. En effet,*

$$(\mathbb{E}(\{\pm\lambda_p\})\, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{|k|>k_c} \left\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w_{\pm\lambda_p,k,1}} \right\rangle_{\mathcal{H}} \, \overline{\left\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w_{\pm\lambda_p,k,1}} \right\rangle}_{\mathcal{H}} \, \mathrm{d}k, \quad (7.94)$$

13. Il suffit de montrer ce prolongement par densité sur des intervalles I bornés ne contenant pas $\pm\lambda_c$. Le passage par densité se fait alors encore à l'aide du théorème de convergence dominée.

car les courbes $\pm\lambda_p(k) = \pm\Omega_m/\sqrt{2}$ *sont ici constantes*[14] *sur* $|k| > k_c$. *Ainsi,* $\pm\lambda_p$ *appartient à* $\sigma_p(\mathbb{A})$. *Il serait alors facile de démontrer que* $\pm\lambda_p$ *est une valeur propre de multiplicité infinie. En effet, en utilisant l'équation (7.67), il est aisé de prouver que la fonction* $\hat{\boldsymbol{V}}$ *définie par*

$$\hat{\boldsymbol{V}}(x,k) = \hat{f}(k)\,\hat{\boldsymbol{w}}_{\pm\boldsymbol{\lambda_p},\boldsymbol{k},\mathbf{1}}(x),\ \forall \hat{f} \in D(\{|k| > k_c\})$$

appartient à $\mathcal{H}$ *et est un vecteur propre de* $\hat{\mathbb{A}}$ *pour la valeur propre* $\pm\lambda_p$ *(car pour tout* $k > |k_c|$, $\hat{\boldsymbol{w}}_{\pm\boldsymbol{\lambda_p},\boldsymbol{k},\mathbf{1}}$ *est un vecteur propre de* $\hat{\mathbb{A}}_k$*). Ainsi, toutes les fonctions* $\boldsymbol{V} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\boldsymbol{V}})$ *sont des vecteurs propres de* $\mathbb{A}$ *associés à la valeur propre* λ_p. *Les sous-espaces propres* $\mathrm{Ker}(\mathbb{A} \pm \lambda_p)$*contiennent donc clairement un sous-espace de dimension infinie.*

Cas où $I \subset \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$

L'opérateur réduit $\hat{\mathbb{A}}_k$ possédant pour tout $k \in \mathbb{R}$ une valeur propre en 0 et $\pm\Omega_m$, nous savons par le théorème 7.3.16 que ces points sont aussi des valeurs propres de $\hat{\mathbb{A}}$ et donc de $\mathbb{A}$, qui lui est unitairement équivalent. Les projecteurs $\mathbb{E}(\{0\})$ et $\mathbb{E}(\{\pm\Omega_m\})$ ne sont donc pas nuls. Contentons nous, tout comme dans le cas de l'opérateur réduit, de décrire leur image avec le

Lemme 7.2.2 *Le noyau de l'opérateur* $\mathbb{A}$ *et les espaces propres* $\mathrm{Ker}(\mathbb{A} \mp \Omega_m)$ *sont décrits respectivement par :*

$$\mathrm{Ker}(\mathbb{A}) = \{(0, \widetilde{\boldsymbol{\Pi}}\,\nabla\phi, 0, 0)^\top,\ \phi \in H^1_0(\mathbb{R}^2_-)\}$$

et

$$\mathrm{Ker}(\mathbb{A} \mp \Omega_m) = \left\{ \left(0,\ \boldsymbol{\Pi}\,\nabla\phi,\ 0,\ \pm i\,\frac{\nabla\phi}{\Omega_m}\right)^\top,\ \phi \in H^1_0(\mathbb{R}^2_+) \right\},$$

où $\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}$ *et* $\boldsymbol{\Pi}$ *sont respectivement les applications de prolongement par* 0 *sur* $\mathbb{R}^2_+$ *et* $\mathbb{R}^2_-$.

Preuve.

$$\boldsymbol{U} \in \mathrm{Ker}(\mathbb{A}) \Longleftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\,\hat{\mathbb{A}}\,\mathcal{F}\boldsymbol{U} = 0 \iff \hat{\mathbb{A}}\,\hat{\boldsymbol{U}} = 0.$$

En utilisant, le fait que $\hat{\mathbb{A}}$ est décomposable, cette expression est encore équivalente à

$$\hat{\boldsymbol{U}}(\cdot,k) \in \mathrm{Ker}(\hat{\mathbb{A}}_k),\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

et donc d'après (6.9) à

$$\hat{\boldsymbol{U}}(\cdot,k) = (0, \widetilde{\boldsymbol{\Pi}}\,\boldsymbol{\nabla_k}\,\hat{\phi}(\cdot,k), 0, 0)^\top \ \text{ où } \ \hat{\phi}(\cdot,k) \in H^1_0(\mathbb{R}_-),\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

Ce qui se réécrit par transformation de Fourier inverse

$$\boldsymbol{U} = (0, \widetilde{\boldsymbol{\Pi}}\,\nabla\phi, 0, 0)^\top \text{ où } \phi \in H^1_0(\mathbb{R}^2_-).$$

En utilisant la relation (6.13), on prouverait de la même manière la caractérisation des espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathbb{A} \mp \Omega_m)$. ∎

14. Nous utiliserons désormais la même notation pour la fonction constante λ_p définie sur $|k| > k_c$ et sa valeur $\lambda_p = \Omega_m/\sqrt{2}$.

On définit alors l'espace $\mathcal{H}_0$ par

$$\mathcal{H}_0 = \mathrm{Ker}(\mathbb{A}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \Omega_m) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(\mathbb{A} + \Omega_m). \tag{7.95}$$

Son orthogonal, l'image du projecteur $\mathbb{E}(I_0)$, est alors déterminé par le lemme suivant

Lemme 7.2.3 *L'espace $\mathcal{H}_0^\perp$ est caractérisé de la façon suivante*

$$\mathcal{H}_0^\perp = \left\{ \boldsymbol{U} = (u_E, \boldsymbol{u_H}, u_P, \boldsymbol{u_M}) \in \mathcal{H} \mid \mathrm{div}\, \boldsymbol{u_H}|_{\mathbb{R}^2_-} = 0,\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{u_H}|_{\mathbb{R}^2_+} = 0 \text{ et } \mathrm{div}\, \boldsymbol{u_M} = 0 \right\}$$

où l'opérateur div *est défini au sens des distributions par* $\mathrm{div}\, u = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}$.

Preuve. La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme 7.1.18. ∎

Remarque 7.2.4 *Notons que l'on retrouve ici le résultat connu qui affirme qu'éliminer les champs statiques (correspondant à la valeur propre nulle) dans un diélectrique consiste à imposer une condition de divergence nulle dans ce milieu. Pour le matériau de Drude, on obtient le même type de condition lorsqu'on élimine les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\pm\Omega_m$.*

Il découle alors de cette étude le corollaire suivant.

Corollaire 7.2.5 *Le spectre de l'opérateur $\mathbb{A}$ est $\sigma(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$. Par contre, sa structure dépend des paramètres Ω_e et Ω_m :*

- *Lorsque $\Omega_e \neq \Omega_m$,*

$$\sigma_p(\mathbb{A}) = \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\} \quad et \quad \sigma_c(\mathbb{A}) = \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\},$$

où les valeurs propres $-\Omega_m, 0$ et Ω_m sont de multiplicité infinie. De plus, en terme de mesure, il admet la décomposition suivante :

$$\sigma_{pp}(\mathbb{A}) = \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\},\ \sigma_{ac}(\mathbb{A}) = \mathbb{R} \quad et\ \sigma_{sc}(\mathbb{A}) = \varnothing.$$

Cette dernière relation permet alors de décomposer l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_{ac} \quad avec \quad \mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}_0^\perp \quad et \quad \mathcal{H}_{pp} = \mathcal{H}_0, \tag{7.96}$$

où les espaces $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_0^\perp$ ont été respectivement définis dans les lemmes 7.2.2 et 7.2.3.

- *Lorsque $\Omega_e = \Omega_m$,*

$$\sigma_p(\mathbb{A}) = \{-\Omega_m, , -\lambda_p, 0, \lambda_p, \Omega_m\} \quad et \quad \sigma_c(\mathbb{A}) = \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, , -\lambda_p, 0, \lambda_p, \Omega_m\},$$

où les valeurs propres $-\Omega_m, -\lambda_p, 0, \lambda_p$ et Ω_m sont encore de multiplicité infinie. Ici, nous avons :

$$\sigma_{pp}(\mathbb{A}) = \{-\Omega_m, -\lambda_p, 0, \lambda_p, \Omega_m\},\ \sigma_{ac}(\mathbb{A}) = \mathbb{R} \quad et\ \sigma_{sc}(\mathbb{A}) = \varnothing.$$

Ce qui se traduit par la décomposition suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_{ac},$$

$$où \quad \mathcal{H}_{ac} = Im(\mathbb{E}(I_0 \setminus \{-\lambda_p, \lambda_p\})) \ et \ \mathcal{H}_{pp} = \mathcal{H}_0 \overset{\perp}{\oplus} Im(\mathbb{E}(\{\lambda_p\}) \overset{\perp}{\oplus} Im(\mathbb{E}(\{-\lambda_p\}).$$

Notons enfin que l'espace $\mathcal{H}_0^\perp = Im(\mathbb{E}(I_0))$ se réécrit donc sous la forme :

$$\mathcal{H}_0^\perp = \mathcal{H}_{ac} \overset{\perp}{\oplus} Im(\mathbb{E}(\{\lambda_p\}) \overset{\perp}{\oplus} Im(\mathbb{E}(\{-\lambda_p\}). \tag{7.97}$$

7.2.3 Diagonalisation de l'opérateur de Schrödinger

Nous allons dans cette partie achever notre étude spectrale en définissant une transformation $\tilde{\mathbb{U}}$, de $\mathcal{H}$ dans un espace $\tilde{\mathcal{L}}$, diagonalisant l'opérateur $\mathbb{A}$ sur le sous-espace $\mathcal{H}_0^\perp$. L'espace spectral $\tilde{\mathcal{L}}$ va encore être défini à partir des zones spectrales A, B, C, D et E qui régissent le comportement des modes de $\mathbb{A}$. A cette fin, introduisons les ensembles suivants :

- $\mathcal{O}_{\mathrm{A}} = \{(\lambda,k) \in \mathbb{R}^2 \mid (|k|,|\lambda|) \in \mathrm{A}\}$, $\mathcal{O}_B = \{(\lambda,k) \in \mathbb{R}^2 \mid (|k|,|\lambda|) \in B\}$,
- $\mathcal{O}_C = \{(\lambda,k) \in \mathbb{R}^2 \mid (|k|,|\lambda|) \in C\}$, $\mathcal{O}_D = \{(\lambda,k) \in \mathbb{R}^2 \mid (|k|,|\lambda|) \in D\}$,
- $I_E = \{k \in \mathbb{R} \mid |k| > k_c\}$.

L'espace spectral est alors défini à partir de ces ensembles de la façon suivante :

$$\tilde{\mathcal{L}} = L^2(\mathcal{O}_{\mathrm{A}})^2 \oplus L^2(\mathcal{O}_B)^2 \oplus L^2(\mathcal{O}_C) \oplus L^2(\mathcal{O}_D) \oplus L^2(I_E)^2.$$

Cet espace de Hilbert est muni de la norme hermitienne $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{L}}_k}$ suivante :

$$\begin{aligned}\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{\tilde{\mathcal{L}}}^2 = {} & \|\tilde{u}(\cdot,\cdot,-1)\|_{L^2(\mathcal{O}_{\mathrm{A}})}^2 + \|\tilde{u}(\cdot,\cdot,1)\|_{L^2(\mathcal{O}_{\mathrm{A}})}^2 + \|\tilde{u}(\cdot,\cdot,-1)\|_{L^2(\mathcal{O}_B)}^2 + \|\tilde{u}(\cdot,\cdot,1)\|_{L^2(\mathcal{O}_B)}^2 \\ & + \|\tilde{u}(\cdot,\cdot,1)\|_{L^2(\mathcal{O}_C)}^2 + \|\tilde{u}(\cdot,\cdot,-1)\|_{L^2(\mathcal{O}_D)}^2 + \|\tilde{u}(\lambda_p(\cdot),\cdot,1)\|_{L^2(I_E)}^2 + \|\tilde{u}(-\lambda_p(\cdot),\cdot,1)\|_{L^2(I_E)}^2,\end{aligned}$$

où $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}(\cdot,\cdot,-1), \tilde{u}(\cdot,\cdot,1), \tilde{u}(\cdot,\cdot,-1), \tilde{u}(\cdot,\cdot,1), \tilde{u}(\cdot,\cdot,1), \tilde{u}(\cdot,\cdot,-1), \tilde{u}(\lambda_p(\cdot),\cdot,1), \tilde{u}(-\lambda_p(\cdot),\cdot,1))$. Tous les espaces L^2 sont ici munis de leur norme usuelle. Notons que la notation $\|\tilde{\boldsymbol{u}}(\pm\lambda_p(\cdot),\cdot,1)\|_{L^2(I_E)}^2$, qui est un peu ambigüe[15], est une norme L^2 de la seule variable k qui s'écrit :

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}(\pm\lambda_p(\cdot),\cdot,1)\|_{L^2(I_E)}^2 = \int_{I_E} |\tilde{\boldsymbol{u}}(\pm\lambda_p(k),k,1)|^2 \,\mathrm{d}k.$$

Introduisons maintenant la transformation $\tilde{\mathbb{U}} : \mathcal{H}_\downarrow \longmapsto \tilde{\mathcal{L}}$, construite à l'aide des modes de vibration libres $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}$ de l'opérateur $\mathbb{A}$:

$$\tilde{\mathbb{U}}\,\boldsymbol{U} = \left(\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}}\,\boldsymbol{U},\, \tilde{\mathbb{U}}^{B}\,\boldsymbol{U}, \tilde{\mathbb{U}}^{C}\,\boldsymbol{U}, \tilde{\mathbb{U}}^{D}\,\boldsymbol{U}, \tilde{\mathbb{U}}^{E}\,\boldsymbol{U}\right),$$

où les applications $\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}} : \mathcal{H}_\downarrow \longmapsto L^2(\mathcal{O}_{\mathrm{A}})^2$, $\tilde{\mathbb{U}}^{B} : \mathcal{H}_\downarrow \longmapsto L^2(\mathcal{O}_B)^2$, $\tilde{\mathbb{U}}^{C} : \mathcal{H}_\downarrow \longmapsto L^2(\mathcal{O}_C)$, $\tilde{\mathbb{U}}^{D} : \mathcal{H}_\downarrow \longmapsto L^2(\mathcal{O}_D)$, $\tilde{\mathbb{U}}^{E} : \mathcal{H}_\downarrow \longmapsto L^2(I_E)^2$ s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}}\boldsymbol{U}(\lambda,k) = \left(\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{-1}}\rangle_{\mathcal{H}}, \langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}}\rangle_{\mathcal{H}}\right),\ \tilde{\mathbb{U}}^{B}\boldsymbol{U}(\lambda,k) = \left(\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{-1}}\rangle_{\mathcal{H}}, \langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}}\rangle_{\mathcal{H}}\right), \\
&\tilde{\mathbb{U}}^{C}\boldsymbol{U}(\lambda,k) = \left(\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}}\rangle_{\mathcal{H}}\right),\ \tilde{\mathbb{U}}^{D}\boldsymbol{U}(\lambda,k) = \left(\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{-1}}\rangle_{\mathcal{H}}\right), \\
&\tilde{\mathbb{U}}^{E}\boldsymbol{U}(k) = \left(\left\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda_p(k)},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}}\right\rangle_{\mathcal{H}}, \left\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{-\lambda_p(k)},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right).
\end{aligned}$$

Théorème 7.2.6 *L'application $\tilde{\mathbb{U}}$ se prolonge par densité en une isométrie partielle de $\mathcal{H}$ dans $\tilde{\mathcal{L}}$ satisfaisant :*

$$\tilde{\mathbb{U}}^*\,\tilde{\mathbb{U}} = \mathbb{E}(I_0)$$

où $I_0 = \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, 0, \Omega_m\}$ et $\mathbb{E}(I_0)$ est la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur le sous-espace $\mathcal{H}_0^\perp$ défini par le lemme 7.2.3.
De plus, pour toute fonction borélienne f et tout élément $\boldsymbol{U} \in \mathcal{H}$ tel que $\mathbb{E}(I_0)\,\boldsymbol{U} \in D(f(\mathbb{A}))$, le vecteur $f(\mathbb{A})\,\boldsymbol{U}$ s'écrit alors :

$$f(\mathbb{A})\,\mathbb{E}(I_0)\,\boldsymbol{U} = \tilde{\mathbb{U}}^*\, f(\lambda)\,\tilde{\mathbb{U}}\,\boldsymbol{U}. \tag{7.98}$$

15. Ces espaces sont en fait des espaces L^2 définis sur les variétés formées par les courbes C^∞ : $\pm\lambda_p$ sur I_E et sont donc isomorphes à l'espace $L^2(I_E)$ "habituel" où la courbe est la droite constante $\lambda = k$ sur I_E.

L'opérateur $f(\mathbb{A})$ admet ainsi sur l'ensemble $D(f(\mathbb{A}))\cap\mathcal{H}_0^\perp$ la forme diagonale suivante :

$$f(\mathbb{A}) = \tilde{\mathbb{U}}^*\, f(\lambda)\, \tilde{\mathbb{U}}.$$

Preuve. La preuve de ce théorème est ici similaire à celle du théorème 7.1.22. Nous la refaisons cependant dans un but didactique.
En appliquant à $I = I_0$ la formule (7.92), il vient :

$$\|\mathbb{E}(I_0)\,\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \left|\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w_{\lambda,k,j}}\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 \mathrm{d}m_k(\lambda)\,\mathrm{d}k,\ \forall \boldsymbol{U}\in\mathcal{H}_\downarrow,$$

soit encore :

$$\|\mathbb{E}(I_0)\,\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \left|\tilde{\mathbb{U}}\,\boldsymbol{U}(\lambda,k,j)\right|^2 \mathrm{d}m_k(\lambda)\,\mathrm{d}k = \left\|\tilde{\mathbb{U}}\,\boldsymbol{U}\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}}^2,\ \forall \boldsymbol{U}\in\mathcal{H}_\downarrow.$$

Ainsi l'application $\tilde{\mathbb{U}}\,\boldsymbol{U}$ se prolonge par densité sur $\mathcal{H}$ en une isométrie partielle satisfaisant :

$$\left\|\tilde{\mathbb{U}}\,\boldsymbol{U}\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}}^2 = \|\mathbb{E}(I_0)\,\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}}^2,\ \forall \boldsymbol{U}\in\mathcal{H}.$$

Cette dernière relation se réécrit : $\tilde{\mathbb{U}}^*\,\tilde{\mathbb{U}} = \mathbb{E}(I_0)$, où $\mathbb{E}(I_0)$ est la projection orthogonale sur l'espace $\mathcal{H}_0^\perp$ défini par le lemme 7.2.3.
L'équation (7.72) montre que l'expression (7.93) de la mesure spectrale sur des intervalles I inclus dans I_0 se prolonge à $\mathcal{H}$ de la manière suivante :

$$\mathrm{d}(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \tilde{\mathbb{U}}\boldsymbol{U}(\lambda,k,j)\,\overline{\tilde{\mathbb{U}}\boldsymbol{V}(\lambda,k,j)}\,\mathrm{d}m_k(\lambda)\,\mathrm{d}k,\ \forall \boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in\mathcal{H}.$$

Ainsi d'après le théorème spectral, pour tout élément $\boldsymbol{U}\in\mathcal{H}$ tel que $\mathbb{E}(I_0)\,\boldsymbol{U}\in D(f(\mathbb{A}))$, nous avons

$$\begin{aligned}(f(\mathbb{A})\,\mathbb{E}(I_0)\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \tilde{\mathbb{U}}\boldsymbol{U}(\lambda,k,j)\,\overline{\tilde{\mathbb{U}}\boldsymbol{V}(\lambda,k,j)}_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}m_k(\lambda)\,\mathrm{d}k \\ &= (f(\cdot)\,\tilde{\mathbb{U}}\,\boldsymbol{U}, \tilde{\mathbb{U}}\,\boldsymbol{V})_{\tilde{\mathcal{L}}},\ \forall \boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in\mathcal{H}.\end{aligned}$$

Soit

$$f(\mathbb{A})\,\mathbb{E}(I_0)\boldsymbol{U} = \tilde{\mathbb{U}}^*\, f(\lambda)\,\tilde{\mathbb{U}}\boldsymbol{U},$$

qui se simplifie en

$$f(\mathbb{A})\,\boldsymbol{U} = \tilde{\mathbb{U}}^*\, f(\lambda)\,\tilde{\mathbb{U}}\,\boldsymbol{U},$$

pour $\boldsymbol{U}\in D(f(\mathbb{A}))\cap\mathcal{H}_0^\perp$.

■

On peut ici faire les mêmes commentaires que dans le cas de la diagonalisation de l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$. Ce théorème montre que la famille modale $\boldsymbol{w_{\lambda,k,j}}$ est complète dans $\mathcal{H}_0^\perp$ car si $\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\hat{w}_{\lambda,k,j}}\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ pour tout λ, k et j caractérisant l'espace spectral $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ alors $\mathbb{E}_{I_0}\boldsymbol{U} = 0$. Il nous reste à prouver qu'elle est orthonormale en démontrant que $\tilde{\mathbb{U}}\,\tilde{\mathbb{U}}^* = \mathbb{I}d_{\tilde{\mathcal{L}}}$. La preuve de ce dernier résultat va différer de celle effectuée pour la proposition 7.1.23. En effet, cette dernière reposait sur le fait qu'à chaque valeur λ (différente de 0 et $\pm\Omega_m$) l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}_k$ admettait un nombre fini (le cardinal de $J_{\lambda,k}$) de modes $\boldsymbol{\hat{w}_{\lambda,k,j}}$. Pour l'opérateur $\mathbb{A}$, ce n'est plus le cas : à chaque λ, il y a un continuum de modes $\boldsymbol{w_{\lambda,k,j}}$ indexés par k et j. Pour montrer ce résultat, nous allons suivre la démarche de [117]. Celle-ci est fondée sur la proposition 7.1.23 (issue de la diagonalisation des opérateurs réduits $\hat{\mathbb{A}}_k$) et sur un petit lemme concernant les opérateurs bornés d'un espace de Hilbert dans une somme directe d'espaces de Hilbert, à l'instar de notre opérateur $\tilde{\mathbb{U}}$.

Lemme 7.2.7 *Soient $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{L}$ deux espaces de Hilbert. Supposons de plus que l'espace $\mathcal{L}$ est une somme directe finie*[16] *d'espaces de Hilbert $\mathcal{L}_k$:*

$$\mathcal{L} = \sum_{p=1}^{N} \mathcal{L}_p, \quad \text{où } N \in \mathbb{N}^*.$$

Soit un opérateur borné $\mathbb{B} : \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{L}$, alors :

$$\mathbb{B}\,\boldsymbol{f} = (\mathbb{B}_1\, f, ..., \mathbb{B}_N\, f) \quad \text{où} \quad \forall p \in \{1, ..., N\} \;\; \mathbb{B}_p : \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{L}_p \;\; \textit{est un opérateur borné.}$$

Un tel opérateur satisfait l'équivalence suivante :

$$\mathbb{B}\,\mathbb{B}^* = \mathbb{I}d_{\mathcal{L}} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{B}_p\,\mathbb{B}_q^* = \delta_{pq}\;\mathbb{I}d_{\mathcal{L}_p}, \;\; \forall p, q \in \{1, ..., N\}\,, \tag{7.99}$$

où l'indice de Kronecker $\delta_{p,q}$ vaut 1 pour $p = q$ et 0 pour $p \neq q$.

Preuve. Nous reprenons ici la preuve décrite dans [117]. Soit $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_N) \in \mathcal{L}$, dont les composantes f_p appartiennent par définition à $\mathcal{L}_p$. Il est alors aisé de constater que

$$\mathbb{B}\,\mathbb{B}^*\,\boldsymbol{f} = \left(\sum_{p=1}^{N} \mathbb{B}_1\,\mathbb{B}_p^*\, f_p, ..., \sum_{p=1}^{N} \mathbb{B}_q\,\mathbb{B}_p^*\, f_p, ..., \sum_{p=1}^{N} \mathbb{B}_N\,\mathbb{B}_p^*\, f_p \right). \tag{7.100}$$

Le sens $\Longleftarrow$ de l'équivalence (7.99) découle alors immédiatement de (7.100). Sa réciproque se prouve également facilement en choisissant dans (7.100) à p fixé des vecteurs $\boldsymbol{f}$ de la forme $\boldsymbol{f} = (0, ..., f_p, ..., 0)$, puis en faisant varier p de 1 à N. ∎

Nous sommes maintenant à même de démontrer la

Proposition 7.2.8 *L'isométrie partielle $\tilde{\mathbb{U}}$ vérifie*

$$\tilde{\mathbb{U}}\,\tilde{\mathbb{U}}^* = \mathbb{I}d_{\tilde{\mathcal{L}}}.$$

Preuve. D'après le lemme 7.2.7, montrer que $\tilde{\mathbb{U}}\,\tilde{\mathbb{U}}^* = \mathbb{I}d_{\tilde{\mathcal{L}}}$ est équivalent à prouver[17] :

$$\tilde{\mathbb{U}}^p\,(\tilde{\mathbb{U}}^q)^* = \delta_{p,q}\,\mathbb{I}d_{L(\mathcal{O}^p)}, \quad \forall p, q \in \{\mathrm{A},\, B,\, C,\, D,\, E\}. \tag{7.101}$$

Nous nous contenterons ici de prouver que $\tilde{\mathbb{U}}^C\,(\tilde{\mathbb{U}}^C)^* = \mathbb{I}d_{L(\mathcal{O}^C)}$ (les autres cas se démontrant de manière similaire). A cette fin, définissons l'opérateur borné $\hat{\mathbb{U}}^C : \mathcal{H} \mapsto L^2(\mathcal{O}^C)$ par

$$\hat{\mathbb{U}}^C = \tilde{\mathbb{U}}^C\,\mathcal{F}^{-1}.$$

Notons alors que :

$$\tilde{\mathbb{U}}^C\,(\tilde{\mathbb{U}}^C)^* = \hat{\mathbb{U}}^C\,(\hat{\mathbb{U}}^C)^*.$$

Ainsi, il nous suffit de prouver que : $\hat{\mathbb{U}}^C\,(\hat{\mathbb{U}}^C)^* = \mathbb{I}d_{L(\mathcal{O}^C)}$. Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser le lemme suivant[18]

16. Ce résultat reste valable pour une somme directe dénombrable.

17. Dans la formule (7.101), on pose $\mathcal{O}_E = I_E$.

18. Ce lemme semble lié au fait que la transformation diagonalisant l'opérateur $\hat{\mathbb{A}}$: $\hat{\mathbb{U}} = \tilde{\mathbb{U}}\,\mathcal{F}^{-1}$ est un opérateur borné décomposable sur les transformations $\tilde{\mathbb{U}}_k$ diagonalisant $\hat{\mathbb{A}}_k$. N'ayant pas trouvé de référence dans la littérature, nous avons suivi la démarche de [117] en le redémontrant ici "à la main".

Lemme 7.2.9 *Pour tout $\tilde{g} \in D(\mathcal{O}_c)$, nous avons :*

$$((\hat{\mathbb{U}}^C)^*\tilde{g})(\cdot,k) = (\tilde{\mathbb{U}}_k^C)^*\tilde{g}(\cdot,k) = \int_{\Lambda_k(C)} \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}}(\cdot)\tilde{g}(\lambda,k)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{7.102}$$

Preuve. Soient $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{D}_0 = D(\mathbb{R}^2) \times \boldsymbol{D}(\mathbb{R}^2) \times D(\mathbb{R}^2_+) \times \boldsymbol{D}(\mathbb{R}^2_+)$ et $\tilde{g} \in D(\mathcal{O}_c)$. Nous notons $\hat{\boldsymbol{F}}$ la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\boldsymbol{F})$ de $\boldsymbol{F}$. Il vient alors :

$$\left((\hat{\mathbb{U}}^C)^*\,\tilde{g},\,\hat{\boldsymbol{F}}\right)_{\mathcal{H}} = (g,\,(\hat{\mathbb{U}}^C)\,\hat{\boldsymbol{F}})_{L^2(\mathcal{O}^C)} = (\tilde{g},\,\tilde{\mathbb{U}}^C\,\boldsymbol{F})_{L^2(\mathcal{O}^C)}.$$

En exprimant la quantité $(\tilde{g},\,\tilde{\mathbb{U}}^C\,\boldsymbol{F})_{L^2(\mathcal{O}^C)}$ sous forme intégrale, on obtient :

$$(\tilde{g},\,\tilde{\mathbb{U}}^C\,\boldsymbol{F})_{L^2(\mathcal{O}^C)} = \int_{\mathcal{O}^C} \tilde{g}(\lambda,k)\,\overline{\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}}\rangle_{\mathcal{H}}}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\lambda.$$

En utilisant alors que

$$\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}}\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \hat{\boldsymbol{F}}(\cdot,k), \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}},$$

cette dernière intégrale se réécrit sous la forme :

$$(\tilde{g},\,\tilde{\mathbb{U}}^C\,\boldsymbol{F})_{L^2(\mathcal{O}^C)} = \int_{\mathcal{O}^C} \tilde{g}(\lambda,k)\overline{\left\langle \hat{\boldsymbol{F}}(\cdot,k), \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}}\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\lambda.$$

Le vecteur propre généralisé $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}}$ est défini pour des paramètres spectraux (k,λ) appartenant à $\mathcal{O}_c$, nous prolongeons sa définition en posant

$$\hat{\boldsymbol{w}}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}} = \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}} \text{ sur } \mathcal{O}_c \text{ et } \hat{\boldsymbol{w}}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}_c.$$

En appliquant alors le théorème de Fubini [19], il découle :

$$(\tilde{g},\,\tilde{\mathbb{U}}^C\,\boldsymbol{F})_{L^2(\mathcal{O}^C)} = \left\langle \int_{\mathbb{R}} \hat{\boldsymbol{w}}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{\lambda},\cdot,\mathbf{1}}\,\tilde{g}(\lambda,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda, \hat{\boldsymbol{F}}\right\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Il vient donc finalement avec (7.102) et le fait que le support de $\hat{\boldsymbol{w}}^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}}$ en λ est contenu dans $\Lambda_k(C)$:

$$\left\langle (\hat{\mathbb{U}}^C)^*\,\tilde{g},\,\hat{\boldsymbol{F}}\right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \int_{\Lambda_k(C)} \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\cdot,\mathbf{1}}\,\tilde{g}(\lambda,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda, \hat{\boldsymbol{F}}\right\rangle_{\mathcal{H}},$$

et le résultat découle alors de la densité de $\mathcal{F}(\boldsymbol{D}_0)$ dans $\mathcal{H}_\downarrow$ et de la proposition 7.1.26. ∎

Fort de ce lemme, terminons maintenant la preuve de la proposition 7.99. Par densité de $D(\mathcal{O}^C)$ dans $L^2(\mathcal{O}^C)$, prouver $\hat{\mathbb{U}}^C\,(\hat{\mathbb{U}}^C)^* = \mathbb{I}d_{L(\mathcal{O}^C)}$ est équivalent à démontrer :

$$\left((\hat{\mathbb{U}}^C)^*\tilde{f},(\hat{\mathbb{U}}^C)^*\tilde{g}\right)_{L^2(\mathcal{O}^C)} = \left(\tilde{f},\tilde{g}\right)_{L^2(\mathcal{O}^C)},\ \forall \tilde{f},\tilde{g} \in D(\mathcal{O}^C).$$

Soient $\tilde{f}$ et $\tilde{g} \in D(\mathcal{O}^C)$, nous avons d'après le lemme 7.2.9 :

$$\left((\hat{\mathbb{U}}^C)^*\tilde{f},(\hat{\mathbb{U}}^C)^*\tilde{g}\right)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \left((\tilde{\mathbb{U}}_k^C)^*\tilde{f}(\cdot,k),(\tilde{\mathbb{U}}_k^C)^*\tilde{g}(\cdot,k)\right)_{\hat{\mathcal{H}}}\,\mathrm{d}k.$$

Or d'après la proposition 7.1.23 : $\tilde{\mathbb{U}}_k\tilde{\mathbb{U}}_k^* = \mathbb{I}d_{\tilde{\mathcal{L}}_k}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$ différent $\pm k_c$, ainsi d'après le lemme 7.2.7 l'opérateur $\tilde{\mathbb{U}}_k^C$ vérifie : $\tilde{\mathbb{U}}_k^C\,(\tilde{\mathbb{U}}_k^C)^* = \mathbb{I}d_{L^2(\Lambda_k(C))}$, ce qui se traduit par :

$$\left((\hat{\mathbb{U}}^C)^*\tilde{f},(\hat{\mathbb{U}}^C)^*\tilde{g}\right)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{f}(\cdot,k),\tilde{g}(\cdot,k)\right)_{L^2(\Lambda_k(C))}\,\mathrm{d}k.$$

Soit finalement par définition de l'ensemble $\mathcal{O}_c$:

$$\left((\hat{\mathbb{U}}^C)^*\tilde{f},(\hat{\mathbb{U}}^C)^*\tilde{g}\right)_{\mathcal{H}} = \left(\tilde{f},\tilde{g}\right)_{L^2(\mathcal{O}_C)}.$$

Ce qui achève la preuve. ∎

19. On justifie encore l'utilisation du théorème de Fubini par le fait que la fonction propre $\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\mathbf{1}}$ est uniformément bornée pour des paramètres spectraux (k,λ) appartenant à un compact de $\mathcal{O}_c$.

Il découle alors du théorème 7.2.6 et de la proposition 7.2.8, le théorème suivant qui résume l'étude spectrale de ce chapitre :

Théorème 7.2.10 *La restriction de $\tilde{\mathbb{U}}$ à $\mathcal{H}_0^\perp$ est un opérateur unitaire qui diagonalise à $\mathbb{A}$ au sens où pour toute fonction borélienne f, l'opérateur $f(\mathbb{A})$ admet sur l'ensemble $D(f(\mathbb{A}))\cap\mathcal{H}_0^\perp$ la forme diagonale suivante :*

$$f(\mathbb{A}) = \tilde{\mathbb{U}}^*\, f(\lambda)\, \tilde{\mathbb{U}}.$$

Expression de la transformation adjointe $\tilde{\mathbb{U}}^*$

Nous pourrions nous arrêter là dans l'étude spectrale, mais nous allons achever ce chapitre en explicitant la transformation adjointe

$$\tilde{\mathbb{U}}^* : \tilde{\mathcal{L}} \mapsto \mathcal{H}.$$

Celle-ci est définie à partir des opérateurs bornés $(\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}^{B})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}^{C})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}^{D})^*$ et $(\tilde{\mathbb{U}}^{E})^*$ par :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{U}}^*\tilde{\boldsymbol{u}} = &\left(\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}}\right)^* (\tilde{u}(\cdot,\cdot,-1),\tilde{u}(\cdot,\cdot,1)) + \left(\tilde{\mathbb{U}}^{B}\right)^* (\tilde{u}(\cdot,\cdot,-1),\tilde{u}(\cdot,\cdot,1)) + \left(\tilde{\mathbb{U}}^{C}\right)^* \tilde{u}(\cdot;\cdot,1)\\ &+ \left(\tilde{\mathbb{U}}^{D}\right)^* \tilde{u}(\cdot,\cdot,-1) + \left(\tilde{\mathbb{U}}^{E}\right)^* (\tilde{u}(\lambda_p(\cdot),\cdot,1),\tilde{u}(-\lambda_p(\cdot),\cdot,1)),\ \forall\tilde{\boldsymbol{u}}\in\tilde{\mathcal{L}}.\end{aligned}$$

Il nous reste à expliciter les opérateurs $(\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}^{B})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}^{C})^*$, $(\tilde{\mathbb{U}}^{D})^*$ et $(\tilde{\mathbb{U}}^{E})^*$ à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 7.2.11 *Les opérateurs bornés $(\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}})^* : L^2(\mathcal{O}_{\mathrm{A}})^2 \longmapsto \mathcal{H}$, $(\tilde{\mathbb{U}}^{B})^* : L^2(\mathcal{O}_B)^2 \longmapsto \mathcal{H}$, $(\tilde{\mathbb{U}}^{C})^* : L^2(\mathcal{O}_C) \longmapsto \mathcal{H}$, $(\tilde{\mathbb{U}}^{D})^* : L^2(\mathcal{O}_D) \longmapsto \mathcal{H}$ et $(\tilde{\mathbb{U}}^{E})^* : L^2(I_E)^2 \longmapsto \mathcal{H}$ sont respectivement définis comme le prolongement par densité des expressions suivantes :*

- $\forall\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}(\cdot,\cdot,-1),\tilde{u}(\cdot,\cdot,1)) \in D(\mathcal{O}_{\mathrm{A}})^2$,

$$(\tilde{\mathbb{U}}^{\mathrm{A}})^*\tilde{\boldsymbol{u}} = \int_{\mathcal{O}_{\mathrm{A}}} \tilde{u}(\lambda,k,-1)\,\boldsymbol{w_{\lambda,k,-1}} + \tilde{u}(\lambda,k,1)\,\boldsymbol{w_{\lambda,k,1}}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\lambda.$$

- $\forall\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}(\cdot,\cdot,-1),\tilde{u}(\cdot,\cdot,1)) \in D(\mathcal{O}_B)^2$,

$$(\tilde{\mathbb{U}}^{B})^*\tilde{\boldsymbol{u}} = \int_{\mathcal{O}_B} \tilde{u}(\lambda,k,-1)\,\boldsymbol{w_{\lambda,k,-1}} + \tilde{u}(\lambda,k,1)\,\boldsymbol{w_{\lambda,k,1}}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\lambda.$$

- $\forall\tilde{u}(\cdot,\cdot,1) \in D(\mathcal{O}_C)$,

$$(\tilde{\mathbb{U}}^{C})^*\tilde{u} = \int_{\mathcal{O}_C} \tilde{u}(\lambda,k,1)\,\boldsymbol{w_{\lambda,k,1}}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\lambda.$$

- $\forall\tilde{u}(\cdot,\cdot,-1) \in D(\mathcal{O}_D)$,

$$(\tilde{\mathbb{U}}^{D})^*\tilde{u} = \int_{\mathcal{O}_D} \tilde{u}(\lambda,k,-1)\,\boldsymbol{w_{\lambda,k,-1}}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\lambda.$$

- $\forall\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}(\lambda_p(\cdot),\cdot,1),\tilde{u}(-\lambda_p(\cdot),\cdot,1)) \in D(I_E)^2$,

$$(\tilde{\mathbb{U}}^{E})^*\tilde{u} = \int_{I_E} \tilde{u}(\lambda_p(k),k,1)\,\boldsymbol{w_{\lambda_p(k),k,1}} + \tilde{u}(-\lambda_p(k),k,1)\,\boldsymbol{w_{-\lambda_p(k),k,1}}\,\mathrm{d}k.$$

Preuve. La preuve est ici similaire à celle de la proposition 7.1.26. ∎

7.3 Annexe : un peu de théorie spectrale

Cette annexe ne se veut en aucun cas une construction didactique de la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints. A cette fin, nous renvoyons le lecteur aux multiples ouvrages qui existent sur ce sujet (cf.[38, 69, 70, 100]). Nous nous contentons ici de résumer les principaux théorèmes et notions mathématiques dont nous avons besoin dans ce chapitre et le chapitre suivant. La forme de ce rappel s'inspire de [63]. Nous oublions ici pour un court instant l'équation de Schrödinger (5.15) et travaillons dans un cadre très général : un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ muni de son produit scalaire $(\cdot,\cdot)$.

7.3.1 Résolvante et spectre d'un opérateur auto-adjoint

Soit $\mathbb{A} := D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint. Tout comme celui d'une matrice, la définition du spectre de $\mathbb{A}$ en dimension infinie est liée au caractère non inversible de l'opérateur $\mathbb{A} - \zeta$ lorsque ζ parcours le plan complexe $\mathbb{C}$.

Définition 7.3.1 *Le spectre de $\mathbb{A}$, noté $\sigma(\mathbb{A})$ est le complémentaire de l'ensemble des $\zeta \in \mathbb{C}$ tels que la résolvante $R(\zeta) := (\mathbb{A} - \zeta)^{-1}$ existe en tant qu'opérateur borné sur $\mathcal{H}$.*

La connaissance du spectre d'un opérateur est donc intrinsèquement liée aux propriétés de la résolvante. A l'aide de l'égalité algébrique suivante appelée usuellement identité de la résolvante

$$R(\zeta) - R(\zeta^{'}) = (\zeta - \zeta^{'})R(\zeta)R(\zeta^{'}), \forall\, \zeta, \zeta^{'} \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbb{A}),$$

on montre la proposition :

Proposition 7.3.2 *L'ensemble $\mathbb{C}\setminus\sigma(\mathbb{A})$ est ouvert et la résolvante est une fonction holomorphe en ζ sur cet ensemble.*

On déduit immédiatement de cette propriété que $\sigma(\mathbb{A})$ est un ensemble fermé de $\mathbb{C}$.

Spectre ponctuel et spectre continu

On vérifie tout d'abord (cf.[38]) que $R(\zeta)$ est un opérateur borné dès que $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ce qui montre que $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}$. En dimension infinie, un nombre réel λ a alors deux raisons de figurer dans le spectre :

- D'une part, $R(\lambda)$ peut ne pas exister car $\mathbb{A} - \lambda$ n'est pas injectif. De tels λ définissent le spectre ponctuel de $\mathbb{A}$ (formés de valeurs propres de $\mathbb{A}$) :

$$\sigma_p(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists u \in D(\mathbb{A}) \text{ non nul tel que } \mathbb{A}\, u = \lambda\, u\}$$

- D'autre part, $R(\lambda)$ peut ne pas exister en tant qu'opérateur borné sur $\mathcal{H}$ car $\mathbb{A} - \lambda$ est injectif mais pas surjectif. Dans ce cas, on peut définir $R(\lambda)$ comme un opérateur non borné dont le domaine est toujours dense dans $\mathcal{H}$ (puisque $\overline{\mathrm{Im}(\mathbb{A} - \lambda)} = \mathrm{Ker}(A - \lambda)^{\perp}$ pour un opérateur auto-adjoint). L'ensemble de ces λ forment le spectre continu de $\mathbb{A}$:

$$\sigma_c(\mathbb{A}) := \sigma(A) \setminus \sigma_p(A). \tag{7.103}$$

7.3.2 Le théorème spectral

Notion de famille spectrale

Afin de décomposer un opérateur auto-adjoint défini sur $\mathcal{H}$, nous devons dans un premier temps introduire les notions de famille spectrale.

Définition 7.3.3 *(famille spectrale) Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathbb{E}$ une application de l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ à valeur dans l'ensemble des projections orthogonales sur $\mathcal{H}$. On dit que $\mathbb{E}$ est une famille spectrale (ou mesure spectrale) si :*

$$\mathbb{E}(\varnothing) = 0, \quad et \quad \mathbb{E}(\mathbb{R}) = \mathbb{I},$$
$$\mathbb{E}(\bigcup_{j=1}^{\infty} J_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(J_j), \quad \forall J_j \text{ boréliens de } \mathbb{R} \text{ disjoints.}$$

On montre alors en particulier que l'on a :

$$\mathbb{E}(J_1 \cap J_2) = \mathbb{E}(J_1)\,\mathbb{E}(J_2), \quad \forall J_1, J_2 \text{ boréliens de } \mathbb{R}.$$

Pour tout vecteur $u \in \mathcal{H}$, on associe à la mesure spectrale une mesure réelle positive par la définition suivante.

Définition 7.3.4 *(mesures réelles positives associées à la mesure spectrale) Soit une mesure spectrale $\mathbb{E}$ et un vecteur $u \in \mathcal{H}$, on peut définir une mesure réelle positive finie μ_u par :*

$$\mu_u(J) = (\mathbb{E}(J)\,u, u), \quad \forall J \text{ boréliens de } \mathbb{R}.$$

La variation de cette mesure sera notée $d\,(\mathbb{E}_\lambda u, u)$.

Remarque 7.3.5 *Notons qu'à partir des mesures μ_u, on définit par identité de polarisation des mesures finies $\mu_{u,v}$ en posant pour tout u, $v \in \mathcal{H}$:*

$$\mu_{u,v}(J) = (\mathbb{E}(J)\,u, v), \quad \forall J \text{ boréliens de } \mathbb{R}.$$

La mesure spectrale permet de définir une intégrale en donnant un sens aux quantités [20]

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mathrm{d}\mathbb{E}_\lambda u \in \mathcal{H}$$

pour des fonctions f boréliennes. Bien entendu, comme dans toute théorie de l'intégration, de tels objets sont tout d'abord définis sur des fonctions "sympathiques" par exemple étagées pour être ensuite étendus par densité aux fonctions boréliennes. Pour la construction de cette intégrale, nous renvoyons le lecteur à [70, 100].

Théorème spectral

D'une part, le théorème spectral suivant montre qu'à chaque opérateur auto-adjoint est associé une unique famille spectrale $\mathbb{E}(\cdot)$ et que cet opérateur se décompose selon cette famille. D'autre part, il permet d'établir un calcul fonctionnel associé à l'opérateur $\mathbb{A}$ en définissant l'opérateur $f(\mathbb{A})$ pour une fonction f donnée.

20. Pour des fonctions f boréliennes bornées, cette intégrale existe toujours. Par contre, lorsque f est non bornée, on a besoin d'une condition d'intégrabilité par rapport à la meure μ_u. Il faut supposer de plus $\int_{\mathbb{R}} \left|f(\lambda)^2\right|\, d\,(\mathbb{E}_\lambda u, u) < \infty$ (cf. 7.3.7).

Théorème 7.3.6 *(théorème spectral) : Soit $\mathbb{A}$ un opérateur auto-adjoint (borné ou non borné) sur $\mathcal{H}$ alors il existe une unique famille spectrale $\mathbb{E}(\cdot)$ telle que*

$$\mathbb{A}\,u = \int_{\mathbb{R}} \lambda \,\mathrm{d}\,\mathbb{E}_\lambda u,\ \forall u \in D(\mathbb{A}) = \left\{ u \in \mathcal{H} \mid \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \, d\,(\mathbb{E}_\lambda u, u) < \infty \right\}. \tag{7.104}$$

Pour toute fonction f borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on définit alors l'opérateur $f(\mathbb{A})$ (dont le domaine est dense dans $\mathcal{H}$) par

$$f(\mathbb{A})\,u = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mathrm{d}\,\mathbb{E}_\lambda u,\ \forall u \in D(f(\mathbb{A})) = \left\{ u \in \mathcal{H} \mid \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d\,(\mathbb{E}_\lambda u, u) < \infty \right\},$$

que l'on notera formellement $f(\mathbb{A}) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mathrm{d}\,\mathbb{E}_\lambda$. En particulier, cet opérateur est respectivement auto-adjoint pour une fonction f à valeur réelle et borné pour f bornée. De plus, lorsque f et g sont deux fonctions boréliennes bornées,

$$f(\mathbb{A})^* = \overline{f}(\mathbb{A}) \quad et \quad f(\mathbb{A})\,g(\mathbb{A}) = (fg)(\mathbb{A}). \tag{7.105}$$

Remarque 7.3.7 *Le théorème spectral, nous permet de caractériser le domaine $\mathbb{A}$ ou plus généralement celui de $f(\mathbb{A})$ par une condition d'intégrabilité sur f^2 par rapport à la mesure μ_u. Cette condition est essentielle car elle permet de justifier l'existence du produit scalaire $(f(\mathbb{A}), u, u) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,d\,(\mathbb{E}_\lambda u, u)$. Ceci permet d'une part de définir par identité de polarisation $(f(\mathbb{A})u, v) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,d\,(\mathbb{E}_\lambda u, v)$ pour des u et v dans $D(f(\mathbb{A}))$ et d'autre part de justifier l'existence des objets non triviaux : $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mathrm{d}\,\mathbb{E}_\lambda u$ en tant qu'éléments de $\mathcal{H}$(cf. [38]).*

Remarque 7.3.8 *Lorsque f et g ne sont pas bornées, l'équation (7.105) $f(\mathbb{A})\,g(\mathbb{A})\,u = (fg)(\mathbb{A})\,u$ est seulement valable pour*

$$u \in D(f(\mathbb{A})\,g(\mathbb{A})) = \{u \in D(g(\mathbb{A})) \mid g(\mathbb{A})u \in D(f(\mathbb{A}))\}.$$

Exemples d'applications du calcul fonctionnel

La définition de $f(\mathbb{A})$ que nous venons de donner coïncide (heureusement !) avec les cas où l'on peut définir $f(\mathbb{A})$ par un autre moyen. Nous allons ici donner quelques exemples d'applications importantes de ce calcul fonctionnel.

• Un premier cas particulier essentiel est celui de $f(\lambda) = (\lambda - \zeta)^{-1}$ qui est bornée pour $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On peut montrer que l'opérateur $f(\mathbb{A})$ ainsi défini n'est autre que la résolvante $R(\zeta) = (\mathbb{A} - \zeta)^{-1}$. On peut alors écrire :

$$R(\zeta)\,u = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\,\mathbb{E}_\lambda u}{\lambda - \zeta},\ \forall u \in \mathcal{H}. \tag{7.106}$$

• Un autre exemple, qui nous sera très utile dans la suite. Lorsque $f(\lambda) = e^{i\,\lambda\,t}$, on pose

$$e^{i\mathbb{A}t}\,u = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}\,\mathbb{E}_\lambda u,\ \forall u \in \mathcal{H}.$$

qui définit alors un opérateur borné unitaire. On peut monter que celui-ci coïncide avec l'opérateur $e^{i\mathbb{A}t}$ introduit dans le théorème 5.2.2.

• Enfin, pour un borélien I de $\mathbb{R}$, on désigne par projecteur spectral associé à la partie $I \cap \sigma(\mathbb{A})$ du spectre, l'opérateur $\mathbb{E}(I)$ décrit à l'aide du calcul fonctionnel par la relation :

$$\mathbb{E}(I)\,u = \mathbb{1}_I(\mathbb{A})\,u = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_I(\lambda)\,\mathrm{d}\,\mathbb{E}_\lambda u,\ \forall u \in \mathcal{H}. \tag{7.107}$$

Remarquons également que pour le cas particulier de $I = \mathbb{R}$, il vient

$$u = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\,\mathbb{E}_\lambda u,\ \forall u \in \mathcal{H}. \tag{7.108}$$

Ainsi, tout vecteur de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ se décompose sur la mesure spectrale.

Lien entre spectre et famille spectrale

La définition de projecteur spectral associé à une partie du spectre mentionné dans (7.107) prend tout son sens avec la proposition suivante.

Proposition 7.3.9 *Soit $\mathbb{A}$ un opérateur auto-adjoint (borné ou non) sur $\mathcal{H}$ et $\mathbb{E}(\cdot)$ la mesure spectrale qui lui est associée.*

- *Le support*[21] *de la mesure spectrale est le spectre de l'opérateur $\sigma(\mathbb{A})$ (qui est bien un ensemble fermé d'après la proposition 7.3.2).*
- *$\lambda \in \sigma_p(\mathbb{A})$ si et seulement si $\mathbb{E}(\{\lambda\}) \neq 0$. Lorsque $\mathbb{E}(\{\lambda\}) \neq 0$, $\mathbb{E}(\{\lambda\})$ est alors le projecteur spectral associé à la valeur propre λ (c'est-à-dire la projection orthogonale sur le sous-espace propre correspondant).*
- *$\lambda \in \sigma_c(\mathbb{A})$ si et seulement si λ appartient au support de la mesure spectrale et $\mathbb{E}(\{\lambda\}) = 0$.*

Calcul de la famille spectrale

Nous avons vu que la connaissance de la famille spectrale est essentielle pour caractériser les propriétés de l'opérateur $\mathbb{A}$ (notamment son spectre, sa décomposition spectrale (cf. (7.104)) et le calcul fonctionnel qui lui est associé). Pour l'instant, le théorème spectral ne nous donnait que l'existence d'une telle famille. Nous allons voir qu'il permet également de "mettre la main" sur la famille spectrale $\mathbb{E}(\cdot)$ à partir de la résolvante de l'opérateur $R(\zeta)$ avec la formule de Stone qui peut-être vue comme une inversion de la relation (7.106).

Proposition 7.3.10 *(Formule de Stone) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Le projecteur spectral $\mathbb{E}(I)$ est relié à la résolvante de l'opérateur auto-adjoint $\mathbb{A}$ par la formule suivante :*

$$\mathbb{E}(I)\, u = \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \lim_{\delta \to 0^+} \int_{C_{\varepsilon,\delta}(I)} R(\zeta)\, u \, \mathrm{d}\zeta, \ \forall u \in \mathcal{H}. \tag{7.109}$$

où $C_{\varepsilon,\delta}(I)$ désigne une famille de chemins du plan complexe tels que celui qui est représenté dans la figure 7.3 : en notant $[\lambda, \mu] = \overline{I}$. Chaque chemin $C_{\varepsilon,\delta}(I)$ est constitué de deux segments (parcourus en sens inverse) $[\lambda \pm \varepsilon, \mu \pm \varepsilon] + i\delta$ et $[\lambda \pm \varepsilon, \mu \pm \varepsilon] - i\delta$ où les signes $\pm$ sont choisis de sorte que λ (respectivement μ) appartienne à $[\lambda \pm \varepsilon, \mu \pm \varepsilon]$ si et seulement si il appartient à I.

Remarque 7.3.11 *Résumons ici les idées contenues dans la preuve de la formule de Stone pour comprendre en quoi, elle est une application directe du calcul fonctionnel défini par le théorème spectral. Remarquons tout d'abord que d'après l'analycité de $R(\zeta)$ (cf. proposition 7.3.2), la formule (7.109) reste inchangée si l'on déforme le contour $C_{\varepsilon,\delta}(I)$ sans changer les points de départ et d'arrivée, et sans rencontrer de point du spectre. Puis, notons que cette formule est en fait une simple application du théorème de convergence dominée. En effet, on vérifie aisément que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,*

$$r_{\epsilon,\delta}(\lambda) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{C_{\varepsilon,\delta}(I)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\lambda - \zeta} \underset{\varepsilon,\delta \to 0^+}{\longrightarrow} \mathbb{1}_I(\lambda), \tag{7.110}$$

21. Le support d'une mesure borélienne positive (à l'instar de la mesure spectrale) sur un espace topologique est, par définition, le plut petit ensemble fermé de mesure pleine (c'est-à-dire dont le complémentaire est de mesure nulle).

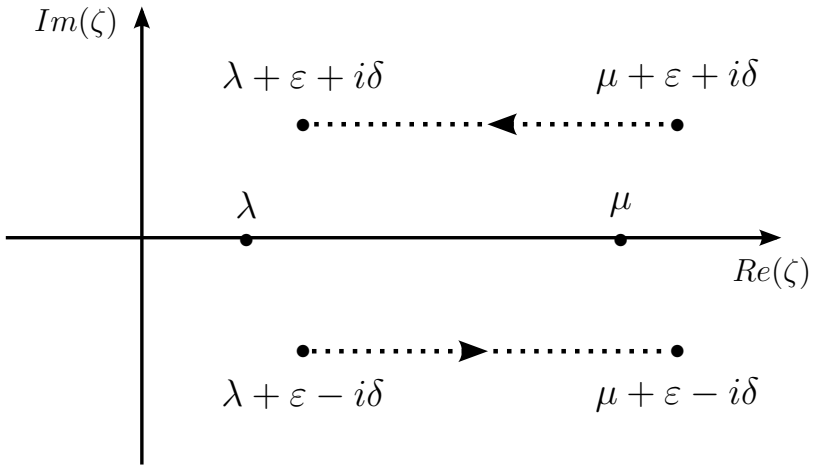

FIGURE 7.3 – Définition du chemin d'intégration $C_{\varepsilon,\delta}(I)$ lorsque $I =]\lambda, \mu]$

où le terme de gauche reste uniformément borné en ϵ, δ et λ. Ainsi, il découle immédiatement de (7.106), (7.107) et de (7.110) que[22]

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{C_{\varepsilon,\delta}(I)} R(\zeta)u\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\mathbb{R}}\int_{C_{\varepsilon,\delta}(I)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\mathbb{E}_\lambda u = r_{\epsilon,\delta}(\mathbb{A})u \underset{\varepsilon,\delta\to 0^+}{\longrightarrow} \mathbb{E}(I)u,\ \forall u\in\mathcal{H}. \tag{7.111}$$

7.3.3 Décomposition de la mesure spectrale

Montrons dans ce paragraphe que la forme prise par la mesure spectrale est en fait directement reliée à la structure de l'opérateur. Dans ce but, rappelons un résultat général de la théorie de la mesure (cf. [100]) qui affirme que toute mesure μ finie définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ admet une décomposition de la forme

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc} \quad \text{où} \tag{7.112}$$

- μ_{pp} est une mesure ponctuelle, autrement dit une somme de masses de dirac, placées en des point λ_j, $j \in J$.
- μ_{ac} est une mesure absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), ce qui signifie qu'il existe une fonction f intégrable telle que $\mathrm{d}\mu_{ac} = f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$.
- μ_{sc} est singulièrement continue[23] (encore par rapport à la mesure de Lebesgue) ; d'une part elle est continue (au sens où comme μ_{ac}, tous les singletons ont une mesure nulle) , d'autre part elle est singulière, ce qui se traduit par l'existence d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ tel que $\mu_{sc}(E) = 0$ alors que $\mathbb{R} \setminus E$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Ce résultat est applicable en particulier à la mesure[24] réelle μ_u, associée à la mesure spectrale μ_u, pour tout $u \in \mathcal{H}$. On déduit de ce théorème (cf. [100]) que l'on peut construire trois sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$ (qui sont donc eux-mêmes des espaces de Hilbert pour le produit scalaire

22. Remarquons que dans la première égalité de (7.111), nous avons interverti les deux intégrales : $\int_{\mathbb{R}}$ et $\int_{C_{\varepsilon,\delta}(I)}$. Cette opération se justifierait par l'application du théorème de Fubini-Tonelli sur les mesures μ_u associées à la mesure spectrale.

23. Un exemple de mesure singulièrement continue peut être construit à partir de la fonction dite de Cantor qui possède l'étrange propriété d'être une fonction non constante, continue, dont la dérivée existe et s'annule presque partout (cf. [100]).

24. La formule (7.108) nous montre que μ_u est bien une mesure finie.

de $\mathcal{H}$) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{pp} &= \{u \in \mathcal{H} \mid \mu_u \text{ est purement ponctuelle}\},\\ \mathcal{H}_{ac} &= \{u \in \mathcal{H} \mid \mu_u \text{ est absolument continue}\},\\ \mathcal{H}_{sc} &= \{u \in \mathcal{H} \mid \mu_u \text{ est singulièrement continue}\}.\end{aligned} \tag{7.113}$$

qui permettent d'obtenir une décomposition canonique de l'opérateur $\mathbb{A}$ donnée dans la

Proposition 7.3.12 *$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_{ac} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_{sc}$ et on peut définir sur chacun de ces espaces de Hilbert les opérateurs auto-adjoints : $\mathbb{A}_{pp}$, $\mathbb{A}_{ac}$ et $\mathbb{A}_{sc}$, dont le domaine est respectivement $D(\mathbb{A}_{pp}) = D(\mathbb{A}) \cap \mathcal{H}_{pp}$, $D(\mathbb{A}_{ac}) = D(\mathbb{A}) \cap \mathcal{H}_{ac}$ et $D(\mathbb{A}_{sc}) = D(\mathbb{A}) \cap \mathcal{H}_{sc}$. L'opérateur $\mathbb{A}$ se décompose alors de la manière suivante :*

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_{pp} \oplus \mathbb{A}_{ac} \oplus \mathbb{A}_{sc} \quad \textit{sur} \quad D(\mathbb{A}) = D(\mathbb{A}_{pp}) \overset{\perp}{\oplus} D(\mathbb{A}_{ac}) \overset{\perp}{\oplus} D(\mathbb{A}_{sc}). \tag{7.114}$$

On définit alors une seconde décomposition du spectre (différente de (7.103)) basée sur la structure de la mesure.

Définition 7.3.13 *Pour un opérateur auto-adjoint $\mathbb{A}$, on désigne respectivement par spectre purement ponctuel, spectre absolument continu et spectre singulièrement continu les ensembles : $\sigma_{pp}(\mathbb{A}) := \sigma(\mathbb{A}_{pp})$, $\sigma_{ac}(\mathbb{A}_{ac}) := \sigma(\mathbb{A}_{ac})$ et $\sigma_{sc}(\mathbb{A}_{sc}) := \sigma(\mathbb{A}_{sc})$.*

Remarque 7.3.14 *On constate tout d'abord que $\sigma_{pp}(\mathbb{A})$, $\sigma_{ac}(\mathbb{A})$, $\sigma_{sc}(\mathbb{A})$ sont des ensembles fermés car ils sont chacun définis à l'aide du spectre d'un opérateur. De plus, l'égalité (7.114) assure que $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma_{pp}(\mathbb{A}) \cup \sigma_{ac}(\mathbb{A}) \cup \sigma_{sc}(\mathbb{A})$. Néanmoins, ils ne forment pas une partition du $\sigma(\mathbb{A})$ car ils ne sont pas nécessairement disjoints deux à deux. Comparons maintenant cette seconde décomposition du spectre, liée à la structure de la mesure spectrale, à la décomposition plus algébrique en spectre ponctuel et spectre continu. Tout d'abord, on déduit facilement de la proposition* (7.3.9) *que $\sigma_p(\mathbb{A}) \subset \sigma_{pp}(\mathbb{A})$, les valeurs propres font évidemment partie du spectre purement ponctuel. Néanmoins, cette inclusion est stricte. Pour s'en convaincre, prenons l'exemple d'un opérateur auto-adjoint compact et injectif en dimension infinie dont la mesure spectrale est purement ponctuelle. Il est alors facile de remarquer que $0 \in \sigma_{pp}(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{A})$, mais en raison du caractère injectif de $\mathbb{A}$ que $0 \notin \sigma_p(\mathbb{A})$. On démontre en fait (cf. [100]) que $\overline{\sigma_p(\mathbb{A})} = \sigma_{pp}(\mathbb{A})$. Concernant le spectre continu et l'union des spectres absolument et singulièrement continus, aucune inclusion n'est vérifiée pour un opérateur auto-adjoint quelconque. En effet, revenons à l'exemple précédent d'un opérateur auto-adjoint compact et injectif en dimension infinie, dans ce cas $\sigma_c(\mathbb{A}) = \{0\}$ alors que $\sigma_{ac}(\mathbb{A}) = \sigma_{sc}(\mathbb{A}) = \varnothing$, ainsi $\sigma_c(\mathbb{A}) \not\subset (\sigma_{ac}(\mathbb{A}) \cup \sigma_{sc}(\mathbb{A}))$. L'autre inclusion n'est également pas vérifiée. En effet, notre opérateur de Schrödinger possède des valeurs propres(cf. 7.2.5) qui ne sont donc pas dans le spectre continu et son spectre absolument continu est $\sigma_{ac}(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$.*

7.3.4 Opérateurs décomposables

Nous terminons ce petit résumé par les propriétés spectrales d'opérateurs bien particuliers : les opérateurs auto-adjoints décomposables, intervenant dans les équations de propagation d'ondes dans les milieux stratifiés (cf. [39, 62, 113]) à l'instar de notre dioptre. Pour définir un opérateur décomposable, nous devons au préalable introduire la notion d'intégrale directe qui généralise le concept de somme directe dans un espace de Hilbert. Une intégrale directe ou "intégrale hilbertienne" est construite à partir :

– d'une famille d'espaces de Hilbert $\mathcal{L}_k$, $\in k \in \mathbb{R}$, chacun d'eux étant muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}_k}$ ($\|\cdot\|_{\mathcal{L}_k}$ désignant la norme associée),

– d'une mesure positive μ définie sur $\mathbb{R}$. Si on note u une application $k \mapsto u_k \in \mathcal{L}_k$ ("appelée un champs de vecteurs"), on peut considérer l'ensemble des u tels que

$$\int_{\mathbb{R}} \|u_k\|^2_{\mathcal{L}_k} \, \mathrm{d}\mu(k) < \infty.$$

On obtient ainsi (en identifiant deux champs de vecteurs qui sont égaux $\mathrm{d}\mu$ presque partout) un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} (u_k, v_k)_{\mathcal{L}_k} \, \mathrm{d}\mu(k).$$

Cet espace est appelé intégrale directe (des $\mathcal{L}_k$) et sera noté :

$$\mathcal{H} = \int_{\oplus} \mathcal{L}_k \, \mathrm{d}\mu(k).$$

Nous allons nous intéresser ici à un cas particulier d'intégrale directe où l'espace de Hilbert $\mathcal{L}_k$ ne dépend pas du paramètre k et sera donc noté $\mathcal{L}$. L'espace $\mathcal{H}$ est alors communément appelé intégrale directe à fibre constante. Définissons maintenant la notion d'opérateur auto-adjoint décomposable sur un tel espace.

Définition 7.3.15 *Soit une fonction mesurable $A : k \mapsto \mathbb{A}_k$ de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des opérateurs auto-adjoints (non nécessairement bornés) d'un espace de Hilbert $\mathcal{L}$. Muni d'une telle fonction, on définit un opérateur auto-adjoint $\mathbb{A}$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \int_{\oplus} \mathcal{L} \, \mathrm{d}\mu(k)$ par :*

$$(\mathbb{A}\, u)_k = \mathbb{A}_k \, u_k, \ \forall u \in D(\mathbb{A}) := \left\{ u \in \mathcal{H} \mid u_k \in D(\mathbb{A}_k) \text{ presque partout et } \int_{\mathbb{R}} \|\mathbb{A}_k u_k\|^2_{\mathcal{L}} \, \mathrm{d}\mu(k) < \infty \right\}.$$

On dit alors que $\mathbb{A}$ est un opérateur auto-adjoint décomposable et on le note classiquement : $\mathbb{A} = \int_{\oplus} \mathbb{A}_k \, \mathrm{d}\mu(k)$.

Les propriétés de tels opérateurs sont regroupées dans le théorème $XIII.85$ page 284 de [99], dont nous reproduisons ici une partie de l'énoncé.

Théorème 7.3.16 *Soit un opérateur $\mathbb{A} = \int_{\oplus} \mathbb{A}_k \, \mathrm{d}\mu(k)$ auto-adjoint décomposable au sens de la définition 7.3.15, alors :*

– *Pour toute fonction f borélienne sur $\mathbb{R}$, l'opérateur $f(\mathbb{A})$, au sens du calcul fonctionnel défini par le théorème spectral 7.3.6, coïncide avec l'opérateur :*

$$f(\mathbb{A}) = \int_{\oplus} f(\mathbb{A}_k) \, \mathrm{d}\mu(k).$$

La mesure spectrale de $\mathbb{A}$ s'exprime alors comme "l'intégrale directe" de celle de $\mathbb{A}_k$:

$$\mathrm{d}(\mathbb{E}_\lambda u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}(\mathbb{E}_{k,\lambda} u_k, v_k)_{\mathcal{L}} \, \mathrm{d}\mu(k), \ \forall u, \, v \in \mathcal{H}, \tag{7.115}$$

au sens où pour toute fonction f borélienne :

$$(f(\mathbb{A})\, u, u) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, \mathrm{d}(\mathbb{E}_\lambda u, u)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, \mathrm{d}(\mathbb{E}_{k,\lambda} u_k, u_k)_{\mathcal{L}} \right) \mathrm{d}\mu(k), \ \forall u \in D(f(\mathbb{A})).$$

– $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ *si et seulement si pour tout* $\epsilon > 0$,

$$\mu(\{k \mid \sigma(\mathbb{A}_k) \cap]\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon[\neq \varnothing\}) > 0.$$

– $\lambda \in \sigma_p(\mathbb{A})$ *si et seulement si*

$$\mu(\{k \mid \lambda \in \sigma_p(\mathbb{A}_k)\}) > 0.$$

– *Si presque partout, le spectre de* $\mathbb{A}_k$ *est absolument continu, il en est de même pour celui de* $\mathbb{A}$.

CHAPITRE HUIT

PRINCIPE D'AMPLITUDE LIMITE

Sommaire

8.1 Expression de la solution du problème de Cauchy 163
8.2 Asymptotique en temps long de la solution homogène 164
8.3 Un phénomène de résonance 166
8.4 Le principe d'amplitude limite 172
8.5 Conclusion 181
8.6 Annexe 182
8.6.1 Expression de la résolvante en fonction de la densité spectrale 182
8.6.2 Théorème d'absorption limite 183

Nous allons ici utiliser l'étude spectrale effectuée au chapitre précédent pour déduire les comportements asymptotique en temps long des solutions de l'équation de Schrödinger pour un second membre périodique en temps. Nous mettrons tout d'abord en évidence (pour $\Omega_e = \Omega_m$) un phénomène d'explosion linéaire lorqu'on excite le système aux fréquences plasmons $\pm\lambda_p$. A ces fréquences, les ondes plasmoniques localisées spatialement à l'interface du dioptre se mettent à résonner. Il n'y a donc pas de régime périodique établi. Puis en démontrant un principe d'absorption limite, nous examinons pour quelles fréquences d'excitation le principe d'amplitude limite est vérifié. Toute cette étude est enrichie de simulations numériques qui viennent illustrer les différents résultats obtenus.

8.1 Expression de la solution du problème de Cauchy

Revenons ici à notre problème d'évolution (5.22) dans lequel nous avons introduit une excitation $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{f}\, e^{-i\omega t}$, $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}$ périodique en temps (à une fréquence $\omega \neq 0$ donnée) :

$$(\mathcal{C}) \left| \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}\,t} + i\,\mathbb{A}\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{f}\, e^{-i\,\omega\,t}. \\ \boldsymbol{U}(0) = \boldsymbol{U}_0 \in D(\mathbb{A}). \end{array} \right.$$

Nous allons désormais nous restreindre à des sources $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{f}\, e^{-i\omega t}$ et des conditions initiales dans l'espace $\mathcal{H}_0^\perp$ défini en (7.95). Nous ferons donc par la suite l'hypothèse suivante

(H_2) : la fonction $\boldsymbol{f}$ et la condition initiale $\boldsymbol{U}_0$ appartiennent à l'espace [1]

$$\mathcal{H}_0^\perp = \left\{ \boldsymbol{U} = (u_E, \boldsymbol{u_H}, u_P, \boldsymbol{u_M}) \in \mathcal{H} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{u_H}|_{\mathbb{R}^2_-} = 0,\ \operatorname{div} \boldsymbol{u_H}|_{\mathbb{R}^2_+} = 0 \text{ et } \operatorname{div} \boldsymbol{u_M} = 0 \right\}.$$

1. Rappelons que l'espace $\mathcal{H}_0^\perp$ a été caractérisé par le lemme 7.2.3.

Remarque 8.1.1 *Notons que les seconds membres qui s'écrivent sous la forme d'une densité de courant (cf. (5.24)) :*

$$\boldsymbol{f} = \left(\frac{-J_{\|}}{\varepsilon_0},\, 0,\, 0,\, 0\right)^{\top}$$

vérifient l'hypothèse (H_2).

Nous avons vu que d'une manière générale (cf. 5.2.2), la solution du problème ($\mathcal{C}$) est donnée par la formule de variation de la constante :

$$\boldsymbol{U}(t) = e^{-i\mathbb{A}\,t}\,\boldsymbol{U}_0 + \int_0^t e^{-i\mathbb{A}\,(t-s)}\,\boldsymbol{f} e^{-i\,\omega\,s}\,\mathrm{d}s.$$

En utilisant le théorème de diagonalisation 7.2.10, nous pouvons exprimer l'intégrale précédente sous la forme :

$$\int_0^t e^{-i\mathbb{A}\,(t-s)}\,\boldsymbol{f} e^{-i\,\omega\,s}\,\mathrm{d}s = \tilde{\mathbb{U}}^*\,\left(e^{-i\lambda\,t}\,\int_0^t e^{i(\lambda-\omega)\,s}\,\mathrm{d}s\right)\,\tilde{\mathbb{U}}\boldsymbol{f},$$

soit après simplification :

$$\int_0^t e^{-i\mathbb{A}\,(t-s)}\,\boldsymbol{f} e^{-i\,\omega\,s}\,\mathrm{d}s = \tilde{\mathbb{U}}^*\,i\,\frac{e^{-i\,\lambda\,t} - e^{-i\,\omega\,t}}{\lambda-\omega}\,\tilde{\mathbb{U}}\boldsymbol{f}.$$

Ainsi finalement,

$$\boldsymbol{U}(t) = e^{-i\mathbb{A}\,t}\boldsymbol{U}_0 + \phi_\omega(A,t)\boldsymbol{f}, \tag{8.1}$$

où l'on a posé

$$\phi_\omega(\lambda,t) = i\,\frac{e^{-i\,\lambda\,t} - e^{-i\,\omega\,t}}{\lambda-\omega}.$$

Notons d'une part qu'à t fixé, la fonction $\phi_\omega(\cdot,t)$ se prolonge par continuité en ω par

$$\phi_\omega(\omega,t) = t\,e^{-i\omega\,t}$$

et d'autre part qu'elle est bornée. En effet, par l'inégalité des accroissements finis, il vient :

$$|\phi_\omega(\lambda,t)| \leq t. \tag{8.2}$$

Ainsi l'opérateur $\phi_\omega(A,t)$ est borné par t (car $\|\phi_\omega(A,t)\|_{B(\mathcal{H})} \leq \|\phi_\omega(\cdot,t)\|_\infty \leq t$)[2]. De cette majoration, on retrouve le fait (cf. 5.25) que la solution $\boldsymbol{U}$, donnée par l'expression (8.1), a une croissance au plus affine en temps.

Remarque 8.1.2 *L'espace $\mathcal{H}_0^\perp$ est ici stable par les opérateurs $e^{-i\mathbb{A}\,t}$ et $\phi_\omega(A,t)$ (ceci se déduit aisément du théorème de diagonalisation 7.2.10). Ainsi, d'après (8.1),*

$$\textit{si } \boldsymbol{U}_0 \textit{ et } \boldsymbol{f} \textit{ satisfont } (H_2) \textit{ alors } \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \boldsymbol{U}(t) \in \mathcal{H}_0^\perp.$$

8.2 Asymptotique en temps long de la solution homogène

La première question que nous nous posons concerne l'asymptotique en temps du terme : $e^{-i\mathbb{A}\,t}\boldsymbol{U}_0$ lié à la condition initiale $\boldsymbol{U}_0$ de notre problème de Cauchy.

2. $\|\cdot\|_{B(\mathcal{H})}$ désigne ici la norme d'opérateurs définie en (8.27) et $\|\cdot\|_\infty$ la norme sup sur l'espace des fonctions bornées.

Proposition 8.2.1 *Soit $\boldsymbol{U}_0 \in D(\mathbb{A})$ vérifiant l'hypothèse (H_2). L'asymptotique en temps du terme $e^{-i\mathbb{A}t}\boldsymbol{U}_0$ est donnée par les assertions suivantes :*

– *Si $\Omega_e \neq \Omega_m$,*

$$(e^{-i\mathbb{A}t}\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} \overset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall \boldsymbol{V} \in \mathcal{H}.$$

– *Si $\Omega_e = \Omega_m$,*

$$(e^{-i\mathbb{A}t}\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = e^{-i\lambda_p t}\,(\mathbb{E}(\{\lambda_p\})\,\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} + e^{i\lambda_p t}\,(\mathbb{E}(\{-\lambda_p\})\,\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} + o(1), \quad \forall \boldsymbol{V} \in \mathcal{H},$$

où $\mathbb{E}(\{\pm\lambda_p\})$ sont les projecteurs ponctuels associés aux valeurs propres de dimension infinie $\pm\lambda_p = \pm\Omega_m/\sqrt{2}$.

Preuve. D'après le théorème spectral 7.3.6, nous avons

$$(e^{-i\mathbb{A}t}\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\lambda\in\mathbb{R}} e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}\,(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})\,. \tag{8.3}$$

La nature de la mesure $(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})$ dépend ici des paramètres Ω_e et Ω_m.

• Lorsque $\Omega_e \neq \Omega_m$, l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ se décompose de la manière suivante (cf. (7.96)) :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_{ac} \;\text{ où }\; \mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}_0^{\perp} \;\text{ et }\; \mathcal{H}_{pp} = \mathcal{H}_0. \tag{8.4}$$

Ainsi comme $\boldsymbol{U}_0 \in \mathcal{H}_0^{\perp}$, la mesure spectrale $(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})$ est absolument continue. On a donc [3] $\mathrm{d}\,(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V}) = \theta_\lambda(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})\,\mathrm{d}\lambda$ où la densité $\theta_\lambda(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V}) \in L^1(\mathbb{R})$ (elle est exprimée explicitement par la formule (8.23) en annexe). L'expression (8.3) se réécrit donc sous la forme :

$$(e^{-i\mathbb{A}t}\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t}\theta_\lambda(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})\,\mathrm{d}\lambda.$$

La densité $\theta_\lambda(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})$ appartenant à $L^1(\mathbb{R})$, la convergence de $(e^{-i\mathbb{A}t}\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}}$ vers 0 lorsque $t \to \infty$ est alors une simple conséquence du théorème de Riemann-Lebesgue.

• Lorsque $\Omega_e = \Omega_m$, la décomposition (8.4) n'est plus valide dans la mesure où $\mathbb{A}$ admet deux valeurs propres $\pm\lambda_p$ tel que $Im(\mathbb{E}(\{\pm\lambda_p\})) \subset \mathcal{H}_0^{\perp}$. Dans ce cas , on a en fait (cf. (7.97)) :

$$\mathcal{H}_0^{\perp} = \mathcal{H}_{ac} \overset{\perp}{\oplus} Im(\mathbb{E}(\{-\lambda_p\}) \overset{\perp}{\oplus} Im(\mathbb{E}(\{\lambda_p\}) \;\text{ avec }\; \pm\lambda_p \in \sigma_p(\mathbb{A}). \tag{8.5}$$

Ainsi, il en découle que la mesure spectrale $d\,(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})$ possède ici une partie ponctuelle et une partie absolument continue :

$$\mathrm{d}\,(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V}) = \theta_\lambda(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})\,\mathrm{d}\lambda + (\mathbb{E}(\{\lambda_p\})\,\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}}\,\delta_{\lambda_p} + (\mathbb{E}(\{-\lambda_p\})\,\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}}\,\delta_{-\lambda_p}$$

avec $\theta_\lambda(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V}) \in L^1(\mathbb{R})$. Il s'ensuit avec (8.3) que :

$$(e^{-i\mathbb{A}t}\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = e^{-i\lambda_p t}\,(\mathbb{E}(\{\lambda_p\})\,\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} + e^{i\lambda_p t}\,(\mathbb{E}(\{-\lambda_p\})\,\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t}\theta_\lambda(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})\,\mathrm{d}\lambda.$$

On conclut alors en appliquant le théorème de Riemann-Lebesgue sur $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t}\theta_\lambda(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})\,\mathrm{d}\lambda$. ■

3. Le fait que la densité $\theta_\lambda(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{V})$ soit L^1 est une conséquence du théorème spectral (cf. paragraphe 7.3.3).

8.3 Un phénomène de résonance

Après avoir établi le comportement asymptotique du terme $e^{-i\mathbb{A}\,t}\boldsymbol{U}_0$: solution du problème de Cauchy homogène, regardons maintenant séparément l'asymptotique du terme source $\phi_\omega(A,t)\boldsymbol{f}$ en supposant que la condition initiale $\boldsymbol{U}_0$ associée à notre problème de Cauchy est nulle. Ainsi l'équation (8.1) devient :

$$\boldsymbol{U}(t) = \phi_\omega(A,t)\boldsymbol{f}. \tag{8.6}$$

Théorème 8.3.1 *Soit une source $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}$ vérifiant l'hypothèse (H_2) et une pulsation $\omega \in \mathbb{R}^*$. Si $\Omega_e = \Omega_m$ et $\omega = \pm\lambda_p$ alors pour tout $\boldsymbol{V} \in \mathcal{H}$,*

$$(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}) = t\, e^{-i\,\omega t}\, (\mathbb{E}(\{\omega\})\, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} + o(t), \quad \forall \boldsymbol{V} \in \mathcal{H},$$

En revanche si $\Omega_e \neq \Omega_m$ ou $\omega \neq \pm\lambda_p$,

$$(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}) = o(t), \quad \forall \boldsymbol{V} \in \mathcal{H}.$$

Preuve. D'après (8.6), le terme $(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V})$ se réécrit sous la forme

$$(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = (\phi_\omega(A,t)\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}}.$$

En appliquant le théorème spectral 7.3.6, il vient :

$$(\phi_\omega(A,t)\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\lambda\in\mathbb{R}} \phi_\omega(\lambda,t)\, \mathrm{d}\,(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})\,. \tag{8.7}$$

Tout comme dans la démonstration de la proposition 8.2.1, la nature de la mesure $(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})$ dépend des paramètres Ω_e et Ω_m.

• Si $\Omega_e = \Omega_m$, la décomposition de l'espace $\mathcal{H}_0^\perp$ est donnée par (8.5). Ainsi comme $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}_0^\perp$, la mesure spectrale est de la forme

$$\mathrm{d}\,(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) = \theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})\ \mathrm{d}\lambda + (\mathbb{E}(\{\lambda_p\})\, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}}\, \delta_{\lambda_p} + (\mathbb{E}(\{-\lambda_p\})\, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}}\, \delta_{-\lambda_p},$$

avec $\theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \in L^1(\mathbb{R})$. Ainsi le terme (8.7) se reformule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(\phi_\omega(A,t)\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = {}& \phi_\omega(\lambda_p,t)\ (\mathbb{E}(\{\lambda_p\})\, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} + \phi_\omega(-\lambda_p,t)\, (\mathbb{E}(\{-\lambda_p\})\, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} \\ & + \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega(\lambda,t)\, \theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})\ \mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Montrons à l'aide du théorème de convergence dominée que $t^{-1} \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega(\lambda,t)\, \theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})\ \mathrm{d}\lambda \to 0$. En effet, on a d'une part (cf. (8.2)),

$$\left|t^{-1}\, \phi_\omega(\lambda,t)\, \theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})\right| \leq |\theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})| \in L^1(\mathbb{R}),$$

et d'autre part

$$t^{-1}\, \phi_\omega(\lambda,t)\, \theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \to 0 \ \text{ presque partout.}$$

Concernant la partie ponctuelle de la mesure, deux comportements sont alors alors possibles selon que $\omega \in \{\pm\lambda_p\}$ ou $\omega \notin \{\pm\lambda_p\}$. Ceci est dû au fait que la fonction $\phi_\omega(\lambda, t)$ est bornée en temps :

$$|\phi_\omega(\lambda, t)| \leq \frac{2}{|\lambda - \omega|} = o(t)$$

pour $\lambda \neq \omega$, alors qu'elle satisfait

$$\phi_\omega(\omega, t) = t\, e^{-i\,\omega\, t}$$

en $\lambda = \omega$. La partie absolument continue de la mesure étant négligeable devant t, le développement asymptotique en temps de l'expression 8.7 découle alors immédiatement de cette dernière propriété.

• Si $\Omega_e \neq \Omega_m$, $\mathcal{H}_0^\perp = \mathcal{H}_{ac}$, la mesure spectrale $(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})$ est donc ici absolument continue. En reprenant le raisonnement effectué dans le cas précédent sur la partie continue de $(\mathbb{E}_\lambda \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})$, on déduit aisément que :

$$(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = o(t).$$

■

Le théorème précédent a permis de mettre en évidence un phénomène de résonance aux fréquences $\pm\lambda_p$, appelées communément fréquences plasmons en électromagnétisme. En effet, lorsque'on excite le système en $\omega = \pm\lambda_p$, la solution $\boldsymbol{U}(t)$ n'est plus bornée lorsque $t \to \infty$ et croît linéairement en temps dès que la source $\boldsymbol{f}$ n'est pas orthogonal au sous-espace propre associés à $\omega = \pm\lambda_p$. Notons que l'originalité de ce phénomène de résonance est qu'il se produit pour un domaine de propagation non borné, ils sont usuellement plus faciles à observer lorsque le domaine est borné. Il est lié à la présence de valeurs propres non nulles dans le spectre de l'opérateur de Schrödinger $\mathbb{A}$. Remarquons enfin qu'un tel phénomène ne pourrait exister si l'on remplaçait le matériau de Drude par un deuxième diélectrique, car le spectre ponctuel de l'opérateur de Schrödinger ne contiendrait alors que 0 (cf. [113]).

Remarque 8.3.2 *Notons ici que dans des milieux ouverts d'autres phénomènes de résonance ont été mis en évidence avec un taux de croissance en temps moins rapide que la croissance linéaire. Par exemple, pour l'équation des ondes dans un guide cylindrique fermé, on observe un comportement en* $\sqrt{t}\, e^{-i\omega t}$ *si* ω *est une fréquence de coupure du guide, autrement dit le seuil d'apparition d'un nouveau mode guidé (cf. [115]). Par contre, pour un guide plan (du type* $\mathbb{R}^2 \times]0, 1[$*), la résonance est ici en* $\log(t)\, e^{-i\omega t}$ *pour une telle fréquence (cf. [116]). Dans ces deux cas, à la différence de notre problème, il ne s'agit pas de la présence d'une valeur propre en* ω*, mais d'un changement de multiplicité du spectre continu de l'opérateur en ce point.*

Nous allons maintenant illustrer ce phénomène de résonance numériquement. Dans ce but, nous présentons des simulations effectuées par Valentin Vinoles, doctorant au sein de l'équipe POEMS, qui travaille sur les aspects numériques de la propagation des ondes dans les métamatériaux. Dans ces simulations, on s'intéresse à la solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ avec une condition initiale $\boldsymbol{U}_0$ nulle pour les paramètres physiques suivants : $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\Omega_e = \Omega_m = 3$. Quant à la source $\boldsymbol{F}$, elle est donnée par [4]

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{f}\, \sin(\lambda_p\, t),$$

4. La solution associée à un tel second membre s'écrit comme la partie imaginaire de celle construite à partir de la source $\boldsymbol{f}\, e^{i\,\lambda_p\, t}$.

où $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}_0^{\perp}$ est définie par

$$\boldsymbol{f} = \Big(-J_{\parallel}/\varepsilon_0, 0, 0, 0\Big)^{\top} \text{ avec } J_{\parallel}(x,y) = -e^{-25\left[(x+1)^2+y^2\right]},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{8.8}$$

Ce jeu de paramètres implique que l'indice de réfraction est égal $n = \sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0} = 1$ dans le diélectrique et $n = -\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0} = -1$ dans le matériau de Drude. Nous sommes donc dans des conditions similaires à celles utilisées dans la lentille de Pendry (cf [90]).

Remarque 8.3.3 *Le problème étant posé dans un domaine non borné, il est nécessaire de tronquer artificiellement le domaine de calcul. A cette fin, l'une des méthodes les plus populaires consiste à utiliser les fameuses couches absorbantes parfaitement adaptées, encore appelées PML (acronyme anglais pour Perfectly Matched Layers), introduites par Jean-Pierre Bérenger (cf. [15]). Malheureusement, les PML peuvent présenter des instabilités, notamment en présence d'ondes inverses (cf. [13]). Or, le matériau de Drude, qui se comporte comme un NIM à basses fréquences, induit l'existence d'ondes inverses dans les phénomènes de propagation (cf. sous-partie 7.1.3). Les PML dites "classiques" sont donc instables dans notre cas. Cependant, il est possible de construire des PML stables dans les NIM. Ceci sera détaillé dans l'article [14] en préparation.*

Dans la figure 8.1, nous avons représenté l'évolution temporelle du champ $u_E(\cdot)$ (composante électrique de $\boldsymbol{U}(\cdot)$) sur le domaine $[-10,10] \times [0,10]$. A partir de $t = 0$, la source émet dans le diélectrique, ce qui génère une onde qui se propage ensuite de part et d'autre de l'interface. L'indice optique du matériau de Drude étant négatif à la fréquence d'excitation λ_p, les ondes sont inverses dans ce matériau. Ceci est difficilement visible sur les instantanés de la figure 8.1, mais on le constate aisément en regardant l'animation correspondante à cette simulation. La source $\boldsymbol{F}$ fait ici résonner les modes plasmoniques $\boldsymbol{w_{\lambda_p,k,1}}$ localisés au voisinage de l'interface, nous notons donc surtout un accroissement au cours du temps du module de $u_E(\cdot)$ dans cette zone. La croissance linéaire, énoncée dans le théorème 8.3.1, est confirmée par la figure 8.3 qui représente l'évolution au cours du temps du champ $u_E(\cdot)$ pour le point de l'interface $(0,0)$.

Différents tests numériques ont mis en évidence la nécessité de placer la source proche de l'interface pour exciter suffisamment les plasmons $\boldsymbol{w_{\lambda_p,k,1}}$ afin que le phénomène soit constatable numériquement. Ceci s'explique par le fait que les ondes plasmoniques sont exponentiellement décroissantes dans la direction transverse à l'interface, on les excite donc d'autant mieux quand la source est proche de cette dernière.

La simulation correspondant à la figure 8.2 consiste, tout en excitant à la fréquence de résonance λ_p, à prendre une source spatiale $\boldsymbol{f}$ qui est dans l'orthogonal de l'image du projecteur $\mathbb{E}(\{\lambda_p\})$. A la différence du cas précédent, le théorème 8.3.1 prédit qu'il n'y aura pas de croissance linéaire en temps de la solution. Pour construire une telle source, il suffit de rendre la densité de courant $J_{\parallel}$ dans (8.8) impaire en x. En effet, pour tout $\boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_{\downarrow}$, le produit scalaire $(\mathbb{E}(\{\lambda_p\})\,\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}}$ est donné (cf. (7.94)) par

$$(\mathbb{E}(\{\lambda_p\})\,\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{|k|>k_c} \Big\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w_{\lambda_p,k,1}} \Big\rangle_{\mathcal{H}} \overline{\Big\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w_{\lambda_p,k,1}} \Big\rangle_{\mathcal{H}}}\, \mathrm{d}k,$$

où la première composante de $\boldsymbol{w_{\lambda_p,k,1}}$ est paire en x d'après la remarque 7.1.16. Il est donc nul pour un courant $J_{\parallel}$ impair. Ainsi, par densité de $\mathcal{H}_{\downarrow}$ dans $\mathcal{H}$, $\boldsymbol{f}$ appartient à $Im(\mathbb{E}(\{\lambda_p\})^{\perp}$. De manière à rendre $J_{\parallel}$ impaire en x dans 8.8, nous avons ici posé :

$$J_{\parallel}(x,y) = -e^{-25\left[(x+1)^2+y^2\right]} + e^{-25\left[(-x+1)^2+y^2\right]},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dans la figure 8.2, on observe alors que le module de $u_E(\cdot)$ ne croît pas au cours du temps. L'onde semble osciller de manière périodique, ce qui est confirmé par la figure 8.4.

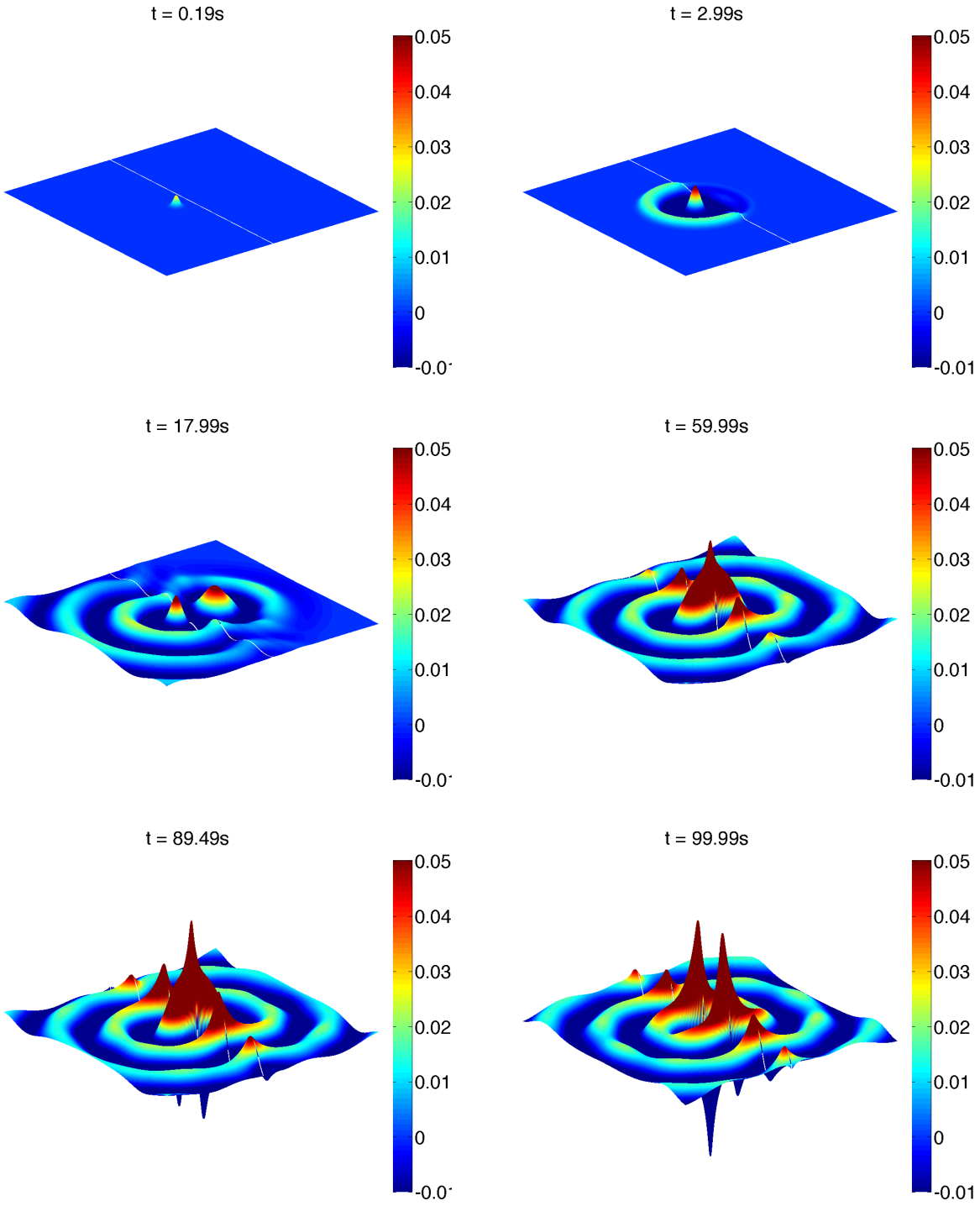

FIGURE 8.1 – Évolution temporelle du champ électrique $u_E(\cdot)$ pour $\Omega_e = \Omega_m = 3$ et $\omega = \lambda_p = \Omega_m/\sqrt{2}$.

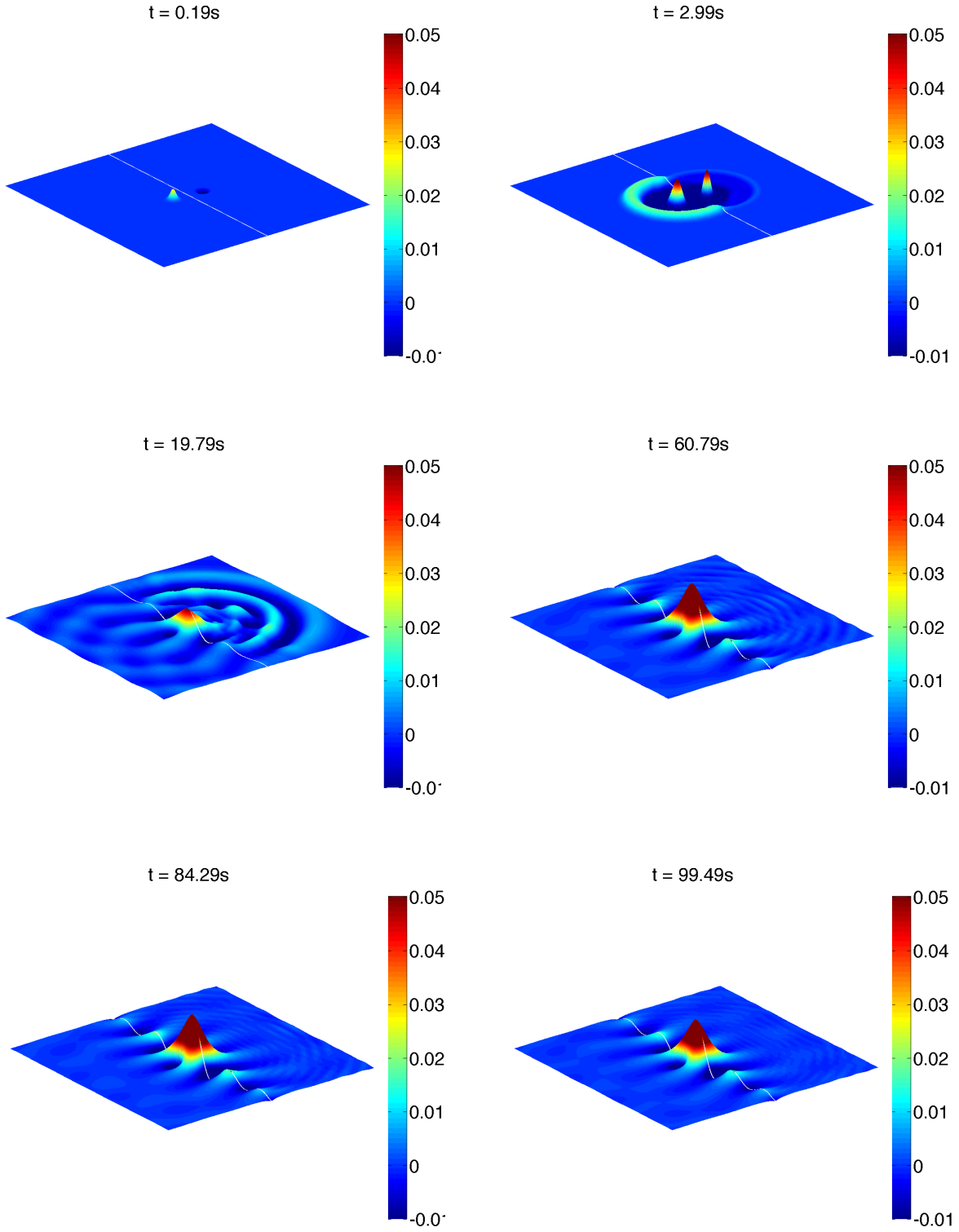

FIGURE 8.2 – Évolution temporelle du champ électrique $u_E(\cdot)$ pour $\Omega_e = \Omega_m = 3$, $\omega = \lambda_p = \Omega_m/\sqrt{2}$ et un courant $J_{\|}$ impair en la variable x.

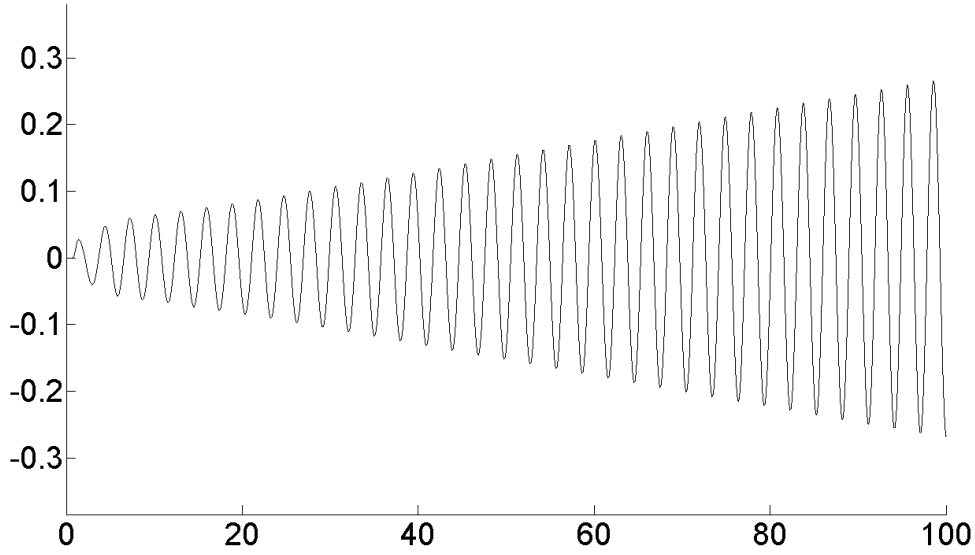

FIGURE 8.3 – Évolution temporelle du champ électrique $u_E(\cdot)$ (décrit par la figure 8.1) au point $(0, 0)$ situé sur l'interface.

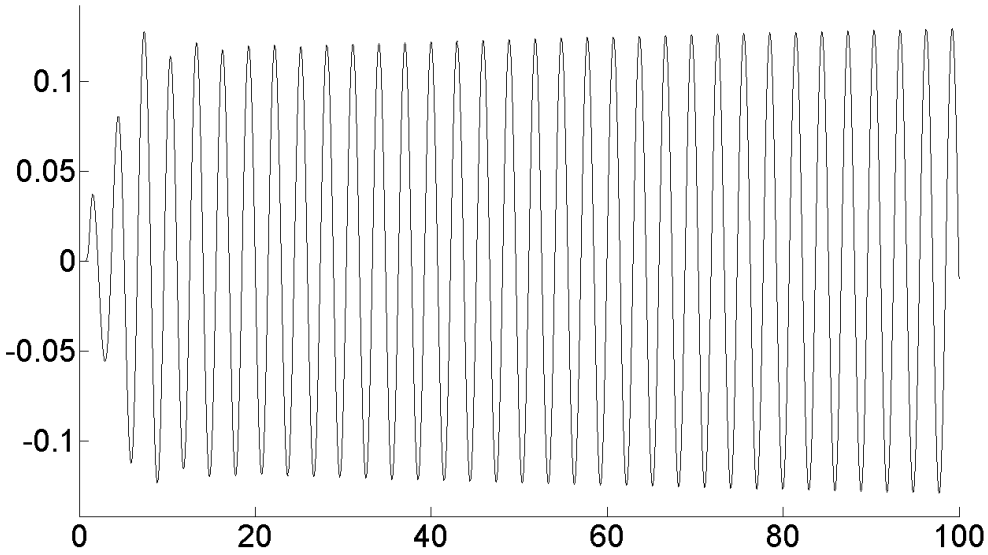

FIGURE 8.4 – Évolution temporelle du champ électrique $u_E(\cdot)$ (décrit par la figure 8.2) au point $(0, 0)$ situé sur l'interface.

8.4 Le principe d'amplitude limite

Le théorème 8.3.1, nous a permis de mettre en évidence un phénomène de résonance aux fréquences plasmons $\pm\lambda_p$. Néanmoins, le $o(t)$ obtenu pour des fréquences d'excitations différentes de $\pm\lambda_p$ peut être précisé. Nous allons nous restreindre au cas d'une excitation $\omega \in J$ où J est l'intervalle défini par (8.25) que nous rappelons ici :

$$J = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, -\lambda_p, 0, \lambda_p, \Omega_m\} & \text{si } \Omega_m = \Omega_e, \\ \mathbb{R} \setminus \{-\Omega_m, -\lambda_c, -\lambda_p, 0, \lambda_p, \lambda_c, \Omega_m\} & \text{si } \Omega_m \neq \Omega_e. \end{cases}$$

Nous verrons que sous certaines conditions la solution $\boldsymbol{U}(t)$ va rester localement bornée et se rapprocher en temps longs d'un régime périodique établi $\boldsymbol{u}_+$. Ce dernier est défini par le corollaire suivant qui se déduit immédiatement du théorème d'absorption limite 8.6.2 démontré en annexe. Pour énoncer ce corollaire, rappelons la définition de l'ensemble $\mathbb{C}^+$ (définit dans l'annexe en (8.24)) :

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Corollaire 8.4.1 *Soient $s > 2$, $\omega \in J$ et $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}_\downarrow \cap \mathcal{H}_{ac}$ alors la limite suivante*[5] *:*

$$\boldsymbol{u}_+ = \lim_{\zeta \in \mathbb{C}^+ \to \omega} R(\zeta)\boldsymbol{f} \quad \textit{existe dans} \quad \mathcal{H}_\uparrow$$

et est donnée explicitement par la formule suivante

$$\langle \boldsymbol{u}_+, \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{VP}_\omega \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})}{\lambda - \omega} \, \mathrm{d}\lambda + i\,\pi\theta_\omega(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}), \ \forall \boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_\downarrow, \tag{8.9}$$

où VP_ω la valeur principale de Cauchy en ω[6]*. Quant à $\theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})$, il s'agit de la densité spectrale de la mesure absolument continue associée à l'opérateur $\mathbb{A}$ définie par (8.23). De plus, sous ces hypothèses, il existe $\alpha > 0$ tel que (pour tout $\boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_\downarrow$) $\lambda \mapsto \theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})$ est une fonction localement hölderienne d'exposant α sur J.*

Remarque 8.4.2 *Décrivons ici la condition $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}_{ac}$. Dans le cas où $\Omega_e \neq \Omega_m$, elle se résume à supposer que $\boldsymbol{f}$ vérifie (H_2) :*

$$\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}_0^\perp = \left\{ \boldsymbol{U} = (u_E, \boldsymbol{u_H}, u_P, \boldsymbol{u_M}) \in \mathcal{H} \mid \mathrm{div}\, \boldsymbol{u_H}|_{\mathbb{R}^2_-} = 0, \, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u_H}|_{\mathbb{R}^2_+} = 0 \textit{ et } \mathrm{div}\, \boldsymbol{u_M} = 0 \right\},$$

car $\mathcal{H}_0^\perp = \mathcal{H}_{ac}$. Par contre si $\Omega_e = \Omega_m$, cette condition est équivalente à supposer que $\boldsymbol{f}$ vérifie (H_2) et que sa projection sur les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathbb{A} \pm \lambda_p)$ associés aux fréquences plasmons : $\pm\lambda_p$ est nulle.

Sous ces conditions, nous pouvons démontrer la proposition suivante connu sous le nom de principe d'amplitude limite. La démonstration proposée ici s'inspire de celle développée dans [47].

Théorème 8.4.3 *(Principe d'amplitude limite) Soient $\omega \in J$, $s > 2$ et $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}_\downarrow \cap \mathcal{H}_{ac}$, la solution $\boldsymbol{U}(t)$ du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ avec condition initiale nulle vérifie pour tout $\boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_\downarrow$,*

$$\langle \boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}} = -i \left\langle \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{V} \right\rangle_{\mathcal{H}} e^{-i\omega t} + o(1), \quad \textit{lorsque } t \to \infty, \tag{8.10}$$

où $\boldsymbol{u}_+$ est définie par le corollaire 8.4.1.

5. L'indice s fait ici référence au poids des espaces $\mathcal{H}_\uparrow$ et $\mathcal{H}_\downarrow$ définis respectivement en (7.90) et (7.91).

6. L'existence de la valeur principale de Cauchy dans la formule (8.9) résulte du caractère L^1 de la densité spectrale $\theta_\lambda(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})$ et de sa régularité höldérienne au voisinage de la singularité ω.

Preuve. Soit $\boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_{\downarrow}$. Le terme $\langle \boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}}$ s'exprime (cf. 8.7) en fonction de la mesure spectrale par :

$$\langle \boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}} = (\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\lambda \in \mathbb{R}} \phi_{\omega}(\lambda, t) \, \mathrm{d} \left(\mathbb{E}_{\lambda} \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V} \right).$$

Comme $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}_{ac}$, la mesure spectrale est ici absolument continue, soit $\mathrm{d} \left(\mathbb{E}_{\lambda} \boldsymbol{f}, \boldsymbol{V} \right) = \theta_{\lambda}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \, \mathrm{d}\lambda$ où la fonction

$$\theta_{\lambda}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \in L^1(\mathbb{R})$$

est la densité spectrale (dont une expression explicite est donnée en (8.23)). En utilisant la définition de la fonction $\phi_{\omega}(\lambda, t)$ (cf. 8.1), il vient :

$$\langle \boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\lambda \in \mathbb{R}} i \, \frac{e^{-i \lambda t} - e^{-i \omega t}}{\lambda - \omega} \theta_{\lambda}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \, \mathrm{d}\lambda. \tag{8.11}$$

Quant au terme $\langle \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}_{\downarrow}}$ associé au régime périodique établi, sa forme explicite est donnée par le corollaire 8.4.1 :

$$\left\langle \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{V} \right\rangle_{\mathcal{H}_{\downarrow}} = \mathrm{VP}_{\omega} \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta_{\lambda}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})}{\lambda - \omega} \, \mathrm{d}\lambda + i \pi \theta_{\omega}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}), \tag{8.12}$$

où VP_{ω} désigne la valeur principale de Cauchy prise en ω. Pour établir (8.10), réécrivons (8.11) sous la forme :

$$\langle \boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}} = -i \, e^{-i \omega t} \left(\mathrm{VP}_{\omega} \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta_{\lambda}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})}{\lambda - \omega} \, \mathrm{d}\lambda - \mathrm{VP}_{\omega} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i \, (\lambda - \omega) \, t}}{\lambda - \omega} \, \theta_{\lambda}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \, \mathrm{d}\lambda \right),$$

ce qui conduit avec (8.12) à :

$$\langle \boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}} = -i \, e^{-i \omega t} \left(\left\langle \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{V} \right\rangle_{\mathcal{H}} - i \, \pi \theta_{\omega}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{f}) - \mathrm{VP}_{\omega} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i \, (\lambda - \omega) \, t}}{\lambda - \omega} \, \theta_{\lambda}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \, \mathrm{d}\lambda \right).$$

Ainsi, il reste donc à montrer que

$$\mathrm{VP}_{\omega} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i \, (\lambda - \omega) \, t}}{\lambda - \omega} \, \theta_{\lambda}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \, \mathrm{d}\lambda = -i \, \pi \theta_{\omega}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{f}) + o(1), \text{ lorsque } t \to \infty.$$

A cette fin, posons le changement de variable $\xi = \lambda - \omega$, il s'ensuit que :

$$\mathrm{VP}_{\omega} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i \, (\lambda - \omega) \, t}}{\lambda - \omega} \, \theta_{\lambda}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \, \mathrm{d}\lambda = \mathrm{VP}_0 \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i \, \xi \, t}}{\xi} \, \theta_{\xi + \omega}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \, \mathrm{d}\xi. \tag{8.13}$$

Soit a strictement positif, on peut alors décomposer l'intégrale précédente de la manière suivante

$$\mathrm{VP}_0 \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i \, \xi \, t}}{\xi} \, \theta_{\xi + \omega}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \, \mathrm{d}\lambda = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) \tag{8.14}$$

où

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \mathrm{VP}_0 \int_{-a}^{a} \frac{e^{-i \, \xi \, t}}{\xi} \left(\theta_{\xi + \omega}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) - \theta_{\omega}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \right) \mathrm{d}\xi, \\
I_2(t) &= \theta_{\omega}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \; \mathrm{VP}_0 \int_{-a}^{a} \frac{e^{-i \, \xi \, t}}{\xi} \, \mathrm{d}\xi, \\
I_3(t) &= \int_{|\xi| > a} \frac{e^{-i \, \xi \, t}}{\xi} \, \theta_{\xi + \omega}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V}) \, \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

La densité spectrale $\theta_{\xi+\omega}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{V})$ étant une fonction intégrable, par le théorème de Riemann-Lebesgue :

$$I_3(t) = o(1), \text{ lorsque } t \to \infty.$$

Concernant l'intégrale $I_1(t)$, comme l'espace $\mathcal{H}_\downarrow$ a été choisi avec un poids vérifiant $s > 2$, nous savons d'après le corollaire 8.4.1 qu'il existe α strictement positif tel que la fonction $\theta_\lambda(\boldsymbol{f},\boldsymbol{V})$ soit hölder d'indice α en ω. Sur un voisinage de 0, on obtient alors la majoration suivante :

$$\frac{|\theta_{\xi+\omega}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{V}) - \theta_\omega(\boldsymbol{f},\boldsymbol{V})|}{|\xi|} \leq \frac{C}{|\xi|^{1-\alpha}} \quad \text{qui est intégrable en 0.}$$

Ainsi, par le théorème de Riemann-Lebesgue, on a également $I_1(t) = o(1)$, lorsque $t \to \infty$.

Pour traiter $I_2(t)$, utilisons le lemme 8.4.4 qui est un résultat classique d'analyse complexe :

$$\mathrm{VP}_0 \int_{-a}^{a} \frac{e^{-i\,\xi\,t}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = -i\,\pi + o(1), \quad \text{lorsque } t \to \infty,$$

Il vient alors

$$I_2(t) = -i\,\pi\,\theta_\omega(\boldsymbol{f},\boldsymbol{V}) + o(1), \quad \text{lorsque } t \to \infty.$$

Ce qui conduit finalement avec (8.13) et (8.14) à

$$\mathrm{VP}_\omega \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\,(\lambda-\omega)\,t}}{\lambda-\omega}\,\theta_\lambda(\boldsymbol{f},\boldsymbol{V})\,\mathrm{d}\xi = -i\,\pi\,\theta_\omega(\boldsymbol{f},\boldsymbol{V}) + o(1) \text{ lorsque } t \to \infty.$$

■

Lemme 8.4.4 *Soit $a > 0$ alors :*

$$I(t) = \mathrm{VP}_0 \int_{-a}^{a} \frac{e^{-i\,\xi\,t}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = -i\,\pi + o(1), \quad \textit{lorsque } t \to \infty.$$

Preuve. En posant le changement de variable $u = -\xi\,t$, $I(t)$ se réécrit de la manière suivante :

$$I(t) = -\,\mathrm{VP}_0 \int_{-a\,t}^{a\,t} \frac{e^{i\,u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Le résultat va alors découler de la formule de Cauchy appliquée au contour $\gamma^{t,\,\varepsilon} = \gamma_1^t \cup \gamma_2^{t,\varepsilon} \cup \gamma_3^\varepsilon$ (cf. figure 8.5) défini par :

$$\begin{aligned}
\gamma_1^t &: u \longmapsto a\,t\,e^{i\,u},\ u \in]0,\pi[,\\
\gamma_2^{t,\varepsilon} &: u \longmapsto u,\ |u| \in]\varepsilon, a\,t[,\\
\gamma_3^\varepsilon &: u \longmapsto \varepsilon\,e^{i\,(\pi-u)},\ u \in]0,\pi[.
\end{aligned}$$

En effet, d'après la formule de Cauchy, on a :

$$\int_{\gamma^{t,\,\varepsilon}} \frac{e^{i\,\zeta}}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$

Or après un petit calcul, on montre que :

$$\int_{\gamma_3^\varepsilon} \frac{e^{i\,\zeta}}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = -i\pi.$$

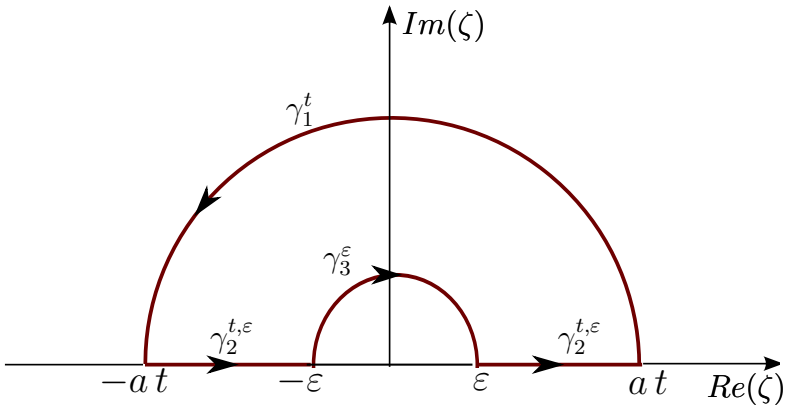

FIGURE 8.5 – Contour $\gamma^{t,\,\varepsilon} = \gamma_1^t \cup \gamma_2^{t,\varepsilon} \cup \gamma_3^\varepsilon$

Ainsi en faisant tendre ε vers 0, il vient :

$$-i\pi - I(t) + \int_{\gamma_1^t} \frac{e^{i\,\zeta}}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Il est alors aisé de montrer que

$$\int_{\gamma_1^t} \frac{e^{i\,\zeta}}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = o(1) \quad \text{lorsque } t \to \infty.$$

Soit finalement,

$$I(t) = -i\pi + o(1), \quad \text{lorsque } t \to \infty.$$

■

Remarque 8.4.5 *Nous nous sommes ici restreints à des fréquences d'excitation $\omega \in J$. Parmi les fréquences qui n'appartiennent pas à J (défini en (8.25)), remarquons tout d'abord que les points $-\Omega_m, 0, \Omega_m$ ont été éliminés de la dynamique du système par l'hypothèse (H_2). De plus, nous avons montré que le système résonnait aux fréquences plasmons $\pm\lambda_p$ lorsque $\Omega_e = \Omega_m$. Ainsi, dans le but d'obtenir le premier terme de l'asymptotique en temps long des solutions de l'équation de Schrödinger soumise à un second membre périodique, il nous resterait seulement à étudier si le théorème d'amplitude limite est vérifié en $\pm\lambda_p$ et $\pm\lambda_c$ pour $\Omega_e \neq \Omega_m$. Ceci, nous permettrait de répondre à la question suivante : atteint-on un régime périodique établi lorsqu'on excite le système à ces fréquences ? Nous nous y attèlerons dans un future proche. Pour l'instant, nous savons seulement par le théorème 8.3.1 qu'en excitant à ces fréquences (sous l'hypothèse (H_2)), la solution $\boldsymbol{U}(t)$ de Cauchy $(\mathcal{C})$ avec conditions initiales nulles vérifie*

$$(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}) = o(t), \quad \forall \boldsymbol{V} \in \mathcal{H}.$$

Résumons enfin les résultats obtenus dans ce chapitre par le théorème suivant qui est en fait une synthèse des théorèmes 8.3.1 et 8.4.3.

Théorème 8.4.6 *Soient $s > 2$, $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}_0^{\perp}$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$ alors les asymptotiques en temps long de la solution $\boldsymbol{U}(\cdot)$ du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ avec condition initiale nulle sont données par les trois assertions suivantes :*

- *Pour $\Omega_e \neq \Omega_m$, $\omega \in J$ et $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}_{\downarrow}$,*

$$\langle \boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}} = -i \left\langle \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{V} \right\rangle_{\mathcal{H}} e^{-i\,\omega\,t} + o(1),\ \forall \boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_{\downarrow}, \tag{8.15}$$

où

$$\boldsymbol{u}_+ = \lim_{\zeta \in \mathbb{C}^+ \to \omega} R(\zeta)\boldsymbol{f}\ \in \mathcal{H}_{\downarrow}$$

est définie par le corollaire 8.4.1. Autrement dit, le théorème d'amplitude limite est vérifié.

- *Pour $\Omega_e = \Omega_m$, $\omega \in J$ et $\boldsymbol{f} \in \mathcal{H}_{\downarrow}$, en utilisant la décomposition (7.97) de l'espace $\mathcal{H}_0^{\perp}$, on peut écrire $\boldsymbol{f}$ de façon unique sous la forme*

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{ac} + \mathbb{E}(\{\lambda_p\})\,\boldsymbol{f} + \mathbb{E}(\{-\lambda_p\})\,\boldsymbol{f},\ \ \text{où } \boldsymbol{f}_{ac} \in \mathcal{H}_{ac}. \tag{8.16}$$

On obtient alors que :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}} \ &= -i \left\langle \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{V} \right\rangle_{\mathcal{H}} e^{-i\,\omega\,t} \\ &\quad + \langle \mathbb{E}(\{\lambda_p\})\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}}\ \phi_\omega(\lambda_p, t) + \langle \mathbb{E}(\{-\lambda_p\})\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V} \rangle_{\mathcal{H}}\ \phi_\omega(-\lambda_p, t),\end{aligned} \tag{8.17}$$

où

$$\boldsymbol{u}_+ = \lim_{\zeta \in \mathbb{C}^+ \to \omega} R(\zeta)\boldsymbol{f}_{ac}\ \in \mathcal{H}_{\downarrow}$$

est définie par le corollaire 8.4.1 et

$$\phi_\omega(\pm\lambda_p, t) = i\,\frac{e^{-i\,\pm\lambda_p\,t} - e^{-i\,\omega\,t}}{\pm\lambda_p - \omega}.$$

Ici, le système oscille aux fréquences ω, λ_p et $-\lambda_p$, le principe d'amplitude limite n'est donc pas vérifié, mais la solution reste bornée en temps.

- *Pour $\Omega_e = \Omega_m$ et $\omega = \pm\lambda_p$,*

$$(\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{V}) = t\,e^{-i\omega t}\,(\mathbb{E}(\{\omega\})\,\boldsymbol{f}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} + o(t),\ \forall \boldsymbol{V} \in \mathcal{H}. \tag{8.18}$$

Le système entre en résonance.

Preuve. La première et la troisième assertion sont ici simplement la réécriture des résultats obtenus dans les théorèmes 8.3.1 et 8.4.3. Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit d'utiliser la décomposition (8.16) de la source $\boldsymbol{f}$ pour écrite $\boldsymbol{U}(t) = \phi_\omega(\mathbb{A}, t)\,\boldsymbol{f}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{U}(t) = \phi_\omega(\lambda_p, t)\,\mathbb{E}(\{\lambda_p\})\boldsymbol{f} + \phi_\omega(-\lambda_p, t)\,\mathbb{E}(\{-\lambda_p\})\boldsymbol{f} + \phi_\omega(\mathbb{A}, t)\,\boldsymbol{f}_{ac}.$$

et d'appliquer le théorème 8.4.3 à $\boldsymbol{U}_1(t) = \phi_\omega(\mathbb{A}, t)\,\boldsymbol{f}_{ac}$ qui est la solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ avec une condition initiale nulle et un second membre de la forme $\boldsymbol{f}_{ac}\,e^{-i\,\omega\,t}$. ∎

Dans le but d'illustrer ce théorème, nous avons déjà simulé numériquement le cas où l'on excitait le système à la fréquence de résonance λ_p (correspondant ici à l'asymptotique (8.18)) dans la partie précédente. Nous nous proposons maintenant d'effectuer deux simulations coïncidant avec les situations (8.15) et (8.17). Nous reprenons la configuration géométrique et les paramètres physiques de la figure 8.1 à l'exception de Ω_e, Ω_m et de la fréquence d'excitation ω.

Dans les figures 8.6 et 8.8, on s'intéresse au cas où le principe d'amplitude limite est vérifié (cf. (8.15)). On excite ici le système, pour $\Omega_m = 4, \Omega_e = 3$, à la fréquence $\omega = 2.7$. L'onde générée atteint bien un régime périodique établi, ceci est visible sur les trois derniers instantanés de la figure 8.6 et confirmé par le graphique 8.8 qui décrit l'évolution temporelle du champ électrique $u_E(\cdot)$ au point $(0, 0)$ situé sur l'interface. De plus, on note avec la figure (8.10), représentant le spectre fréquentiel de l'onde tracée dans la figure 8.8, qu'il s'agit bien d'un régime périodique établi à la fréquence $\omega = 2.7$ dans la mesure où l'on observe un pic très marqué à cette fréquence. De plus, remarquons également que ω vérifie ici :

$$\lambda_c = \frac{\Omega_e \, \Omega_m}{\sqrt{\Omega_e^2 + \Omega_m^2}} \approx 2.4 < \omega < \lambda_p = \frac{\Omega_m}{\sqrt{2}} \approx 2.8.$$

Cette fréquence excite donc particulièrement les modes plasmons $\boldsymbol{w_{\lambda_p(k),k,1}}$ (cf. figure 6.3 où l'on note que la fréquence ω intersecte la courbe $\lambda_p(k)$) que l'on observe dans le régime périodique établi dans les trois derniers instantanés de la figure 8.6 où une onde plasmonique se propage le long de l'interface.

Dans les figures 8.7 et 8.9, on se place dans le cas correspondant à l'asymptotique (8.17), c'est-à-dire que l'on choisit $\Omega_m = \Omega_e = 3$ et que l'on excite à une fréquence $\omega = \lambda_p + 0.5 \approx 2.6$ différente de la fréquence plasmon λ_p. Les instantanées de la figure 8.7 suggèrent alors que la solution reste bornée en temps. Par contre, il ne s'agit pas d'un régime périodique établi. En effet, on observe dans la figure 8.9 qui représente l'évolution temporelle du champ électrique $u_E(\cdot)$ au point $(0, 0)$ un phénomène de battements : l'onde est ici une superposition de deux sinusoïdes à la fréquence ω et λ_p. Son spectre fréquentiel (cf. figure 8.10) possède ici deux pics l'un plus marqué à la fréquence ω et l'autre à la fréquence plasmon λ_p.

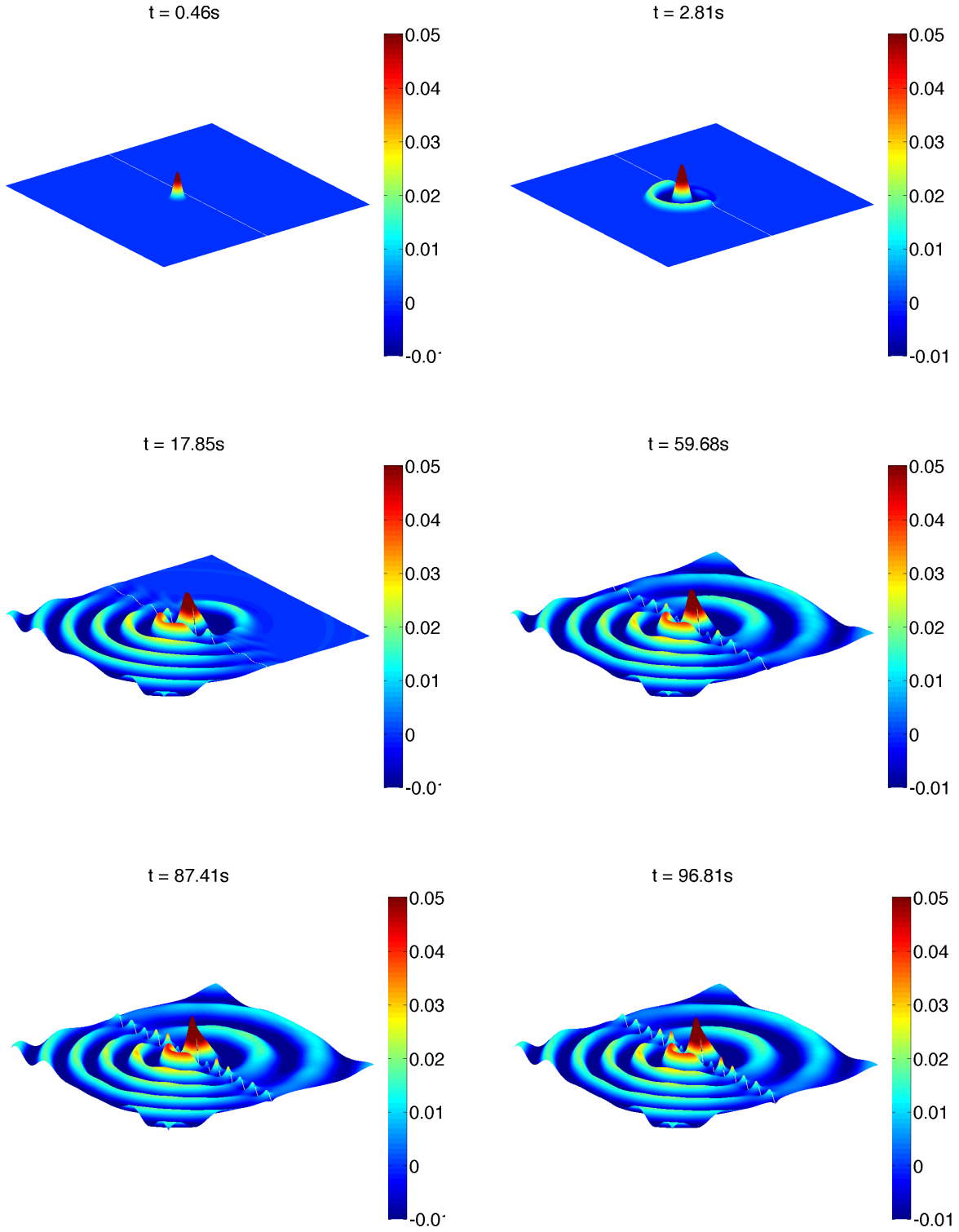

FIGURE 8.6 – Évolution temporelle de $\boldsymbol{U}(\cdot)$ pour $\Omega_m = 4, \Omega_e = 3$ et $\omega = 2.7$.

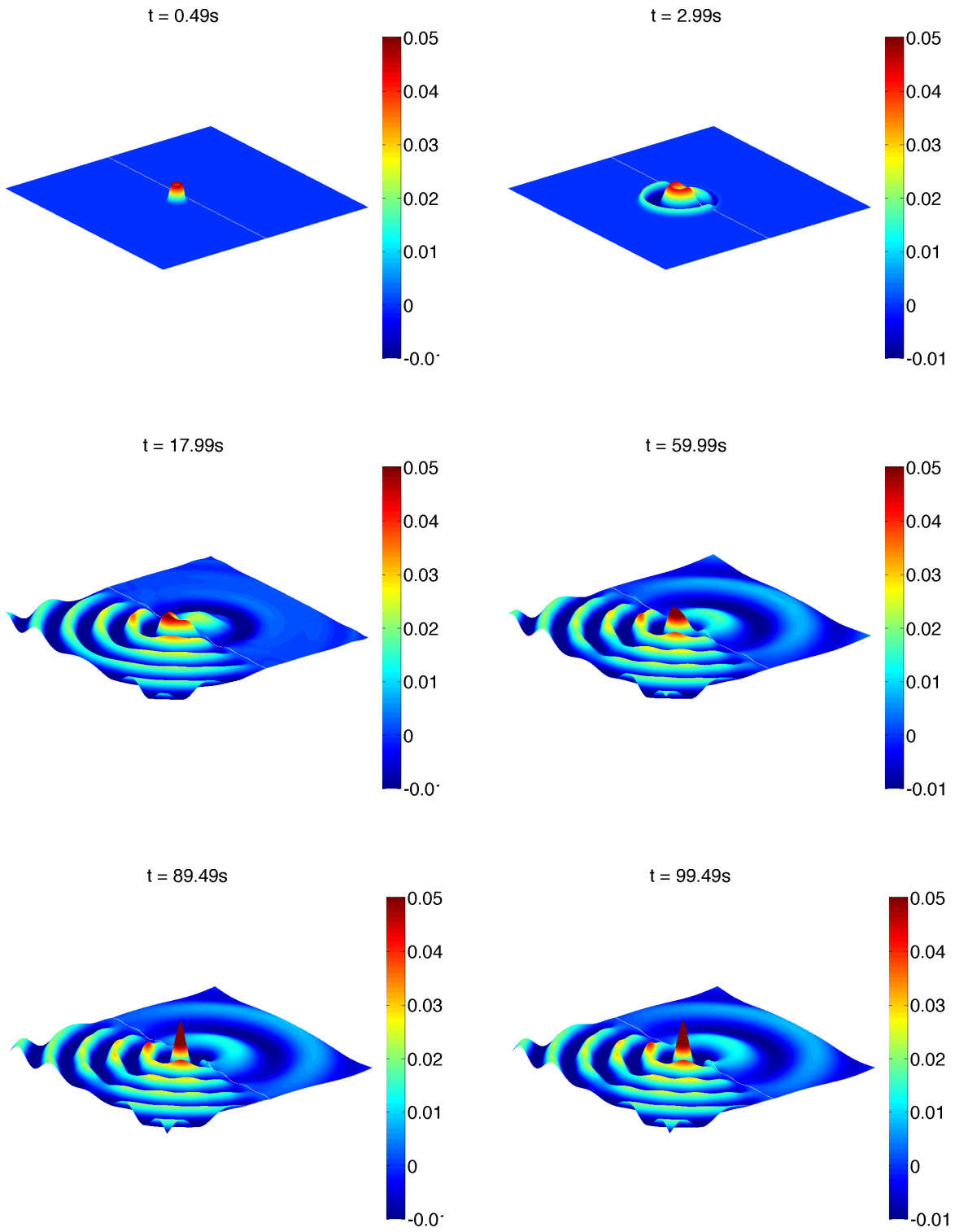

FIGURE 8.7 – Évolution temporelle de $\boldsymbol{U}(\cdot)$ pour $\Omega_e = \Omega_m = 3$ et $\omega = \lambda_p + 0.5 \approx 2.6$.

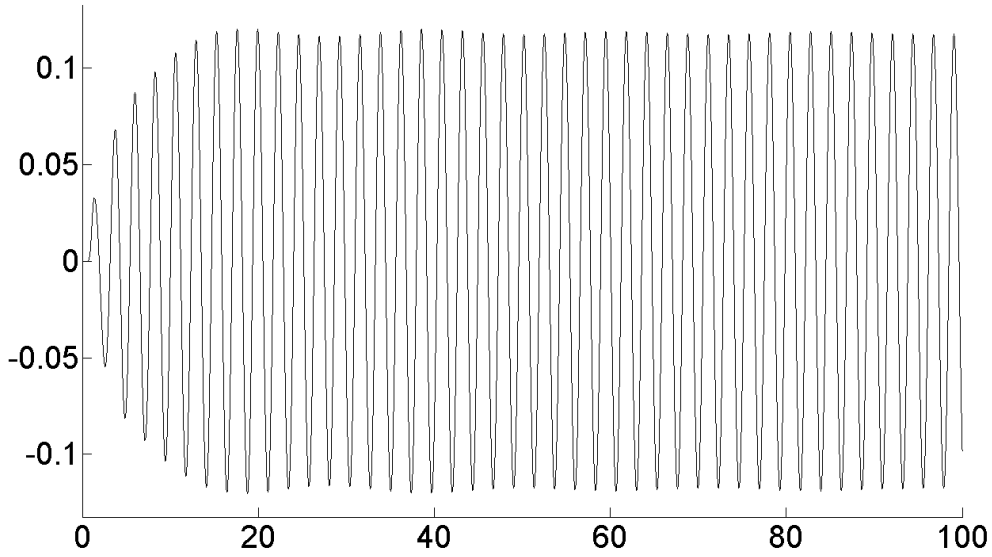

FIGURE 8.8 – Évolution temporelle du champ électrique $u_E(\cdot)$ (décrit par la figure 8.6) au point $(0, 0)$ situé sur l'interface.

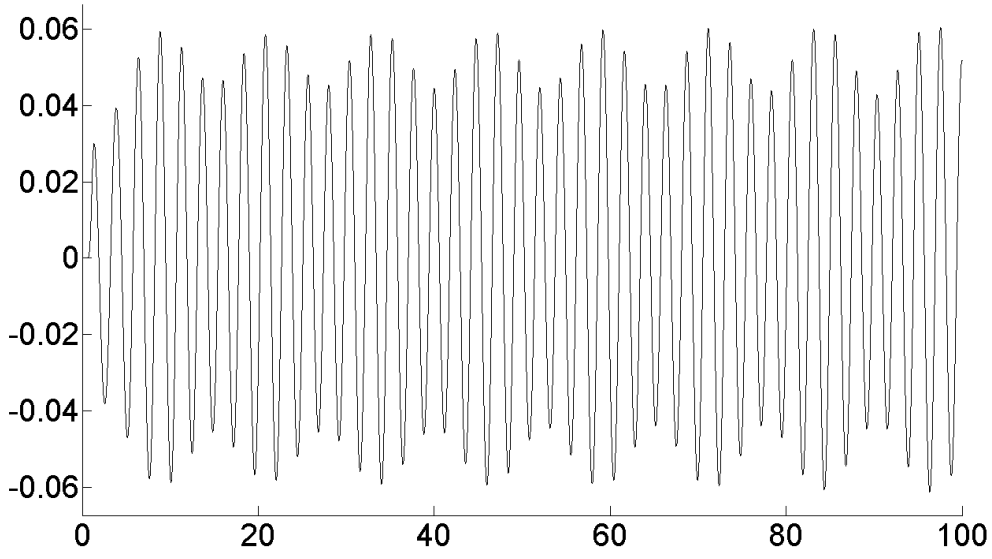

FIGURE 8.9 – Évolution temporelle du champ électrique $u_E(\cdot)$ (décrit par la figure 8.7) au point $(0, 0)$ situé sur l'interface.

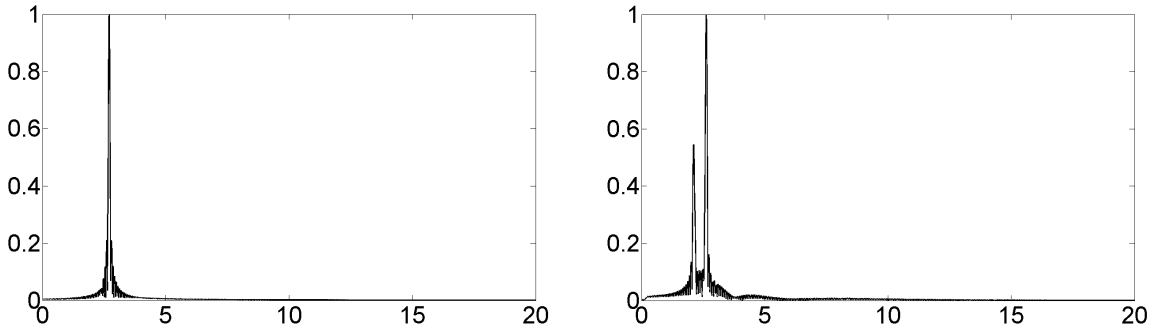

FIGURE 8.10 – Spectre fréquentiel du signal représenté par la figure 8.8 (à gauche) et par la figure 8.9 (à droite).

8.5 Conclusion

L'étude spectrale effectuée au septième chapitre, nous a permis d'obtenir l' asymptotique en temps long des solutions de notre problème d'évolution soumis à un second membre périodique en temps. Nous avons alors dégagé trois types de comportement selon la fréquence d'excitation ω (décrits dans le théorème 8.4.6) : la convergence vers un régime périodique établi, un phénomène de battements où la solution reste bornée en temps mais oscille à plusieurs fréquences et enfin la présence de résonances où la solution explose linéairement en temps.

Ce travail ouvre de nombreuses perspectives. Énumérons tout d'abord les débouchés à court terme de nature plutôt technique.

Dans un premier temps, il nous faut traiter les cas où l'on excite le système pour $\Omega_e \neq \Omega_m$ aux fréquences $\pm\lambda_c$ et $\pm\lambda_p$. En effet, faute de temps, l'asymptotique des solutions correspondant à ces excitations n'est pas décrite par le théorème 8.4.6 (cf. remarque 8.4.5). Le principe d'amplitude limite est-il vérifié pour ces fréquences ? les simulations numériques effectuées nous font plutôt pencher pour une réponse positive à cette interrogation.

Ensuite, nous projetons d'affiner les majorations utilisées dans la preuve du théorème d'absorption limite 8.6.2 afin d'obtenir des espaces à poids $\mathcal{H}_\downarrow$ et $\mathcal{H}_\uparrow$ optimaux. Ceci permettrait de considérer un espace de sources $\mathcal{H}_\downarrow$ plus grand (pour les théorèmes d'absorption et d'amplitude limite) où les fonctions $\boldsymbol{f}$ seraient supposées moins décroissantes à l'infini (cf. remarque 8.6.6).

Enfin, nous envisageons de traiter les équations de Maxwell complètes dans le dioptre. Rappelons que nous avons ici considéré de façon arbitraire le mode transverse magnétique (TM) et que l'on transposerait aisément les résultats obtenus dans le cadre du mode transverse magnétique (TE). Or dans le cas d'un milieu stratifié, l'étude spectrale des modes (TE) et (TM) permet d'obtenir celles des équations de Maxwell complètes (cf. [113]).

Énumérons maintenant quelques perspectives à plus long terme. Ce travail effectué dans le cas d'un matériau de Drude pourrait être généralisé à des modèles dispersifs plus compliqués à l'instar de celui de Lorentz évoqué dans le cinquième chapitre. Puis, on pourrait également étendre cette étude à d'autres géométries : le cas d'une lentille où une couche de métamatériau d'épaisseur finie est insérée dans un diélectrique, celui d'un milieu stratifié alternant plusieurs couches de diélectriques et de métamatériaux ou encore le cas d'"un dioptre circulaire" où une boule de métamatériau est incluse dans un diélectrique... Un tel travail permettrait de vérifier si les résonances plasmoniques existent pour d'autres géométries. Enfin, traiter le cas d'une interface non régulière présentant un coin serait particulièrement intéressant car il s'y produit en régime harmonique des phénomènes tout à fait remarquables (cf. [35]).

8.6 Annexe

Nous désignons par $\mathbb{E}(I_{ac})$ le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_{ac}$ (espace de Hilbert défini comme le support de la partie absolument continue de la mesure spectrale $\mathbb{E}$ (cf. (7.113)). Notons que d'après le corollaire 7.2.5, on peut alors caractériser $\mathbb{E}(I_{ac})$ en fonction de la famille spectrale par

$$\mathbb{E}(I_{ac}) = \left| \begin{array}{l} \mathbb{E}(I_0) \ \text{ si } \Omega_m \neq \Omega_e, \\ \mathbb{E}(I_0 \setminus \{-\lambda_p, \lambda_p\}) \ \text{ si } \Omega_m = \Omega_e, \end{array} \right. \tag{8.19}$$

$\mathbb{E}(I_{ac})$ est donc le projecteur spectral associé au borélien

$$I_{ac} = \left| \begin{array}{l} I_0 \ \text{ si } \Omega_m \neq \Omega_e, \\ I_0 \setminus \{-\lambda_p, \lambda_p\}) \ \text{ si } \Omega_m = \Omega_e. \end{array} \right.$$

Le but de cette annexe est de prouver le théorème d'absorption limite formulé dans le paragraphe 8.6.2. Ce théorème a été démontré dans des cadres très généraux : pour les équations de propagations du premier ordre [47, 112] et du second ordre [46] et dans nombreux contextes relatifs aux ondes : en acoustique [39, 41], en électromagnétisme pour un milieu stratifié composé de diélectriques [113], en élasticité [40], pour les équations de la houle [64], etc. Le fil directeur de notre preuve s'inspire de ces différents ouvrages.

L'énoncé de ce théorème nécessite au préalable d'exprimer l'opérateur $R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})$ sous la forme

$$(R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta_\lambda(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})}{\lambda - \zeta}\,\mathrm{d}\lambda, \ \forall \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathcal{H},$$

où $\theta_\lambda(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$ est la densité spectrale associée à la partie absolument continue de la mesure spectrale $\mathbb{E}$. C'est l'objet du paragraphe suivant.

8.6.1 Expression de la résolvante en fonction de la densité spectrale

D'après la relation (7.98), l'opérateur borné $R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})$ prend la forme diagonale suivante

$$R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac}) = \tilde{\mathbb{U}}^* \,\frac{\mathbb{1}_{I_{ac}}(\lambda)}{\lambda - \zeta}\,\tilde{\mathbb{U}} \tag{8.20}$$

(car $\mathbb{E}(I_{ac})\,\mathbb{E}(I_0) = \mathbb{E}(I_{ac})$ d'après (8.19)). Ainsi, le produit scalaire $(R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})\,\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}}$ s'explicite par :

$$(R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})\,\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in J_{\lambda,k}} \frac{\mathbb{1}_{I_{ac}}(\lambda)}{\lambda - \zeta} \tilde{\mathbb{U}}\boldsymbol{U}(\lambda, k, j)\,\overline{\tilde{\mathbb{U}}\boldsymbol{V}(\lambda, k, j)}\,\mathrm{d}m_k(\lambda)\,\mathrm{d}k.$$

ou de manière équivalente en fonction des zones spectrales A, B, C, D et E :

$$\begin{aligned} (R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})\,\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = & \sum_{p \in \mathrm{A},B,C,D} \int_{\mathcal{O}_p} \sum_{j \in J_{\lambda,k}} \frac{1}{\lambda - \zeta} \tilde{\mathbb{U}}^p\boldsymbol{U}(\lambda, k, j)\,\overline{\tilde{\mathbb{U}}^p\boldsymbol{V}(\lambda, k, j)}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\lambda \\ & + \delta_{\Omega_e \neq \Omega_m} \sum_{\pm} \int_{I_E} \frac{1}{\pm\lambda_p(k) - \zeta} \tilde{\mathbb{U}}^E\boldsymbol{U}(\pm\lambda_p(k), k, 1)\,\overline{\tilde{\mathbb{U}}^E\boldsymbol{V}(\pm\lambda_p(k), k, 1)}\,\mathrm{d}k. \end{aligned} \tag{8.21}$$

où δ désigne ici l'indice de Kronecker, valant 1 si $\Omega_e \neq \Omega_m$ et 0 si $\Omega_e = \Omega_m$. Sa présence est justifiée par le fait que les valeurs propres de $\mathbb{A}$: $\pm\lambda_p$ pour $\Omega_e = \Omega_m$, n'appartiennent pas à I_{ac}.

Notons que dans la zone E, en posant (pour $\Omega_e \neq \Omega_m$) le changement de variable : $\lambda = \lambda_p(k)$, on peut se ramener à une intégrale en λ. La fonction λ_p est ici C^∞, strictement monotone, de dérivée non nulle sur l'ensemble $\{k \in \mathbb{R} \mid k > k_c\}$ (cf. lemme 6.5.1). Elle admet donc un inverse au sens de la composition C^∞ sur cet ensemble que nous notons λ_p^{-1}. Celui-ci a pour image l'intervalle $\tilde{I}_E =]\min(\lambda_c, \Omega_m/\sqrt{2}), \max(\lambda_c, \Omega_m/\sqrt{2})[$. L'équation (8.21) devient alors :

$$\begin{aligned}
&(R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})\,\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{p\in \mathrm{A},B,C,D} \int_{\mathcal{O}_p} \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \frac{1}{\lambda-\zeta} \tilde{\mathbb{U}}^p \boldsymbol{U}(\lambda,k,j)\, \overline{\tilde{\mathbb{U}}^p \boldsymbol{V}(\lambda,k,j)}\, \mathrm{d}k\, \mathrm{d}\lambda \qquad (8.22)\\
&+\delta_{\Omega_e\neq\Omega_m} \sum_{\pm} \int_{|\lambda|\in\tilde{I}_E} \frac{1}{\lambda-\zeta} \tilde{\mathbb{U}}^E \boldsymbol{U}(\lambda,\pm\lambda_p^{-1}(|\lambda|),1)\, \overline{\tilde{\mathbb{U}}^E \boldsymbol{V}(\lambda,\pm\lambda_p^{-1}(|\lambda|),1)}\, \left|\lambda_p'(\lambda_p^{-1}(|\lambda|))\right|^{-1} \mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant à faire apparaître dans l'écriture de la résolvante (8.22) la densité spectrale $\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ associée à la partie absolument continue de la mesure spectrale $\mathbb{E}$. A cette fin, réécrivons l'équation (8.22) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&(R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})\,\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda-\zeta} \left(\sum_{p\in \mathrm{A},B,C,D} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \mathbb{1}_{\mathcal{O}_p}(\lambda,k)\, \frac{1}{\lambda-\zeta} \tilde{\mathbb{U}}^p \boldsymbol{U}(\lambda,k,j)\, \overline{\tilde{\mathbb{U}}^p \boldsymbol{V}(\lambda,k,j)}\, \mathrm{d}k \right) \mathrm{d}\lambda \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta_{\Omega_e\neq\Omega_m}}{\lambda-\zeta} \sum_{\pm} \mathbb{1}_{\tilde{I}_E}(|\lambda|) \tilde{\mathbb{U}}^E \boldsymbol{U}(\lambda,\pm\lambda_p^{-1}(|\lambda|),1)\, \overline{\tilde{\mathbb{U}}^E \boldsymbol{V}(\lambda,\pm\lambda_p^{-1}(|\lambda|),1)}\, \left|\lambda_p'(\lambda_p^{-1}(|\lambda|))\right|^{-1} \mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Cette dernière relation prend alors la forme :

$$(R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})\,\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda$$

où la fonction $\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ est définie pour $\lambda \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}
\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = &\sum_{p\in \mathrm{A},B,C,D} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in J_{\lambda,k}} \mathbb{1}_{\mathcal{O}_p}(\lambda,k)\, \tilde{\mathbb{U}}^p \boldsymbol{U}(\lambda,k,j)\, \overline{\tilde{\mathbb{U}}^p \boldsymbol{V}(\lambda,k,j)}\, \mathrm{d}k \qquad (8.23)\\
&+ \delta_{\Omega_e\neq\Omega_m} \sum_{\pm} \mathbb{1}_{\tilde{I}_E}(|\lambda|) \tilde{\mathbb{U}}^E \boldsymbol{U}(\lambda,\pm\lambda_p^{-1}(|\lambda|),1)\, \overline{\tilde{\mathbb{U}}^E \boldsymbol{V}(\lambda,\pm\lambda_p^{-1}(|\lambda|),1)}\, \left|\lambda_p'(\lambda_p^{-1}(|\lambda|))\right|^{-1}.
\end{aligned}$$

En remplaçant l'opérateur $R(\zeta)$ par le projecteur spectral $\mathbb{E}(I)$ (pour un borélien I de $\mathbb{R}$), on montrerait de manière analogue que le projecteur $\mathbb{E}(I)\mathbb{E}(I_{ac})$ prend la forme suivante

$$(\mathbb{E}(I)\,\mathbb{E}(I_{ac})\,\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_I(\lambda)\,\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})\,\mathrm{d}\lambda.$$

Ainsi, la fonction $\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ est bien la densité spectrale de la partie absolument continue de $\mathbb{E}$ et nous savons que c'est une fonction $L^1(\mathbb{R})$ d'après (7.112).

8.6.2 Théorème d'absorption limite

Nous arrivons maintenant au cœur de l'annexe : le théorème d'absorption limite. Ce théorème assure l'existence des limites suivantes :

$$R^\pm(\lambda_0) = \lim_{\zeta\in\mathbb{C}^\pm\to\lambda_0} R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac}) \quad \text{où} \quad \mathbb{C}^\pm = \{\zeta\in\mathbb{C} \mid \pm \mathrm{I}m(\zeta) > 0\} \qquad (8.24)$$

de l'opérateur résolvant de part et d'autre de l'axe réel pour une topologie à préciser. Dans notre cas, nous munissons l'algèbre $B(\mathcal{H}_\downarrow, \mathcal{H}_\uparrow)$ des opérateurs bornés de $\mathcal{H}_\downarrow$ dans $\mathcal{H}_\uparrow$ de la norme :

$$\|T\|_{\mathcal{H}_\downarrow,\mathcal{H}_\uparrow} = \sup_{\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}\in\mathcal{H}_\downarrow\setminus\{0\}} \frac{|\langle \mathbb{T}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}\rangle_{\mathcal{H}}|}{\|\boldsymbol{F}\|_{\mathcal{H}_\downarrow}\,\|\boldsymbol{G}\|_{\mathcal{H}_\downarrow}}.$$

où l'espace $\mathcal{H}_\downarrow$ et son dual $\mathcal{H}_\uparrow$ ont été définis respectivement en (7.91) et (7.90).

Remarque 8.6.1 *La présence du projecteur $\mathbb{E}(I_{ac})$ est justifiée par le fait que les limites $\lim_{\zeta\in\mathbb{C}^\pm\to\lambda_0} R(\zeta)$ n'existent pas sur $\mathcal{H}_{pp}$ (espace de Hilbert défini comme le support de la partie purement ponctuelle de la mesure spectrale $\mathbb{E}$ (cf. 7.113)).*

Nous n'avons malheureusement, faute de temps, pu démontrer l'existence de ces limites que pour des points λ_0 appartenant à l'ensemble suivant :

$$J = \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{-\Omega_m, -\lambda_p, 0, \lambda_p, \Omega_m\} & \text{si } \Omega_m = \Omega_e, \\ \mathbb{R}\setminus\{-\Omega_m, -\lambda_c, -\lambda_p, 0, \lambda_p, \lambda_c, \Omega_m\} & \text{si } \Omega_m \neq \Omega_e, \end{cases} \tag{8.25}$$

où λ_p et λ_c désignent ici la fréquence plasmon et le point d'intersection des coupures spectrales $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda = k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ défini dans le lemme 6.4.1. Notons que ces deux valeurs sont égales lorsque $\Omega_e = \Omega_m$ (cf. figure 6.4). Énonçons alors le théorème d'absorption limite pour $\lambda_0 \in J$.

Théorème 8.6.2 *(théorème d'absorption limite) Soient $0 < \gamma \leq 1/2$ et $s > 2+\gamma$ et $\lambda_0 \in J$. L'opérateur $R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})$ se prolonge de part et d'autre de l'axe réel en λ_0 (pour la topologie de $B(\mathcal{H}_\downarrow, \mathcal{H}_\uparrow)$) par $R^\pm(\lambda_0)$. Les opérateurs $R^\pm(\lambda_0)$ (qui sont des fonctions localement hölderiennes d'exposant $\gamma/2$ sur J) sont alors caractérisés par la formule suivante*[7] *:*

$$\Big\langle R^\pm(\lambda_0)\,\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\Big\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{VP}_{\lambda_0}\int_{\mathbb{R}} \frac{\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})}{\lambda-\lambda_0}\,\mathrm{d}\lambda \pm i\,\pi\theta_{\lambda_0}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}),\ \forall \boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in\mathcal{H}_\downarrow, \tag{8.26}$$

où $\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ (qui est également une fonction localement hölderienne d'exposant $\gamma/2$ sur J) est la densité spectrale de la mesure absolument continue associée à l'opérateur $\mathbb{A}$ défini par (8.23) et VP_{λ_0} la valeur principale de Cauchy en λ_0.

Preuve. La preuve va s'effectuer en deux étapes. La première consiste à décomposer l'opérateur $R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})$ en une partie régulière et une partie singulière au voisinage de λ_0, la limite du terme régulier ne posant alors aucun problème. Dans la seconde étape, nous passerons à la limite de la partie singulière de l'opérateur à l'aide des formules de Plemelj-Sokhotskyi (cf. [66]) qui reposent sur la régularité höldernienne de la densité spectrale $\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ au voisinage de λ_0. Pour obtenir cette régularité, nous nous appuierons sur des propriétés de régularité de la famille modale $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}$ exhibée au chapitre précédent.

Localisation de la singularité

Soit $K_0 = [\lambda_0 - a, \lambda_0 + a]$ un compact, dont l'intérieur contient λ_0. Pour passer à la limite l'opérateur $R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})$ en $\lambda_0 \pm i0$, nous allons isoler la partie singulière de $R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})$ en décomposant cet opérateur (à l'aide de la relation (8.20)) de la manière suivante :

$$R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac}) = R(\zeta)' + R(\zeta)''$$

7. Remarquons ici que nous utilisons la même notation $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{H}}$ et $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle_{\mathcal{H}}$ pour $\boldsymbol{u}\in\mathcal{H}_\downarrow$ et $\boldsymbol{v}\in\mathcal{H}_\uparrow$. Ces deux entités sont ici simplement liées par une relation de conjugaison.

où les opérateurs bornés $R(\zeta)'$ et $R(\zeta)''$ sont des troncatures spectrales de l'opérateur résolvant définies par

$$R(\zeta)' = \tilde{\mathbb{U}}^* \frac{\mathbb{1}_{K_{\lambda_0}}(\lambda)\,\mathbb{1}_{I_{ac}}(\lambda)}{\lambda-\zeta}\,\tilde{\mathbb{U}} \quad \text{et} \quad R(\zeta)'' = \tilde{\mathbb{U}}^* \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus K_{\lambda_0}}(\lambda)\,\mathbb{1}_{I_{ac}}(\lambda)}{\lambda-\zeta}\,\tilde{\mathbb{U}}.$$

Le passage à la limite sur $R(\zeta)''$ ne pose aucun problème. En effet, la fonction

$$f_\zeta(\lambda) = \frac{\mathbb{1}_{K_{\lambda_0}}(\lambda)\,\mathbb{1}_{I_{ac}}(\lambda)}{\lambda-\zeta}$$

n'est pas singulière et est même indéfiniment différentiable sur un voisinage de λ_0, on en déduit alors que l'opérateur $R(\zeta)''$ est également indéfiniment différentiable sur ce voisinage pour la topologie de $B(\mathcal{H})$ où $B(\mathcal{H})$ désigne ici l'algèbre des opérateurs bornés munie de la norme :

$$\|\mathbb{T}\|_{B(H)} = \sup_{\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}\neq 0} \frac{|(\mathbb{T}\,\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})_{\mathcal{H}}|}{\|\boldsymbol{F}\|_{\mathcal{H}}\,\|\boldsymbol{G}\|_{\mathcal{H}}}. \tag{8.27}$$

Sa limite (pour la topologie de $B(\mathcal{H})$ et donc à fortiori pour celle de $B(\mathcal{H}_\downarrow,\mathcal{H}_\uparrow)$) au point λ_0 est simplement donnée par :

$$\lim_{\zeta\to\lambda_0} R(\zeta)'' = \tilde{\mathbb{U}}^* \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus K_{\lambda_0}}(\lambda)\,\mathbb{1}_{I_{ac}}(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}\,\tilde{\mathbb{U}} = R(\lambda_0)'',$$

où l'opérateur $R(\lambda_0)''$ se réécrit en fonction de la densité spectrale $\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ sous la forme :

$$(R(\lambda_0)''\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus K_{\lambda_0}}(\lambda)\,\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda,\ \forall \boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in\mathcal{H}. \tag{8.28}$$

Passage à la limite du terme singulier

Il nous reste maintenant à prouver que l'opérateur $R(\zeta)'$ admet une limite (pour la topologie de $B(\mathcal{H}_\downarrow,\mathcal{H}_\uparrow)$) de part et d'autre de l'axe réel en λ_0. Nous allons tout d'abord le démontrer dans un cas particulier.

Cas où $\Omega_e > \Omega_m$ et $\Omega_m < \lambda_0 < \Omega_e$

Nous supposons que le compact K_{λ_0} est inclus dans l'ensemble $\{\lambda\in\mathbb{R} \mid \Omega_m<\lambda<\Omega_e\}$. Soient $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}\in\mathcal{H}_\downarrow$. L'opérateur $R(\zeta)'$, qui est troncature spectrale de l'opérateur $R(\zeta)\,\mathbb{E}(I_{ac})$, prend la forme suivante :

$$\left\langle R(\zeta)'\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\right\rangle_{\mathcal{H}} = (R(\zeta)'\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{1}_{K_{\lambda_0}}(\lambda)}{\lambda-\zeta}\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\lambda_0-a}^{\lambda_0+a} \frac{\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda$$

avec

$$\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = \int_{|k|<\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\lambda} \tilde{\mathbb{U}}^C\boldsymbol{U}(\lambda,k,j)\,\overline{\tilde{\mathbb{U}}^C\boldsymbol{V}(\lambda,k,j)}\,\mathrm{d}k.$$

Notons que comme $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}\in\mathcal{H}_\downarrow$, l'expression de la densité spectrale (8.23) se reformule ici en fonction de la famille modale :

$$\theta_\lambda(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = \int_{|k|<\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\lambda} \langle\boldsymbol{U},\boldsymbol{w_{\lambda,k,1}}\rangle_{\mathcal{H}}\,\overline{\langle\boldsymbol{V},\boldsymbol{w_{\lambda,k,1}}\rangle}_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}k, \tag{8.29}$$

où le vecteur propre généralisé $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}}$ est décrit par les relations (cf. (7.58), (7.62) et (7.89)) :

$$\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}}(x,y) = \hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}}(x)\ \frac{e^{i\,k\,y}}{2\pi}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}}(x) = \tilde{c}^{+}_{\lambda,k}\, \mathbb{V}_{\lambda,k}\, (\boldsymbol{C}^{+}_{\lambda,k})^{\top} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}}(x).$$

Nous rappelons ici l'expression du coefficient $\tilde{c}^{+}_{\lambda,k}$ (défini en (7.61)),

$$\tilde{c}^{+}_{\lambda,k} = \frac{(\pi^{-1}\,|\lambda|\,\mu_0^{-1}\,\left|\theta^{-}_{\lambda,k}\right|)^{\frac{1}{2}}}{i\,\left(\mu_0^{-1}\theta^{-}_{\lambda,k} + |\mu^{+}(\lambda)|^{-1}\,\theta^{+}_{\lambda,k}\right)}. \tag{8.30}$$

Le résultat va alors découler du théorème 14.c page 94 de [66] basé sur les formules de Plemelj-Sokhotskyi. Ce théorème permet d'une part de justifier l'existence des limites

$$R(\lambda_0)^{'\pm} = \lim_{\zeta \in \mathbb{C}^{\pm} \to \lambda_0} R(\zeta)^{'}$$

pour la topologie de $B(\mathcal{H}_{\downarrow}, \mathcal{H}_{\uparrow})$, d'autre part, il nous fournit la régularité hölderienne locale de ces limites. Pour appliquer ce résultat, la condition essentielle est de démontrer que la densité spectrale $\theta_{\lambda}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ est une fonction hölderienne sur K_{λ_0}. Plus précisément (en nous plaçant dans les hypothèses du théorème 8.6.2), il suffit de montrer que pour un exposant $0 < \gamma \leq 1/2$ et un poids $s > 2+\gamma$, il existe une constante C strictement positive (ne dépendant que du compact K_{λ_0}) telle que pour tout $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_{\downarrow}$

$$|\theta_{\lambda}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})| \leq C\ \|\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}}\, \|\boldsymbol{V}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}}\,, \forall \lambda \in K_{\lambda_0}, \tag{8.31}$$

$$|\theta_{\lambda'}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) - \theta_{\lambda}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})| \leq C\ \|\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}}\, \|\boldsymbol{V}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}}\, \left|\lambda' - \lambda\right|^{\gamma/2}, \forall \lambda, \lambda' \in K_{\lambda_0}. \tag{8.32}$$

Pour prouver les conditions (8.31) et (8.32) énonçons au préalable les deux lemmes suivants.

Lemme 8.6.3 *Soit K un compact de $\overline{\mathcal{O}_c}$ et $\boldsymbol{U} \in \mathcal{H}_{\downarrow}$ alors il existe une constante $C_K > 0$ (indépendante de $\boldsymbol{U}$) :*

$$\left|\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}} \rangle_{\mathcal{H}}\right| \leq C_K\, \|\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}}\,, \forall (k,\lambda) \in K, \tag{8.33}$$

où le poids s dans $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}}$ vérifie $s > 2$.

Preuve. Soit $\boldsymbol{U} = (u_E, \boldsymbol{u_H}, u_P, \boldsymbol{u_M})$. Par inégalité triangulaire, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}} \rangle_{\mathcal{H}}\right| \leq\ & \left|\langle u_E, (\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}})_1 \rangle_{\varepsilon_0}\right| + \left|\langle \boldsymbol{u_H}, (\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}})_2 \rangle_{\mu_0}\right| \\ & + \left|\langle u_P, (\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}})_3 \rangle_{\varepsilon_0\,\Omega_e^2}\right| + \left|\langle \boldsymbol{u_M}, (\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}})_4 \rangle_{\mu_0\,\Omega_m^2}\right|.\end{aligned}$$

Nous allons ici nous contenter de montrer l'estimation suivante :

$$\exists\, C_1 > 0, \left|\left\langle u_E, (\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}})_1 \right\rangle_{\varepsilon_0}\right| \leq C_1\, \|u_E\|_{L^2_s(\mathbb{R}^2)}\,, \forall (k,\lambda) \in K. \tag{8.34}$$

Au vu de la forme de l'opérateur $\mathbb{V}_{\lambda,k}$ (définie en (6.17)), on montrerait de la même manière que :

$$\exists\, C_2 > 0, \left|\left\langle \boldsymbol{u_H}, (\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}})_2 \right\rangle_{\mu_0}\right| \leq C_2\, \|\boldsymbol{u_H}\|_{\boldsymbol{L}^2_s(\mathbb{R}^2)}\,, \qquad \forall (k,\lambda) \in K, \tag{8.35}$$

$$\exists\, C_3 > 0, \left|\left\langle u_P, (\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}})_3 \right\rangle_{\varepsilon_0 \Omega_e^2}\right| \leq C_3\, \|u_P\|_{\boldsymbol{L}^2_s(\mathbb{R}^2_+)}\,, \qquad \forall (k,\lambda) \in K, \tag{8.36}$$

$$\exists\, C_4 > 0, \left|\left\langle \boldsymbol{u_M}, (\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{1}})_4 \right\rangle_{\mu_0 \Omega_m^2}\right| \leq C_4\, \|\boldsymbol{u_M}\|_{\boldsymbol{L}^2_s(\mathbb{R}^2_+)}\,, \ \forall (k,\lambda) \in K. \tag{8.37}$$

On déduit alors de (8.34), (8.35), (8.36), et (8.37) l'estimation (8.33) recherchée.

Prouvons (8.34). En utilisant le fait que le coefficient $\tilde{c}^+_{\lambda,k}$ défini en (8.30) est borné (en (k,λ)) sur K, on obtient qu'il existe une constante $C>0$ telle que :

$$\left|\langle u_E, (\boldsymbol{w_{\lambda,k,1}})_1\rangle_{\varepsilon_0}\right| \leq C\left|\left\langle u_E, (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}(\cdot)\, e^{i\,k\,\cdot}\right\rangle_{\varepsilon_0}\right|,\ \forall (k,\lambda)\in K.$$

En majorant le terme $\left|(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}(x)e^{i\,k\,y}\right|$ de part et d'autre de l'interface $x=0$, il vient (en utilisant le fait que $\theta^-_{\lambda,k}$ est imaginaire pur et $\theta^+_{\lambda,k}$ strictement positif) qu'il existe une constante C strictement positive telle que

$$\left|(\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}(x)e^{i\,k\,y}\right| = \left\{\begin{array}{l} \left|\mathrm{ch}(\theta^-_{\lambda,k}\,x) - \dfrac{\mu_+(\lambda)^{-1}\theta^+_{\lambda,k}}{\mu_0^{-1}}\,\dfrac{\mathrm{sh}(\theta^-_{\lambda,k}x)}{\theta^-_{\lambda,k}}\right| \leq 1 + C\,|x|\,,\ \forall x<0,\ \forall (k,\lambda)\in K \\ \\ \left|e^{-\theta^+_{\lambda,k}x}\right| \leq 1,\ \forall x>0,\ \forall (k,\lambda)\in K. \end{array}\right.$$

(notons ici que comme le terme $\theta^-_{\lambda,k}$ s'annule sur la coupure spectrale $\lambda = k/(\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0})$, nous avons regroupé le terme $\left|\mathrm{sh}(\theta^-_{\lambda,k}x)|/\theta^-_{\lambda,k}\right|$ pour le majorer par $|x|$). Il vient alors finalement que

$$\left|\langle u_E, (\boldsymbol{w_{\lambda,k,1}})_1\rangle_{\varepsilon_0}\right| \leq C\int_{\mathbb{R}^2} |u_E(x,y)|\ (1+|x|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \forall (k,\lambda)\in K,$$

soit avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz (puisque pour $s>2$, la fonction $x\mapsto 1+|x|$ est dans $L^2_{-s}(\mathbb{R}^2)$) :

$$\left|\langle u_E, (\boldsymbol{w_{\lambda,k,1}})_1\rangle_{\varepsilon_0}\right| \leq C\ \|u_E\|_{L^2_s(\mathbb{R}^2)}\,,\ \forall (k,\lambda)\in K.$$

■

Lemme 8.6.4 *Soit K un compact de $\overline{\mathcal{O}_c}$ et $\boldsymbol{U}\in\mathcal{H}_\downarrow$ alors il existe une constante $C_K>0$ et un réel $0<\gamma\leq 1/2$ (indépendants de $\boldsymbol{U}$) tels que :*

$$\left|\left\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w_{\lambda',k,1}} - \boldsymbol{w_{\lambda,k,1}}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right| \leq C_K\ \left|\lambda'-\lambda\right|^{\gamma/2}\ \|\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}_\downarrow}\,,\ \forall (k,\lambda)\ \textit{et}\ (k,\lambda')\in K,$$

où le poids s dans $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\downarrow}$ vérifie $s>2+\gamma$.

Preuve. Soient $\boldsymbol{U}=(u_E,\boldsymbol{u_H},u_P,\boldsymbol{u_M})$, $0<\gamma\leq 1/2$ et $s>2+\gamma$. Tout comme dans le lemme précédent, nous allons encore nous contenter de prouver que

$$\left|\left\langle u_E, (\boldsymbol{w_{\lambda',k,1}} - \boldsymbol{w_{\lambda,k,1}})_1\right\rangle_{\varepsilon_0}\right| \leq C_K\ \left|\lambda'-\lambda\right|^{\gamma/2}\ \|u_E\|_{L^2_s(\mathbb{R}^2)}\,,\ \forall (k,\lambda)\text{ et }(k,\lambda')\in K.$$

On aurait (au vu de la forme de l'opérateur $\mathbb{V}_{\lambda,k}$) les mêmes estimations (avec le même exposant γ) sur les autres composantes du produit cartésien.

Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}\left|\left\langle u_E, (\boldsymbol{w_{\lambda',k,1}} - \boldsymbol{w_{\lambda,k,1}})_1\right\rangle_{\varepsilon_0}\right| \leq\ & \left|\tilde{c}^+_{\lambda',k} - \tilde{c}^+_{\lambda,k}\right|\left|\left\langle u_E, (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}(\cdot)e^{i\,k\,\cdot}\right\rangle_{\varepsilon_0}\right| \\ & + \left|\tilde{c}^+_{\lambda',k}\right|\left|\left\langle u_E, \left((\boldsymbol{C}^+_{\lambda',k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda',k}}(\cdot) - (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}_{\lambda,k}}(\cdot)\right) e^{i\,k\,\cdot}\right\rangle_{\varepsilon_0}\right|.\end{aligned} \tag{8.38}$$

Pour traiter le premier terme de cette majoration, il suffit d'utiliser le fait que la fonction $\tilde{c}^+_{\lambda,k}$ (définie en (8.30)) est γ hölderienne sur le compact K, il vient alors avec le lemme précédent :

$$\left|\tilde{c}^+_{\lambda',k} - \tilde{c}^+_{\lambda,k}\right| \left|\left\langle u_E, (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}}(\cdot)\, e^{i\,k\cdot}\right\rangle_{\varepsilon_0}\right| \leq C \left|\lambda' - \lambda\right|^\gamma \|u_E\|_{L^s(\mathbb{R}^2)}\,, \ \forall (k,\lambda) \text{ et } (k,\lambda') \in K. \quad (8.39)$$

Pour le deuxième terme, notons d'abord que $\tilde{c}^+_{\lambda',k}$ est bornée sur K. Puis remarquons que pour $x < 0$,

$$\begin{aligned}|\left(\boldsymbol{C}^+_{\lambda',k}\right)^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda'},\boldsymbol{k}}(x) - (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}}(x)\big)\, e^{i\,ky}| \ &\leq \left|\mathrm{ch}(\theta^-_{\lambda',k}\,x) - \mathrm{ch}(\theta^-_{\lambda,k}\,x)\right| \\ &\quad + \left|\frac{\mu_+(\lambda')^{-1}\theta^+_{\lambda',k}}{\mu_0^{-1}}\,\frac{\mathrm{sh}(\theta^-_{\lambda',k}x)}{\theta^-_{\lambda',k}} - \frac{\mu_+(\lambda)^{-1}\theta^+_{\lambda,k}}{\mu_0^{-1}}\,\frac{\mathrm{sh}(\theta^-_{\lambda,k})x}{\theta^-_{\lambda,k}}\right|.\end{aligned}$$

Ainsi en effectuant les majorations suivantes (où C est une constante strictement positive ne dépendant que du compact K) :

$$|x| \left|\frac{\mu_+(\lambda')^{-1}\theta^+_{\lambda',k}}{\mu_0^{-1}}\,\frac{\mathrm{sh}(\theta^-_{\lambda',k}x)}{\theta^-_{\lambda',k}x} - \frac{\mu_+(\lambda)^{-1}\theta^+_{\lambda,k}}{\mu_0^{-1}}\frac{\mathrm{sh}(\theta^-_{\lambda,k})x}{\theta^-_{\lambda,k}x}\right| \leq C \left|\lambda' - \lambda\right|^{\gamma/2} (|x| + |x|^{1+\gamma}),$$

et

$$\left|\mathrm{ch}(\theta^-_{\lambda',k}\,x) - \mathrm{ch}(\theta^-_{\lambda,k}\,x)\right| \leq C \left|\lambda' - \lambda\right|^{\gamma/2} |x|^\gamma$$

(qui sont justifiées par le fait que les fonctions $u \mapsto \mathrm{sh}(u)/u$ et $u \mapsto \mathrm{ch}(u)$ sont uniformément hölderiennes d'exposant γ sur $i\mathbb{R}$ et que $\theta^-_{\lambda,k}$ et $(\mu_+(\lambda)^{-1}\theta^+_{\lambda,k})/\mu_0^{-1}$ sont holdériennes d'exposant $1/2$ sur $\overline{\mathcal{O}_c}$), il vient :

$$|\left(\boldsymbol{C}^+_{\lambda',k}\right)^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda'},\boldsymbol{k}}(x) - (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}}(x)\big)\, e^{i\,ky}| \leq C \left|\lambda' - \lambda\right|^{\gamma/2} (|x|^\gamma + |x| + |x|^{1+\gamma}). \quad (8.40)$$

Pour $x > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}|\left(\boldsymbol{C}^+_{\lambda',k}\right)^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda'},\boldsymbol{k}}(x) - (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}}(x)\big)\, e^{i\,ky}| &\leq \left|e^{-\theta^+_{\lambda',k}\,x} - e^{-\theta^+_{\lambda,k}x}\right| \\ &\leq C \left|\lambda' - \lambda\right|^{\gamma/2} |x|^\gamma\,, \quad (8.41)\end{aligned}$$

(car $u \mapsto e^{-u}$ est uniformément hölderienne d'exposant γ sur $\mathbb{R}^+$ et $\theta^+_{\lambda,k}$ est hölderienne d'exposant $1/2$ sur $\overline{\mathcal{O}_c}$). En exprimant le crochet de dualité sous forme intégrale, il découle l'inégalité :

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{c}^+_{\lambda',k}\right| \left|\left\langle u_E, \left((\boldsymbol{C}^+_{\lambda',k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda'},\boldsymbol{k}}(\cdot) - (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}}(\cdot)\right)\, e^{i\,k\cdot}\right\rangle_{\varepsilon_0}\right| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} |\left(\boldsymbol{C}^+_{\lambda',k}\right)^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda'},\boldsymbol{k}}(x) - (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}}(x)\big)\, e^{i\,ky}|\, |u_E(x,y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\end{aligned}$$

On obtient finalement en utilisant (8.40) et (8.41) par inégalité de Cauchy-Schwarz (car pour $s > 2 + \gamma$, la fonction $x \mapsto |x|^\gamma + |x| + |x|^{1+\gamma}$ est dans $L^2_{-s}(\mathbb{R}^2)$) :

$$\left|\tilde{c}^+_{\lambda',k}\right| \left|\left\langle u_E, \left((\boldsymbol{C}^+_{\lambda',k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda'},\boldsymbol{k}}(\cdot) - (\boldsymbol{C}^+_{\lambda,k})^\top \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k}}(\cdot)\right)\, e^{i\,k\cdot}\right\rangle_{\varepsilon_0}\right| \leq C \left|\lambda' - \lambda\right|^{\gamma/2} \|u_E\|_{L^2_s(\mathbb{R}^2)}\,. \quad (8.42)$$

On conclut alors d'après (8.38) en utilisant les majorations (8.39) et (8.42).

■

Remarquons tout d'abord que l'inégalité (8.31) est d'après la relation (8.29) une conséquence immédiate du lemme 8.6.3.

Prouvons maintenant la condition de Hölder (8.32). Soit $\lambda, \lambda^{'} \in K_{\lambda_0}$ avec $\lambda^{'} > \lambda$. On peut alors réécrire avec (8.29), la différence $\theta_{\lambda^{'}}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) - \theta_{\lambda}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$ sous la forme

$$\theta_{\lambda^{'}}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) - \theta_{\lambda}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = I_1(\lambda, \lambda^{'}) + I_2(\lambda, \lambda^{'})$$

$$\text{où} \quad I_1(\lambda, \lambda^{'}) = \int_{0<|k|<\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\lambda} \left\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda^{'}, k, 1}} \right\rangle_{\mathcal{H}} \overline{\left\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda^{'}, k, 1}} \right\rangle}_{\mathcal{H}} - \langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda, k, 1}} \rangle_{\mathcal{H}} \, \overline{\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda, k, 1}} \rangle}_{\mathcal{H}} \, \mathrm{d}k,$$

$$\text{et} \quad I_2(\lambda, \lambda^{'}) = \int_{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\lambda<|k|<\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\lambda^{'}} \left\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda^{'}, k, 1}} \right\rangle_{\mathcal{H}} \overline{\left\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda^{'}, k, 1}} \right\rangle}_{\mathcal{H}} \mathrm{d}k.$$

Concernant $I_2(\lambda, \lambda^{'})$, une simple application du lemme 8.6.3 conduit à :

$$\left| I_2(\lambda, \lambda^{'}) \right| \leq C \left| \lambda^{'} - \lambda \right| \, \|\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}} \, \|\boldsymbol{V}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}}, \;\; \forall \lambda, \lambda^{'} \in K_{\lambda_0} \mid \lambda^{'} > \lambda. \tag{8.43}$$

Quant à $I_1(\lambda, \lambda^{'})$, en ajoutant et en retranchant la quantité $\left\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda^{'}, k, 1}} \right\rangle_{\mathcal{H}} \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda, k, 1}} \rangle_{\mathcal{H}}$, on peut réécrire cette intégrale sous la forme :

$$\begin{aligned} I_1(\lambda, \lambda^{'}) = & \int_{0<|k|<\lambda} \left\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda^{'}, k, 1}} \right\rangle_{\mathcal{H}} \overline{\left\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda^{'}, k, 1}} - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda, k, 1}} \right\rangle}_{\mathcal{H}} \mathrm{d}k \\ & - \int_{0<|k|<\lambda} \left\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda, k, 1}} - \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda^{'}, k, 1}} \right\rangle_{\mathcal{H}} \overline{\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda, k, 1}} \rangle}_{\mathcal{H}} \mathrm{d}k. \end{aligned}$$

En majorant cette dernière expression à l'aide des lemmes 8.6.3 et 8.6.4, il vient finalement que pour un exposant $0 < \gamma \leq 1/2$ et un poids $s > 2 + \gamma$

$$\left| I_1(\lambda, \lambda^{'}) \right| \leq C \left| \lambda^{'} - \lambda \right|^{\gamma/2} \, \|\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}} \, \|\boldsymbol{V}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}}, \;\; \forall \lambda, \lambda^{'} \in K_{\lambda_0} \mid \lambda^{'} > \lambda. \tag{8.44}$$

On tire alors des inégalités (8.44) et (8.43) la condition de Hölder (8.32) :

$$\exists C > 0 \text{ et } 0 < \gamma \leq 1/2 \;\mid\; |\theta_{\lambda^{'}}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) - \theta_{\lambda}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})| \leq C \, \|\boldsymbol{U}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}} \|\boldsymbol{V}\|_{\mathcal{H}_{\downarrow}} \left| \lambda^{'} - \lambda \right|^{\gamma/2}, \forall \lambda, \lambda^{'} \in K_{\lambda_0},$$

(où C ne dépend ici que du compact K_{λ_0}). On conclut alors en appliquant les relations de Plemelj-Sokhotskyi (cf. [66]) qui justifient l'existence des limites

$$R(\lambda_0)^{'\pm} = \lim_{\zeta \in \mathbb{C}^{\pm} \to \lambda_0} R(\zeta)^{'}$$

(pour la topologie de $B(\mathcal{H}_{\downarrow}, \mathcal{H}_{\uparrow})$) et donnent leur forme explicite :

$$\left\langle R(\lambda_0)^{'\pm} \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{VP}_{\lambda_0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{1}_{K_{\lambda_0}}(\lambda) \, \theta_{\lambda}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})}{\lambda - \lambda_0} \, \mathrm{d}\lambda \pm i \, \pi \theta_{\lambda_0}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}), \;\; \forall \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathcal{H}_{\downarrow}, \tag{8.45}$$

où $R(\lambda_0)^{'\pm}$ sont des fonctions hölderiennes d'exposant $\gamma/2$ sur l'intérieur de K_{λ_0}, c'est-à-dire l'intervalle $]\lambda_0 - a, \lambda_0 + a[$. En rassemblant les limites (8.45) et (8.28), on obtient alors l'expression explicite (8.26) des opérateurs $R(\lambda_0)^{\pm}$.

Nous nous sommes ici contentés de détailler la démonstration du passage à la limite du terme singulier $R(\zeta)^{'\pm}$ dans le cas où $\Omega_e > \Omega_m$ et $\Omega_m < \lambda_0 < \Omega_e$, mais ceci n'est pas réducteur. Les relations (8.31) et (8.32) sur la densité spectrale $\theta_{\lambda}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$ se démontreraient en fait de la même manière dans les autres cas et on conclurait de façon analogue en utilisant les relations de Plemelj-Sokhotskyi. En effet, la forme des modes $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda, k, j}}$, nous montre qu'on pourrait aisément

obtenir les estimations des lemmes 8.6.3 et 8.6.4 pour les fonctions $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}$ (cf. (7.58), (7.59), (7.60), (7.62), (7.63) et (7.89)) dans les différentes zones spectrales $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$, $\mathcal{O}_D$ et I_E. La démonstration de la condition de Hölder (8.32) s'appuierait également sur le caractère localement lipschitzien [8] des fonctions C^∞ : $\pm\lambda_1^{-1}(\cdot)$ sur $]0, \min(\Omega_e, \Omega_m)[$, $\pm\lambda_2^{-1}(\cdot)$ sur $]\max(\Omega_e, \Omega_m), \infty[$, $\pm\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}\,\lambda$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\pm\lambda_p^{-1}(\cdot)$ et $\left|\lambda_p'(\lambda_p^{-1}(|\cdot|))\right|^{-1}$ sur $]\min(\lambda_c, \Omega_m/\sqrt{2}), \max(\lambda_c, \Omega_m/\sqrt{2})[$. Ces fonctions interviennent dans l'écriture de $\theta_\lambda(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$ sous forme intégrale (dans le cas traité, nous nous sommes servis de la régularité lipschitzienne locale de l'inverse de la coupure spectrale $\lambda = k/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$: $k = \sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}\,\lambda$ pour majorer l'intégrale $I_2(\lambda, \lambda')$).

Un cas particulier est le cas où $\Omega_m \neq \Omega_e$ et $\lambda_0 = \pm\Omega_e$. En effet, si $\Omega_e < \Omega_m$, il est ici facile de vérifier que la fonction $\pm\lambda_1^{-1}(\cdot)$ est seulement hölderienne d'exposant $1/2$ (et non pas lipschitzienne) en $\pm\Omega_e$, ce qui est ici suffisant pour la démonstration (notons que cette perte de régularité s'explique par le fait que la dérivée de $\pm\lambda_1$ s'annule en $\pm\Omega_e$, cf. figure 6.5). Il en est de même pour la fonction $\pm\lambda_2^{-1}(\cdot)$ en $\pm\Omega_e$ si $\Omega_e > \Omega_m$.

■

Remarque 8.6.5 *Nous avons exclu de la démonstration précédente les points $\pm\lambda_c$ où les estimations effectuées sur les modes $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}}$ dans la preuve des lemmes 8.6.3 et 8.6.4 ne seraient plus valables car $\theta^+_{\lambda,k}$ et $\theta^-_{\lambda,k}$ s'annulent au voisinage de ces points, ou du moins il faudrait s'y prendre autrement. De même, le cas $\Omega_e \neq \Omega_m$ et $\lambda_0 = \pm\lambda_p$ diffère des cas traités dans la mesure où les courbes $\pm\lambda_p(\cdot)$ présentent une asymptote horizontale d'équation $\lambda = \pm\lambda_p$ en l'infini (cf. figures 6.5 et 6.3). Le terme $\left|\lambda_p'(\lambda_p^{-1}(|\lambda|))\right|^{-1}$ dans (8.23) devient alors singulier au voisinage de $\pm\lambda_p$. Il faudrait donc adapter la démonstration précédente.*

Remarque 8.6.6 *Notons enfin que par manque de temps la démonstration de ce théorème n'est pas optimale et mérite d'être retravaillée au sens où le poids s qui définit l'espace $\mathcal{H}_\downarrow$, pris strictement supérieur à 2, pourrait être affiné (on demande ici trop de décroissance à l'infini). Il faudrait améliorer les majorations effectuées dans la démonstration de ce théorème. Dans [113], un théorème d'absorption limite est énoncé dans le cas d'un milieu stratifié composé de diélectriques avec un poids s dont l'infimum $1/2$ est optimal. Nous pensons qu'on pourrait obtenir dans notre situation un tel résultat. Ceci fera l'objet de nos recherches dans un futur proche.*

8. Les fonctions $\pm\lambda_1$ et $\pm\lambda_2$ sont C^∞ strictement monotones et de dérivées non nulles sur $\mathbb{R}^{+*}$ (cf. lemme 6.4.1) donc par le théorème d'inversion locale, leurs inverses au sens de la composition $\pm\lambda_1^{-1}(\cdot)$ et $\pm\lambda_2^{-1}(\cdot)$ sont respectivement C^∞ sur $]0, \min(\Omega_e, \Omega_m)[$ et $]\max(\Omega_e, \Omega_m), \infty[$. On démontre de même à partir du lemme 6.5.1 que $\pm\lambda_p^{-1}(\cdot)$ est C^∞ sur $]\min(\lambda_c, \Omega_m/\sqrt{2}), \max(\lambda_c, \Omega_m/\sqrt{2})[$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN : *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1972.

[2] C. BEN AMAR : Étude théorique et numérique de processus de retournement temporel, thèse de doctorat. *École nationale d'ingénieurs de Tunis et École Polytechnique*, 2011.

[3] C. BEN AMAR, N. GMATI, C. HAZARD et K. RAMDANI : Numerical simulation of time-harmonic reversal mirrors for acoustic waves. *SIAM J. Appl. Math.*, 67:777–791, 2007.

[4] H. AMMARI et H. KANG : Boundary layer techniques for solving the helmholtz equation in the presence of small inhomogeneities. *J. Math. Anal. Appl.*, 296:190–208, 2004.

[5] X. ANTOINE, C. CHNITI et K. RAMDANI : On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders. *J. Comput. Phys*, 227:1754–1771, 2008.

[6] X. ANTOINE, B. PINÇON, K. RAMDANI et B. THIERRY : Far field modeling of electromagnetic time reversal and application to selective focusing on small scatterers. *SIAM J. Appl. Math.*, 69:830–844, 2008.

[7] I. I. ARGATOV et F. J. SABINA : Acoustic scattering by a cluster of small sound-soft obstacles. *Wave Motion*, 47:537–551, 2010.

[8] G. BAL et K. REN : Transport-based imaging in random media. *SIAM J. Appl. Math.*, 68:1738–1762, 2008.

[9] G. BAL et L. RYZHIK : Time reversal and refocusing in random media. *SIAM J. Appl. Math.*, 63:1475–1498, 2003.

[10] M. BALABANE : Boundary decomposition for helmholtz and maxwell equations 1 : disjoint sub-scatterers. *Asymptotic Analysis*, 38:1–10, 2004.

[11] E. BARBIERI et M. MEO : Time reversal DORT method applied to nonlinear elastic wave scattering. *Wave Motion*, 47(7):452–467, 2010.

[12] W. BARNES, A. DEREUX et T. W. EBBESEN : Surface plasmon subwavelength optics. *Nature*, 424(6950):824–830, 2003.

[13] E. BÉCACHE, S. FAUQUEUX et P. JOLY : Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, 188(2):399–433, 2003.

[14] E. BÉCACHE, P. JOLY et V. VINOLES : On the analysis of perfectly matched layers in negative index metamaterials. *In preparation.*

[15] J.-P. BÉRENGER : A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 114(2):185–200, 1994.

[16] V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAMBRINE, S. TORDEUX et G. VIAL : Interactions between moderately close inclusions for the laplace equation. *M3AS.*, 10:1853–1882, 2009.

[17] A.-S. Bonnet-Bendhia, L. Chesnel et P. Ciarlet Jr : Two-dimensional maxwell's equations with sign-changing coefficients. *Apnum*, 79:29–41, 2013.

[18] A.-S. Bonnet-Bendhia, L. Chesnel et P. Ciarlet Jr : T-coercivity for the maxwell problem with sign-changing coefficients. *Communications in Partial Differential Equations*, à paraître.

[19] L. Borcea, T. Callaghan, J. Garnier et G. Papanicolaou : A universal filter for enhanced imaging with small arrays. *Inverse Problems*, 26, 01506(1), 2010.

[20] L. Borcea, G. Papanicolaou et C. Tsogka : Theory and applications of time reversal and interferometric imaging. *Inverse Problems*, 19(6):5134–5164, 2003.

[21] L. Borcea, G. Papanicolaou, C. Tsogka et J. Berryman : Imaging and time reversal in random media. *Inverse Problems*, 18(5):1247–1279, 2002.

[22] M. Born et E. Wolf : *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 1999.

[23] G. Bouchitté et D. Felbacq : Homogenization near resonances and artificial magnetism from dielectrics. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(5):377–382, 2004.

[24] C. Bourel : Étude mathématique et numérique de cristaux photoniques fortement contrastés, thèse de doctorat. *Université du Sud Toulon-Var*, 2010.

[25] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.

[26] C. Burkard, A. Minut, R. Ramdani et M. Salo : Far field model for time reversal and application to selective focusing on small dielectric inhomogeneities. *Inverse Problems and Imaging*, 7(2), 2013.

[27] R. Carminati : *Ondes en milieux complexes, cours de troisième année de l'ESPCI-Paristech*. 2011-2012.

[28] D. Cassereau et M. Fink : Time reversal of ultrasonic fields. part III : Theory of the closed time reversal cavity. *IEEE Transactions Ultrasonics, Ferroelectric and Frequency Control*, 39:579–793, 1992.

[29] M. Cassier : Détection de cibles par retournement temporel. *Mémoire de Master 2 de l'université de Versailles-Saint-Quentin*, 2010.

[30] M. Cassier et C. Hazard : Space–time focusing of acoustic waves on unknown scatterers. *Submitted*.

[31] M. Cassier et C. Hazard : Multiple scattering of acoustic waves by small sound-soft obstacles in two dimensions : mathematical justification of the Foldy–Lax model. *Wave Motion*, 50:18–28, 2013.

[32] M. Cassier, C. Hazard et P. Joly : Selective focusing for time dependent waves. *Oberwolfach Reports*, 10(1):150–153, 2013.

[33] A. Castanié : Surface plasmon hybridation in the strong coupling regime in gain structures, thèse de doctorat. *Université de Montpellier II*, 2013.

[34] D. P. Challa et M. Sini : On the justication of the Foldy–Lax approximation for the acoustic scattering by small rigid bodies of arbitrary shapes. *Multiscale Model. Simul.*, 12(1):55–108, 2014.

[35] L. Chesnel : Étude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux métamatériaux, thèse de doctorat. *École Polytechnique*, 2012.

[36] L. Chesnel et P. Ciarlet Jr : T-coercivity and continuous galerkin methods : application to transmission problems with sign changing coefficients. *Numer. Math.*, 124:1–19, 2013.

[37] D. G. Crighton, A. P. Dowling, J. E. Flowcs Williams, M. Heckl et F. G. Leppington : *Modern methods in analytical acoustics, Lecture Notes*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[38] R. Dautray et J.-L. Lions : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. V : Spectre des opérateurs*. Masson, Paris, 1984.

[39] Y. Dermenjian : Étude mathématique de la propagation dans un milieu stratifié perturbé. *Université 13 paris nord*, 1984.

[40] Y. Dermenjian et J. C. Guillot : Scattering of elastic waves in a perturbed isotropic half space with a free boundary, the limiting absorption principle. *Rapport de recherche INRIA*, 491, 1986.

[41] Y. Dermenjian et J. C. Guillot : Théorie spectrale de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié perturbé. *Journal of differential equations*, 62(3):357–409, 1986.

[42] B. Després, L. M. Imbert-Gérard et R. Weder : Hybrid resonance of maxwell's equations in slab geometry. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, online, 2013.

[43] O. Dorn : *Time-reversal and the adjoint imaging method with an application in telecommunication, in Inverse problem and imaging*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[44] N. Dunford et J. T. Schwartz : *Linear Operators*. Interscience Publishers, New York, 1984.

[45] G. F. Edelmann, T. Akal, W. S. Hodgkiss, S. Kim, W.A Kuperman et H. C Song : An initial demonstration of underwater acoustic communication using time reversal. *IEEE Journal of oceanic engineering*, 27(3):602–609, 2002.

[46] D. M. Eidus : The principle of limiting absorption. *Am. Math. Soc. Transl.*, 47:157–191, 1965.

[47] D. M. Eidus : The principle of limit amplitude. *Russ. Math. Surv.*, 24:97–167, 1969.

[48] R. Elaloufi, R. Carminati et J.-J. Greffet : Diffusive-to-ballistic transition in dynamic light transmission through thin scattering slabs : a radiative transfer approach. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21:1430–1437, 2004.

[49] L.C. Evans : *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, 2008.

[50] M. Fink : Acoustic time-reversal mirrors, in : Imaging of complex media with acoustic and seismic waves (ed. M. Fink et al). *Topic in Applied Physics 84, Springer-Verlag, Berlin*, pages 17–42, 2002.

[51] U. C. Fisher et D. W. Pohl : Observation of single-particle plasmons by near-field optical microscopy. physical review letters. *Physical review letters*, 62(4), 1989.

[52] L. L. Foldy : The multiple scattering of waves. I. general theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Phys. Rev.*, 67:107–119, 1945.

[53] J. Garnier et G. Papanicolaou : Travel time estimation by cross correlation of noisy signals. *ESAIM Proc.*, 27:138–135, 2009.

[54] T. Goursolle, S. Dos Santos, O. Bou Matar et S. Calle : Non-linear based time reversal acoustic applied to crack detection : Simulations and experiments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43(3):170–177, 2008.

[55] B. Gralak : Modélisation, métamatériaux et électromagnétisme, mémoire d'habilitation à diriger les recherches. *Université de Provence Marseille*, 2010.

[56] B. Gralak et D. Maystre : Negative index materials and time-harmonic electromagnetic field. *C. R. Physique*, 13(8):786–799, 2012.

[57] B. Gralak et A. Tip : Macroscopic Maxwell's equations and negative index materials. *J. Math. Phys.*, 51:052902, 2010.

[58] D. K. Gramotnev et S. I. Bozhevolnyi : Plasmonics beyond the diffraction limit. *Nature Photonics*, 4(2):83–91, 2010.

[59] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas et G. Uhlmann : Cloaking devices, electromagnetic wormholes, and transformation optics. *SIAM review*, 51(1):3–33, 2009.

[60] J. Groenenboom et R. Snieder : Attenuation, dispersion, and anisotropy by multiple scattering of transmitted waves through distributions of scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98:3482–3492, 1995.

[61] F. Guevara-Vasquez, G. W. Milton et D. Onofrei : Mathematical analysis of the two dimensional active exterior cloaking in the quasistatic regime. *Analysis and Mathematical Physics*, 2(3):231–246, 2012.

[62] J.-C. Guillot et P. Joly : Approximation by finite differences of the propagation of acoustic waves in stratified media. *Numer. Math.*, 54:655–702, 1989.

[63] C. Hazard : Analyse modale de la propagation des ondes, mémoire d'habilitation à diriger les recherches. *Université Pierre et Marie Curie*, 2001.

[64] C. Hazard et F. Loret : Generalized eigenfunction expansions for conservative problems with application to water waves. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 137(5):995–1035, 2007.

[65] C. Hazard et K. Ramdani : Selective acoustic focusing using time-harmonic reversal mirrors. *SIAM J. Appl. Math.*, 64:1057–1076, 2004.

[66] P. Henrici : *Applied and computational complex analysis, vol 3*. Wiley, New York, 1986.

[67] R. A. Horn et C. A. Johnson : *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[68] K. Huang et K. Solna : Generalized Foldy–Lax formulation. *J. Comput. Phys.*, 229: 4544–4553, 2010.

[69] D. Huet : *Décomposition spectrale et opérateurs*. Presses Universitaires de France, Vendôme, 1976.

[70] T. Kato : *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, New York, 1966.

[71] R. Kleinman et B. Vainberg : Full low-frequency asymptotic expansion for second-order elliptic equations in two dimensions. *Math. Methods Appl. Sci.*, 17:989–1004, 1994.

[72] R. Kress : *Linear Integral Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[73] C. Larmat, J. P. Montagner, M. Fink, Y. Capdeville, A. Tourin et E. Clévédé : Full low-frequency asymptotic expansion for second-order elliptic equations in two dimensions. *Geophysical Research Letters*, 33(19), 2006.

[74] M. Lax : Multiple scattering of waves. *Rev. Mod. Phys.*, 23:287–310, 1951.

[75] M. Lax : Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense systems. *Phys. Rev.*, 85:621–629, 1952.

[76] J. Li et Y. Huang : *Time-Domain Finite Element Methods for Maxwell's Equations in Metamaterials*. Springer, Heidelberg, 2013.

[77] J. E. Lingeman, D. Newmana, J. H. Mertz, P. G. Mosbaugh, R. E. Steele, R. J. Kahnoski, T. A. Coury et J. R Woods : Extracorporeal shock wave lithotripsy : the methodist hospital of indiana experience. *The Journal of urology*, 135(6):1134–1137, 1986.

[78] J. F. Lingevitch, H. C. Song, M. Fink et W. A. Kuperman : Time reversed reverberation focusing in a waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(6):2609–2614, 2002.

[79] C. M. Linton et P. A. Martin : Multiple scattering by random configurations of circular cylinders : second-order corrections for the effective wavenumber. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117:3413–3423, 2005.

[80] E. A. Marengo et F. K. Gruber : Subspace-based localization and inverse scattering of multiply scattering point targets. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Article ID 17342, 2007.

[81] P. A. Martin : *Multiple Scattering. Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles*. Cambridge University Press, 2006.

[82] K. Maurin : *Generalized eigenfunction expansions and unitary representation of topological groups*. Polish scientific publishers, Warszava, Poland, 1968.

[83] V. Maz'ya et A. Movchan : Asymptotic treatment of perforated domains without homogenization. *Math. Nachr.*, 283:104–125, 2010.

[84] V. Maz'ya, A. Movchan et M. Nieves : Uniform asymptotic formulae for green's tensor in elastic singularly perturbed domains. *Asymptot. Anal.*, 52:173–206, 2007.

[85] G. Micoleau et M. Saillard : D.O.R.T. method as applied to electromagnetic subsurface sensing. *Radio Science*, 38(3), 2003.

[86] P. Monk : *Finite Elements Methods for Maxwell Equations*. Clarendon Press, Oxford, 2003.

[87] N. Mordant, C. Prada et M. Fink : Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T. method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105:2634–2642, 1999.

[88] S. A. Nazarov et J. Sokolowski : Self-adjoint extensions for the neumann laplacian and applications. *Acta Mathematica Sinica*, 22:879–906, 2006.

[89] M. A. Ordal, L. L. Long, R. J. Bell, S. E. Bell, R. R. Bell, R. W. Alexander Jr. et C. A. Ward : Optical properties of the metals Al, Co, Cu, Au, Fe, Pb, Ni, Pd, Pt, Ag, Ti, and W in the infrared and far infrared. *Applied Optics*, 22(7):1099–1119, 1983.

[90] J. B. Pendry : Negative refraction makes a perfect lens. *Physical review letters*, 84(18): 3966–3969, 2000.

[91] F. D. Philippe, C. Prada, M. Fink D. Clorennec et T. Folégot : Construction of the temporal invariants of the time-reversal operator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 126:8–13, 2009.

[92] F. D. Philippe, C. Prada, M. Fink, J. Garnier et J. de Rosny : Analysis of the time reversal operator for a scatterer undergoing small displacements. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(1):94–107, 2013.

[93] C. Prada : Detection and imaging in complex media with the D.O.R.T. method, in : Imaging of complex media with acoustic and seismic waves (ed. M. Fink et al). *Topic in Applied Physics 84, Springer-Verlag, Berlin*, pages 107–134, 2002.

[94] C. Prada : Mémoire d'Habilitation à Diriger Les Recherches. *Université Paris 7*, 2006.

[95] C. Prada et M. Fink : Eigenmodes of the time reversal operator : a solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave Motion*, 20:151–163, 1994.

[96] C. Prada, E. Kerbrat, D. Cassereau et M. Fink : Time reversal techniques in ultrasonic nondestructive testing of scattering media. *Inverse Problems*, 18:1761–1773, 2002.

[97] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky et M. Fink : Decomposition of the time reversal operator : detection and selective focusing on two scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99:2067–2076, 1996.

[98] A. G. Ramm : Wave scattering by small bodies. *Reports on Mathematical Physics*, 21:69–77, 1985.

[99] M. Reed et B. Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics. IV : Analysis of operators*. Academic Press, New York, 1978.

[100] M. Reed et B. Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics. I : Functionnal Analysis*. Academic Press, New York, 1980.

[101] J. Sanchez-Hubert et E. Sanchez-Palencia : *Vibration and Coupling of Continuous Systems, Asymptotic Methods*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[102] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F Starr et D. R Smith : Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 314(5801):977–980, 2006.

[103] H. C. Song, W. A. Kuperman, W. S. Hodgkiss, T. Akal et C. Ferla : Iterative time reversal in the ocean. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(6):3176–3184, 1999.

[104] B. Thierry : Analyse et simulations numériques du retournement temporel et de la diffraction multiple, thèse de doctorat. *Université Henry Pointcaré, Nancy I*, 2011.

[105] J.-L. Thomas, F. Wu et M. Fink : Time reversal focusing applied to lithotripsy. *Ultrasonic imaging*, 18(6):106–121, 1996.

[106] H. Tortel, G. Micolau et M. Saillard : Decomposition of the time reversal operator for electromagnetic scattering. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 13(5): 687–719, 1999.

[107] L. N. Trefethen et M. Embree : *Spectra and Pseudospectra*. Princeton University Press, 2005.

[108] K. K. Tse, L. Tsang, C. H. Chan et K.-H. Ding : *Light Scattering and Nanoscale Surface Roughness. Chapter : Multiple scattering of waves by random distribution of particles for applications in light scattering by metal nanoparticles*. Springer, US, 2007.

[109] C. Tsogka, D. A. Mitsoudis et S. Papadimitropoulos : Selective imaging of extended reflectors in two-dimensional waveguides. *SIAM J. Imaging Sci.*, 6(4):2714–2739, 2013.

[110] V. G. Veselago : The electromagnetics of substance with simultaneously negative values of ε and μ. *Physics-Uspekhi*, 10(4):509–514, 2013.

[111] G. N. Watson : *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, 1944.

[112] R. Weder : Spectral analysis of strongly propagative systems. *J. reine angew. Math*, 354:95–122, 1984.

[113] R. Weder : *Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media, Applied mathematical sciences 50*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[114] R. Weder : A rigorous analysis of high-order electromagnetic invisibility cloaks. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 41(6):065207, 2008.

[115] P. Werner : Resonance phenomena in cylindrical waveguides. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 121:173–214, 1987.

[116] P. Werner : Resonance phenomena in local perturbations of parallel-plane waveguides. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 19:773–823, 1996.

[117] C. H. Wilcox : *Sound propagation in stratified fluids, Applied mathematical sciences 87.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[118] R. Wong : *Asymptotic approximations of integrals.* SIAM, 1989.

[119] R. W Ziolkowski et E. Heyman : Wave propagation in media having negative permittivity and permeability. *Physical review E*, 64(5):056625, 2001.

Titre : Étude de deux problèmes de propagation d'ondes transitoires : 1) Focalisation spatio-temporelle en acoustique ; 2) Transmission entre un diélectrique et un métamatériau.

Résumé : Cette thèse comporte deux parties indépendantes. Dans la première, à l'aide d'un réseau de transducteurs, nous cherchons à émettre dans un milieu contenant des obstacles diffractants dont nous ignorons les positions une onde venant focaliser en espace et en temps au voisinage d'un de ces obstacles. La solution proposée ici est basée sur la méthode DORT (Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel) qui conduit à des propriétés de focalisation spatiale en régime harmonique. Cette dernière consiste à effectuer une décomposition en valeurs singulières (SVD) de l'opérateur de diffraction qui à une distribution de signaux envoyés aux transducteurs associe la mesure de l'onde diffractée. Dans le cadre du modèle asymptotique petits obstacles de Foldy-Lax (justifié ici dans le cas bidimensionnel), nous montrons comment synchroniser les signaux fournis par la méthode DORT en introduisant une SVD particulière liée au caractère symétrique de l'opérateur de diffraction. Notre méthode est justifiée par des arguments théoriques et une étude numérique. La seconde partie est dédiée à un problème de transmission entre un diélectrique et un métamatériau. La question qui est posée ici consiste à étudier la validité du principe d'amplitude limite (PAL) dans un tel milieu. Ce principe définit le régime périodique établi comme le comportement asymptotique en temps long d'un système soumis à une excitation périodique. Nous proposons ici une réponse dans le cas d'un dioptre plan entre un diélectrique et un métamatériau particulier (modèle de Drude). Dans un tel cadre, les équations de Maxwell sont reformulées en une équation de Schrödinger dont nous réalisons l'analyse spectrale complète. Notre étude permet de voir que le PAL est vérifié sauf à une fréquence particulière, appelée fréquence plasmon, pour laquelle les rapports des valeurs prises par la permittivité et par la perméabilité de part et d'autre l'interface sont égaux à -1. Cette fréquence correspond à une résonance du système et la réponse à une telle excitation croît linéairement en temps.

Mots-clés : Focalisation spatio-temporelle, retournement temporel, méthode DORT, modèle asymptotique de Foldy-Lax, équations de Maxwell, métamatériaux, théorie spectrale, principe d'amplitude limite.

Title: Analysis of two wave propagation phenomena : 1) Space–time focusing in acoustics ; 2) Transmission between a dielectric and a metamaterial.

Abstract: This thesis consists of two independent parts. In the first one, we consider a reference medium, containing some scatterers whose positions are unknown. Using an array of transducers, our goal is to generate an acoustic wave that would focus in space and in time near one of these scatterers. The technique proposed here is based on DORT method (French acronym for Decomposition of the Time Reversal Operator) which leads to space focusing properties in the frequency domain. It consists in a singular value decomposition (SVD) of the scattering operator, that is, the operator which maps the input signals sent to the transducers to the measure of the scattered wave. In the context of the Foldy–Lax approximation (which is justified here in 2D), by introducing a particular SVD related to the symmetry of the scattering operator, we show how to synchronize the time-harmonic signals derived from the DORT method to achieve space–time focusing. Theoretical properties and a numerical study justify our approach. The second part is devoted to a transmission problem between a dielectric and a metamaterial. The question we consider is the following : does the limiting amplitude principle hold in such a medium ? This principle defines the stationary regime as the large time asymptotic behavior of a system subject to a periodic excitation. An answer is proposed here in the case of a two-layered medium composed of a dielectric and a particular metamaterial (Drude model). In this context, we reformulate the time-dependent Maxwell's equations as a Schrödinger equation and perform its complete spectral analysis. As an application of this study, we show finally that the limiting amplitude principle holds except for a particular fequency, called the plasmonic frequency, characterised by a ratio of permittivities and permeabilities equal to -1 across the interface. This frequency is a resonance of the system and the response to this excitation blows up linearly in time.

Keywords: Space–time focusing, time reversal, DORT method, Foldy–Lax asymptotic model, Maxwell's equations, metamaterials, spectral theory, limiting amplitude principle.