

Méthodes variationnelles, Domaines fictifs et conditions aux limites artificielles pour des problèmes hyperboliques linéaires. Applications aux ondes dans les solides

Eliane Bécache

▶ **To cite this version:**

Eliane Bécache. Méthodes variationnelles, Domaines fictifs et conditions aux limites artificielles pour des problèmes hyperboliques linéaires. Applications aux ondes dans les solides. Mathématiques [math]. Université Paris Dauphine - Paris IX, 2003. tel-00004880v2

HAL Id: tel-00004880

https://theses.hal.science/tel-00004880v2

Submitted on 17 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à Diriger des Recherches

SPÉCIALITÉ
Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques

Présentée par

Eliane BÉCACHE

Méthodes variationnelles, Domaines fictifs et conditions aux limites artificielles pour des problèmes hyperboliques linéaires. Applications aux ondes dans les solides

Soutenue le 6 Mai 2003 devant le jury composé de

Abderrahmane BENDALI	Examinateur
Guy CHAVENT	Président
Laurence HALPERN	Rapporteur
Patrick JOLY	Coordinateur
Peter MONK	Rapporteur
Jean-Claude NÉDÉLEC	Examinateur
Olivier PIRONNEAU	Examinateur

À Mazyar,

MERCI

La dernière page qu'on écrit pour terminer un mémoire est la traditionnelle page des remerciements! Je ne dérogerai pas à la tradition car c'est aussi souvent la première page que le lecteur lit avec intérêt... et peut-être la seule compréhensible?!

J'aimerais remercier tous les chercheurs qui par leur confiance, leurs discussions, leur accueil, ont contribué à mon apprentissage, tous ceux qui ont marqué ces quelques années de recherche et qui sont en partie responsables de ce document...

Mes premiers remerciements vont naturellement à Patrick pour la confiance qu'il n'a jamais cessé de m'accorder depuis qu'il m'a accueillie dans son équipe, pour sa disponibilité, ses conseils, ses encouragements dans mes moments de doute. Quand j'ai commencé dans ce métier, ce que je trouvais extraordinaire, c'est d'être payée pour apprendre! Je n'ai pas changé d'avis et pour ce qui est d'apprendre, avec Patrick, j'ai été servie. J'ai largement pu bénéficier de sa grande rigueur, de l'immense étendue de ses connaissances, et travailler à ses côtés a toujours été un très grand plaisir.

Parmi les personnes marquantes pour moi, il y a ceux qui ont accompagné mes premiers pas, mes années de thèse. D'abord mes deux directeurs, Tuong Ha Duong et Jean-Claude Nédélec, auxquels je suis très reconnaissante d'avoir toujours manifesté de l'intérêt pour ce que je faisais et je suis très heureuse que Jean-Claude ait accepté de faire partie du jury. Laurence, envers qui j'ai une profonde reconnaissance pour le temps et les conseils qu'elle m'a prodigués. Son jugement scientifique m'est très précieux et ça m'a fait un immense plaisir qu'elle accepte de rapporter sur mes travaux.

Je remercie profondément Peter Monk, qui a tout de suite très gentiment accepté de rapporter sur mes travaux, malgré les nombreuses sollicitations qu'il reçoit et surtout malgré la difficulté de la tâche, car ça l'a obligé à lire mon manuscript en français ![1] (mais je le soupçonne de cacher son jeu et de comprendre le français couramment...).

Un peu d'histoire ! quand je suis arrivée à l'Inria, Ondes n'existait pas et c'est dans le projet Ident, dirigé par Guy Chavent, que j'ai débuté. Guy m'a associée au consortium PSI (avec un I !) ce qui m'a permis de découvrir l'univers impitoyable (Dallas...) du pétrole et d'être initiée aux plaisirs de la migration... Je le remercie pour son accueil et d'avoir accepté de présider mon jury.

Je remercie très sincèrement Abderrahmane Bendali et Olivier Pironneau de l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mes travaux et de m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury de cette habilitation.

Il y a bien évidemment de nombreux autres chercheurs que j'aimerais saluer, à commencer par mes co-auteurs. Sans vouloir faire du féminisme (quoique j'en profite pour regretter que les femmes soient encore trop rares dans ce métier), je voudrais exprimer une mention spéciale pour deux d'entre eux qui comptent pour moi bien plus que je ne pourrais l'exprimer en quelques mots, non seulement sur le plan professionnel mais aussi dans "la vraie vie" : Chrysoula et Anne-Sophie, que je remercie pour l'amitié et la confiance qu'elles m'ont toujours témoignée. Je ne voudrais pas oublier dans mes remerciements Francis, à qui je dois beaucoup (qui, dans le projet ONDES, ne doit pas quelque chose à Francis ?), pour toutes

1. Cet effort dans ce sens là est assez exceptionnel pour être salué... d'habitude c'est plutôt aux non anglophones de devoir lire et s'exprimer en "anglais" (si tant est, en ce qui me concerne, qu'on puisse appeler "anglais" le résultat de mes écrits dans cette langue qui doit s'en ressentir vivement malmenée...)

les discussions sur tous les sujets (ondes et autres), l'étendue de sa culture n'a jamais cessé de m'impressionner. J'en profite aussi pour saluer les doctorants (Sandrine, Grégoire, Gilles, Abdelaaziz, Jeronimo, Guillaume...) avec qui j'ai eu la chance de collaborer.

Je remercie tous ceux grâce à qui ces années de recherche se sont déroulées dans des ambiances très sympathiques. J'ai ici une pensée pour les "anciens" du CMAP (Aldjia, François, Sylvie, Geo, Jeanne, Eric...), pour tous les membres (actuels et anciens, permanents ou non) du nouveau laboratoire POEMS (Propagation des Ondes, Étude Mathématique et Simulations) qui regroupe le projet ONDES et le laboratoire SMP de l'ENSTA (Christophe, Éric, Jacques... J'arrête, ça fait trop de monde pour les citer tous !), pour les membres du projet "frère" ESTIME (Jérome, Jean...), pour toutes nos secrétaires (Muriel, Héléna, Sandrine...)... J'aimerais remercier particulièrement François, Michel et maintenant Christine et Houssem qui m'ont toujours très gentiment dépannée les nombreuses fois où la !&%!#... machine refusait de faire ce que je lui demandais de faire... Comme j'écris cette page bien après le jour de ma soutenance je voudrais aussi remercier tous ceux qui m'ont aidée pour le pot et ça fait du monde (en plus de ceux que j'ai déjà nommés, Laurence, Sébastien (grâce à qui on a eu des boissons fraîches...), Julien, Frédéric, Denis...).

Enfin, je ne voudrais pas terminer sans une pensée pour mes proches, mes parents, mon frère et bien sûr une pensée tout à fait particulière pour Mazyar à qui j'ai dédié ce document pour....

Table des matières

1 Méthodes numériques pour des problèmes de contrôle non destructif et de propagation sismique **4**

1.1 Méthode des potentiels retardés pour la diffraction d'ondes élastiques par une fissure [$A1$], [$A2$], [$A3$] . . . 6

1.2 Une méthode d'inversion par tomographie [$RC1$], [$RC2$] . . . 7

1.3 Approximations paraxiales d'ordre élevé en 3D [***A6***] . . . 7

1.4 Éléments finis mixtes en élastodynamique . . . 8

1.4.1 La problématique . . . 8

1.4.2 Le modèle simplifié de l'équation des ondes anisotropes [***A7***] . . . 11

1.4.3 Construction et analyse d'éléments finis mixtes pour l'élastodynamique [***A5***], [***A9***], [***RR1***] , [***A8***] . . . 16

2 La méthode des domaines fictifs **22**

2.1 Description de la méthode sur un problème d'ondes modèle . . . 24

2.1.1 La formulation continue . . . 24

2.1.2 Semi-discrétisation en espace . . . 26

2.1.3 Discrétisation totale . . . 32

2.2 Domaines fictifs pour les ondes élastiques: application au contrôle non destructif et à la géophysique . . . 35

2.2.1 Condition aux limites de surface libre [***A8***] . . . 35

2.2.2 Condition aux limites de contact unilatéral [***PR8***] . . . 37

2.3 Acoustique musicale: modélisation de la guitare [***PR7***] . . . 39

2.3.1 Approximation des équations de plaque . . . 39

2.3.2 Méthode des domaines fictifs . . . 41

3 Conditions aux limites absorbantes (CLA) et couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) **43**

3.1 Construction et analyse des PML pour un système hyperbolique du premier ordre [***A11***] . . . 45

3.1.1 Construction du modèle PML "splitté" . . . 45

3.1.2 Analyse du modèle PML pour des coefficients constants . . . 46

3.2 Couches absorbantes PML pour les ondes électromagnétiques [***A10***], [***A12***] . 50

3.2.1 Analyse des PML pour les équations de Maxwell [***A10***] . . . 50

3.2.2 Quelques commentaires sur les différentes versions des PML . . . 55

3.2.3 Sur le comportement aux temps longs des PML [***A12***] . . . 61

3.3 Couches absorbantes PML pour les ondes élastiques [***A11***] . . . 63

3.3.1 Application du critère de stabilité au cas des ondes élastiques 63
3.3.2 Conditions suffisantes de stabilité 64
3.4 Couches absorbantes PML pour l'acoustique en écoulement en régime harmonique [***A13***] 66
3.4.1 Introduction 66
3.4.2 Présentation du problème 66
3.4.3 Interprétation des PML de Bérenger à l'aide des modes et présentation du nouveau modèle 68
3.4.4 Analyse de convergence 70

4 Conclusions, travaux en cours et perspectives **71**
4.1 Travaux en cours 71
4.2 Perspectives 73

Introduction

Ce mémoire est une synthèse de mes travaux de recherche depuis ma thèse. C'est en quelque sorte une photo à un instant t, un snapshot! Il contient bien sûr essentiellement une description de travaux "achevés" (si on peut dire qu'un travail est jamais achevé... certains diront " ni fait ni à faire"...), j'entends par là de travaux ayant déjà fait l'objet de publications (au moins sous forme de rapport ou de proceedings de conférence). Mais il décrit aussi, plus brièvement, un certain nombre de travaux en cours et qui s'inscrivent dans une dynamique des travaux précédents.

Cette introduction générale n'est pas réellement destinée à éclairer le lecteur sur le contenu scientifique de chaque chapitre (je renvoie pour celà aux introductions plus détaillées de chacun de ces chapitres), mais plutôt à donner une idée du contexte dans lequel se sont inscrits les travaux: collaborations académiques ou industrielles, encadrement de thèse... La variété des types de collaborations que j'ai pu rencontrer a été et est toujours pour moi un grand enrichissement (pour les mauvais esprits, je précise, pas un enrichissement en espèces sonnantes et trébuchantes... malheureusement?)

Avant d'entrer dans le vif du sujet, une petite mise en garde : la longueur des sections n'est pas forcément proportionnelle à l'ampleur des résultats présentés et n'est donc en aucun cas représentative... Le choix qui a été fait ici est de présenter une synthèse sur certains travaux, synthèse qui n'apparaît pas forcément à la lecture des articles mentionnés.

Venons-en maintenant au fait... Mon domaine de recherche concerne l'analyse mathématique et numérique de problèmes de propagation d'ondes. Mes travaux ont été au départ plus particulièrement orientés autour d'un axe principal : développer des méthodes numériques pour le contrôle non destructif et la propagation sismique. C'est dans ce cadre que je me suis intéressée en particulier à la méthode des domaines fictifs et aux couches absorbantes parfaitement adaptées (PML), et ces deux thèmes m'ont ouvert plus récemment de nouvelles voies de recherche.

Mes premiers travaux de recherche, développés pendant ma thèse (avec T. Ha Duong et J.-C. Nédélec) et mentionnés très brièvement en section 1.1, portaient sur les potentiels retardés pour des problèmes de diffraction d'ondes élastiques par des fissures en milieux homogènes, et entraient dans le cadre d'un contrat avec EDF. Depuis j'ai continué à développer des méthodes numériques pour le contrôle non destructif et la propagation sismique, présentées dans le chapitre 1.

De nombreuses techniques d'imagerie du sous-sol sont développées par les pétroliers pour essayer de déterminer avec précision sa constitution. C'est dans le cadre d'un consortium financé par des groupes pétroliers, le consortium PSI, que se situent mes premières contributions (n'y voir aucun rapport avec un éventuel déséquilibre des chercheurs impliqués dans ce projet, PSI signifiant Prestack Structural Imaging!) : inversion par tomographie en collaboration avec l'équipe de P. Lailly (IFP) (section 1.2), équations paraxiales en collaboration avec F. Collino et P. Joly (section 1.3).

C'est tout naturellement que j'ai, par la suite, co-encadré avec P. Joly, la thèse de C. Tsogka, soutenue en décembre 99 et financée par un contrat EDF : le sujet est en effet le même que celui de ma thèse, c'est à dire la diffraction d'ondes élastiques par une fissure, mais cette fois dans des milieux complexes (anisotropes, hétérogènes). La méthode numérique que nous avons choisie pour résoudre efficacement ce problème est la méthode des domaines fictifs. J'ai choisi de présenter cette méthode dans le deuxième chapitre de ce document afin

d'une part d'en faire une présentation générale (section 2.1) et d'autre part de regrouper les différentes applications de cette méthode sur lesquelles j'ai travaillé récemment. L'utilisation de la méthode des domaines fictifs a cependant conditionné le choix que nous avons fait de travailler avec une formulation mixte vitesse-contraintes du problème. Pour des raisons que j'explique dans la section 1.4, nous avons alors développé de nouveaux éléments finis mixtes dont l'analyse de convergence n'est pas standard. Cette analyse de convergence a été d'abord faite sur un modèle simplifié scalaire 1.4.2 puis sur le problème vectoriel 1.4.3.

L'application de la méthode des domaines fictifs à la diffraction d'une onde élastique par une fissure est ensuite présentée en section 2.2.1. La même méthode a été également appliquée pour résoudre des problèmes de propagation d'ondes dans des domaines de topographie complexe, dans le cadre du consortium SIGMA (Seismic Inversion, Geophysical Modeling and Applications). Dans ces deux applications, la condition aux limites (sur la fissure ou sur la surface du sous-sol) est une condition de surface libre. Notre partenaire EDF souhaitait savoir comment une condition aux limites plus réaliste, à savoir une condition de contact unilatéral, pouvait modifier les ondes diffractées. Cette question a donné lieu à la thèse de G. Scarella, financée par un nouveau contrat EDF, démarrée en Octobre 2000 (section 2.2.2). Signalons enfin que ces travaux ont aussi débouché sur d'autres extensions (voir section 4): (i) le raffinement espace-temps en élastodynamique, sujet de la thèse de J. Rodriguez, démarrée en 2001, et financée par un autre contrat EDF ; (ii) la propagation dans des milieux visco-élastiques, sujet de la thèse d'A. Ezziani, démarrée également en 2001 au départ dans le cadre d'un contrat avec l'IFREMER (contrat d'un an, que nous n'avons malheureusement pas pu poursuivre, notre interlocuteur ayant été appelé à d'autres taches...) ; (iii) couplage fluide-structure, sujet de la thèse de J. Diaz, démarrée en 2001 dans le cadre d'une collaboration avec le LIP et le GDR du CNRS "contrôle non destructif" et qui intéresse également l'IFREMER (deuxième contrat d'un an avec de nouveaux interlocuteurs!). Toujours dans le cadre de mes travaux sur la méthode des domaines fictifs j'ai également participé à l'encadrement de la thèse de G. Derveaux, sur la modélisation numérique de la guitare, soutenue en juin 2002 (voir section 2.3). Une autre application amusante de cette méthode, sur laquelle je travaille actuellement (voir chapitre 4, travaux en cours) concerne la diffraction d'ondes par des obstacles en mouvement.

Dans tous les problèmes de propagation d'ondes, une question cruciale pour leur résolution numérique est de savoir comment borner le domaine de calcul par des conditions aux limites artificielles performantes (c'est à dire donnant le moins de réflexions parasites possible). Cette question fait l'objet du chapitre 3. Depuis quelques années (en 94), une nouvelle technique de couches absorbantes, appelée PML (Perfectly Matched Layers) a fait son apparition et a très vite "révolutionné" ce domaine. Cette technique, introduite initialement par Bérenger pour les ondes electromagnétiques, a en effet pour caractéristique de ne produire aucune réflexion à l'interface entre le domaine de calcul et les couches absorbantes, et d'amortir exponentiellement la solution dans la couche. Elle bénéficie de plus d'une grande facilité d'implémentation, par rapport aux techniques plus classiques de conditions aux limites absorbantes (en particulier pour traiter les coins ou pour monter en ordre) ce qui l'a rendue très vite très populaire, essentiellement pour des problèmes posés en régime transitoire. Des questions mathématiques (caractère bien posé, stabilité) ont été par la suite soulevées et c'est la recherche de réponses à ces questions qui a motivé mes travaux dans ce domaine. Tout d'abord sur des questions de stabilité des PML pour les ondes électromagnétiques en régime transitoire avec P. Joly (section 3.2.1), puis sur leur stabilité pour des systèmes hyperboliques généraux (section 3.1) et pour les ondes élastiques en régime transitoire, avec P. Joly et S.

Fauqueux (section 3.3). Enfin, plus récemment j'ai démarré de nouvelles collaborations sur ce sujet. La première avec P. G. Petropoulos (New Jersey Institute of Technology) et S. Gedney (University of Kentucky) au sujet des comportements aux temps longs des solutions dans les PML, toujours en régime transitoire (section 3.2.3). La deuxième avec A.-S. Bonnet (SMP, Ensta) et G. Legendre (SMP, Ensta) sur les PML en aéro-acoustique en régime harmonique (section 3.4), domaine où les PML ont été beaucoup moins étudiées que en transitoire et qui pose de nouvelles questions...

Enfin, le dernier chapitre 4 fait un point assez rapide sur les travaux en cours ainsi que sur les perspectives ouvertes par ces travaux.

Malgré l'apparente unité du thème (propagation des ondes) j'aimerais souligner ici la réelle diversité des questions qu'il soulève. J'ai eu plaisir à travailler sur des applications aussi éloignées que la propagation sismique et l'acoustique musicale... à développer des méthodes numériques elles-aussi très variées... et enfin à découvrir un champ très large des mathématiques sous-jacentes à ces problèmes.

La liste des travaux de recherche joints à ce rapport ainsi que des encadrements de thèse est fournie à la fin de ce document.

Chapitre 1

Méthodes numériques pour des problèmes de contrôle non destructif et de propagation sismique

Introduction

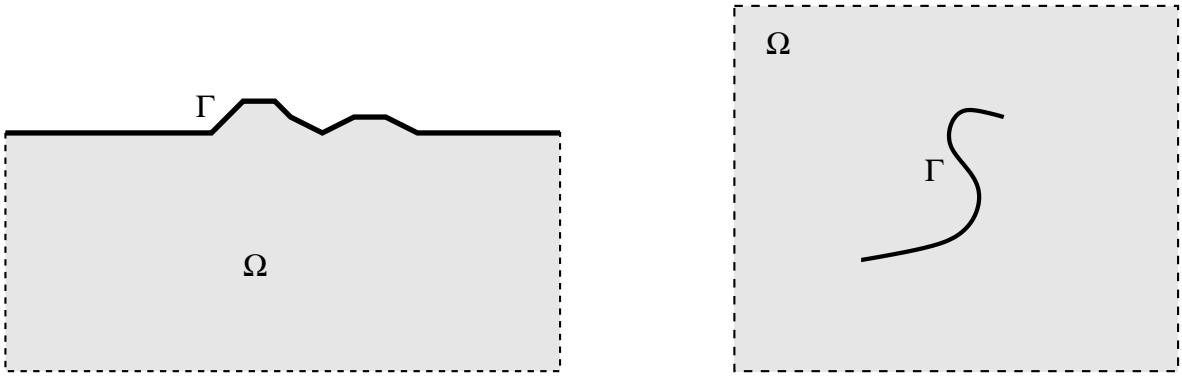


FIG. 1.1: *Deux configurations envisagées. Gauche: propagation dans un demi-espace (sous-sol). Droite: diffraction par une fissure (CND).*

Notre objectif est de développer et analyser des méthodes numériques performantes pour la simulation d'ondes dans des milieux élastiques. Nous verrons que selon la complexité du milieu ou selon le type de quantités auxquelles on s'intéresse, on pourra être amené à considérer des modèles simplifiés. Ce que nous appellerons le modèle complet sera celui de l'élastodynamique. Typiquement, nous nous intéresserons à deux configurations possibles (voir Figure 1.1). La configuration (1) correspond à des applications sismique ou géophysique : le domaine Ω est un demi-espace qui représente le sous-sol, Γ étant la surface du sol. La configuration (2)

correspond à des applications en contrôle non destructif : le domaine $\Omega = \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$ est l'extérieur d'une fissure (on pourrait aussi considérer l'extérieur d'un obstacle). Si ρ représente la densité du milieu, on cherche à déterminer le déplacement d'une particule $u(x,t)$ au point x et à l'instant t, solution d'un problème du type :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}\sigma(u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

auxquelles on doit ajouter des conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x)$$

et des conditions aux limites sur $\Gamma = \partial\Omega$. Le tenseur des contraintes $\sigma(u)$ est relié au tenseur des déformations

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u)$$

par une loi de comportement linéaire. Dans l'essentiel de nos travaux, nous avons considéré des matériaux élastiques linéaires : dans ce cas, σ et ε sont reliés par la loi de Hooke

$$\sigma = C\varepsilon \tag{1.1}$$

où C est un tenseur d'ordre 4 vérifiant un certain nombre de symétries

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$$

et défini positif. Plus récemment (voir section 4) nous considérons des matériaux visco-élastiques pour lesquels la loi de comportement devient:

$$\sigma + \tau_0 \dot{\sigma} = C_1 \varepsilon + C_2 \dot{\varepsilon} \tag{1.2}$$

En ce qui concerne la condition aux limites sur Γ, nous considérerons essentiellement deux types de conditions aux limites: (i) une condition de Neumann (surface libre, fissure sans contact), (ii) une condition de contact unilatéral (travaux en cours présentés dans la partie sur les domaines fictifs, section 2).

Les trois premières parties (potentiels retardés, tomographie, approximations paraxiales) concernent mes travaux les plus anciens et j'ai choisi de les présenter assez brièvement pour me focaliser plutôt sur mes travaux les plus récents et en cours.

La section 1.1 rappelle les résultats obtenus pendant ma thèse de doctorat [17] et qui concernent la méthode des potentiels retardés appliquée à la diffraction d'ondes élastiques par une fissure. L'application de cette méthode est essentiellement limitée au cas où le milieu est isotrope homogène (elle pourrait également s'appliquer dans certains milieux anisotropes pour lesquels on sait déterminer la fonction de Green, mais toujours homogènes). Il est courant dans les problèmes de propagation sismique où le nombre de paramètres est très grand de considérer en première approximation non pas le modèle complet des ondes élastiques mais le modèle simplifié des ondes scalaires, ce qui revient à ne considérer qu'un type d'ondes se propageant dans le milieu, les ondes de pression. C'est dans ce cadre que se situent mes contributions à l'étude de deux méthodes simplifiées: une méthode de tomographie (basée sur une méthode de rayons, section 1.2) et une méthode d'approximations paraxiales (section 1.3).

Les travaux présentés dans la section 1.4 concernent l'approximation du modèle complet de l'élastodynamique, pour des problèmes de contrôle non destructif ou de propagation sismique. L'objectif est de développer une méthode numérique basée sur un maillage uniforme, pour assurer une efficacité de la méthode analogue à celle des méthodes de différences finies, sur un schéma explicite en temps, et qui soit capable en même temps de prendre en compte des géométries d'obstacle complexes. Ce dernier aspect est traité grâce à la méthode des domaines fictifs, qui sera décrite plus précisément dans le chapitre 2. Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur les deux autres aspects de notre méthode. Notons cependant que l'utilisation de la méthode des domaines fictifs a conditionné le choix que nous avons fait de travailler sur une formulation mixte de notre problème. Les resultats présentés portent sur le développement et l'analyse de nouveaux éléments finis mixtes pour l'élastodynamique qui ont pour caractéristiques de permettre la condensation de masse et de prendre en compte la symétrie du tenseur des contraintes de façon forte. Ces travaux ont eu plusieurs extensions qui sont en cours actuellement (voir sections 2.2 et 4).

1.1 Méthode des potentiels retardés pour la diffraction d'ondes élastiques par une fissure $[A1]$, $[A2]$, $[A3]$

Mes travaux de thèse ont concerné les équations intégrales en temps et leur application aux problèmes de détection de fissures en milieu élastique homogène (problème dans la configuration (2)). Les méthodes de *potentiels retardés variationnels* venaient alors d'être introduites et analysées pour l'acoustique [61, 13]. Il s'agissait de les étendre au modèle plus complexe de l'élasticité, et plus précisément à la diffraction d'ondes élastiques isotropes par une fissure en milieu homogène. Outre la complexification de la fonction de Green, traiter l'hypersingularité du noyau est une des difficultés propre à l'élasticité (par rapport à l'acoustique). Les méthodes de régularisation classiques, basées sur des décompositions de la fonction de Green, avaient été développées pour traiter les problèmes fréquentiels et n'étaient pas adaptées à une formulation transitoire. En collaboration avec J. C. Nédélec et N. Nishimura, nous avons donc proposé une nouvelle méthode [A1] dont l'originalité est double: (i) obtenir une formulation temporelle, (ii) traiter des matériaux anisotropes (en fréquentiel ou en temporel). J'ai ensuite appliqué cette décomposition dans le cas d'un milieu isotrope pour déterminer une formulation variationnelle espace-temps de l'équation intégrale. L'analyse de cette équation a fait l'objet d'une publication [A3] en collaboration avec T. Ha Duong. Sa résolution numérique a fait l'objet d'une publication [A2]. Ces travaux ont été menés dans le cadre d'un contrat entre le CMAP (Ecole Polytechnique) et la DER (EDF, Clamart). Un code de simulation de la diffraction d'ondes élastiques par une fissure en 2D a été réalisé et transféré à EDF.

Signalons que, bien que nous nous soyons limités à des milieux isotropes, la méthode de décomposition de la fonction de Green permettrait également de traiter des milieux anisotropes, pourvu de disposer des transformées de Fourier inverses (ou à l'aide de transformées de Fourier calculées numériquement). Par contre cette méthode est essentiellement limitée aux milieux homogènes, pour lesquels elle est alors très performante, puisqu'elle permet de gagner une dimension d'espace (on se ramène à la surface de la fissure) et qu'elle prend en compte de manière exacte, par l'intermédiaire de la fonction de Green, le comportement à l'infini de la solution, ce qui évite tous les problèmes liés à comment borner le domaine avec les méthodes de différences finies ou d'éléments finis. Toutefois, il est possible de coupler ce type de méthodes avec une méthode d'éléments finis, pour des problèmes de diffraction où

le milieu devient homogène à l'extérieur d'une boule (cf par exemple [47, 10, 9]). Signalons enfin que, dans le cadre d'une école des ondes INRIA, j'ai donné un cours sur ces méthodes de potentiels retardés variationnels et rédigé un support de cours [18] (contenant en particulier une bibliographie non exhaustive sur ces méthodes). Nous verrons dans la section 2, qu'il existe des analogies entre cette méthode et la méthode des domaines fictifs.

1.2 Une méthode d'inversion par tomographie $[RC1]$, $[RC2]$

Mes premières contributions à la propagation sismique se rapportent à deux méthodes *d'imagerie du sous-sol* décrites dans cette section et dans la section suivante 1.3 et ont été développées dans le cadre du consortium industriel pétrolier Prestack Structural Interpretation (PSI). On s'intéresse à un problème de propagation dans le sous-sol (configuration (1)), l'objectif étant de déterminer des caractéristiques de ce sous-sol, soit paramètres du milieu, soit interfaces (discontinuités) soit les deux... Étant donnée la complexité de ce type de problèmes (problèmes de grande taille ...), on considère en première approximation le modèle simplifié des ondes scalaires (ondes de pression uniquement).

En réalité, pour la résolution du problème inverse, ce modèle est encore trop coûteux et on le simplifie davantage en utilisant une méthode de rayons. Cette méthode est couramment utilisée en géophysique car elle permet d'obtenir des trajectoires de rayons de manière très simple (une simple équation différentielle) ainsi que les temps de trajet des rayons se propageant d'un point à un autre. Elle peut être vue comme une approximation hautes fréquences de l'équation des ondes. En collaboration avec l'équipe de P. Lailly à l'IFP, nous avons développé une méthode d'inversion par *tomographie* : il s'agit de résoudre le problème inverse, consistant à déterminer les coefficients du milieu de propagation (vitesse) et les éventuelles interfaces du milieu, à partir des temps d'arrivée des rayons se propageant entre deux points. Signalons que la spécificité de la méthode développée ici par rapport aux méthodes antérieures de tomographie est qu'elle permet de prendre en compte les temps d'arrivée multiples des ondes (triplications). Mes contributions ont été essentiellement : (1) de développer un logiciel de tracé de rayons par des schémas numériques d'ordre élevé, logiciel qui a été intégré dans le code de tomographie développé par l'IFP, (2) de développer une méthode efficace de dérivation des rayons par rapport au milieu (vitesse et interfaces) basée sur une technique d'état adjoint. Cette méthode n'est pas conceptuellement nouvelle mais assez curieusement elle n'avait pas été appliquée auparavant à des équations de rayon, et elle a donné lieu à des développements ultérieurs ainsi qu'à un code de calcul utilisé par l'IFP. Une partie de ces travaux a fait l'objet de rapports de contrat [RC1,RC2] ainsi que d'une publication dans des proceedings de la SEG [20].

1.3 Approximations paraxiales d'ordre élevé en 3D $[A6]$

La deuxième méthode d'imagerie, toujours développée dans le cadre du consortium PSI, est une technique de sismique-réflexion (migration) utilisant les équations paraxiales, qui fournissent une approximation des ondes se propageant dans une direction privilégiée (la profondeur z pour les applications géophysiques). En 3D, ces équations (d'évolution par rapport à la variable z) nécessitent de résoudre à chaque itération en z un problème 2D. J'ai travaillé sur la résolution numérique de "nouvelles" (à l'époque!) *équations paraxiales compatibles avec des méthodes de décomposition d'opérateurs* (splitting), proposées par F. Collino et P. Joly

[32], qui conduisent à résoudre une série de problèmes 1D à la place d'un problème 2D, ce qui permet de gagner un ordre de grandeur en coût de calcul. Leur nouveauté par rapport aux méthodes de directions alternées $x-y$ standard est qu'elles permettent d'introduire plus de directions de splitting, le nombre de directions étant choisi en fonction de la précision voulue. Ma contribution a été de proposer et d'analyser (ordre, dispersion...) des schémas aux différences finies variationnels d'ordre élevé pour résoudre ces équations en milieu hétérogène. Ces travaux ont donné lieu à une publication en collaboration avec F. Collino et P. Joly [**A6**] (ainsi qu'à un rapport de recherche plus détaillé [21]) J'ai également développé deux codes de calcul (une version 2D et une version 3D) qui ont été déposés à l'APP et livrés à l'IFP ainsi qu'aux sponsors du consortium.

1.4 Éléments finis mixtes en élastodynamique

1.4.1 La problématique

Depuis quelques années, je travaille sur le développement de méthodes numériques performantes pour la résolution de problèmes de diffraction d'ondes par un obstacle de géométrie quelconque dans des milieux complexes. Ces travaux ont démarré dans le cadre de la thèse de C. Tsogka, thèse financée par un contrat EDF et que j'ai co-encadrée avec P. Joly. Pour des raisons d'efficacité, nous nous sommes fixés les critères suivants:

(1) utiliser des schémas explicites en temps,

(2) s'appuyer sur un maillage uniforme en espace,

(3) respecter la géométrie de l'obstacle.

C'est ce qui nous a conduit à développer des méthodes basées sur l'utilisation de la méthode des domaines fictifs. Cette méthode sera présentée en détail dans la section suivante 2, mais j'en dis quelques mots ici, car c'est son utilisation qui a motivé les travaux qui suivent. La méthode des domaines fictifs consiste à prendre en compte la condition aux limites posée sur le bord de l'obstacle de façon faible, grâce à l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange sur la frontière de l'obstacle. Les inconnues volumiques (déplacement, contraintes...) vivent alors dans un espace indépendant de la géométrie de l'obstacle, ce qui permet de les approcher sur un maillage uniforme. Pour pouvoir appliquer cette méthode, la condition aux limites doit être une condition essentielle.

Précisons maintenant le problème que nous voulons traiter ici: il s'agit du problème de la diffraction d'ondes élastiques par une fissure (ou une topographie) modélisée par une condition de surface libre. On cherche donc à déterminer le déplacement $u(x,t)$ solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}\sigma(u) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{1.3}$$

auquel on doit ajouter des conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x) \tag{1.4}$$

Le milieu est supposé élastique linéaire, la loi de comportement est donc la loi de Hooke:

$$\sigma(u) = C\varepsilon(u) \tag{1.5}$$

Dans une formulation en déplacement, la condition de surface libre est une condition naturelle, ce qui ne nous permet pas d'appliquer la méthode des domaines fictifs. Pour qu'elle devienne une condition essentielle, le tenseur des contraintes doit faire partie des inconnues du problème. Nous avons alors le choix entre une formulation en vitesse-contraintes, une formulation en déplacement-contraintes ou une formulation en contraintes seules. Nous avons opté pour le premier choix, c'est à dire une formulation mixte vitesse-contraintes, avec la vitesse dans L^2 et le tenseur de contraintes dans $H(\ \mathrm{div})$. En posant $v = \partial_t u$, et en dérivant par rapport à t la loi de comportement, on cherche donc $v \in L^2$ et $\sigma \in H(\ \mathrm{div})$, σ symétrique, tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{div}\sigma = f & \text{dans } \Omega \\ A \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \tag{1.6}$$

où $A = C^{-1}$ (ce qui a un sens sur les tenseurs symétriques).

À partir de maintenant, nous "oublions" la fissure et la condition aux limites de surface libre (qui ont motivé le choix de notre formulation...) et nous considérons la question de l'approximation de cette formulation vitesse-contraintes, posée dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ de géométrie simple, par exemple un rectangle, avec par exemple la condition $v = 0$ sur le bord extérieur $\partial\Omega$. Rappelons que notre objectif est d'approcher nos inconnues sur un maillage uniforme et d'obtenir un schéma explicite (critères (1) et (2)). Pour écrire cette formulation de manière plus précise, nous avons besoin d'introduire quelques notations mais pas trop... pour ne pas alourdir trop notre propos... les définitions plus rigoureuses peuvent être trouvées dans [***A*9**].

Si σ est un tenseur défini dans Ω, on lui associe les deux vecteurs

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

On définit alors la divergence du tenseur:

$$\mathrm{div}\ \sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{div}\ \sigma_1 \\ \\ \mathrm{div}\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

et son assymétrique:

$$\mathrm{as}(\sigma) = \sigma_{12} - \sigma_{21}.$$

Enfin on notera le produit tensoriel: (convention des indices répétés)

$$\sigma : \tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}, \qquad \forall(\sigma,\tau), \quad |\sigma|^2 = \sigma : \sigma.$$

On introduit les espaces de Hilbert

$$\underline{M} = (L^2(\Omega))^2, \ \underline{\underline{H}} = (L^2(\Omega))^4 \text{ et } \underline{\underline{X}} = \left\{ \sigma \in \underline{\underline{H}} \ / \ \mathrm{div}\ \sigma \in \underline{M} \right\}.$$

On notera $\underline{\underline{X}}^{sym} \subset \underline{\underline{X}}$ le sous-espace de $\underline{\underline{X}}$ des tenseurs symétriques:

$$\underline{\underline{X}}^{sym} = \left\{ \sigma \in \underline{\underline{X}} \ / \ \mathrm{as}(\sigma) = 0 \right\}.$$

On peut maintenant écrire la formulation mixte vitesse-contraintes de notre problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, v) : [0,T] \longmapsto \underline{\underline{X}}^{sym} \times \underline{M} \text{ tels que} \\ \\ \dfrac{d}{dt}\, a(\sigma(t), \tau) + b(v(t), \tau) = 0 \ , \qquad \forall \tau \in \underline{\underline{X}}^{sym}, \\ \\ \dfrac{d}{dt}\, c(v(t), w) - b(w, \sigma(t)) = (f, w) \ , \quad \forall w \in \underline{M}, \end{array} \right. \tag{1.8}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(\sigma, \tau) = \displaystyle\int_\Omega A\sigma : \tau dx, & \forall (\sigma, \tau) \in \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}}, \\ \\ c(v, w) = \displaystyle\int_\Omega \varrho v \cdot w dx, & \forall (v, w) \in \underline{M} \times \underline{M}, \\ \\ b(w, \tau) = \displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\ \tau \cdot w dx, & \forall (w, \tau) \in \underline{\underline{X}} \times \underline{M}. \end{array} \right. \tag{1.9}$$

À ce stade, on est confronté essentiellement à deux difficultés lorsqu'on veut approcher ce problème. Ces deux difficultés sont liées au choix de l'espace d'approximation de $\underline{\underline{X}}^{sym}$. Considérant σ à partir des deux vecteurs qui le composent σ_1 et σ_2 définis par (1.7), il apparaît clairement que l'espace $\underline{\underline{X}}$ coïncide avec

$$\underline{\underline{X}} = \underline{X} \times \underline{X}, \qquad \text{où} \qquad \underline{X} = H(\ \mathrm{div}, \Omega)$$

On peut alors penser à choisir comme espace d'approximation $\underline{\underline{X_h}} \subset \underline{\underline{X}}$ l'espace

$$\underline{\underline{X_h}} = \underline{X_h} \times \underline{X_h}$$

où $\underline{X_h}$ est un espace d'éléments finis classiques pour approcher $H(\ \mathrm{div})$ par exemple un espace d'éléments finis de Raviart-Thomas.

Notre première difficulté est liée à la contrainte (1) qu'on s'est fixée, de travailler avec des schémas explicites en temps. En fait, on peut facilement montrer qu'on ne peut pas réaliser la condensation de masse avec cet espace, ni avec les autres espaces classiquement utilisés.

La deuxième difficulté est liée à la prise en compte de la symétrie du tenseur des contraintes. Si on utilise un des espaces classiques d'approximation de $H(\ \mathrm{div})$ pour approcher $\underline{\underline{X}}$, on doit travailler non pas dans $\underline{\underline{X_h}}$ mais dans

$$\underline{\underline{X_h}}^{sym} = \left\{ \sigma_h \in \underline{\underline{X_h}}, \quad as(\sigma_h) = 0 \right\}$$

Le fait d'imposer cette condition supplémentaire sur la symétrie du tenseur des contraintes provoque un verouillage numérique. Il s'agit d'un phénomène bien connu qui apparaît aussi quand on veut traiter un problème d'élasticité statique en formulation mixte et plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature. Certaines proposent d'utiliser des éléments finis "composites" [81], d'autres proposent de prendre en compte la symétrie de façon faible,

en introduisant un multiplicateur de Lagrange [5, 6, 107, 94]. Aucune des solutions proposées n'est cependant compatible avec la condensation de masse.

Afin de découpler ces deux difficultés, nous nous sommes penchés d'abord sur un modèle simplifié, celui des ondes scalaires anisotropes (voir section 1.4.2). Dans ce cas l'espace de travail est l'espace des vecteurs de $\underline{X}$. On élimine ainsi dans un premier temps le problème lié à la symétrie du tenseur des contraintes. La question de la condensation de masse par contre reste posée pour ce problème, en présence d'anisotropie. Dans la section 1.4.2, nous proposons la construction de nouveaux éléments finis mixtes pour ce problème qui sont compatibles avec la condensation de masse, et nous développons une analyse de convergence.

Nous abordons ensuite dans la section 1.4.3 le problème de l'élastodynamique. Les éléments finis proposés dans le cas scalaire s'étendent aisément au cas vectoriel... Par contre l'extension de l'analyse de convergence est beaucoup moins aisée... La difficulté vient bien sûr de la question de la symétrie du tenseur des contraintes. Nous avons proposé deux analyses de convergence. La première est basée sur une formulation du problème approché posée dans l'espace $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$, la deuxième est basée sur une formulation équivalente mais posée dans l'espace $\underline{\underline{X_h}}$, ce qui est possible moyennant l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange vivant dans un espace bien choisi. Les deux démonstrations de convergence utilisent une technique de macroéléments.

1.4.2 Le modèle simplifié de l'équation des ondes anisotropes [*A7*]

Ce travail a été mené en collaboration avec P. Joly et C. Tsogka. Il a fait l'objet d'une note aux comptes rendus [23] et d'un article plus détaillé [***A7***] (auquel je me réfèrerai dans ce qui suit).

Le problème continu. Nous traitons ici le cas simplifié des ondes anisotropes. Notre objectif est de proposer des éléments finis mixtes pour une formulation mixte de ce problème, qui permettent de faire de la condensation de masse. Nous reprenons ici les notations utilisées dans [***A7***] et qui reprennent celles de l'élastodynamique: v devient un champ scalaire et p un champ vectoriel (joue le même rôle que σ). Nous nous intéressons alors à la formulation mixte suivante:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (p,v) : [0,T] \longmapsto \underline{X} \times M \equiv H(\text{div };\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \\ \dfrac{d}{dt} a(p,q) + b(v,q) \quad = 0, \qquad \forall q \in \underline{X}, \\ \\ \dfrac{d}{dt}(v,w) - b(w,p) \quad = (f,w), \quad \forall w \in M, \end{array}\right. \tag{1.10}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} a(p,q) = \displaystyle\int_\Omega A(x)\ p \cdot q\ dx, \quad \forall (p,q) \in \underline{X} \times \underline{X}, \\ \\ b(w,q) = \displaystyle\int_\Omega w\ \ \text{div}\ q\ dx, \quad \forall (w,q) \in M \times \underline{X}, \\ \\ (f,w) = \displaystyle\int_\Omega f\ w\ dx, \qquad \forall w \in M. \end{array}\right. \tag{1.11}$$

où $A(x)$ est une matrice définie positive vérifiant

$$A(x)\ \xi\cdot\xi \geq \alpha\,|\xi|^2\,,\ \alpha>0,\ \forall \xi\in \mathbb{R}^2,\ \text{p.p. } x\in\Omega. \tag{1.12}$$

On voit que ce problème est tout à fait analogue au problème (1.8) qu'on devait traiter en élastodynamique, la différence essentielle venant du fait qu'on n'a pas à se préoccuper de la symétrie du tenseur des contraintes, p étant ici un vecteur de $H(\ \mathrm{div})$.

Semi-discrétisation en espace. Introduisons des sous-espaces $\underline{X_h}\subset \underline{X}$ et $M_h\subset M$ de dimensions respectives $N_1=\dim \underline{X_h}$ et de bases respectives $B_{N_1}=\{\tau_i\}_{i=1}^{N_1}$ et $B_{N_2}=\{\phi_i\}_{i=1}^{N_2}$. On note $[P]=(P_1,...,P_{N_1})$ et $[V]=(V_1,...,V_{N_2})$ les composantes des approximations p_h et v_h dans ces bases B_{N_1} et B_{N_2}. L'approximation en espace du problème (1.10) peut alors s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (P,V):[0,T]\longmapsto \mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2} \text{ tels que} \\ \\ M_p\dfrac{dP}{dt}+C^TV=0, \\ \\ M_v\dfrac{dV}{dt}-CP=F, \end{cases} \tag{1.13}$$

avec

$$\begin{aligned} &(i) && (M_p)_{i,j}=(A\tau_i,\tau_j)_{(L^2(\Omega))^2}\,, && 1\leq i,j\leq N_1, \\ &(ii) && (M_v)_{i,j}=(\phi_i,\phi_j)_{L^2(\Omega)}\,, && 1\leq i,j\leq N_2, \\ &(iii) && (C)_{i,j}=(\phi_i,\mathrm{div}\ \tau_j)_{L^2(\Omega)}\,, && 1\leq i\leq N_2,\ 1\leq j\leq N_1, \\ &(iv) && (F)_j=(f,\phi_j)_{L^2(\Omega)} && 1\leq j\leq N_2\ ; \end{aligned} \tag{1.14}$$

C^T est la transposée de C.

Discrétisation en temps. On utilise une différence finie centrée pour l'approximation en temps, ce qui conduit à approcher les deux inconnues en des instants décalés:

$$\begin{cases} M_p\dfrac{P^{n+1}-P^n}{\Delta t}+C^TV^{n+1/2}=0, \\ \\ M_v\dfrac{V^{n+1/2}-V^{n-1/2}}{dt}-CP^n=F^n, \end{cases} \tag{1.15}$$

La solution $(V^{n+1/2},P^{n+1})$ est alors obtenue à chaque itération en inversant les matrices de masse M_v et M_p. Bien qu'elles soient symétriques et creuses, ça peut devenir assez couteux pour de grands systèmes. La technique de condensation de masse consiste à approcher ces matrices par des matrices diagonales (ou diagonales par blocs) grâce à l'utilisation de formules de quadratures adéquates pour approcher les intégrales dans (1.14 (i) and (ii)) qui définissent les entrées de ces matrices (voir [30, 111]). On peut remarquer que M_h étant un espace de fonctions discontinues, il n'y a rien à faire pour la matrice M_v (qui est diagonale ici).

En ce qui concerne la matrice M_p, on explique dans [***A7***] pourquoi on ne peut pas faire de condensation de masse, dès que $A(x)$ n'est pas diagonale, si on approche $\underline{X}$ par exemple

par des éléments finis de Raviart-Thomas. En effet les degrés liberté sont alors associés à des arêtes (ou eventuellement aux centres des arêtes) et il est facile de voir qu'une fonction de base associée à une arête donnée ne s'annule pas sur toutes les autres arêtes. Or c'est ce principe qui fait "marcher" la condensation de masse. On pourrait vérifier que le problème est le même avec les autres éléments finis mixtes classiquement utilisés pour l'approximation de $H(\text{ div})$ (cf par exemple [27, 53]). L'idée est alors d'associer les degrés de liberté aux sommets des éléments plutôt qu'aux centres des arêtes et d'utiliser (à l'ordre le plus bas) des éléments localement Q_1 et globalement dans $H(\text{ div})$.

L'élément fini $Q_1^{\mathbf{div}} - Q_0$. On suppose ici que Ω est une union de rectangles de telle sorte qu'on peut considérer un maillage $(\mathcal{T}_h)$ composés d'éléments carrés K de côté $h > 0$. On introduit les espaces d'approximation:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{X_h} = \left\{ q_h \in \underline{X} \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h,\ q_h|_K \in \hat{X} \right\}, \\ \\ M_h = \left\{ w_h \in M \,/\ \ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ w_h|_K \in \hat{M} \right\}, \end{array} \right. \tag{1.16}$$

où $\hat{X}$ (resp. $\hat{M}$) est un espace de fonctions vectorielles (resp. scalaires) de dimension finie. Les éléments finis de Raviart-Thomas de plus bas degré correspondent au choix suivant, voir [95]:

$$\hat{X} = RT_{[0]} = P_{10} \times P_{01}, \qquad \hat{M} = Q_0, \tag{1.17}$$

où P_k est l'espace des polynomes de degré inférieur ou égal à k et P_{kl} est défini par

$$P_{kl} = \left\{ p(x,y) \ \mid \ p(x,y) = \sum_{i \le k, j \le l} a_{ij} x^i y^j \right\}.$$

Nous proposons ici de changer l'espace d'approximation $\hat{X}$ en :

$$\hat{X} = Q_1 \times Q_1, \qquad \hat{M} = Q_0, \tag{1.18}$$

où $Q_1 = P_{11}$. Cet élément, que nous appellerons $Q_1^{div} - Q_0$, a été initialement introduit par Nédélec dans [80] (deuxième famille d'éléments finis mixtes de Nédélec), mais il n'a à notre connaissance jamais été utilisé, en particulier parcequ'on ne disposait d'aucune analyse de convergence. Il est aisé de montrer qu'en utilisant cet élément, la matrice de masse M_p peut être condensée, à l'aide d'une formule de quadrature de Gauss-Lobatto.

L'élément fini $Q_{k+1}^{div} - Q_k$. On peut facilement monter en ordre en définissant l'élément fini mixte d'ordre k par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{X_h} = \left\{ q_h \in \underline{X} \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h,\ q_h|_K \in Q_{k+1} \times Q_{k+1} \right\}, \\ \\ M_h = \left\{ w_h \in M \,/\ \ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ w_h|_K \in Q_k \right\}, \end{array} \right. \tag{1.19}$$

Cet élément est toujours compatible avec la condensation de masse.

Analyse de convergence. Comme nous l'avons mentionné plus haut, une des raisons pour lesquelles cet élément n'a pas été utilisé est que son analyse de convergence n'entre pas dans

le cadre classique de la théorie des mixtes. Pour le comprendre, intéressons nous à l'étude du problème elliptique

$$\text{(1.20)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } (p,u) \in \underline{X} \times M = H(\text{div };\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tels que} \\ a(p,q) + \quad b(u,q) \quad = 0, \qquad \forall q \in \underline{X}, \\ \qquad\qquad\quad b(w,p) \quad = -(f,w), \quad \forall w \in M, \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution (p,u) in $\underline{X} \times M$ (cf [27]). Pour son approximation, on considère de nouveau les espaces de dimension finie $\underline{X_h}$ et M_h definis par (1.16). Le problème approché de (1.20) est:

$$\text{(1.21)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } (p_h,u_h) \in \underline{X_h} \times M_h \text{ tels que} \\ a(p_h,q_h) + \quad b(u_h,q_h) \quad = 0, \qquad \forall q_h \in \underline{X_h}, \\ \qquad\qquad\quad b(w_h,p_h) \quad = -(f,w_h), \quad \forall w_h \in M_h. \end{cases}$$

D'après la théorie classique des mixtes (cf par exemple [95, 27]), ce problème approché admet une solution unique (p_h,u_h) dans $\underline{X_h} \times M_h$ avec la propriété de convergence:

$$\text{(1.22)} \qquad (p_h,u_h) \longrightarrow (p,u) \quad \in \quad \underline{X} \times M,$$

si les hypothèses suivantes sont satisfaites:

$$\text{(1.23)} \qquad \left| \begin{array}{l} (i) \quad \text{Condition inf-sup discrète uniforme:} \\ \exists c > 0 \text{ independante de } h \text{ telle que} \\ \forall\ w_h \in M_h,\ \exists\ q_h \in \underline{X_h} \,/\, b(w_h,q_h) \geq c\, \|w_h\|_M\, \|q_h\|_X\,; \\ (ii) \quad \text{La coercivité de } a(\cdot,\cdot) \text{ sur } V_h : \\ \exists \alpha > 0 \text{ independante de } h \text{ telle que} \\ \forall\ p_h \in V_h, \quad a(p_h,p_h) \geq \alpha\, \|p_h\|_X^2\ , \\ \text{où } V_h = \text{Ker} B_h = \left\{ q_h \in \underline{X_h} \,/\, b(w_h,q_h) = 0,\ \forall\ w_h \in M_h \right\} \end{array} \right.$$

Ces hypothèses sont satisfaites par le couple d'espaces $(\underline{X_h}, M_h)$ defini par (1.16), lorsque $\hat{X}$ est l'élement de Raviart-Thomas de plus bas degré (1.17) et $\hat{M} = Q_0$ les constantes par morceaux, voir [95]. Avec notre choix pour $\hat{X}$, il est facile de vérifier que la condition inf-sup discrète uniforme (1.23-i) est toujours vraie, mais la coercivité sur le noyau (1.23-ii) n'est plus satisfaite. Cela vient du fait qu'avec l'espace de Raviart-Thomas $\underline{X_h}^{RT}$, on a la propriété

$$\text{div}\underline{X_h}^{RT} \subset M_h$$

ce qui entraine que tout élément du noyau, $q_h \in V_h$ est à divergence nulle $\text{div} q_h = 0$ et par conséquent sa norme dans $H(\text{ div})$ est équivalente à sa norme L^2. La forme bilinéaire $a(.,.)$

étant coercive sur L^2, on a bien (1.23-ii). Avec notre nouveau choix d'espace, on a enrichi l'espace $\underline{X_h}$ (qui contient $\underline{X_h}^{RT}$) sans enrichir l'espace M_h et ce faisant on a perdu la propriété $\mathrm{div}\underline{X_h} \subset M_h$. Il est facile de montrer qu'il existe des q_h dans le noyau et dont la divergence n'est pas nulle. On n'a donc plus la coercivité uniforme sur le noyau.

On peut toujours décomposer notre espace sous la forme

$$\underline{X_h} = \underline{X_h}^s \oplus \underline{X_h}^r \tag{1.24}$$

où $\underline{X_h}^s = \underline{X_h}^{RT}$ et où $\underline{X_h}^r$ représente ce qu'on a rajouté par rapport aux éléments de Raviart-Thomas pour obtenir notre espace. À partir de cette observation, nous avons développé une théorie modifiée, basée sur la décomposition orthogonale de l'espace. Cette théorie est basée sur des hypothèses modifiées:

– Condition inf-sup discrète uniforme "forte" : le sup est pris sur $\underline{X_h}^s$ au lieu de $\underline{X_h}$,

$$\begin{array}{l} \exists c > 0 \text{ , independante de } h, \text{ telle que} \\ \forall\ w_h \in M_h,\ \ \exists\ q_h^s \in \underline{X_h}^s \quad / \quad b(w_h, q_h^s) \geq c \left\| w_h \right\|_M \left\| q_h^s \right\|_X . \end{array} \tag{1.25}$$

– Coercivité "faible" sur le noyau: on change de norme, on retire la partie gênante, c'est à dire la divergence de la partie qu'on a rajouté

$$\begin{array}{l} \text{there exists a constant } \alpha > 0, \text{ independent of } h, \text{ such that} \\ \forall\ p_h \in V_h,\ \ a(p_h, p_h) \geq \alpha \left(\|p_h^s\|_X^2 + |p_h^r|_H^2 \right). \end{array} \tag{1.26}$$

où $H = (L^2(\Omega))^2$.

– Propriétés d'approximation "forte": l'espace $\underline{X_h}^s$ approche l'espace $\underline{X}$ (vérifié pour Raviart-Thomas)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0} \inf\limits_{q_h^s \in X_h^s} \left\| p - q_h^s \right\|_X = 0, \qquad \forall p \in X, \\ \lim\limits_{h\to 0} \inf\limits_{w_h \in M_h} \left\| u - w_h \right\|_M = 0, \quad \forall u \in M. \end{array} \right. \tag{1.27}$$

Sous les hypothèses modifiées, on a un résultat de convergence de la solution

$$(p_h = p_h^s + p_h^r, u_h) \in \underline{X_h} \times M_h,$$

du problème (1.21) vers la solution du problème (1.20):

- $(p_h^s, u_h) \quad \to (p, u) \quad$ in $\underline{X} \times M$,
- $p_h^r \qquad\quad \to 0 \qquad\quad$ in H.

On renvoie à [***A7***] pour un énoncé des hypothèses et du résultat de convergence plus précis. On montre que les hypothèses modifiées sont satisfaites par les éléments finis d'ordre k, $Q_{k+1}^{div} - Q_k$. On utilise ensuite des techniques classiques (estimations d'énergie et projection elliptique) pour obtenir des estimations d'erreur pour le problème d'évolution.

Faisons quelques remarques sur ce résultat de convergence: il est plus faible que celui qu'on obtiendrait avec la théorie classique. En effet, la convergence de p_h vers p n'est assurée que dans L^2 et pas dans $H(\text{ div})$. Pour obtenir une solution convergeant dans $H(div)$, il suffit de projeter p_h sur $\underline{X_h}^s$, ce qui est particulièrement simple si on pense à l'élement de plus bas degré par exemple, c'est à dire lorsque $\underline{X_h}^s = \underline{X_h}^{RT}$. En conclusion, on a enrichi l'espace des éléments finis de Raviart-Thomas afin de permettre la condensation de masse. En fait, c'est toujours la partie Raviart-Thomas de la solution approchée qui converge vers la solution, et la partie "reste", qu'on a rajouté pour la condensation de masse, tend vers zéro (en norme L^2).

1.4.3 Construction et analyse d'éléments finis mixtes pour l'élastodynamique [*A*5], [*A*9], [*RR*1] , [*A*8]

Ce travail est la suite du précédent et a été mené en collaboration avec P. Joly et C. Tsogka. Il a donné lieu à :

- une note aux comptes rendus [***A*5**], dans laquelle est présentée l'extension de l'élément fini mixte $Q_1^{\text{div}} - Q_0$ au cas de l'élastodynamique et l'étude de sa dispersion,
- un rapport de recherche [***RR*1**] et un article [***A*9**] dans lesquels la construction des éléments finis est plus détaillée (ordre élevé, 3D) et deux analyses différentes de convergence sont présentées,
- et enfin un article [***A*8**] consacré à l'application de la méthode des domaines fictifs à un problème de diffraction, et où l'approximation est réalisée à l'aide de ces éléments finis.

Présentation de l'élément fini mixte $Q_{k+1}^{div} - Q_k$ pour l'élastodynamique.

On revient ici à la question de l'approximation de (1.8). Par définition, un tenseur σ appartient à $\underline{\underline{X}}$ si chaque vecteur ligne qui le compose σ_1 et σ_2 (voir (1.7)) appartient à $\underline{X}$. Il est alors naturel d'introduire le couple d'espaces d'approximation

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{X_h}} = \underline{X_h} \times \underline{X_h}, \quad \underline{M_h} = M_h \times M_h \\ \\ \underline{\underline{X_h}}^{sym} = \underline{\underline{X_h}} \cap \underline{\underline{X}}^{sym} \end{array} \right. \tag{1.28}$$

où $(\underline{X_h}, M_h)$ sont définis par (1.19). On montre que l'espace $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$ admet également la caractérisation suivante:

$$\underline{\underline{X_h}}^{sym} = \left\{ \sigma \in \underline{\underline{X}}^{sym} / \ \sigma_{12} = \sigma_{12} \in Q_h^{k+1}, \ (\sigma_{11}, \sigma_{22}) \in \underline{X_h} \right\}, \tag{1.29}$$

où Q_h^{k+1} est l'espace des fonctions continues et localement Q_{k+1}:

$$Q_h^{k+1} = \left\{ \phi \in C^0(\overline{\Omega}), \ \phi\,|_K \in Q_{k+1}, \ \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}. \tag{1.30}$$

L'extension de cet élément fini mixte au cas tridimensionnel ne pose aucune difficulté. Comme pour le cas scalaire, nous montrons également que cet élément fini permet de condenser la matrice de masse M_σ associée à la forme bilinéaire $a(.,.)$.

En revanche, l'analyse de convergence de cet élément soulève de nouvelles difficultés par rapport au cas scalaire, qui sont liées à la symétrie du tenseur des contraintes. Grâce à des techniques d'énergie, cette analyse se ramène à étudier la convergence du problème stationnaire associé au problème d'évolution (1.8), qui consiste à trouver $(\sigma, v) \in \underline{\underline{X}}^{sym} \times \underline{M}$ tels que

$$\text{(1.31)} \qquad \begin{cases} a(\sigma,\tau) + \quad b(v,\tau) \quad = 0\ , & \forall \tau \in \underline{\underline{X}}^{sym}, \\ \qquad\qquad\quad b(w,\sigma) \quad = -(f,w), & \forall w \in \underline{M}, \end{cases}$$

où $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$ sont définis par (1.9). Le problème approché consiste à trouver $(\sigma_h, v_h) \in \underline{\underline{X_h}}^{sym} \times \underline{M_h}$ tels que

$$\text{(1.32)} \qquad \begin{cases} a(\sigma_h,\tau_h) + \quad b(v_h,\tau_h) \quad = 0, & \forall \tau_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym}, \\ \qquad\qquad\quad b(w_h,\sigma_h) \quad = -(f,w_h), & \forall w \in \underline{M_h}. \end{cases}$$

Pour les mêmes raisons que dans le cas scalaire ($\mathrm{div}(\underline{\underline{X_h}}^{sym}) \not\subset \underline{M_h}$) la théorie classique ne peut pas s'appliquer (défaut de coercivité sur le noyau). Il est alors naturel de vouloir applquer la théorie abstraite développée pour le cas scalaire et qui s'appuie en particulier sur une décomposition orthogonale de l'espace d'approximation $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$. Or on a vu que l'espace $\underline{X_h}$ admettait la décomposition orthogonale (1.24) dont on déduit aisément:

$$\text{(1.33)} \qquad \underline{\underline{X_h}} = \underline{\underline{X_h}}^{s} \oplus \underline{\underline{X_h}}^{r},$$

avec

$$\text{(1.34)} \qquad \underline{\underline{X_h}}^{s} = \underline{X_h}^{s} \times \underline{X_h}^{s} \ \text{ et } \ \underline{\underline{X_h}}^{r} = \underline{X_h}^{r} \times \underline{X_h}^{r},$$

Un candidat naturel pour la décomposition de $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$ serait:

$$\underline{\underline{X_h}}^{sym} = (\underline{X_h}^{s} \cap \underline{\underline{X}}^{sym}) \oplus (\underline{X_h}^{r} \cap \underline{\underline{X}}^{sym}),$$

Or la propriété d'approximation forte pour avoir la convergence demande que l'espace $\underline{\underline{X_h}}^{s} \cap \underline{\underline{X}}^{sym}$ soit un espace d'approximation de $\underline{\underline{X}}^{sym}$, ce qui n'est pas le cas (verouillage numérique). Nous n'avons pas réussi à trouver un autre candidat. Nous avons développé deux analyses de convergence que je présente brièvement dans ce qui suit.

Chronologiquement, c'est la deuxième analyse, présentée dans [***RR*1**] que nous avons menée d'abord. Cette analyse permet d'obtenir des estimations en norme $H(\mathrm{div}\ )$, du même type que celles obtenues dans le cas scalaire, et est basée sur une formulation du problème posée dans $\underline{\underline{X_h}}$ au lieu de $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$, grâce à l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange prenant en compte la symétrie du tenseur des contraintes. Toutefois, cette analyse est très technique... et ne s'applique pas directement aux éléments finis d'ordre k quelconque (pour un ordre k donné, elle nécessite une vérification sur le rang d'une matrice). Suivant les suggestions d'un de nos referees, nous avons alors établi un deuxième résultat de convergence présenté dans [***A*9**]. Cette analyse , basée sur la coercivité de $a(.,.)$ dans L^2, permet d'obtenir des estimations d'erreur en norme L^2 pour σ et v, pour n'importe quel ordre. Elle a l'avantage d'être plus générale et un peu moins technique. Mais elle ne permet pas d'obtenir des informations sur la partie divergence de la solution approchée et demande plus de régularité sur la solution du problème continu. Si par exemple le tenseur des contraintes est seulement dans $H(\mathrm{div}\ )$, cette "première" analyse ne permet pas d'avoir la convergence, alors qu'on l'obtient avec la "deuxième".

Une première analyse de convergence [*A9*]

Le résultat de convergence est le suivant:

Théorème 1 *Soit* $(\sigma, v) \in \underline{\underline{X}}^{sym} \times \underline{M}$ *la solution du problème (1.31) et* $(\sigma_h, v_h) \in \underline{\underline{X_h}}^{sym} \times \underline{M_h}$ *la solution du problème approché (1.32). Si* $(\sigma_{11}, \sigma_{22}) \in H^{1,0}(\Omega) \times H^{0,1}(\Omega)$, $\sigma_{12} \in H^1(\Omega)$ *et* $v \in H_0^1(\Omega)$ *alors*

$$|\sigma - \sigma_h|_H + \|v - v_h\|_M \longrightarrow 0 \quad \textit{quand} \quad h \to 0. \tag{1.35}$$

Si de plus $(\sigma_{11}, \sigma_{22}) \in H^{k+2,k+1}(\Omega) \times H^{k+1,k+2}(\Omega)$, $\sigma_{12} \in H^{k+2}(\Omega)$, *et* $v \in (H^{k+2}(\Omega))^2$, *alors on a les estimations d'erreur:*

$$\begin{aligned} |\sigma - \sigma_h|_H + \|v - v_h\|_M \leq C h^{k+1} \quad & \Big(|\sigma_{11}|_{k+2,k+1} + |\sigma_{22}|_{k+1,k+2} + |\sigma_{12}|_{k+2} \\ & + |v|_{k+1} + |\nabla v|_{k+1} \Big) . \end{aligned} \tag{1.36}$$

Ce résultat utilise plusieurs ingrédients:

– Une propriété d'approximation: si $(\tau_{11}, \tau_{22}) \in H^{1,0} \times H^{0,1}$ et $\tau_{12} \in H^1$

$$\lim_{h \to 0} \inf_{\tau_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym}} \|\tau - \tau_h\|_X = 0. \tag{1.37}$$

et des estimations plus précises si τ est plus régulier. Cette propriété utilise la caractérisation (1.29) de l'espace $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$ et le fait que $\underline{\underline{X_h}} \supset \underline{X_h}^s$, où $\underline{X_h}^s$ est l'espace de Raviart-Thomas. On l'obtient ensuite à partir de propriétés spécifiques de l'espace de Raviart-Thomas sur un maillage régulier combinées avec des propriétés d'approximation classiques de Q_h^{k+1}. On remarque la régularité particulière demandée, qui vient du fait que l'opérateur div n'est pas naturellement associé à la décomposition d'un tenseur en sa partie diagonale (τ_{11}, τ_{22}) d'un côté et sa partie extradiagonale $\tau_{12} = \tau_{21}$ de l'autre, comme c'est fait dans la caractérisation (1.29). On arrive quand même à obtenir des estimations sur les dérivées $\partial_1(\tau_{11} - (\tau_h)_{11})$, $\partial_2(\tau_{22} - (\tau_h)_{22})$, $\partial_1(\tau_{12} - (\tau_h)_{12})$ et $\partial_2(\tau_{12} - (\tau_h)_{12})$ séparément en utilisant le caractère régulier du maillage.

– Une condition inf-sup discrète uniforme

$$\left| \begin{array}{l} \exists \beta > 0 \,/\, \forall h, \forall w_h \in \underline{M_h},\ \exists\ \tau_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym},\ \tau_h \neq 0 \,/ \\ \\ b(w_h, \tau_h) \geq \beta \, \|w_h\|_M \, \|\tau_h\|_X . \end{array} \right. \tag{1.38}$$

qui utilise de nouveau le caractère uniforme du maillage.

– Une propriété supplémentaire : pour tout $w \in (H_0^1(\Omega))^2$,

$$\lim_{h \to 0} \inf_{w_h \in \underline{M_h}} \sup_{\tau_h \in V_h} \frac{b(w - w_h, \tau_h)}{\alpha \, |\tau_h|_H} = 0. \tag{1.39}$$

La nécessité de cette propriété provient du fait qu'on utilise la coercivité de $a(.,.)$ sur $\underline{\underline{H}}$ et non pas sur le noyau

$$V_h = \left\{ \tau_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym} \,/\, b(w_h, \tau_h) = 0,\ \forall w_h \in \underline{M_h} \right\}$$

La démonstration de cette propriété s'appuie sur des techniques de macro-éléments.

Une deuxième analyse de convergence [*RR*1]

On s'intéresse toujours à la convergence de la solution du problème stationnaire approché (1.32) vers celle du problème (1.31). La difficulté de l'analyse, comme on l'a vu, provient du fait qu'on travaille dans $\underline{\underline{X}}^{sym}$ et non pas dans $\underline{\underline{X}}$ pour pouvoir prendre en compte la symétrie du tenseur des contraintes. L'idée de cette deuxième approche est de se ramener à une formulation dans $\underline{\underline{X}}$ moyennant l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange pour prendre en compte la symétrie de façon faible. C'est une idée qui a été utilisée pour des problèmes stationnaires [5, 6, 107, 94]. Toutefois, notre approche diffère en ceci: ici nous cherchons une formulation approchée posée dans $\underline{\underline{X}}_h$ qui soit équivalente à la formulation approchée (1.32) posée dans $\underline{\underline{X}}_h^{sym}$, c'est à dire que nous ne partons pas de la formulation relaxée continue pour définie un nouveau problème approché, car notre but est bien de travailler in fine avec l'approximation (1.32). La relaxation de la symétrie n'est ici qu'un outil pour démontrer la convergence.

Au niveau continu, il est facile de montrer l'équivalence du problème (1.31) avec le problème suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, v, \gamma) \in \underline{\underline{X}} \times \underline{M} \times L \quad \text{tels que} \\ a(\sigma,\tau) + \widetilde{b}(v,\gamma;\tau) = 0, \qquad \forall \tau \in \underline{\underline{X}}, \\ \widetilde{b}(w,\eta;\sigma) = -(f,w), \quad \forall (w,\eta) \in \underline{M} \times L, \end{array}\right. \tag{1.40}$$

où $L = L^2(\Omega)$ et

$$\widetilde{b}(w,\eta;\tau) = b(w,\tau) + (\eta, \mathbf{as}(\tau))_L, \quad \forall (\tau, w, \eta) \in \underline{\underline{X}} \times \underline{M} \times L. \tag{1.41}$$

De la même façon, on montre qu'en choisissant

$$L_h = D(\underline{\underline{X}}_h) = \mathrm{as}(\underline{\underline{X}}_h). \tag{1.42}$$

le problème approché (1.32) est équivalent au problème suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, v_h, \gamma_h) \in \underline{\underline{X}}_h \times \underline{M}_h \times L_h \text{ tels que} \\ a(\sigma_h,\tau_h) + \widetilde{b}(v_h,\gamma_h;\tau_h) = 0, \qquad \forall \tau_h \in \underline{\underline{X}}_h, \\ \widetilde{b}(w_h,\eta_h;\sigma_h) = -(f,w_h), \quad \forall (w_h,\eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h. \end{array}\right. \tag{1.43}$$

Nous avons alors développé une nouvelle théorie abstraite qui permet d'obtenir un résultat de convergence de la solution de (1.43) vers celle de (1.40) (et par conséquent de (1.32) vers (1.31)). Je renvoie à la section 3.4 de [***RR*1**]) pour l'énoncé exact (et un peu long...) de cette théorie. Je voudrais juste souligner ici les points nouveaux par rapport à la théorie développée dans le cas scalaire. On s'appuie toujours sur une décomposition orthogonale de l'espace (ce qui ici ne pose pas de problème puisqu'on travaille dans $\underline{\underline{X}}_h$ qui admet la décomposition (1.33-1.34), ainsi que sur une "coercivité faible" et sur des propriétés d'approximation "fortes" (qui incluent le fait que L_h soit un espace d'approximation de L). Les hypothèses nouvelles par rapport au cas scalaire sont:

– Une condition inf-sup discrète uniforme "faible": on utilise la même norme discrète que

pour la coercivité,

$$\left|\begin{array}{l} \text{Il existe une constante } \beta > 0, \text{ indépendante de } h, \text{ telle que} \\ \forall\ (w_h, \eta_h) \in \underline{M_h} \times L_h,\ \exists\ \tau_h \in \underline{\underline{X_h}}\ / \\ \widetilde{b}(w_h, \eta_h; \tau_h) \geq \beta\, \|(w_h, \eta_h)\|_{(M\times L)}\, (\|\tau_h^s\|_X + |\tau_h^r|_H). \end{array}\right.$$

– Une propriété supplémentaire d'approximation dans L

$$\lim_{h\to 0} \inf_{\eta^{(h)} \in \Lambda_r^{(h)}} \left\| \gamma - \eta^{(h)} \right\|_L = 0, \quad \forall \gamma \in L,$$

où

$$\Lambda_r^{(h)} = \left\{ \eta^{(h)} \in L\ /\ d(\eta^{(h)}, \tau_h^r) = 0,\ \forall \tau_h^r \in \underline{\underline{X_h}}^r \right\}.$$

Notons que l'espace $\Lambda_r^{(h)}$ n'est pas inclu dans L_h (il est de dimension infinie).

En montrant que notre problème entre dans le cadre de cette nouvelle théorie on obtient le résultat de convergence:

Théorème 2 *Soient $k \leq 2$, $(\sigma_h, v_h, \gamma_h) \in \underline{\underline{X_h}} \times \underline{M_h} \times L_h$ la solution de (1.43) et $(\sigma, v, \gamma) \in \underline{\underline{X}} \times \underline{M} \times L$ la solution de (1.40), alors σ_h peut être décomposé en $\sigma_h = \sigma_h^s + \sigma_h^r$ et on a:*

- $(\sigma_h^s, v_h, \gamma_h) \to (\sigma, v, \gamma)$ *dans* $(H(\mathrm{div}\ ,\ \Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$,
- $\sigma_h^r \to 0$ *dans* $(L^2(\Omega))^4$.

De plus si on suppose que $(\sigma, v, \gamma) \in (H^m(\Omega))^4 \times (H^m(\Omega))^2 \times H^m(\Omega)$ et que $(\mathcal{A}\sigma, \mathrm{div}\ \sigma \in (H^m(\Omega))^4 \times (H^m(\Omega))^2$ pour $m = k+1$, alors on obtient les estimations d'erreur

$$\begin{aligned} &\|\sigma - \sigma_h^s\|_{H(\mathrm{div})} + |\sigma_h^r|_{L^2} + \|v - v_h\|_{L^2} + \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2} \leq \\ &\qquad \leq\ C\, h^m\, (|\sigma|_{H^m} + |\mathrm{div}(\sigma)|_{H^m} + |v|_{H^m} + |\mathcal{A}\sigma|_{H^m}). \end{aligned} \tag{1.44}$$

Pour démontrer ce résultat, on doit montrer que toutes les hypothèses de la théorie abstraite sont satisfaites. C'est la vérification de la condition inf-sup "faible" qui est la plus délicate et qui passe là encore par une technique de macro-éléments.

On peut remarquer que le résultat de convergence n'est énoncé que pour des éléments finis d'ordre $k \leq 2$. En fait, dans la démonstration, on doit montrer qu'une matrice $\hat{A}$, dont la dimension augmente avec k, est de rang plein. Nous avons donc écrit un algorithme qui forme cette matrice pour chaque k et qui calcule son rang et nous l'avons implémenté sur MAPLE pour $k = 0, 1, 2$. Pour un $k \geq 3$ donné, il suffirait d'utiliser de nouveau cet algorithme pour vérifier que $\hat{A}$ est de rang plein.

Analyse de stabilité et de dispersion du schéma totalement discrétisé basé sur l'élément fini $Q_1^{\mathrm{div}} - Q_0$

Le schéma correspondant à l'élément fini $Q_1^{\mathrm{div}} - Q_0$ et à une discrétisation en temps par différences finies centrées admet la formulation matricielle suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{A_h} \dfrac{\Sigma_h^{n+\frac{1}{2}} - \Sigma_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + B_h^\star V_h^n = 0 \\ C_h \dfrac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} - B_h \Sigma_h^{n+\frac{1}{2}} = F_h^{n+\frac{1}{2}} \end{array} \right. \tag{1.45}$$

Par construction la matrice C_h est diagonale, quant à la matrice $\boldsymbol{A_h}$, après avoir été condensée, elle est diagonale par blocs (avec des bloc de taille $(5,5)$). Il est alors possible d'éliminer l'inconnue associée aux contraintes et d'obtenir un schéma du même type qu'un schéma aux différences finies obtenu à partir de la formulation en déplacements:

$$\frac{V^{n+1} - 2V^n + V^{n-1}}{\Delta t^2} - \mathbb{K}_h V^n = G_h^n \tag{1.46}$$

où $\mathbb{K}_h = C_h^{-1} B_h \ \boldsymbol{A_h}^{-1} B_h^\star$ et $G_h^n = (F_h^{n+\frac{1}{2}} - F_h^{n-\frac{1}{2}})/\Delta t$. Dans [***A*8**], nous montrons que ce schéma entre dans une classe plus générale de schémas d'ordre 2, dépendant de paramètres, incluant également le schéma aux différences finies classique et le schéma aux éléments finis Q_1. Il est alors possible d'en faire une analyse classique de stabilité et de dispersion.

L'analyse de stabilité montre que la condition de stabilité du schéma $Q_1^{div} - Q_0$ est la même que celle du schéma Q_1:

$$\frac{V_p \Delta t}{h} \leq 1$$

et est moins contraignante que celle du schéma aux différences finies classique:

$$\frac{\sqrt{V_p^2 + V_s^2}\,\Delta t}{h} \leq 1$$

Par ailleurs, le schéma $Q_1^{div} - Q_0$ est toujours moins dispersif que le schéma Q_1 (avec la même condition de stabilité), que ce soit pour les ondes P ou pour les ondes S, que le schéma Q_1 (avec la même condition de stabilité). Par rapport au schéma aux différences finies, il est comparable pour les ondes P et moins dispersif pour les ondes S (qui sont les plus lentes et donc celles par rapport on fixe le nombre de points par longueur d'onde).

En conclusion, le nouveau schéma $Q_1^{div} - Q_0$ a un meilleur comportement que le schéma aux différences finies et que le schéma Q_1, en ce qui concerne stabilité et dispersion. Ces bonnes propriétés étaient tout à fait inattendues et nous sont apparues comme un bonus!... Nous n'avions en effet pas construit cet élément avec cet objectif mais plutôt pour pouvoir réaliser la condensation de masse et prendre en compte la symétrie du tenseur des contraintes de façon forte.

Chapitre 2

La méthode des domaines fictifs

Introduction

Cette méthode a été introduite il y a une trentaine d'années, pour la résolution de problèmes elliptiques [8, 7, 98] et a été développée plus récemment pour de nombreuses applications, en particulier par R. Glowinski, Y. Kuznetsov et leurs collaborateurs [87, 56, 57, 52, 55, 71, 88, 70]. Elle a ensuite été généralisée aux problèmes d'évolution [57, 58] et en particulier aux problèmes d'ondes ces dernières années dans le projet ONDES [33, 49, 104, 24], [***A8***], [***PR7***], [***PR8***]. L'idée de la méthode est de remplacer un système d'équations posé initialement dans un domaine de géométrie complexe par un système "similaire" mais posé dans un domaine d'une forme très simple (typiquement un rectangle en 2D et un parallélépipède en 3D).

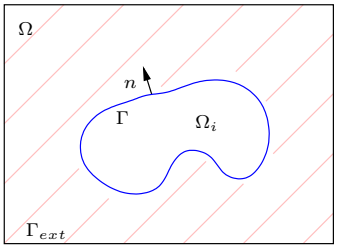


FIG. 2.1: *Géométrie du problème.*

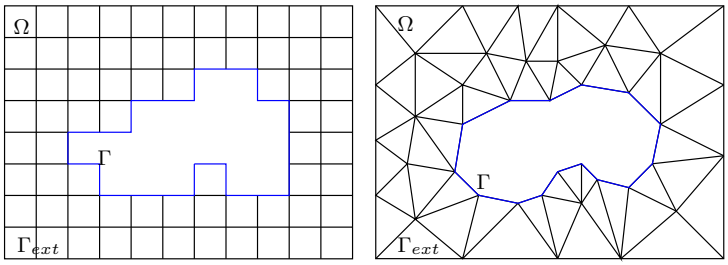


FIG. 2.2: *Gauche: maillage différences finies. Droite: maillage éléments finis*

Nous allons ici expliquer le principe de cette méthode pour des problèmes de diffraction

d'ondes. Nous supposons que le problème est posé dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contenant un obstacle de frontière Γ et borné extérieurement par la frontière Γ_{ext} (de géométrie simple, typiquement un rectangle) (voir figure 2.1). Les méthodes plus classiques d'approximation sont: (i) les méthodes de différences finies, (ii) les méthodes d'éléments finis, (iii) les méthodes d'équations intégrales (potentiels retardés).

(i) Les méthodes de différences finies sont très avantageuses du point de vue temps de calcul et du stockage car elles utilisent pour la discrétisation en espace une grille de points *régulière*. En ce qui concerne l'approximation de problèmes d'ondes, elles conduisent naturellement à des systèmes explicites en temps, dont la condition de stabilité du type $\Delta t \leq Ch$ est bien contrôlée car h est le même pour tous les éléments. Le principal inconvénient de ces méthodes est la mauvaise approximation de la géométrie (approximation en marches d'escalier) qui produit des *diffractions parasites*. Pour remédier à ce problème il faut alors utiliser un maillage assez fin, ce qui entraîne des calculs supplémentaires. Un exemple numérique qui met en évidence ces inconvénients dans le cas du problème de Maxwell à été présenté par F. Collino, F. Millot et P. Joly [33].

(ii) Les méthodes d'éléments finis sont mieux adaptées pour prendre en compte des géométries quelconques. A priori, ces méthodes conduisent à des systèmes implicites (présence d'une matrice de masse), mais des techniques de condensation de masse permettent de se ramener à des schémas explicites [111, 44, 30, 84, 23, 22]. Les inconvénients essentiels de ces méthodes par rapport aux différences finies sont les suivants: plus de données structurées et donc implémentation plus difficile et plus coûteuse en temps calcul et stockage, difficultés liées à la construction du maillage (spécialement en 3D), condition de stabilité qui peut devenir très contraignante si le maillage contient des éléments de petite taille (pour prendre en compte un détail géométrique par exemple).

(iii) Les méthodes variationnelles d'équations intégrales en temps ou potentiels retardés variationnels (voir section 1.1) permettent également de bien prendre en compte la géométrie de l'obstacle: en effet leur principe est de ramener le problème "volumique" à un problème posé sur la frontière de l'obstacle. L'avantage principal de ces méthodes par rapport aux méthodes des différences finies et des éléments finis est qu'elles permettent de travailler avec un maillage surfacique -et donc de gagner une dimension en espace- car l'inconnue vit maintenant uniquement sur la surface de l'obstacle. De plus, on n'a pas besoin d'un traitement spécial pour prendre en compte le comportement à l'infini de la solution car les conditions à l'infini sont satisfaites de manière exacte par le biais de la solution fondamentale. Ces méthodes sont donc très attractives lorsqu'on peut les utiliser, c'est à dire lorsqu'on dispose de la fonction de Green du milieu considéré. Elles ont été ainsi utilisées dans des milieux homogènes en acoustique [43, 47, 92], en électromagnétisme [110, 100, 90, 106], en élastodynamique [17, 15] ou dans des milieux homogènes à l'extérieur d'un domaine borné en utilisant un couplage avec une méthode d'éléments finis [47, 10, 9]. Cependant ces méthodes ont plusieurs inconvénients. Du fait de la nécessité de disposer de la fonction de green, on ne peut pas les utiliser dans un milieu hétérogène quelconque. Du point de vue numérique, elles sont assez délicates à implémenter (évaluations d'intégrales à noyaux singuliers...), conduisent à des schémas non locaux en temps (de type convolution discrète). Enfin, la stabilité de ces schémas a longtemps été l'objet de nombreuses questions. Il semble qu'un savoir faire ait été acquis ces dernières années et que l'on sache maintenant développer des approximations stables sous des conditions peu contraignantes. Mais on ne dispose pas d'une analyse rigoureuse de cette stabilité.

La méthode des domaines fictifs est une sorte de compromis entre les différences finies et les éléments finis. Son principe est d'étendre le domaine de géométrie quelconque Ω à

un domaine de géométrie simple C (le "domaine fictif", typiquement un rectangle ou un parallélépipède). Bien sûr, il faut encore imposer la condition aux limites sur la frontière de géométrie compliquée Γ pour que la solution du problème étendu coïncide avec la solution du problème initial sur le domaine d'origine. Cette condition aux limites est alors vue comme une contrainte, à laquelle on associe un multiplicateur de Lagrange. Comme pour les équations intégrales, cette nouvelle inconnue vit sur le bord de l'obstacle. Du point de vue numérique, la méthode est basée sur l'utilisation d'un maillage régulier, ce qui lui confère presque la même efficacité que les différences finies, mais permet de prendre en compte la géométrie de l'obstacle par l'intermédiaire d'un maillage surfacique sur l'obstacle (voir Figure 2.3).

Notons que d'autres types de méthodes de domaines fictifs existent dans la littérature, avec un multiplicateur de Lagrange *distribué* au lieu d'un multiplicateur *surfacique*, mais nous n'en parlerons pas ici (voir par exemple [55, 58]).

2.1 Description de la méthode sur un problème d'ondes modèle

Non, ce n'est pas un oubli... Cette partie ne contient aucune référence à des travaux auxquels j'aurais contribués... Il m'a cependant semblé intéressant de présenter la méthode sur un cas simple, le cas des ondes scalaire avec condition aux limites de Dirichlet, pour donner une idée des caractéristiques de la méthode pour des problèmes d'onde, et ainsi faciliter la lecture des sections suivantes, consacrées à des applications de la méthode à des cas plus complexes.

2.1.1 La formulation continue

Pour présenter les principes sur lesquels repose la méthode des domaines fictifs, nous considérons un problème de diffraction d'une onde acoustique par un obstacle en dimension deux, avec une condition aux limites de Dirichlet sur la frontière de l'obstacle. Ce cas, traité dans [33], est le plus simple (en ce qui concerne les ondes) et permet donc d'illustrer aisément les propriétés de la méthode. Le problème initial est posé dans le domaine Ω (cf Fig. 2.2), borné par une frontière Γ_{ext} et contenant un obstacle Ω_i de frontière Γ, sur lequel est posée une condition aux limites de Dirichlet. La condition aux limites sur Γ_{ext} n'a pas d'importance et nous supposerons pour simplifier que c'est une condition de Dirichlet.Le principe de la méthode des domaines fictifs est d'étendre la solution u du problème au domaine $C = \overline{\Omega} \cup \overline{\Omega_i}$ puis de prendre en compte la condition aux limites sur Γ de façon faible, en introduisant un multiplicateur de Lagrange sur Γ (voir Figure 2.3). Notre problème de diffraction modèle

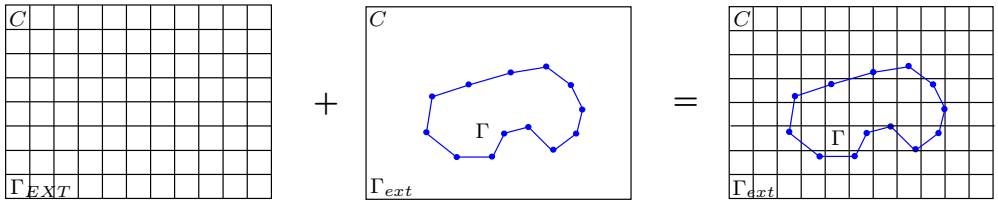


FIG. 2.3:

s'écrit : trouver u tel que

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_{ext} \end{array}\right. \tag{2.1}$$

auquel il faut rajouter des conditions initiales

$$u(t=0) = u_0, \qquad \partial_t u(t=0) = u_1 \tag{2.2}$$

On suppose que u_0, u_1 (resp. f) ont des supports contenus dans Ω (resp. $\Omega \times \mathbb{R}^+$). Une formulation variationnelle "classique" en vue d'utiliser la méthode des éléments finis dans Ω consisterait à se placer dans l'espace $H_0^1(\Omega)$, espace qui "contient" la condition aux limites et donc dépend de la géométrie de Γ. L'idée est de remplacer cette formulation par une formulation posée dans $H^1(C)$ qui n'en dépend plus. Nous voyons ici que le fait qu'il s'agisse d'une condition aux limites essentielle (i.e. contenue dans l'espace) est essentiel (!) pour faire marcher la méthode. Nous y reviendrons dans les paragraphes suivants. Nous étendons donc la solution u à l'intérieur Ω_i de sorte que cette extension soit dans $H^1(C)$ ce qui impose la continuité de la trace de u à travers Γ. Le problème intérieur s'écrit donc:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_i \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Notons $\widetilde{u}$ la distribution coïncidant avec u dans $\Omega \cup \Omega_i$. On peut réécrire finalement le problème au sens des distributions:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = -\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma \delta_\Gamma, \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(C)$$

De même que pour les équations intégrales, on introduit alors une nouvelle inconnue $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$:

$$\lambda = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma$$

Jusqu'ici la démarche est analogue à celle des équations intégrales. On introduit la même inconnue surfacique et on réécrit le problème au sens des distributions:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = -\lambda, \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(C) \tag{2.4}$$

La condition aux limites n'a pas encore été prise en compte. C'est ici que les deux méthodes diffèrent. Avec une méthode d'équations intégrales, on suppose la solution fondamentale G connue (ce qui est le cas sur notre problème modèle posé en milieu hompogène mais qui en général n'est pas le cas pour un milieu plus complexe), ce qui permet d'avoir une représentation intégrale de la solution u de (2.4) en fonction du potentiel λ (ici une représentation en potentiel de simple couche):

$$u = G \overset{(x,t)}{\star} \lambda$$

On exprime ensuite la condition aux limites, ici en prenant la trace sur Γ de l'expression précédente et on obtient ainsi l'équation intégrale posée sur Γ. Avec la méthode des domaines fictifs, on garde u et λ comme inconnues et on considère la condition aux limites comme une contrainte:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = -\lambda, \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(C) \\ &u = 0, \quad \text{sur} \ \ \Gamma \end{aligned} \tag{2.5}$$

Posons $X = H_0^1(C)$ et $L = H^{-1/2}(\Gamma)$. La formulation consiste alors à

$$\begin{cases} \text{Trouver} \ \ (u(t), \lambda(t)) \in X \times L \\ \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(u(t), v)_C + a_C(u(t), v) + \boxed{b_\Gamma(\lambda(t), v)} = 0, \quad \forall v \in X \\ \\ \boxed{b_\Gamma(\mu, u(t)) = 0}, \qquad\qquad\qquad\qquad \forall \mu \in L \end{cases} \tag{2.6}$$

avec

$$\begin{cases} (u, v)_C = \displaystyle\int_C u \, v \, dx \\ \\ a_C(u, v) = \displaystyle\int_C \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ \\ b_\Gamma(\, \mu, v) = \displaystyle\int_\Gamma \mu \, v \, d\gamma \end{cases}$$

Sans les termes encadrés, il s'agit de la formulation correspondant à la propagation dans C en l'absence d'obstacle. C'est le terme b_Γ qui prend en compte le couplage avec l'obstacle, le seul à recalculer si l'obstacle change de géométrie (problèmes inverses, optimisation de forme etc...). Il est facile de voir qu'on a toujours la conservation d'énergie classique avec cette formulation:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_C^2 + \frac{1}{2} a_C(u, u)\right) = 0 \tag{2.7}$$

On peut également aisément montrer que le problème (2.6) est bien posé, l'existence du multiplicateur λ découlant de la condition inf-sup satisfaite par la forme b_Γ:

$$\exists k > 0, \ \inf_{\mu \in L} \sup_{v \in X} \frac{b_\Gamma(\mu, v)}{\|v\|_X \|\mu\|_L} \geq k \tag{2.8}$$

2.1.2 Semi-discrétisation en espace

Introduisons $X_h \subset X$ et $L_H \subset L$ deux espaces de dimensions finies (dim $X_h = N$ et dim $L_H = n$), satisfaisant les propriétés d'approximation usuelles:

$$\begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \inf\limits_{v_h \in X_h} \|v - v_h\|_X = 0, \quad \forall v \in X, \\ \lim\limits_{h \to 0} \inf\limits_{\mu_H \in L_H} \|\mu - \mu_H\|_L = 0, \quad \forall \mu \in L. \end{cases} \tag{2.9}$$

En pratique les paramètres h et H désigneront la taille des éléments des maillages volumique (uniforme) et surfacique. On approche le problème (2.6) par

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \ (u_h(t),\lambda_H(t)) \in X_h \times L_H \\ \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(u_h(t),v_h)_C + a_C(u_h(t),v_h) + \ \ b_\Gamma(\lambda_H(t),v_h) \ \ = 0, \quad \forall v_h \in X_h \\ \\ \ \ b_\Gamma(\mu_H,u_h(t)) = 0 \quad , \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \mu_H \in L_H \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Il est immédiat de constater que, comme pour le problème continu, on a la conservation d'une energie discrète:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_h}{\partial t}\right\|_C^2 + \frac{1}{2}a_C(u_h,u_h)\right) = 0 \tag{2.11}$$

Si on suppose que les espaces X_h et L_H vérifient une:

Condition inf-sup discrète non-uniforme

$$\exists k_h > 0, \ \inf_{\mu_H \in L_H} \sup_{\tau_h \in X_h} \frac{b_\Gamma(v_h,\mu_H)}{\|v_h\|_X \|\mu_H\|_L} \geq k_h \tag{2.12}$$

alors le problème approché (2.10) est bien posé. Pour assurer la convergence de la méthode, cette condition ne suffit pas et on doit supposer une:

Condition inf-sup discrète uniforme

$$\exists k > 0, \ (k \text{ indép de } h), \quad \inf_{\mu_H \in L_H} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b_\Gamma(v_h,\mu_H)}{\|v_h\|_X \|\mu_H\|_L} \geq k \tag{2.13}$$

Convergence de la méthode

Pour montrer la convergence de la solution du problème semi-discrétisé (2.10) vers la solution du problème (2.6), et obtenir des estimations d'erreur, le principe est le suivant. On se ramène à l'étude d'un problème stationaire mixte en introduisant un opérateur d'interpolation. Par des techniques d'énergie, on estime ensuite l'erreur sur le problème dépendant du temps en fonction de l'erreur d'interpolation.

Pour le problème modèle, on définit l'opérateur d'interpolation $\Pi_h(u,\lambda) = (\Pi_h u, \Pi_h \lambda)$:

$$\left\{\begin{array}{l} a(\Pi_h u - u, v_h) + b_\Gamma(\Pi_h \lambda - \lambda, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in X_h \\ \\ b_\Gamma(\mu_H, \Pi_h u - u) = 0, \quad \forall \mu_H \in L_H \end{array}\right. \tag{2.14}$$

On suppose la condition inf-sup discrète uniforme (2.13) satisfaite. Grâce à la coercivité de $a(.,.)$, la théorie des mixtes de Babuska-Brezzi [27] permet alors de montrer que cet opérateur est bien défini et d'obtenir des estimations d'erreur d'interpolation: pour tout $(u,\lambda) \in X \times L$, il existe une unique solution $(\Pi_h u, \Pi_h \lambda) \in X_h \times L_H$ de (2.14) et on a

$$\|\Pi_h u - u\|_X + \|\Pi_h \lambda - \lambda\|_L \leq C\left(\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{\mu_H \in L_H} \|\lambda - \mu_H\|_L\right) \tag{2.15}$$

Pour montrer la convergence du problème en temps, on écrit le problème satisfait par l'erreur $(u-u_h, \lambda-\lambda_H)$ (obtenu en faisant la différence entre (2.10) et (2.6) pour $v=v_h$ et $\mu=\mu_H$)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}(u-u_h, v_h) + a(u-u_h, v_h) + b_\Gamma(\lambda-\lambda_H, v_h) = 0 \\ b_\Gamma(\mu_H, u-u_h) = 0 \end{cases}$$

En exprimant cette erreur en fonction de l'erreur d'interpolation:

$$\begin{cases} u-u_h = (u-\Pi_h u) + (\Pi_h u - u_h) \\ \\ \lambda-\lambda_H = (\lambda-\Pi_h\lambda) + (\Pi_h\lambda-\lambda_H) \end{cases}$$

on obtient le problème suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}(\Pi_h u-u_h, v_h) + a(\Pi_h u-u_h, v_h) + b_\Gamma(\Pi_h\lambda-\lambda_H, v_h) = \dfrac{d^2}{dt^2}(\Pi_h u-u, v_h) \\ b_\Gamma(\mu_H, \Pi_h u-u_h) = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Il est alors facile d'obtenir l'estimation d'énergie:

$$E_h^{1/2}(t) \leq E_h^{1/2}(0) + \int_0^t \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Pi_h u - u) \right\|_{L^2}(s)ds \tag{2.17}$$

où E_h est l'énergie associée au système (2.16):

$$E_h(t) = \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial}{\partial t}(\Pi_h u - u_h) \right\|_C^2 + \frac{1}{2}a_C(\Pi_h u - u_h, \Pi_h u - u_h)$$

L'estimation (2.17) donne:

$$\begin{cases} \left\| \dfrac{\partial}{\partial t}(u-u_h) \right\|_{L^2} \leq \left\| \dfrac{\partial}{\partial t}(u-\Pi_h u) \right\|_{L^2} + E_h^{1/2}(0) + \displaystyle\int_0^t \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Pi_h u - u) \right\|_{L^2}(s)ds \\ \|u-u_h\|_X \leq \|u-\Pi_h u\|_X + E_h^{1/2}(0) + \displaystyle\int_0^t \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Pi_h u - u) \right\|_{L^2}(s)ds, \end{cases} \tag{2.18}$$

ce qui montre la convergence de u_h vers u en norme X. Pour obtenir la convergence du multiplicateur, on réutilise la condition inf-sup discrète uniforme (2.13) appliquée à $\mu_H = \Pi_h\lambda - \lambda_H$. Il existe donc un $v_h \in X_h$ tel que

$$k\,\|v_h\|_X\,\|\Pi_h\lambda-\lambda_H\|_L \leq b_\Gamma(\Pi_h\lambda-\lambda_H, v_h)$$

Le terme de droite peut se réexprimer en utilisant la première équation de (2.16), comme:

$$b_\Gamma(\Pi_h\lambda-\lambda_H, v_h) = \frac{d^2}{dt^2}(\Pi_h u-u, v_h) - \frac{d^2}{dt^2}(\Pi_h u-u_h, v_h) - a(\Pi_h u-u_h, v_h)$$

La continuité de a sur X permet alors d'estimer:

$$\|\Pi_h\lambda-\lambda_H\|_L \leq \frac{C}{k}\left(\left\|\partial_{tt}^2(\Pi_h u-u)\right\|_{L^2} + \left\|\partial_{tt}^2(\Pi_h u-u_h)\right\|_{L^2} + \|\Pi_h u-u_h\|_X\right)$$

le terme de droite étant constitué de termes dont on a déjà montré qu'ils tendent vers zéro (en supposant suffisamment de régularité en temps pour pouvoir réappliquer les estimations précédentes aux dérivées en temps).

Remarque 1 – *Une première remarque est que le point clé pour obtenir la convergence est la condition inf-sup discrète uniforme. C'est cette condition qu'il est souvent difficile de vérifier en pratique. Nous allons revenir plus loin sur ce point et nous verrons qu'une condition de compatibilité des maillages volumiques et surfaciques (du type $H \geq Ch$) est suffisante pour satisfaire cette condition.*

– *L'erreur de convergence est contrôlée par l'erreur de projection elliptique qui elle-même est controlée par l'erreur d'approximation*

$$\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{\mu_H \in L_H} \|\lambda - \mu_H\|_L$$

Cette erreur dépend des espaces d'approximation qu'on choisit et en pratique donne des estimations en fonction des pas de maillage h et H. Les exposants dépendent de la régularité de la solution (u, λ), or il est clair par la définition même de u, obtenue comme un prolongement dans C, que u ne peut pas être "très régulière" (pas H^2 puisque elle a un saut de dérivée normale) ce qui va limiter l'ordre de convergence de la méthode. Nous reviendrons également sur ce point en précisant l'ordre de convergence obtenu pour un choix particulier d'espaces d'éléments finis.

Approximation par éléments finis

Considérons par exemple comme espace d'approximation de X l'espace X_h des éléments finis Q_1 basé sur un maillage uniforme du rectangle C en carrés de côté h et comme espace d'approximation L_H de $H^{-1/2}(\Gamma)$ l'espace des fonctions constantes par éléments, basé sur un maillage surfacique de Γ, d'éléments de tailles H_j, avec $H = \max_j H_j$.

Sur la condition inf-sup. Avec ce choix d'espaces, il a été montré par deux techniques différentes qu'une condition du type

$$H \geq Ch \tag{2.19}$$

était suffisante pour avoir la condition inf-sup discrète uniforme (2.13). La démonstration très technique de Girault-Glowinski [52] utilise l'existence d'un opérateur de Clément [29], qui existe dans ce cas particulier mais n'existe pas toujours (par exemple pour l'approximation de $H(\,\mathrm{div})$ ou de $H(\mathrm{rot})$), ce qui ne permet pas de la généraliser. Par contre cette technique a l'avantage qu'elle donne une valeur de la constante C, il est plus précisément montré que dès que le pas du maillage de surface est trois fois supérieur à celui du maillage volumique alors la condition (2.13) est satisfaite. L'autre technique de démonstration est dûe à Babuska [8] et se généralise plus facilement à d'autres situations, mais a pour inconvénient de ne pas préciser à partir de quel rapport entre les pas des maillages cette condition est satisfaite. L'idée de la

démonstration est d'utiliser le fait que dans les espaces de discrétisation, les fonctions sont un peu plus régulières. Donnons un aperçu des étapes de cette démonstration:

1. Pour démontrer la condition inf-sup continue (2.8), on montre l'existence d'un relèvement $\mathcal{R}$ continu de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^1(C)$, qui à tout $\mu \in H^{-1/2}(\Gamma)$ associe $v = \mathcal{R}\mu \in H^1(C)$ tel que

   $$\|v\|_X \leq C\|\mu\|_L \tag{2.20}$$

   $$b_\Gamma(\mu, v) \geq C\|\mu\|_L^2 \tag{2.21}$$

   Ces deux inégalités donnent immédiatement la condition inf-sup continue

   $$b_\Gamma(\mu, v) \geq k\|\mu\|_L\|v\|_X$$

2. Des résultats de régularité montrent que cet opérateur reste continu de $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ dans $H^{1+s}(C)$ pour tout $0 \leq s < 1/2$, donc si $\mu \in H^{-1/2+s}(\Gamma)$, $v = \mathcal{R}\mu \in H^{1+s}(C)$ et

   $$\|v\|_{1+s,C} \leq C\|\mu\|_{-1/2+s,\Gamma} \tag{2.22}$$

3. On remarque que pour $0 \leq s < 1/2$, on a $L_H \subset H^{-1/2+s}(\Gamma)$. On peut donc appliquer les résultats précédents: à tout $\mu_H \in L_H$ on associe $v^H = \mathcal{R}\mu_H \in H^{1+s}(C)$. Si v^H était dans X_h ce serait bien sûr terminé, mais il n'y est pas... Pour n'importe quel élément $w_h \in X_h$, on a cependant:

   $$b_\Gamma(\mu_H, w_h) = b_\Gamma(\mu_H, v^H) + b_\Gamma(\mu_H, w_h - v^H)$$

   Si on pouvait définir un opérateur F_h de X dans X_h tel que

   $$b_\Gamma(\eta_H, F_h v - v) = 0, \quad \forall \eta_H \in L_H$$

   le deuxième terme disparaitraît et ce serait gagné! C'est la construction d'un tel opérateur pour le choix d'espaces $Q_1 - P_0$ qui est réalisée dans Girault-Glowinski [52]. Cependant cette construction est très compliquée et pas évidente à généraliser. Dans Babuska [8], au lieu de construire un tel opérateur, on utilise un opérateur P_h tel que le terme $b_\Gamma(\eta_H, P_h v - v)$ soit petit au lieu d'être nul.

4. On suppose qu'il existe un opérateur (par exemple interpolation ou projection orthogonale) P_h continu de X dans X_h, et tel que si $v \in H^{1+s}(C)$, on a les estimations d'erreur:

   $$\|v - P_h v\|_X \leq Ch^s \|v\|_{1+s,C} \tag{2.23}$$

5. L'idée est maintenant de décomposer:

   $$b_\Gamma(\mu_H, P_h v^H) = b_\Gamma(\mu_H, v^H) + b_\Gamma(\mu_H, P_h v^H - v^H)$$

   et de montrer que sous certaines conditions le deuxième terme est assez "petit" pour qu'on ne perde pas l'estimation qu'on a déjà sur le premier terme. En effet, d'après (2.21) on a

   $$b_\Gamma(\mu_H, v^H) \geq C_1\|\mu_H\|_L^2$$

D'autre part, par la continuité de b_Γ sur $L \times X$:

$$\begin{aligned}
\left|b_\Gamma(\mu_H, P_h v^H - v^H)\right| &\leq \|\mu_H\|_{1/2,\Gamma} \left\|P_h v^H - v^H\right\|_X \\
\text{régularité de } v^H \text{ + (2.23)} &\leq C \|\mu_H\|_{1/2,\Gamma} h^s \|v\|_{1+s,C} \\
\text{continuité de } \mathcal{R} \text{ (2.22)} &\leq C \|\mu_H\|_{1/2,\Gamma} h^s \|\mu_H\|_{-1/2+s,\Gamma} \\
\text{Inégalités inverses} &\leq C_2 \left(\frac{h}{H}\right)^s \|\mu_H\|^2_{1/2,\Gamma}
\end{aligned}$$

En regroupant on obtient finalement

$$b_\Gamma(\mu_H, P_h v^H) \geq (C_1 - C_2 \left(\frac{h}{H}\right)^s) \|\mu_H\|^2_{1/2,\Gamma}$$

Si le rapport h/H est assez petit, le terme $C_1 - C_2 \left(\frac{h}{H}\right)^s$ est strictement positif, ce qui montre qu'il existe une constante $K > 0$ telle que dès que

$$H \geq Kh$$

on a $(C_1 - C_2 \left(\frac{h}{H}\right)^s) \geq C_3 > 0$, ce qui implique

$$b_\Gamma(\mu_H, P_h v^H) \geq C_3 \|\mu_H\|^2_{1/2,\Gamma} \geq C \|\mu_H\|_{1/2,\Gamma} \left\|v^H\right\|_X$$

la dernière inégalité provenant de la continuité de $\mathcal{R}$ (2.20). Pour conclure, on utilise la continuité de P_h:

$$b_\Gamma(\mu_H, P_h v^H) \geq C_3 \|\mu_H\|^2_{1/2,\Gamma} \geq C \|\mu_H\|_{1/2,\Gamma} \left\|P_h v^H\right\|_X$$

ce qui donne la condition inf-sup discrète uniforme. ■

Sur l'ordre de convergence. On a vu (voir aussi remarque 1) que l'erreur de convergence est contrôlée par l'erreur d'approximation

$$\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{\mu_H \in L_H} \|\lambda - \mu_H\|_L$$

Or les erreurs d'approximation dépendent de la régularité de la solution et du fait que u admette un saut de dérivée normale à travers Γ, la régularité maximale est:

$$u(t) \in H^{3/2-\varepsilon}(C), \quad \lambda(t) \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \forall t > 0$$

ce qui donne des estimations du type [52]:

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_1 &= O(h^{1/2-\varepsilon}) \\
\|u - u_h\|_0 &= O(h^{1-\varepsilon}) \\
\|\lambda - \lambda_H\|_{-1/2} &= O(H)
\end{aligned}$$

La méthode est donc d'ordre 1.

Formulation matricielle du problème semi-discrétisé. En introduisant des bases $(w_j)_{j=1,N}$ de X_h et $(\varphi_i)_{i=1,n}$ de L_H, et les composantes $U_h = (U_j)_{j=1,N}$ et $\Lambda_H = (\Lambda_i)_{i=1,n}$ sur ces bases, on peut réécrire le problème semi-discrétisé sous forme matricielle:

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_h \dfrac{d^2U_h}{dt^2} + A_h U_h - B_h^t \Lambda_H = 0 & (a) \\ B_h U_h = 0 & (b) \end{array} \right. \tag{2.24}$$

où M_h est la matrice de masse associée au produit scalaire (u_h, v_h) et représente un opérateur identité discrète, A_h la matrice de rigidité associée à la forme bilinéaire $a(u_h, v_h)$ et représente un Laplacien discret, B_h est la matrice de couplage associée à la forme bilinéaire $b_\Gamma(\mu_H, v_h)$ (qu'on devrait en toute rigueur noter $B_{h,H}$...) et représente un opérateur de trace discrète. Nous supposerons en fait que M_h est la matrice de masse condensée, c'est à dire calculée à l'aide de formules de quadrature, ce qui la rend diagonale.

La deuxième équation de (2.24) peut être remplacée par une équation sur Λ_H. Il suffit pour cela de multiplier (a) par $B_h M_h^{-1}$ et d'utiliser le fait que

$$B_h U_h = 0 \Rightarrow B_h \frac{d^2}{dt^2} U_h = 0 \tag{2.25}$$

pour obtenir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_h \dfrac{d^2U_h}{dt^2} + A_h U_h - B_h^t \Lambda_H = 0 & (a) \\ Q_h \Lambda_H = B_h M_h^{-1} A_h U_h & (b) \end{array} \right. \tag{2.26}$$

où on a posé $Q_h = B_h M_h^{-1} B_h^t$. Nous reviendrons plus loin sur les propriétés de la matrice Q_h.

2.1.3 Discrétisation totale

On discrétise en temps à l'aide d'un schéma saute-mouton :

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_h \dfrac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h U_h^n - B_h^t \Lambda_H^n = 0 & (a) \\ B_h U_h^n = 0 & (b) \end{array} \right. \tag{2.27}$$

Comme pour le schéma semi-discrétisé, on peut remplacer la deuxième équation par un système en Λ_H^n, ce qui devient:

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_h \dfrac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h U_h^n - B_h^t \Lambda_H^n = 0 & (a) \\ Q_h \Lambda_H^n = B_h M_h^{-1} A_h U_h^n & (b) \end{array} \right. \tag{2.28}$$

Si la matrice de masse M_h a été condensée, ce schéma est explicite: si on suppose connus $U_h^k, k \leq n$ on calcule d'abord Λ_H^n en résolvant le système (2.28)-(b) puis on réactualise U_h^{n+1} à l'aide de (2.28)-(a). On peut remarquer que sans le terme Λ_H^n, la relation (a) est exactement le schéma qu'on aurait écrit pour simuler la propagation dans C en l'absence d'obstacle (en utilisant des éléments finis Q_1) et que le terme en Λ_H^n apparaît comme un terme source.

Stabilité

Il est facile de voir que la présence de l'obstacle ne modifie pas l'énergie discrète conservée. En effet, en multipliant (2.27)-(a) par $(U_h^{n+1} - U_h^{n-1})/(2\Delta t)$, on obtient

$$\frac{E_h^{n+1/2} - E_h^{n-1/2}}{\Delta t} = \left(B_h^t \Lambda_H^n, \frac{U_h^{n+1} - U_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)$$

où

$$E_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} \right\|_{M_h}^2 + \frac{1}{2}(A_h U_h^{n+1}, U_h^n)$$

$\|.\|_{M_h}$ désignant la norme associée à la matrice M_h. Cette identité d'énergie peut se réécrire:

$$\frac{E_h^{n+1/2} - E_h^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} \left((\Lambda_H^n, B_h U_h^{n+1}) - (\Lambda_H^n, B_h U_h^{n-1}) \right)$$

et on voit que, grâce à (2.27)-(a) le second membre disparaît. Par conséquent, le schéma est stable sous la condition CFL "habituelle" du schéma Q_1:

$$\frac{\Delta t^2}{4} \sup_{V \neq 0} \frac{(A_h V, V)}{(M_h V, V)} < 1 \Longleftrightarrow \frac{\Delta t^2}{4} \left\| M_h^{-1/2} A_h M_h^{-1/2} \right\|_2 < 1 \tag{2.29}$$

et qui en milieu homogène s'écrit (ici $c = 1$!)

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq 1$$

Propriétés de la matrice Q_h

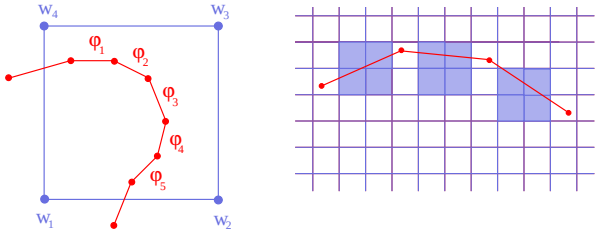
Le surcoût de la méthode des domaines fictifs par rapport à un schéma aux différences finies provient du système à résoudre (2.28)-(b) à chaque itération pour déterminer Λ_H^n.

La première question qu'on peut se poser est de savoir si la matrice Q_h est toujours inversible? Elle est clairement symétrique et positive. Nous avons vu que le problème semi-discrétisé était bien posé si la condition inf-sup discrète non-uniforme (2.12) était satisfaite et il en va de même pour le schéma totalement discrétisé. En pratique, on veut bien sûr assurer la convergence de notre schéma et on cherchera donc à imposer la condition inf-sup discrète uniforme (2.13), ce qui est assuré si on choisit un pas de maillage surfacique H "suffisamment grand" par rapport au pas de maillage volumique h. En pratique, il suffit de choisir:

$$H \geq 1.2h$$

En fait on peut voir facilement qu'une telle condition de compatibilité est assez naturelle pour avoir une matrice inversible: on va considérer 2 cas où on sait conclure facilement a l'inversibilité ou non de la matrice. Remarquons tout d'abord que Q_h est inversible si et seulement si B_h^t est injective, ce qui est encore équivalent à

$$\int_\Gamma \mu_H v_h d\gamma = 0, \ \forall v_h \in X_h \qquad \Longrightarrow \mu_H = 0$$



$\mathcal{Q}_h$ n'est pas inversible $\mathcal{Q}_h$ est inversible

FIG. 2.4: *Deux cas opposés: à gauche le pas du maillage de surface est trop petit par rapport au pas du maillage volumique. À droite,* $H > \sqrt{2}h$.

– Q_h **inversible (voir figure 2.4-droite)**. On suppose que pour tout élément du maillage surfacique Γ_i, $i = 1, N$, il existe une fonction de base $w_{j(i)}$ telle que

$$\text{supp } w_{j(i)} \cap \Gamma \subset \text{ supp } \varphi_i \quad \text{ et } \quad \text{supp } w_{j(i)} \cap \text{ supp } \varphi_k = \emptyset \quad \forall k \neq i$$

Soit $\mu_H = \sum \mu_l \, \varphi_l$ appartenant au noyau de B^t:

$$\int_\Gamma \mu_H w_m d\gamma = 0, \ \forall m = 1, N$$

En particulier pour toute fonction $w_{j(i)}$, $i = 1, n$ et par conséquent:

$$\mu_i \int_{\Gamma_i} w_{j(i)} d\gamma = 0 \Longrightarrow \mu_i = 0, \qquad \forall i = 1, n$$

– Q_h **non inversible (voir figure 2.4-gauche)**. On suppose cette fois qu'il existe un élément K du maillage volumique qui contient au moins 5 éléments de maillage surfacique. Notons w_i, $i = 1, 4$ les 4 fonctions de base associées aux quatre sommets de l'éléments et φ_j $j = 1, 5$ les fonctions de base associées aux 5 élements surfaciques Γ_j. Une fonction $\mu_H = \sum_{j=1}^{5} \mu_j \varphi_j$ appartient au noyau si

$$\sum_{j=1}^{5} \mu_j \int_{\Gamma_j} w_i d\gamma = 0, \quad \forall i = 1, 4$$

Il s'agit donc d'un système homogène de 4 équations à 5 inconnues. Il est donc clair qu'on peut trouver des $\mu_H \neq 0$ appartenant au noyau.

Une fois assurés que la matrice Q_h est inversible, il est naturel de s'interroger sur le coût de la résolution du système linéaire en Λ_H. Rappelons que par défnition, $Q_h = B_h M_h^{-1} B_h^t$ ce qui montre en particulier qu'il s'agit d'une matrice de taille (n, n) où n est la dimension de L_H et représente donc donc le nombre de degrés de liberté sur l'obstacle qui est bien sûr beaucoup plus faible que la dimension N de X_h. D'autre part il est assez facile de voir que c'est une matrice assez creuse de par la structure de la matrice B:

$$B_{ij} = \int_\Gamma w_j \varphi_i d\gamma = \int_{\Gamma_i} w_j d\gamma, \quad \forall i = 1, n, \quad \forall j = 1, N$$

Dès que le support de w_j n'intersecte pas Γ_i, le terme B_{ij} est nul.

En conclusion de cette étude sur le problème modèle de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet, la méthode des domaines fictifs a les mêmes facilités d'implémentation et la même efficacité qu'une méthode de différences finies. Son surcoût est celui de la résolution d'un "petit" système linéaire creux. Avec le choix d'éléments finis $Q_1 - P_0$, cette méthode est d'ordre 1, comme celle des différences finies. Elle est donc moins précise qu'une méthode d'éléments finis Q_1 (ordre 2), mais a priori plus rapide et plus facile à implémenter (surtout en 3D). On peut se demander ce qu'on a réellement gagné par rapport à une méthode de différences finies, puisque les deux méthodes sont d'ordre 1. Une comparaison entre les deux méthodes a été menée dans [33] pour un problème de diffraction par un cone-sphère en 2D. Les solutions approchées ont été calculées par les deux méthodes pour trois valeurs de h correspondant environ à 10, 20 et 40 points par longueur d'onde (de l'onde incidente). Pour les domaines fictifs, le rapport H/h a été maintenu constant. Les courbes représentant les solutions approchées montrent que la méthode des domaines fictifs a déjà convergé avec 10 points par longueur d'onde alors qu'avec 40 points par longueur d'onde la méthode des différences finies présente encore des oscillations autour de la solution "exacte", dues aux diffractions parasites provoquées par l'approximation de la géométrie en marches d'escalier. Dans ce qui suit, nous présentons d'autres applications de la méthode des domaines fictifs. Nous verrons qu'il n'est pas toujours évident (ou même possible) de pousser aussi loin l'étude que dans le cas simple du problème modèle.

2.2 Domaines fictifs pour les ondes élastiques: application au contrôle non destructif et à la géophysique

Cette section entre dans le cadre des travaux sur les méthodes numériques pour des problèmes de contrôle non destructif et de propagation sismique dont la problématique a été présentée à la section 1.4.

2.2.1 Condition aux limites de surface libre [*A*8]

Ce travail a été mené en collaboration avec P. Joly et C. Tsogka et a fait l'objet d'une publication [***A*8**]. On s'intéresse à un problème de diffraction d'ondes élastiques par une fissure (ou une topographie, mais nous nous restreignons ici pour la présentation au cas de la fissure). Nous supposons ici que la fissure est modélisée par une condition de surface libre. On cherche donc à déterminer le déplacement $u(x,t)$ solution du problème (1.3) que nous réécrivons:

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}\sigma(u) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

auquel on ajoute les conditions initiales (1.4) et la loi de comportement du matériau supposé élastique linéaire (1.5). Comme dans la section précédente 2.1, on suppose que le domaine Ω est borné par une frontière extérieure Γ_{ext} sur laquelle on suppose par exemple une condition de Dirichlet homogène. On note C le rectangle $C = \Omega \cup \Gamma$. Pour la formulation en déplacement (1.3), la condition aux limites sur l'obstacle n'est plus une condition de Dirichlet mais une condition de type Neumann, c'est à dire une condition aux limites naturelle et non pas essentielle. Or la méthode des domaines fictifs ne s'applique que si la condition aux limites est

contenue dans l'espace fonctionnel, qu'on peut alors considérer comme une contrainte. Pour traiter un problème de type Neumann, on doit alors changer de formulation. Nous avons ici le choix entre une formulation en déplacement-contraintes, en vitesse-contraintes ou en contraintes seules. Nous avons fait le choix de la formulation du premier ordre en vitesse-contraintes (1.6), c'est à dire : trouver (v, σ) tels que

$$(1.6) \quad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{div}\sigma = f & \text{dans } \Omega \\ A \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(v) & \text{dans } \Omega \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Introduisons $\widetilde{v}$ et $\widetilde{\sigma}$ les distributions dans C associées à v et σ. Le problème peut se réécrire au sens des distributions

$$\begin{cases} \varrho \dfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} - \mathrm{div}\ \widetilde{\sigma} & = f & \text{dans } C \\ A \dfrac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial t} - \varepsilon(\widetilde{v}) & = \lambda\ \delta_\Gamma & \text{dans } C \end{cases}$$

où cette fois-ci le multiplicateur représente:

$$\lambda = [v] = v^+ - v^-$$

On considère la condition aux limites de surface libre comme une contrainte:

$$\widetilde{\sigma}\vec{n} = 0 \ \text{ sur } \Gamma$$

La formulation domaines fictifs pour ce problème s'écrit :

$$(2.30) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\widetilde{\sigma}, \widetilde{v}, \widetilde{\lambda}) \in \underline{\underline{X}}^{sym} \times \underline{M} \times \mathcal{G} \text{ tels que :} \\ \dfrac{d}{dt} a(\widetilde{\sigma}, \tau) + b(\tau, \widetilde{v}) - s(\tau, \lambda) = 0, & \forall \tau \in \underline{\underline{X}}^{sym} \quad (i) \\ \dfrac{d}{dt} c(\widetilde{v}, w) - b(\widetilde{\sigma}, w) = (f, w), & \forall w \in \underline{M} \quad (ii) \\ s(\widetilde{\sigma}, \mu) = 0, & \forall \mu \in \mathcal{G} \quad (iii) \end{cases}$$

où $\mathcal{G} = (H^{1/2}(\Gamma))^2$, les formes bilinéaires $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot), c(\cdot,\cdot)$ ayant été définies par (1.9) (avec C au lieu de Ω), et

$$s(\tau, \lambda) = \langle \tau\vec{n}, \lambda \rangle_\Gamma \qquad \forall (\tau, \lambda) \in \underline{\underline{X}}^{sym} \times \mathcal{G}.$$

Pour la semi-discrétisation en espace de ce problème, nous avons choisi les espaces d'approximation $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$ et $\underline{M_h}$ correspondant à l'élément fini $Q_1^{div} - Q_0$ définis par (1.28) pour $k = 0$ et pour l'espace du multiplicateur:

$$(2.31) \qquad \mathcal{G}_H = \left\{ \mu_H \in (C^0(\Gamma))^2, / \forall S_j \in \mathcal{T}_H,\ \mu_H \big|_{S_j} \in (P_1(S_j))^2 \right\}$$

où $\mathcal{T}_H$ est un maillage de Γ constitué de segments S_j de taile H_j, et $H = \sup_j H_j$. La discrétisation en temps est réalisée à l'aide de différences finies centrées, ce qui conduit finalement à la formulation matricielle suivante:

$$(2.32) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{A_h} \dfrac{\Sigma_h^{n+\frac{1}{2}} - \Sigma_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + B_h^\star V_h^n - S_h^\Gamma \Lambda_H^n = 0 \\ C_h \dfrac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} - B_h \Sigma_h^{n+\frac{1}{2}} = F_h^{n+\frac{1}{2}} \\ (S_h^\Gamma)^\star \ \boldsymbol{A_h}^{-1} S_h^\Gamma \Lambda_H^{n+1} = (S_h^\Gamma)^\star \ \boldsymbol{A_h}^{-1} B_h^\star V_h^{n+1} \end{cases}$$

La matrice C_h est naturellement diagonale (éléments finis Q_0) et grâce au choix de l'espace $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$, la matrice de masse associée aux contraintes peut être approchée par une matrice $\boldsymbol{A_h}$ est diagonale par blocs (cf section 1.4.3). Le schéma est donc explicite en (V_h, Σ_h) et demande la résolution d'un système linéaire de "petite taille" à chaque itération, pour le calcul de Λ_H. Il est aisé, comme pour le problème scalaire, de montrer que la stabilité du schéma est identique à celle du schéma sans domaines fictifs, la même énergie discrète étant conservée.

Dans [***A*8**], nous présentons une application de cette méthode à un problème de propagation dans le sous-sol, la surface de géométrie complexe étant traitée par domaines fictifs. Des validations plus complètes de la méthode peuvent être trouvées dans [116].

Remarquons que le choix d'espaces d'approximation fait dans [***A*8**] et dans [116], à savoir $Q_1^{div} - Q_0 - P_1^{cont}$ nous paraissait d'abord le plus naturel, compte tenu de la convergence démontrée sans obstacle. Nous ne savons cependant pas montrer la convergence de la méthode des domaines fictifs avec ce choix là. Les analyses de convergence de la méthode des domaines fictifs [8, 52, 82] appliquée à d'autres problèmes montrent que la convergence a lieu si une condition de compatibilité des deux maillages est vérifiée, condition du type (voir section 2.1)

$$(2.19) \qquad H \geq C_1 h$$

Cette condition suffit pour obtenir la condition inf-sup discrète uniforme impliquant la convergence. Dans le cas présent, cette condition inf-sup concerne la forme

$$b(v, \tau) - s(\tau, \lambda)$$

Rappelons que, en l'absence d'obstacle, seule la projection de la solution σ sur $\underline{\underline{X_h}}^s$ (la partie Raviart-Thomas) converge en norme $H(\text{ div})$. Cette analyse de convergence était rendue possible par le fait que la partie "reste" de la solution appartient au noyau de B_h (i.e. $b(v_h, \tau_h^r) = 0, \forall v_h \in \underline{M_h}, \forall \tau_h^r \in \underline{\underline{X_h}}^r$). Par contre, avec les domaines fictifs, la partie "reste" n'est pas dans le noyau de l'opérateur S lié à $s(\tau, \lambda)$, et la partie divergence du reste réapparaît.

En pratique, les résultats numériques montrent que, pour certaines configurations de fissure, la méthode converge bien sous une condition de ce type. Mais récemment nous avons mis en évidence d'autres configurations pour lesquelles une condition du type (2.19) n'est pas suffisante pour assurer la convergence. Nous reviendrons sur ce point dans la section 4 sur les travaux en cours.

2.2.2 Condition aux limites de contact unilatéral [*PR*8]

Ce travail, mené en collaboration avec P. Joly et G. Scarella (dans le cadre de la thèse de G. Scarella que je co-encadre et financée par un contrat EDF) fait suite aux travaux précédents.

On s'intéresse toujours à un problème de diffraction par une fissure, mais ici la fissure est modélisée par une condition de contact unilatéral à la place d'une condition de surface libre. Les équations du mouvement et la loi de comportement sont inchangés:

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}\sigma(u) = f & \text{dans } \Omega \\ A\sigma(u) = \varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{2.33}$$

On notera Γ^+ et Γ^-, les deux lèvres de la fissure, n la normale unitaire à Γ orientée de Γ^- vers Γ^+. Les conditions de contact unilatéral sans frottement sur la fissure (ou conditions de Signorini) s'expriment:

$$\left\{\begin{array}{lll} [u_N]_\Gamma & \geq 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma_N^+ = \sigma_N^- & \leq 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma_N\,[u_N]_\Gamma & = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma_T^+ = \sigma_T^- & = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array}\right. \tag{2.34}$$

où on a posé:

$$u_N = u.n, \quad u_T = u - u_N n, \quad \sigma_N = \sigma n.n, \quad \sigma_T = \sigma n - \sigma_N n, \quad [v]_\Gamma = v^+ - v^-$$

La première relation de (2.34) exprime le fait que les deux lèvres de la fissure ne peuvent pas s'interpénétrer. La deuxième exprime la continuité des traces normales des contraintes. La troisième relation exprime la loi de complémentarité: (i) soit $[u_N] > 0$, il n'y a pas de contact, alors $\sigma_N^+(u) = 0$ (surface libre), (ii) soit $[u_N] = 0$, il y a contact et $\sigma_N^+(u) \leq 0$. Enfin, la dernière relation de (2.34) traduit l'absence de frottement. Le problème devient alors non linéaire. Des résultats d'existence et d'unicité ont été obtenus pour le modèle simplifié des ondes scalaire avec condition unilatérale [91, 85], mais en ce qui concerne l'élastodynamique la question de l'existence et de l'unicité de la solution est encore ouverte.

Nous nous sommes intéressés à la résolution numérique de ce problème. Dans [***PR8***], nous montrons que la méthode des domaines fictifs peut encore s'appliquer pour une condition de contact unilatéral sans frottement à condition de se placer en déplacement-contraintes (et non plus en vitesse-contraintes). Les conditions aux limites faisant cette fois jouer des rôles différents aux traces normales et tangentielles, on est amenés à introduire deux multiplicateurs λ_N et λ_T s'interprétant respectivement comme le saut du déplacement normal et du déplacement tangentiel:

$$\lambda_N = [u_N] \in L_N, \qquad \lambda_T = [u_T] \in \underline{L}_T$$

avec

$$L_N = H^{1/2}_{00+}(\Gamma) = \{\mu_N \in \mathcal{G} / \mu_N \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\},$$
$$\underline{L}_T = [H^{1/2}_{00T}(\Gamma)]^2 = \{\mu_T \in \mathcal{G}^2 / \mu_T.n = 0\}$$

et où $\mathcal{G} = H^{1/2}_{00}(\Gamma)$. La formulation variationnelle consiste à trouver $(\sigma, u, \lambda_N, \lambda_T) :]0,T[\to \underline{\underline{X}} \times \underline{M} \times L_N \times \underline{L}_T$

$$\left\{\begin{array}{lll} a(\sigma,\tau) + b(\tau,u) + s_T(\tau,\lambda_T) + s_N(\tau,\lambda_N) = 0, & \forall\ \tau \in X, & (a) \\ (\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v) - b(\sigma, v) = (f, v), & \forall\, v \in M, & (b) \\ s_T(\sigma, \mu_T) = 0, & \forall\, \mu_T \in \underline{L}_T, & (c) \\ s_N(\sigma, \mu_N - \lambda_N) \leq 0, & \forall\, \mu_N \in L_N & (d). \end{array}\right. \tag{2.35}$$

les formes bilinéaires $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot)$ ayant été définies par (1.9) (avec C au lieu de Ω), et

$$s_T(\tau, \mu_T) =< \tau_T, \mu_T >_{L'_T, L_T} ,$$
$$s_N(\tau, \mu_N) =< \tau_N, \mu_N >_{\mathcal{G}', \mathcal{G}} .$$

La différence essentielle par rapport au cas de la surface libre est bien sûr la présence de l'inéquation variationnelle (d) posée sur la fissure.

Pour la discrétisation en espace, on utilise les mêmes espaces d'approximation $\underline{\underline{X_h}}$, $\underline{M_h}$ et $\mathcal{G}_H$ que pour la condition de surface libre (voir aussi section 4). Pour la discrétisation en temps, Les trois premières équations (a)-(c) peuvent toujours être approchées par des différences finies centrées. Par contre, une approximation centrée explicite de (d) conduit à un schéma inconditionnellement instable. Nous avons proposé un schéma décentré dont on peut montrer la stabilité par techniques d'énergie. Notons que l'inéquation variationnelle posée sur Γ conduit à la résolution d'un problème d'optimisation sur la fissure au lieu du système linéaire qu'on devait résoudre dans le cas de la condition de surface libre. Nous renvoyons à [***PR8***] pour une description plus détaillée des schémas retenus ainsi que pour des résultats numériques validant la méthode. Signalons que ces résultats montrent clairement une différence de comportement de l'onde diffractée entre le cas de la surface libre et celui du contact unilatéral, ce qui laisse penser que du point de vue des applications, il est certainement important de prendre en compte cette possibilité de contact. La prochaine étape est maintenant de rajouter un contact avec frottement dans notre modèle.

Des résultats plus complets seront présentés dans un article actuellement en préparation.

2.3 Acoustique musicale: modélisation de la guitare [*PR7*]

Ce sujet a été développé en collaboration avec A. Chaigne (UMA, ENSTA), G. Derveaux et P. Joly (dans le cadre de la thèse de G. Derveaux). Il fait suite aux travaux menés précédemment durant la thèse L. Rhaouti [104] pour modéliser la timbale. L'objectif est de pouvoir reconstituer le champ acoustique rayonné par un instrument de musique grâce à des simulations numériques obtenues à partir de l'approximation d'un modèle physique prenant en compte toutes les vibrations mises en jeu par l'instrument. En ce qui concerne le choix de la méthode numérique, l'idée est de prendre en compte la forme de l'instrument à l'aide de la méthode des domaines fictifs. La difficulté essentielle dans le cas de la guitare provient de la partie supérieure de la guitare, qu'on modélise comme une plaque de bois orthotrope hétérogène obéissant aux équations de Kirchhoff-Love.

Le modèle considéré est assez complexe. Il couple : (i) la surface de la guitare $\Gamma = \omega \cup \Sigma$, constituée de deux parties, la table d'harmonie ω considérée comme une plaque obéissant aux équations de Kirchhoff-Love, et le reste de la structure Σ supposé rigide, (ii) la corde, modélisée par l'équation de corde vibrante et reliée à la table par l'intermédiaire du chevalet, (iii) l'air. Ce modèle est décrit brièvement dans [***PR7***], et nous renvoyons à [40, 19] pour une description plus détaillée.

2.3.1 Approximation des équations de plaque

En ce qui concerne la résolution numérique de ce problème, la partie délicate vient de l'approximation des équations de Kirchhoff-Love. Ces équations sont d'ordre deux en temps

et d'ordre quatre en espace. Plus précisément, si la table occupe le domaine ω, ρ_p désigne la densité de la plaque, δ son épaisseur et C le tenseur de rigidité pour une plaque orthotrope hétérogène, le déplacement transverse u_p vérifie l'équation suivante:

$$\delta\rho_p\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \ \mathrm{div}(\underline{\mathrm{Div}}\ \delta^3 C\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)) = \mathcal{F} - [p]_\omega \quad \text{dans } \omega \tag{2.36}$$

à laquelle il faut rajouter des conditions aux limites que je ne décris pas ici. Le modèle considéré dans [40, 19] est en fait un peu plus compliqué car il prend en compte également un terme d'amortissement visco-élastique et un terme d'amortissement fluide. Cependant, nous nous sommes restreint dans [***PR7***] à ce modèle simplifié qui contient déjà les difficultés numériques essentielles. Le terme $\mathcal{F}$ est l'effort exercé par la corde et le terme $[p]_\omega$ désigne le saut de la pression acoustique à travers la table. C'est ce terme qui sera introduit comme inconnue surfacique (multiplicateur) pour prendre en compte le couplage entre l'air et la guitare à l'aide de la méthode de domaines fictifs.

Semi-discrétisation en espace

Une difficulté bien connue pour l'approximation de l'opérateur de plaque est liée au fait que la formulation variationnelle du problème en déplacement (2.36) est posée dans un sous espace de $H^2(\omega)$. Son approximation nécessiterait donc d'utiliser des éléments finis de classe C^1, qui ne sont généralement pas très faciles à manipuler (voir [40]). C'est pourquoi on préfère réécrire le problème à l'aide d'une formulation mixte en introduisant comme nouvelles inconnues $v_p = \dfrac{\partial u_p}{\partial t}$, la vitesse verticale de la plaque, et $\underline{\underline{\mathcal{M}}} = C\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} u_p)$, le moment de flexion, ce qui donne (en oubliant toujours les conditions aux limites et en supposant $\delta = 1$):

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_p\dfrac{\partial v_p}{\partial t} + \ \mathrm{div}(\underline{\mathrm{Div}}\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}) = \mathcal{F} - [p]_\omega \quad \text{dans } \omega \\ \\ A\dfrac{\partial \underline{\underline{\mathcal{M}}}}{\partial t} - \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\nabla} v_p) = 0 \quad \text{dans } \omega \end{array}\right. \tag{2.37}$$

où $A = C^{-1}$. La formulation variationnelle mixte s'écrit alors: trouver $(v_p(t), \underline{\underline{\mathcal{M}}}(t)) \in \mathcal{V} \times \mathcal{X}$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver} \quad (v_p(t), \underline{\underline{\mathcal{M}}}(t)) \in \mathcal{V} \times \mathcal{X} \\ \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega \rho_p v_p v_p^\star - \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}.\underline{\nabla} v_p^\star + \text{termes de bord} = \int_\omega (\mathcal{F} - [p]_\omega) v_p^\star, \quad \forall v_p^\star \in \mathcal{V} \\ \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\omega A\underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}}^\star + \int_\omega \underline{\mathrm{Div}}\ \underline{\underline{\mathcal{M}}}^\star.\underline{\nabla} v_p + \text{termes de bord} = 0, \quad \forall \underline{\underline{\mathcal{M}}}^\star \in \mathcal{X} \end{array}\right. \tag{2.38}$$

Il existe en fait plusieurs choix de formulations variationnelles. Dans tous les cas $\mathcal{V}$ est un sous-espace de $H^1(\omega)$. Par contre, en ce qui concerne le moment de flexion, on peut soit le chercher dans un sous-espace de $H(\underline{\mathrm{Div}}\ , \omega)$ soit dans un sous-espace de $(H^1(\omega))^4$. Ce sont les termes de bord qui ne sont pas pris en compte de la même façon dans les deux formulations. Bien sûr, chacun de ces choix conduit à des approximations en espace différentes. Une analyse de dispersion, menée pour les deux formulations (cf [40]), a montré que le meilleur choix correspond au cas où $\mathcal{X} \subset (H^1(\omega))^4$, et c'est ce choix qui est présenté dans [***PR7***]. Les variables v_p et $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ sont alors approchées par des éléments finis de type P^2, introduits par

N. Tordjman [111], qui sont compatibles avec la condensation de masse. On renvoie à [40] en ce qui concerne les éléments finis pour l'espace $H(\underline{\mathrm{Div}}\,,\omega)$, également compatibles avec la condensation de masse. Dans les deux cas, on obtient un problème matriciel du type:

$$\left\{\begin{array}{l} M_v\dfrac{dv_{ph}}{dt} - H_h^t\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h = f_h \\ \\ M_{\mathcal{M}}\dfrac{d}{dt}\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h + H_h v_{ph} = 0 \end{array}\right. \tag{2.39}$$

La matrice $M_{\mathcal{M}}$ pouvant être rendue diagonale (ou diagonale par blocs), il est facile d'éliminer $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h$ et de se ramener à une équation d'ordre 2 en temps:

$$M_v\frac{d^2v_{ph}}{dt^2} + K_h v_{ph} = \frac{df_h}{dt} \tag{2.40}$$

où $K_h = H_h^t M_{\mathcal{M}}^{-1} H_h$.

Discrétisation totale

La deuxième difficulté importante à laquelle on est confronté vient de la discrétisation en temps. Dans un premier temps, nous nous sommes "naturellement" orientés vers une discrétisation par différences finies conduisant à un schéma explicite, comme pour la corde et l'air (c'est le choix présenté dans [***PR7***]). La condition de stabilité pour des équation de plaque est alors du type

$$\Delta t \leq Ch^2$$

ce qui est a priori très restrictif. Mais une analyse de dispersion a montré que les schémas implicites, inconditionnellement stables, nécessitaient le même type de contrainte pour obtenir une précision suffisante.Cependant, le choix d'un pas de temps de l'ordre de h^2 est très pénalisant en pratique et nous avons préféré nous orienter dans une autre direction. La méthode retenue, décrite dans [40, 19], consiste à résoudre exactement en temps le problème semi-discret (2.40), ce qui permet d'échantilloner la solution sans perte de précision avec n'importe quel pas de temps. Cette méthode repose sur la connaissance des valeurs propres de la matrice K_h et peut être interprétée comme une méthode spectrale.

2.3.2 Méthode des domaines fictifs

Le couplage entre l'air et la guitare est réalisé à l'aide de la méthode des domaines fictifs. Si on note Ω le domaine occupé par l'air c'est à dire l'intérieur et l'extérieur de la guitare, $\Omega = \mathbb{R}^3\backslash\Gamma$, la pression acoustique p et la vitesse v_a sont régis par les équations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho_a\dfrac{\partial v_a}{\partial t} + \nabla p = 0, & \text{dans } \Omega \\ \\ \mu_a\dfrac{\partial p}{\partial t} + \ \mathrm{div} v_a = 0, & \text{dans } \Omega \\ \\ v_a.e_z = v_p \quad \text{sur } \omega & \\ \\ v_a.N = v_p \quad \text{sur } \Sigma & \end{array}\right. \tag{2.41}$$

où N est la normale extérieure à la guitare. On introduit comme nouvelle inconnue

$$\lambda = [p]_\Gamma$$

le saut de pression à travers la guitare. La formulation domaines fictifs consiste alors à chercher $p \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $v_a \in H(\text{ div}, \mathbb{R}^3)$ et $\lambda \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ tels que

$$\text{(2.42)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \rho_a \partial v_a . v_a^\star - < v_a^\star . N, \lambda >_\Gamma = 0, \quad \forall v_a^\star \in H(\text{ div}, \mathbb{R}^3) \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \mu_a p p^\star + \int_{\mathbb{R}^3} p^\star \text{ div} v_a = 0, \quad \forall p^\star \in L^2(\mathbb{R}^3) \\ < v_a . N, \lambda^\star >_\Gamma = < v_p, \lambda^\star >_\omega, \quad \forall \lambda^\star \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

Le problème complet est finalement décrit dans [***PR7***]). Un article plus complet [19] vient d'être soumis .

Chapitre 3

Conditions aux limites absorbantes (CLA) et couches absorbantes parfaitement adaptées (PML)

Introduction et présentation générale

Les problèmes de propagation d'ondes sont souvent posés en domaine non borné et une des questions cruciales pour leur résolution numérique est de savoir borner artificiellement le domaine de calcul. Cette question a donné lieu à une multitude de publications. Il y a principalement deux philosophies pour répondre à cette question.

La première méthode consiste à imposer des conditions aux limites absorbantes (CLA) sur une frontière artificielle autour du domaine. La première analyse du caractère bien posé de plusieurs familles de CLA est due à B. Engquist et A. Majda [46] dans le contexte des ondes acoustiques en transitoire. Depuis, des travaux ont été réalisés dans plusieurs directions: développement de familles de conditions d'ordre arbitrairement élevé et stables, question du traitement des coins, CLA pour des modèles plus compliqués (e.g. [69, 16, 73, 112, 12, 25, 11, 14, 45, 17, 31, 41, 63, 62, 64, 83, 65, 116, 66, 54, 60, 117]). Dans le cas des ondes élastiques se propageant en milieu isotrope, les premières études concernant les conditions transparentes et les CLA d'ordre un ont été effectuées par A. Reynolds [103] et L. Halpern [68]. Une première famille de conditions absorbantes d'ordre élevé, construites comme produit de conditions absorbantes du premier ordre pour l'équation des ondes scalaire, a ensuite été proposée par R. Higdon [75, 76, 74]. Dans [116], une autre démarche a été suivie pour établir une famille de conditions absorbantes d'ordre élevé et stables, reprenant celle suivie par Engquist et Majda, et basée sur l'approximation de l'opérateur transparent. Lorsque le milieu de propagation est anisotrope, il existe très peu de choses... Dans ma thèse [17], je m'étais intéressée à cette question en dimension 2 pour des milieux orthotropes. J'avais en particulier établi l'opérateur transparent et proposé plusieurs familles de conditions absorbantes. Cependant de nombreuses questions restaient posées. En particulier, s'il est clair que la condition appelée "condition d'ordre 1 en contraintes" conduit à un problème stable et s'intègre sans problème dans une formulation variationnelle, ce n'est pas du tout clair pour les autres conditions. Les simulations numériques de certaines de ces conditions que j'avais faites pour illustrer leurs performances, avaient conduit dans certains cas à des instabilités inexpliquées... qui m'avaient fait renoncer

à les inclure dans ma thèse... Mais après avoir étudié la stabilité des couches absorbantes parfaitement adaptées (cf plus loin) pour ce même problème, je ne serais pas surprise que la stabilité de ces conditions puisse être liée aux caractéristiques du matériau, plus précisément à l'existence d'ondes dont la composante normale à la frontière artificielle de la vitesse de groupe soit opposée à celle de la vitesse de phase.

La deuxième technique pour borner le domaine de calcul consiste à l'entourer d'un milieu artificiel dans lequel les ondes sont atténuées, appelé couches absorbantes. Avant 1994, les principales idées pour construire des couches absorbantes consistaient à introduire dans ces couches un modèle physique contenant un terme d'amortissement. Le principal inconvénient de ces modèles était que les ondes "voient" le changement d'impédance entre le milieu physique et la couche, ce qui induit une réflexion parasite. Un nouveau concept de couches absorbantes (Perfectly Matched Layers ou PML) a été introduit par Bérenger en 1994 pour les équations de Maxwell dont la particularité étonante est d'être parfaitement adaptées : pour ce modèle il n'y a pas de réflexion à l'interface entre le milieu physique et le milieu absorbant! Notons que ce modèle est complètement "artificiel" dans le sens qu'il ne correspond à aucun milieu physique. Cette méthode a considérablement amélioré les performances des méthodes plus classiques et a connu depuis un grand succès comme l'illustrent les nombreuses publications sur le sujet [28, 102, 36, 35]... En revanche, son analyse mathématique a suscité et continue de susciter de nombreuses études, voire de controverses, et l'extension à des modèles plus complexes est difficile. C'est dans ces deux directions que se situe ma contribution.

D'un point de vue mathématique, le modèle initialement introduit par Bérenger en electromagnétisme apparaît comme une perturbation d'ordre zéro d'une version "splittée" des équations de Maxwell, version qui est elle-même seulement faiblement bien posée. À partir de cette observation Abarbanel et Gottlieb [1] ont mis en garde contre l'utilisation de ce modèle pouvant être mal posé et par la suite plusieurs versions "non-splittées" ont été proposées comme alternative [120, 50, 97, 121, 96, 2]. Dans [A10], nous avons mené une analyse mathématique de ces deux modèles. D'un point de vue numérique, il nous a semblé plus pertinent de s'intéresser plutôt au concept de stabilité des modèles, c'est pourquoi dans [A10], une distinction est faite entre les notions de "bien-posé" et de "stabilité". En effet, on peut montrer que les deux modèles sont bien posés, mais en pratique la notion de bien-posé ne suffit pas car elle n'empêche pas la solution de pouvoir avoir un comportement exponentiellement croissant en temps. Dans le cas où de telles solutions existent, nous dirons que le modèle est instable. Pour illustrer l'intérêt de cette distinction, notons que le terme de perturbation dépend d'un facteur d'amortissement: en pratique si ce facteur est positif, le milieu amortit les ondes alors que s'il est négatif, les ondes sont au contraire amplifiées. On peut en fait montrer que pour un facteur négatif, les PML sont bien posées alors que le modèle est instable. Nous avons également montré, d'une part par une analyse de Fourier et d'autre part en mettant en évidence la décroissance d'une énergie, que pour un facteur constant positif, les deux modèles sont bien posés et stables. La solution n'est donc jamais exponentiellement croissante en temps, par contre elle peut avoir un comportement linéaire en temps : ce phénomène a été observé dans [3], pour une configuration assez particulière et à des temps très longs. Dans [A12], nous proposons un nouveau modèle de couches absorbantes parfaitement adaptées pour lesquelles ce comportement linéaire en temps ne peut plus avoir lieu: des estimations uniformes en temps de la solution ont été obtenues pour ce modèle, grâce à des techniques d'énergie.

F. Collino a donné une interprétation originale du modèle des couches parfaitement adaptées introduites par J.P Bérenger qui permet de généraliser ce modèle à tout système hyperbolique du premier ordre. En utilisant ce principe, F. Collino et C. Tsogka ont étendu les PML

aux équations de l'élastodynamique [37]. Cependant, ultérieurement à cet article, l'application de ce modèle a révélé des instabilités sur le plan numérique, dans le cas de certains matériaux anisotropes. Les PML ont été également utilisées pour des problèmes d'acoustique en écoulement (Euler linéarisé) et là encore des instabilités ont été observées [78, 59, 72, 108, 4].

Dans [A11], Une analyse par des techniques de Fourier du modèle PML pour un système hyperbolique du premier ordre a permis de mettre en évidence une condition nécessaire de stabilité. Cette condition a une interprétation géométrique très pratique, basée sur les surfaces de lenteur, et permet d'expliquer certaines des instabilités mentionnées ci-dessus. Cette condition n'est toutefois pas suffisante et, dans le cas des ondes élastiques, nous avons mis en évidence d'autres types d'instabilités. Des conditions suffisantes de stabilité, exprimées à l'aide des coefficients d'élasticité ont pu être établies.

En ce qui concerne l'acoustique en écoulement, de nouvelles idées pour construire des PML stables ont émergé indépendemment de plusieurs équipes. Ces idées ont été développées dans [79, 42, 67] pour les applications en temps et dans [***A13***] pour les applications en harmonique, dans le cadre d'un écoulement uniforme et parallèle ou orthogonal aux couches. Dans [***A13***] nous avons en particulier proposé un nouveau modèle de couches parfaitement adaptées ne générant pas de modes instables, puis étudié la convergence du modèle de Bérenger et de ce nouveau modèle, lorsque l'épaisseur de la couche tend vers l'infini.

Notation. Dans tout ce qui suit on note les vecteurs en caractères gras.

3.1 Construction et analyse des PML pour un système hyperbolique du premier ordre [*A11*]

3.1.1 Construction du modèle PML "splitté"

Le principe des couches absorbantes parfaitement adaptées a été introduit par Bérenger [26], pour les ondes électromagnétiques. Dans [37], les auteurs ont montré comment étendre ce principe à un système hyperbolique du premier ordre général, posé dans $\mathbb{R}^m$, de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - A_1 \partial_1 u - A_2 \partial_2 u = 0 \\ \\ u(t=0) = u_0 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

où u est un m-vecteur, A_1 et A_2 sont des matrices $m \times m$.

Rappelons brièvement les définitions d'hyperbolicité (voir [86]). Posons $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = k_1 A_1 + k_2 A_2$. Le système (3.1) est hyperbolique si, pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, les valeurs propres de $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ sont réelles. Il est fortement hyperbolique si de plus, pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ est diagonalisable (sinon, il est faiblement hyperbolique). Il est strictement hyperbolique si, pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, les valeurs propres de $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ sont réelles et distinctes.

La construction formelle du modèle PML dans la direction x_1 (paralèle à l'axe x_2) consiste en : (i) introduire une décomposition de la solution en $u = u^1 + u^2$, telle que l'inconnue u^1 est seulement "associée" aux dérivées par rapport à x_1 et u^2 aux dérivées par rapport à x_2, (ii) introduire un facteur d'amortissement anisotrope seulement sur la composante u^1. On obtient

alors le système PML suivant:

$$\begin{cases} \partial_t u^1 + \varsigma(x_1) u^1 - A_1 \partial_1 (u^1 + u^2) = 0 \\ \\ \partial_t u^2 - A_2 \partial_2 (u^1 + u^2) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\varsigma(x_1) = 0$ pour $x_1 < 0$ et $\varsigma(x_1) \geq 0$ pour $x_1 \geq 0$.

Dans le domaine fréquentiel, le système (3.2) devient :

$$\begin{cases} i\omega u^1 + \varsigma(x_1) u^1 - A_1 \partial_1 (u^1 + u^2) = 0, \\ \\ i\omega u^2 - A_2 \partial_2 (u^1 + u^2) = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

qui peut aussi être obtenu en remplaçant dans l'équation (3.1), écrite en fréquence, les dérivées par rapport à x_1 par $d(\omega, \varsigma(x_1))\partial_1$, (voir [37, 34]), où

$$d(\omega, \varsigma(x_1)) = \frac{i\omega}{\varsigma(x_1) + i\omega} \tag{3.4}$$

En fait, ceci correspond à appliquer le changement de variable [34, 102, 28]:

$$x_1 \to x_1 + \frac{1}{i\omega} \int_0^{x_1} \varsigma(\xi)\, d\xi,$$

à la solution de la version fréquentielle de (3.1). À l'aide d'une analyse par ondes planes, on peut alors montrer la propriété essentielle de ce modèle qui est d'être parfaitement adapté, c'est à dire qu'il ne génère aucune réflexion à l'interface entre le milieu physique et le milieu absorbant (voir [37]). De plus, cette analyse montre aussi que l'onde transmise décroit exponentiellement à l'intérieur de la couche.

Bien sûr, pour construire le modèle PML dans la direction x_2, il suffit de permuter les rôles des deux directions d'espace (en introduisant un amortissement dans la direction x_2 seulement) et pour un coin, on introduit un terme d'amortissement dans les deux directions.

3.1.2 Analyse du modèle PML pour des coefficients constants

Dans [***A11***], en collaboration avec S. Fauqueux et P. Joly, nous avons montré le caractère bien posé du système PML (3.2) associé à un système hyperbolique du premier-ordre général, dans le cas où les coefficients sont constants. Cependant, comme on l'a mentionné plus haut, la notion qui nous semble plus pertinente du point de vue des applications, est celle de stabilité, que nous avions déjà introduite avec P. Joly dans [***A10***], pour l'analyse des PML pour les équations de Maxwell (voir section suivante 3.2.1). Il est difficile d'établir un résultat général de stabilité. Par contre, par une analyse hautes fréquences, nous avons pu mettre en évidence une condition nécessaire de stabilité, qui par ailleurs admet une interprétation géométrique très pratique, basée sur les surfaces de lenteur. Dans cette section, je présente un résumé de ces résultats (voir [***A11***] pour les résultats détaillés).

Nous faisons l'hypothèse suivante:
Hypothèse (A_1). Le système d'origine (non "splitté") (3.1) est fortement hyperbolique.

On considère le problème de Cauchy dans l'espace $\mathbb{R}^2$ associé au système:

$$\begin{cases} \partial_t u^1 + \varsigma u^1 - A_1 \partial_1 u^1 - A_1 \partial_1 u^2 = 0, \\ \partial_t u^2 - A_2 \partial_2 u^1 - A_2 \partial_2 u^2 = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

où ς est une constante strictement positive et on pose $U = (u^1, u^2)$. Nous rappelons la définition d'un problème bien posé et introduisons la notion de stabilité.

Définition 1 *Le problème de Cauchy (3.5) associé aux données initiales U_0 est dit faiblement (resp. fortement) bien posé si pour tout $U(.,0) = U_0$ donné dans l'espace de Sobolev H^s, $s > 0$ (resp. $s = 0$), (3.5) admet une unique solution $U(t)$ qui vérifie une estimation du type:*

$$\|U(.,t)\|_{L^2} \leq K e^{\alpha t} \|U_0\|_{H^s} \tag{3.6}$$

Définition 2 *Nous dirons que le problème de Cauchy (3.5) est faiblement (resp. fortement) stable si il est faiblement (resp. fortement) bien posé et si la solution $U(t)$ vérifie une estimation du type*

$$\|U(.,t)\|_{L^2} \leq K(1+t)^s \|U_0\|_{H^s} \tag{3.7}$$

avec $s > 0$ (resp. $s = 0$).

Dans ce qui suit, on dira simplement que le système est stable s'il est au moins faiblement stable. La différence essentielle entre un système stable et un système bien posé est que dans le premier cas les solutions exponentiellement croissantes ne sont pas permises.

L'analyse du caractère bien posé et de la stabilité du système (3.5) est liée à l'analyse par ondes planes, c'est à dire des solutions particulières de la forme:

$$U(x,t) = e^{i(\omega t - \mathbf{k}.x)}\mathbf{D}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{2m}, \quad \omega \in \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

Le système (3.5) correspond à une perturbation d'ordre zéro du système suivant, que nous appellerons système non perturbé:

$$\begin{cases} \partial_t u^1 - A_1 \partial_1 u^1 - A_1 \partial_1 u^2 = 0, \\ \partial_t u^2 - A_2 \partial_2 u^1 - A_2 \partial_2 u^2 = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

Pour étudier le caractère bien posé et la stabilité du système (3.5), nous allons étudier ses valeurs propres comme des perturbations des valeurs propres du système non perturbé (3.9). Ces dernières seront obtenues à partir de celles du système initial non splitté (3.1).

Système non splitté. Le système initial (3.1), admet des solutions de la forme

$$u(x,t) = e^{i(\omega t - \mathbf{k}.x)}\mathbf{d}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^m, \quad \omega \in \mathbb{C},$$

si et seulement si $\mathbf{k}$ et ω sont reliés par la relation de dispersion:

$$F_1(\omega, \mathbf{k}) = 0, \tag{3.10}$$

où

$$F_1(\omega, \mathbf{k}) = \det(\omega I - k_1 A_1 - k_2 A_2), \tag{3.11}$$

est un polynôme homogène en ω et $\mathbf{k}$ de degré m. Si on considère (3.10) comme une équation en ω, une conséquence de l'hyperbolicité du système (3.1) (hypothèse (A_1)) est que les solutions de (3.10) sont réelles:

$$\omega = \omega_j(\mathbf{k}), \quad j = 1, ..., m, \quad \text{les valeurs propres de } \mathcal{A}(\mathbf{k}).$$

De plus, les fonctions $\omega_j(\mathbf{k})$ sont homogènes de degré 1. Pour simplifier la présentation, nous supposerons également par la suite que les valeurs propres du système initial (3.1), autres que la valeur propre nulle, sont distinctes:
Hypothèse (A_2). Nous supposons que le système(3.1) admet :

- $\omega_j(\mathbf{k}) \neq 0, \forall \mathbf{k} \neq 0$ comme valeur propre simple, $j = 1, N_e$, ($\omega_j(\mathbf{k}) \neq \omega_i(\mathbf{k})$ pour $i \neq j$)
- $\omega_j = 0$, $j = N_e + 1, m$ comme valeur propre d'ordre $\ell_0 = m - N_e$

Le mode nul est un mode non propagatif et nous appellerons les autres modes les *modes physiques*. Ces définitions conduisent finalement à l'expression:

$$F_1(\omega, \mathbf{k}) = \omega^{\ell_0} \prod_{j=1}^{N_e} (\omega - \omega_j(\mathbf{k})) \tag{3.12}$$

Une conséquence de l'hypothèse (A_2) est que les modes physiques $\omega(\mathbf{k}) = \omega_j(\mathbf{k}), j = 1, N_e$ sont dérivables par rapport à $\mathbf{k}$, et on peut définir les notions suivantes ($\mathbf{K} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$):

$$\begin{aligned}
&\text{la vitesse de phase} && \mathcal{V}(\mathbf{K}) = \frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} \equiv \omega(\mathbf{K}) \\
&\text{le vecteur de lenteur} && \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbf{K}) = \frac{\mathbf{K}}{\mathcal{V}(\mathbf{K})} = \frac{\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} \\
&\text{la vitesse de groupe} && \mathbf{V_g}(\mathbf{k}) = \mathbf{V_g}(\mathbf{K}) = \nabla_{\mathbf{k}} \omega\ (\mathbf{k}) \\
& && = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial \omega}(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})\right)^{-1} \nabla_k F_1(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

La vitesse de groupe est orthogonale aux surfaces de lenteur définies comme les lieux des vecteurs lenteur

$$F_1(1, \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbf{K})) = 0$$

On notera $(V_g^1(\mathbf{k}), V_g^2(\mathbf{k}))$ les deux composantes de $\mathbf{V_g}(\mathbf{k})$ et $(S_1(\mathbf{k}), S_2(\mathbf{k}))$ celles de $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbf{K})$.

Relations entre ondes planes - bien posé - stabilité. Revenons à l'analyse de Fourier du système PML (3.5). Ce système admet des solutions de la forme (3.8) si et seulement si ω et $\mathbf{k}$ sont reliés par la relation de dispersion perturbée:

$$F_{pml}(\omega, \mathbf{k}, \varsigma) \equiv F_1(\omega(\omega - i\varsigma), k_1\omega, k_2(\omega - i\varsigma)) = 0 \tag{3.14}$$

C'est une équation polynomiale en ω de degré $2m$. Par conséquent cette relation définit $2m$ modes, $\omega_j(\mathbf{k},\varsigma)$, $j = 1,...,2m$. Nous rappelons ici comment les notions de bien posé et de stabilité sont liées à ces modes.

Problème bien posé. Le système (3.5) est *fortement mal posé* si il existe des modes exponentiellement croissants, c'est à dire

$$\Im m\ \omega(\mathbf{k},\varsigma) \to -\infty, \quad \text{quand } |\mathbf{k}| \to +\infty, \tag{3.15}$$

sinon il est au moins *faiblement bien posé* (voir [86]).

Stabilité. Le système (3.5) est *stable* dans le sens de la définition 2 si et seulement si

$$\forall\ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^m, \text{ les solutions } \omega(\mathbf{k},\varsigma) \text{ satisfont } \Im m\ \omega(\mathbf{k},\varsigma) \geq 0. \tag{3.16}$$

En fait si $\omega = \omega_R + i\omega_I$, les solutions ondes planes sont de la forme:

$$u(x,t) = e^{-\omega_I t} e^{i(\omega_R t - \mathbf{k}.x)}\mathbf{D}$$

L'existence de solutions ω avec une partie imaginaire négative correspondrait à des ondes planes qui ont un comportement exponentiellement croissant en temps. Un système stable élimine de telles solutions.

On voit donc que l'analyse du caractère bien posé de (3.5) repose sur une analyse hautes fréquences des modes. Le principe de l'étude qui a été menée dans [***A11***] est de faire un développement des modes à hautes fréquences et de montrer que la partie imaginaire du premier terme du développement reste bornée lorsque $|\mathbf{k}| \to +\infty$. On a ainsi obtenu le résultat:

Théorème 3 *Nous faisons les hypothèses (A_1) et (A_2) pour le système (3.1). Alors, le système (3.5) est bien posé.*

Si on demande non seulement que les parties imaginaires des modes physiques ne tendent pas vers $-\infty$ à hautes fréquences, mais en plus qu'elles soient positives (toujours à hautes fréquences), nous obtenons une condition nécessaire de stabilité, que nous appelons condition de stabilité hautes fréquences:

Théorème 4 *On suppose toujours que le système (3.1) vérifie les hypothèses (A_1) et (A_2). Alors, une condition nécessaire de stabilité (hautes fréquences) du système PML dans la direction x_1 (3.5) est que, pour tous les modes physiques du système initial (3.1), on a :*

$$\forall \mathbf{K} = (K_1, K_2) \ /\ |\mathbf{K}| = 1, \quad S_1(\mathbf{K}) \cdot (V_g^1)_1 \geq 0. \tag{3.17}$$

Cette condition est très utile en pratique car elle admet une interprétation géométrique à l'aide des surfaces de lenteur.

Interprétation géométrique. La condition (3.17) exprime le fait que, le long des surfaces de lenteur, le vecteur de lenteur et le vecteur de groupe sont orientés dans le même sens par rapport à l'axe Ox_2.

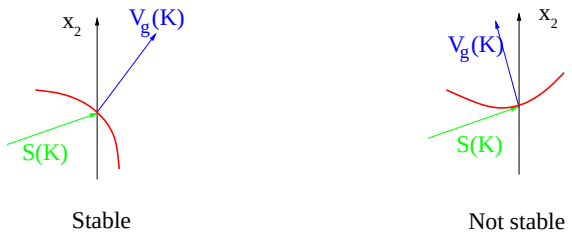


FIG. 3.1: *Deux configurations différentes. Gauche: le vecteur lenteur* $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ *et la vitesse de groupe* $\mathbf{V_g}$ *sont orientés dans le même sens par rapport à l'axe* Ox_2*. Droite:* $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ *et* $\mathbf{V_g}$ *ne sont pas orientés dans le même sens par rapport à l'axe* Ox_2*.*

Il est bien sûr immédiat d'exprimer une condition de stabilité analogue pour une couche dans la direction x_2, en échangeant les rôles de x_1 et x_2.

Ce résultat montre l'importance du rôle joué par les vitesses de groupe dans l'analyse de stabilité des modèles PML. Ce rôle avait déjà été mis en évidence par Trefethen dans [113] (voir aussi [114, 115]) pour l'analyse le la stabilité de schémas aux différences finies pour des systèmes hyperboliques linéaires et ensuite par Higdon [77] pour l'analyse du caractère bien posé de problèmes aux limites pour des systèmes hyperboliques linéaires. En ce qui concerne l'analyse de stabilité de modèles PML, dans [109], les auteurs ont lié les instabilités observées pour les équations d'Euler linéarisées à l'existence d'ondes ayant des vitesses de phase et de groupe dans des directions opposées (mais sans vraiment les expliquer). Citons enfin un travail très proche du notre, dont nous n'avons eu connaissance que très récemment, de F. Hu [79], qui porte lui aussi sur les PML pour Euler linéarisé, dans lequel l'auteur analyse les causes des instabilités des PML par des techniques analogues à celles développées ici.

3.2 Couches absorbantes PML pour les ondes électromagnétiques [*A*10], [*A*12]

3.2.1 Analyse des PML pour les équations de Maxwell [*A*10]

Ce travail a été mené en collaboration avec P. Joly. Il concerne l'analyse des couches absorbantes PML pour les équations de Maxwell. Il avait été mené avant le travail plus général qui a été présenté dans la section précédente 3.1. Le résultat obtenu précédemment s'applique bien sûr ici et permet de montrer que le système de Bérenger [26] est bien posé (au moins faiblement). Il permet également de voir que le modèle est stable à hautes fréquences: en effet, les surfaces de lenteur étant des cercles, les vitesses de phase et de groupe sont ici toujours parallèles. Dans ce cas particulier néanmoins nous avons pu pousser l'analyse de Fourier plus loin et obtenir des estimations de la solution du système PML "splitté" comme je vais l'expliquer assez brièvement. Dans cet article, nous avons également considéré une version non splittée des PML et obtenu des estimations de la solution, cette fois-ci grâce à des techniques d'énergie. De nombreux auteurs se sont orientés vers ces versions non splittées des PML, ces dernières années, car ces dernières apparaissent comme des perturbations d'ordre zéro d'un système fortement hyperbolique (et non pas seulement faiblement hyperbolique comme pour la version splittée). Cependant, les deux versions sont "équivalentes" au niveau continu et, nous avons montré qu'elles le restaient au niveau discret lorsqu'on utilise un schéma de Yee

pour leur approximation.

Analyse de Fourier du système splitté. Rappelons le principe des PML introduites par Bérenger [26] pour les équations de Maxwell 2D en mode TE pour un champ électrique $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)^t$ et le champ magnétique $\mathbf{H} = (0, 0, H)^t$. On suppose que $\varepsilon_0 = 1$ et $\mu_0 = 1$. Les équations s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E_x = \partial_y H \\ \\ \partial_t E_y = -\partial_x H \\ \\ \partial_t H = \partial_y E_x - \partial_x E_y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{rot}\ H \\ \\ \partial_t H = -\text{rot}\ \mathbf{E} \end{array} \right. \tag{3.18}$$

auxquelles on doit ajouter des conditions initiales (E_x^0, E_y^0, H^0). En posant $V = (E_x, E_y, H)^t$, ce système s'écrit comme un système du premier ordre:

$$\partial_t V = P_0(\nabla) V.$$

avec

$$P_0(i\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ik_y \\ 0 & 0 & -ik_x \\ ik_y & -ik_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est bien connu que ce système est strictement hyperbolique, la matrice P_0 ayant trois valeurs propres distinctes et par conséquent il est bien posé [86] et la solution peut être estimée uniformément en temps en fonction des données initiales, ce qui peut être d'ailleurs également déduit de la conservation de l'énergie

$$(\partial_t H, H) + (\partial_t \mathbf{E}, \mathbf{E}) = 0 \Rightarrow \|H\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{E}\|_{L^2}^2 = \|H^0\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{E}^0\|_{L^2}^2. \tag{3.19}$$

En appliquant la technique de splitting décrite en section 3.1.1, on obtient le système de Bérenger: pour une couche PML dans la direction Ox, on décompose le champ $H = H^x + H^y$ et on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t E_x = \partial_y (H^x + H^y) & (a) \\ \\ \partial_t E_y + \sigma E_y = -\partial_x (H^x + H^y) & (b) \\ \\ \partial_t H^x + \sigma H^x = -\partial_x E_y & (c) \\ \\ \partial_t H^y = \partial_y E_x & (d) \end{array} \right. \tag{3.20}$$

qui peut être réécrit comme un système en $U = (E_x, E_y, H^x, H^y)^t$:

$$\partial_t U + \Sigma U = P(\nabla) U, \tag{3.21}$$

avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P(i\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ik_y & ik_y \\ 0 & 0 & -ik_x & -ik_x \\ 0 & -ik_x & 0 & 0 \\ ik_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de montrer que le système non perturbé (et splitté), i.e. le système obtenu pour $\Sigma = 0$, est seulement faiblement bien posé. Cependant, comme on l'a vu à la section 3.1.2 (théorème 3), la perturbation PML ne peut pas conduire à un problème mal posé. Dans un premier temps, on montre ici :

Théorème 5 *Pour tout $U^0 \in (H^1(\mathbb{R}^2))^4$, le système (3.20) admet une unique solution qui vérifie l'estimation:*

$$\|U(.,t)\|_0 \leq C_\sigma \, \|U^0\|_1, \tag{3.22}$$

where $C_\sigma = C \min(1, 1/\sigma)$, ($\sigma > 0$).

Cette estimation n'est pas optimale puisqu'elle est perdue lorsque σ tend vers 0 et que par ailleurs pour $\sigma = 0$, on peut montrer une estimation du type:

$$\|U(.,t)\|_{L^2} \leq (1 + Ct)\|U^0\|_{H^1}. \tag{3.23}$$

Une analyse plus fine des propriétés du symbole

$$P_\sigma(i\mathbf{k}) = P(i\mathbf{k}) - \Sigma$$

nous a permis d'obtenir des estimations de la solution de (3.20):

Théorème 6 *Pour tout $U^0 \in (H^1(\mathbb{R}^2))^4$, le système (3.20) admet une unique solution. Le champ électromagnétique $(\mathbf{E}, H)$, provenant de cette solution $U = (E_x, E_y, H^x, H^y)$ (avec $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ et $H = H^x + H^y$) vérifie l'estimation:*

$$\|\mathbf{E}(t)\|_{L^2} + \|H(t)\|_{L^2} \leq C \left\|U^0\right\|_{L^2}, \tag{3.24}$$

et les inconnues splittées H^x et H^y sont estimées par:

$$\|H^x(t)\|_{H^{-1}} + \|H^y(t)\|_{H^{-1}} \leq C \; t \left\|U^0\right\|_{L^2}, \tag{3.25}$$

où C est une constante strictement positive, indépendante de σ, ($\sigma > 0$).

La démonstration de ce théorème, un peu technique, repose sur des estimations des matrices $e^{P_\sigma(i\mathbf{k})t}$. La principale difficulté pour les obtenir vient du fait que $P_\sigma(i\mathbf{k})$ n'est pas diagonalisable pour tout k.

On voit sur ce résultat qu'il y a une perte de un cran de régularité sur la solution, mais que cette perte de régularité n'affecte que les composantes non physiques H^x et H^y. Pour insister sur le fait qu'en pratique, c'est plutôt la notion de stabilité qui est importante, signalons que pour un facteur d'amortissement négatif $\sigma < 0$, le système PML serait toujours faiblement bien posé avec des estimations du type:

$$\|\mathbf{E}(t)\|_{L^2} + \|H(t)\|_{L^2} \leq Ce^{|\sigma|t} \left\|U^0\right\|_{L^2}$$

$$\|H^x(t)\|_{H^{-1}} + \|H^y(t)\|_{H^{-1}} \leq C \; e^{|\sigma|t} \left\|U^0\right\|_{L^2}$$

qui permettent des comportements exponentiellement croissants en temps de la solution. Et il est clair qu'en pratique, avec un σ négatif, on a bien une explosion exponentielle au lieu

d'un amortissement, dans la couche.

Analyse d'un système PML non splitté par techniques d'énergie.
On a vu que la formulation de Bérenger pouvait s'interpéter comme une perturbation d'ordre zéro du système splitté de Bérenger qui n'est que faiblement bien posé. Abarbanel et Gottlieb [1] ont été les premiers à mettre en garde sur le fait qu'une telle perturbation pouvait conduire à un problème mal posé. Nous venons de voir qu'il n'en est rien, et que avec la perturbation PML, le problème reste faiblement bien posé. Cependant une idée naturelle a émergé pour construire de "nouveaux" modèles. Cette idée consiste à supprimer le splitting, puisque c'est à cause de lui que l'opérateur a perdu son caractère fortement hyperbolique, quitte à introduire d'autres inconnues supplémentaires, et à exprimer les PML comme une perturbation d'un opérateur fortement hyperbolique. Il y a eu plusieurs propositions dans cette direction [119, 121, 2, 93, 97, 101, 96], nous avons fait le choix ici d'étudier le système introduit par Zhao et Cangellaris [119] (aussi introduit par Gedney [50]). On peut trouver une discussion sur plusieurs de ces modèles dans [118]. Dans tous ces modèles, on "restaure" l'opérateur de Maxwell. Signalons toutefois une différence entre le modèle de [93] où l'inconnue supplémentaire "fait partie intégrante" du système, alors que dans tous les autres, la (ou les) inconnue supplémentaire est reliée aux autres par une simple équation différentielle ordinaire en temps, ce qui permet de ne pas perdre de régularité.

La formulation Zhao-Cangellaris, correspondant à une couche PML dans la direction x est la suivante:

$$\begin{cases} \partial_t E_x - \partial_y H = 0 & (a) \\ \partial_t E_y + \sigma E_y + \partial_x H = 0 & (b) \\ \partial_t H + \sigma H + \partial_x E_y - \partial_y \widetilde{E}_x = 0 & (c) \\ (\partial_t + \sigma) E_x = \partial_t \widetilde{E}_x & (d) \end{cases} \tag{3.26}$$

Le principal résultat que nous avons obtenu est un résultat de décroissance d'une énergie, qui n'est pas l'énergie classique mais une énergie "d'ordre 1", lorsque le facteur d'amortissement σ est une constante positive. Introduisons

$$\mathcal{E}_1(t) = \frac{1}{2}\left(\left\| \partial_t \widetilde{E}_x \right\|_{L^2}^2 + \|\partial_t E_y\|_{L^2}^2 + \|\partial_t H + \sigma H\|_{L^2}^2 + \|\sigma E_y\|_{L^2}^2 \right) \tag{3.27}$$

Nous avons alors le :

Lemme 1 *Si σ est une constante positive, l'énergie $\mathcal{E}_1$ de la solution de (3.20) vérifie l'identité suivante:*

$$\partial_t \mathcal{E}_1 = -2\sigma \|\partial_t E_y\|_{L^2}^2 \leq 0 \tag{3.28}$$

ce qui montre en particulier que c'est une fonction décroissante au cours du temps.

Ce résultat montre que, comme le système de Bérenger, celui de Zhao-Cangellaris est stable (pas de croissance exponentielle en temps). En fait, il est facile de montrer qu'on a une "équivalence" entre les deux modèles, moyennant un choix adéquat de conditions initiales,

dans le sens où on peut déduire la solution de l'un en fonction de celle de l'autre. Plus précisément,

– Soit (E_x, E_y, H^x, H^y) la solution du système de Bérenger (3.20) associée aux conditions initiales $(E_x^0, E_y^0, (H^x)^0, (H^y)^0)$. Si on fait l'hypothèse $(H_x)^0 = H^0, \quad (H_y)^0 = 0$, on peut définir

$$\widetilde{E}_x(t) = E_x(t) + \int_0^t \sigma E_x(s) ds \tag{3.29}$$

et $H = H^x + H^y$. Il est facile de vérifier que $(E_x, \widetilde{E}_x, E_y, H)$ est solution du système de Zhao-Cangellaris (3.26).

– Réciproquement, soit $(E_x, \widetilde{E}_x, E_y, H)$ la solution de Zhao-Cangellaris (3.26) associée aux conditions initiales $(E_x^0, \widetilde{E}_x^0, E_y^0, H^0)$. Sous l'hypothèse que $\widetilde{E}_x^0 = E_x^0$, on peut définir

$$H^y = \int_0^t \partial_y E_x(s) ds, \quad H^x = H - H^y$$

et (E_x, E_y, H^x, H^y) est solution du système de Bérenger (3.20).

En pratique, on introduit l'inconnue supplémentaire seulement dans la couche PML, et les données initiales (E_x^0, E_y^0, H^0) sont à support dans le domaine physique. Toutes les données initiales étant donc nulles dans la couche, l'équivalence entre les deux modèles a toujours lieu. Nous reviendrons sur le lien entre ces deux modèles, et en particulier sur les estimations obtenues pour chacun, dans la section 3.2.2. Notons que nous n'avons pas réussi à obtenir un résultat analogue pour un σ variable.

Estimations d'énergie pour le schéma de Yee. Dans [***A10***], nous montrons que les formulations de Bérenger et de Zhao-Cangellaris sont aussi équivalentes au niveau discret, lorsqu'on utilise le schéma de Yee. Pour ce schéma, nous montrons une identité d'énergie discrète, dont on peut déduire la stabilité du schéma sous la condition CFL usuelle. On définit l'énergie discrète par

$$\left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{E}_1^{n+1/2} = & \frac{1}{2\Delta t} \left(\left\| (D_{\Delta t} E_x)^{n+1/2} \right\|_h^2 + \left\| (D_{\Delta t} E_y)^{n+1/2} \right\|_h^2 + \left\| \sigma \frac{E_y^n + E_y^{n+1}}{2} \right\|_h^2 \right. \\ & \left. + \left(\left((D_{\Delta t}^\sigma H)^{n+1}, (D_{\Delta t}^\sigma H)^n \right) \right)_h \right) \end{array} \right. \tag{3.30}$$

où $\|.\|_h$ est une norme L^2 discrète (voir [***A10***] pour plus de précisions). Dans (3.30), $D_{\Delta t}$ désigne l'opérateur aux différences finies centré approchant ∂_t:

$$(D_{\Delta t} U)^k = \frac{U^{k+1/2} - U^{k-1/2}}{\Delta t}, \tag{3.31}$$

k étant soit un entier soit un demi-entier, et $D_{\Delta x}$ and $D_{\Delta y}$ désignent les opérateurs approchant ∂_x et ∂_y de la même façon. On introduit également l'opérateur approchant $\partial_t + \sigma$:

$$(D_{\Delta t}^\sigma U)_{\alpha\beta}^n = (D_{\Delta t} U)_{\alpha\beta}^n + \sigma_\alpha \frac{U_{\alpha\beta}^{n+1/2} + U_{\alpha\beta}^{n-1/2}}{2} = (D_{\Delta t} U)_{\alpha\beta}^n + \sigma_\alpha \overline{U}_{\alpha\beta}^n \tag{3.32}$$

où si α est un entier $\alpha = i$, σ_i est une approximation de $\sigma(x_i)$ ($x_i = i\Delta x$), et si α est un demi-entier, $\alpha = i + 1/2$, $\sigma_{i+1/2} = (\sigma_i + \sigma_{i+1})/2$. On montre alors le :

Théorème 7 *Si σ est une constante positive, l'énergie discrète vérifie l'identité suivante:*

$$\mathcal{E}_1^{n+1/2} - \mathcal{E}_1^{n-1/2} + 2\sigma \left\| \frac{(D_{\Delta t}E_y)^{n+1/2} + (D_{\Delta t}E_y)^{n-1/2}}{2} \right\|_h^2 = 0, \tag{3.33}$$

ce qui montre en particulier que c'est une quantité décroissante :

$$\mathcal{E}_1^{n+1/2} \leq \mathcal{E}_1^{n-1/2}. \tag{3.34}$$

Des arguments classiques permettent d'en déduire :

Théorème 8 *L'approximation du modèle PML par le schéma de Yee est stable sous la condition CFL usuelle*

$$\frac{\sqrt{2}\Delta t}{h} < 1 \tag{3.35}$$

3.2.2 Quelques commentaires sur les différentes versions des PML

Nous complétons, dans cette section, les résultats sur les PML pour les équations de Maxwell. Nous donnons tout d'abord de nouvelles estimations de la solution du système de Zhao-Cangellaris, qui découlent du lemme 1 et qui n'avaient pas été précisées dans l'article [***A10***]. Ces estimations vont nous aider à comparer différents modèles de PML. Il existe dans la littérature plusieurs modèles de PML non splittés dont la plupart diffèrent essentiellement par le choix des inconnues supplémentaires introduites. Il est assez facile de se perdre entre tous ces modèles notamment quand on compare leurs comportements aux temps longs, et les estimations obtenues sur les solutions qui peuvent sembler contradictoires... Je fais un petit point là dessus, plus particulièrement sur trois modèles, celui de Bérenger, celui de Zhao-Cangellaris et enfin celui de Gedney [50], pour montrer que nos résultats ne sont ni contradictoires entre eux (!) ni contradictoires avec ceux présentés dans [3].

Quelques estimations supplémentaires de la solution du système de Zhao-Cangellaris (3.26). Nous donnons ici quelques résultats découlant du lemme 1 et qui ne sont pas contenus dans [***A10***]. L'estimation (3.28) nous montre qu'on peut majorer

$$\left\|\partial_t \widetilde{E}_x\right\|_{L^2} + \|\partial_t E_y\|_{L^2} + \|\partial_t H + \sigma H\|_{L^2} + \|\sigma E_y\|_{L^2} \leq C\mathcal{E}_1(0)^{1/2} \tag{3.36}$$

Que peut-on en déduire sur la solution elle-même? On voit immédiatement que

$$\|E_y\|_{L^2} \leq \frac{C}{\sigma}\mathcal{E}_1(0)^{1/2} \tag{3.37}$$

En intégrant en temps, on obtient également les deux estimations:

$$\begin{aligned} &\|E_y\|_{L^2} \leq \left\|E_y^0\right\|_{L^2} + Ct\ \mathcal{E}_1(0)^{1/2} \quad (i) \\ &\left\|\widetilde{E}_x\right\|_{L^2} \leq \left\|\widetilde{E}_x^0\right\|_{L^2} + Ct\ \mathcal{E}_1(0)^{1/2} \quad (ii) \end{aligned} \tag{3.38}$$

Pour H, on utilise le lemme technique (voir par exemple [***A12***])

Lemma 1 *Si $\|\partial_t H + \gamma H\| \leq C$, $\forall t$, où C est une constante indépendante de t, alors on a*

$$\|H(t)\| \leq \|H_0\| + C/\gamma, \quad \forall t > 0$$

qui nous donne ici :

$$\|H(t)\|_{L^2} \leq \left\|H^0\right\|_{L^2} + \frac{C}{\sigma}\mathcal{E}_1(0)^{1/2} \tag{3.39}$$

Enfin, en utilisant la relation 3.26-(d), l'estimation (3.36) et de nouveau le lemme technique 1, on obtient

$$\|E_x(t)\|_{L^2} \leq \left\|E_x^0\right\|_{L^2} + \frac{C}{\sigma}\mathcal{E}_1(0)^{1/2} \tag{3.40}$$

On remarque que $\mathcal{E}_1(0)$ fait intervenir les valeurs initiales des dérivées en temps. Pour le relier aux données initiales, il est facile en utilisant les équations à l'instant initial de voir que

$$\mathcal{E}_1(0)^{1/2} \quad \leq \quad C(\left\|\mathbf{rot}\ H^0\right\|_{L^2} + \left\|\mathrm{rot}\ \mathbf{E}^0\right\|_{L^2} + \left\|\sigma\mathbf{E}^0\right\|_{L^2}) \tag{3.41}$$

Les estimations (3.37)-(3.38)-(3.39) permettent donc de contrôler les normes L^2 de la solution en fonction des normes $H(rot)$ des données initiales, ce qui peut laisser penser qu'on a une perte de régularité. En fait, dans les deux résultats qui suivent, nous donnons des estimations qui montrent que le problème est fortement bien posé (estimations en norme $H(rot)$ en fonction de la norme $H(rot)$ des données initiales et estimations en norme L^2 en fonction des normes L^2 des données initiales).

Théorème 9 *La solution $\widetilde{\mathbf{E}} = (\widetilde{E}_x, E_y)^t, E_x$ et H du système (3.26), pour un σ constant positif vérifie les estimations suivantes:*

$$\|\mathbf{rot}\ H\|_{L^2} + \left\|\mathrm{rot}\ \widetilde{\mathbf{E}}\right\|_{L^2} \leq C(\left\|\mathbf{rot}\ H^0\right\|_{L^2} + \left\|\mathrm{rot}\ \widetilde{\mathbf{E}}^0\right\|_{L^2} + \sigma\left\|\mathbf{E}^0\right\|_{L^2}) \tag{3.42}$$

Preuve : L'équation 3.26-(c) et l'estimation (3.36) entraînent:

$$\left\|\mathrm{rot}\ \widetilde{\mathbf{E}}\right\|_{L^2} = \|\partial_t H + \sigma H\|_{L^2} \leq C\mathcal{E}_1(0)^{1/2}$$

L'équation 3.26-(b) et l'estimation (3.36) entraînent:

$$\|\partial_x H\|_{L^2} \leq \|\partial_t E_y\|_{L^2} + \|\sigma E_y\|_{L^2} \leq C\mathcal{E}_1(0)^{1/2}$$

Enfin, les relations (3.26)-(a) et (3.26)-(d) impliquent

$$\|\partial_y H\|_{L^2} = \|\partial_t E_x\|_{L^2} \leq \left\|\partial_t \widetilde{E}_x\right\|_{L^2} + \|\sigma E_x\|_{L^2}$$

ce qui, grâce à (3.36) et (3.40) implique aussi (où C n'est pas toujours la même constante...)

$$\|\partial_y H\|_{L^2} \leq C\mathcal{E}_1(0)^{1/2} + \left\|\sigma E_x^0\right\|_{L^2}$$

On conclut grâce à (3.41). ■

On cherche maintenant à obtenir une estimation en norme L^2 à partir d'une estimation d'énergie d'ordre zéro. On introduit tout d'abord les variables supplémentaires $(E_y^\star, H^\star)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{ll} (\partial_t+\sigma)H=\partial_t H^\star & (i)\\ (\partial_t+\sigma)E_y=\partial_t E_y^\star & (ii)\\ H^\star(0)=H^0,\quad E_y^\star(0)=E_y^0 & \end{array}\right. \tag{3.43}$$

puis l'énergie d'ordre zéro:

$$\mathcal{E}_0(t)=\frac{1}{2}\left(\left\|\widetilde{E}_x\right\|_{L^2}^2+\|E_y\|_{L^2}^2+\|H^\star\|_{L^2}^2+\left\|E_y-E_y^\star\right\|_{L^2}^2\right) \tag{3.44}$$

Théorème 10 *Si σ est une constante positive, l'énergie correspondant à la solution de (3.26)-(3.43) avec des données initiales $(E_x^0, \widetilde{E}_x^0=E_x^0, E_y^0, H^0)$, vérifie l'identité suivante:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{E}_0(t)+2\sigma\|E_y\|^2=(\sigma E_x^0,\widetilde{E}_x)+(\sigma E_y^0,E_y) \tag{3.45}$$

dont on déduit les estimations suivantes:

$$\left\|\widetilde{E}_x\right\|_{L^2}+\|E_y\|_{L^2}+\|H^\star\|_{L^2}+\left\|E_y-E_y^\star\right\|_{L^2}\leq C((1+\sigma t)\left\|\mathbf{E}^0\right\|+\left\|H^0\right\|) \tag{3.46}$$

$$\|H\|+\|E_x\|\leq C((1+\sigma t)\left\|\mathbf{E}^0\right\|+\left\|H^0\right\|) \tag{3.47}$$

Preuve: on part de la formulation (3.26), avec des données initiales $(E_x^0, \widetilde{E}_x^0=E_x^0, E_y^0, H^0)$, et on introduit les primitives $(e_x, \widetilde{e}_x, e_y, h)$ de $(E_x, \widetilde{E}_x, E_y, H)$ définies par

$$g=\int_0^t G(s)ds \qquad (\Longleftrightarrow \partial_t g=G,\ g(0)=0)$$

où g décrit une de ces 4 fonctions. On a donc en particulier

$$\int_0^t \partial_t G(s)ds=G(t)-G(0)=\partial_t g(t)-G(0)$$

En intégrant (3.26), on obtient:

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t e_x-\partial_y h=E_x^0 & (a)\\ \partial_t e_y+\sigma e_y+\partial_x h=E_y^0 & (b)\\ \partial_t h+\sigma h+\partial_x e_y-\partial_y \widetilde{e}_x=H^0 & (c)\\ (\partial_t+\sigma)e_x-E_x^0=\partial_t\widetilde{e}_x-\widetilde{E}_x^0 & (d) \end{array}\right. \tag{3.48}$$

La dernière relation se simplifie compte tenu du fait que $\widetilde{E}_x^0=E_x^0$:

$$(\partial_t+\sigma)e_x=\partial_t\widetilde{e}_x \quad (d)$$

On obtient donc un système analogue à (3.26), avec un second membre constant. On va écrire une identité d'énergie, tenant compte du second membre:

– On applique $\partial_t + \sigma$ à (a) et on multiplie par $\partial_t \widetilde{e}_x$:

$$((\partial_{tt}^2 \widetilde{e}_x, \partial_t \widetilde{e}_x) - (\partial_y(\partial_t + \sigma)h, \partial_t \widetilde{e}_x) = (\sigma E_x^0, \partial_t \widetilde{e}_x)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\partial_t \widetilde{e}_x\right\|^2 - (\partial_y(\partial_t + \sigma)h, \partial_t \widetilde{e}_x) = (\sigma E_x^0, \partial_t \widetilde{e}_x)$$

– On applique $\partial_t + \sigma$ à (b) et on multiplie par $\partial_t e_y$:

$$((\partial_t + \sigma)^2 e_y, \partial_t e_y) + (\partial_x(\partial_t + \sigma)h, \partial_t e_y) = (\sigma E_y^0, \partial_t e_y)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\partial_t e_y\right\|^2 + \left\|\sigma e_y\right\|^2\right) + 2\sigma\left\|\partial_t e_y\right\|^2 + (\partial_x(\partial_t + \sigma)h, \partial_t e_y) = (\sigma E_y^0, \partial_t e_y)$$

– On applique ∂_t à (c) et on multiplie par $(\partial_t + \sigma)h$:

$$(\partial_t(\partial_t + \sigma)h, (\partial_t + \sigma)h) + (\partial_x \partial_t e_y - \partial_y \partial_t \widetilde{e}_x, (\partial_t + \sigma)h) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|(\partial_t + \sigma)h\right\|^2 - (\partial_t e_y, \partial_x(\partial_t + \sigma)h) + (\partial_t \widetilde{e}_x, \partial_y(\partial_t + \sigma)h) = 0$$

En sommant ces trois identités, on obtient:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\partial_t \widetilde{e}_x\right\|^2 + \left\|\partial_t e_y\right\|^2 + \left\|\sigma e_y\right\|^2 + \left\|(\partial_t + \sigma)h\right\|^2\right) + 2\sigma\left\|\partial_t e_y\right\|^2 = (\sigma E_x^0, \partial_t \widetilde{e}_x) + (\sigma E_y^0, \partial_t e_y)$$

En introduisant $e_y^\star$ et $h^\star$:

$$\sigma e_y = \partial_t(e_y^\star - e_y) = E_y^\star - E_y, \quad (\partial_t + \sigma)h = \partial_t h^\star = H^\star$$

on voit que le terme dans le d/dt correspond à l'energie qu'on a défini en (3.44). L'identité précédente se réécrit donc comme (3.45) et implique

$$\mathcal{E}_0(t)^{1/2} \leq \mathcal{E}_0(0)^{1/2} + C\sigma t\left\|\mathbf{E}^0\right\|$$

En remarquant que $\mathcal{E}_0(0)^{1/2} \sim \left\|\mathbf{E}^0\right\| + \left\|H^0\right\|$ on obtient

$$\mathcal{E}_0(t)^{1/2} \leq C((1 + t\sigma)\left\|\mathbf{E}^0\right\| + \left\|H^0\right\|) \tag{3.49}$$

estimation qui implique (3.46). Pour l'estimation de H, on remarque d'après (3.43)-(i),

$$H(t) = H^\star(t) - \sigma\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}H^\star(s)ds$$

Or on peut montrer facilement (voir démo du lemme technique) que

$$\left\|\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}H^\star(s)ds\right\| \leq \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\left\|H^\star(s)\right\|ds$$

et en utilisant l'estimation sur $\|H^\star(s)\|$ on en déduit

$$\left\| \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} H^\star(s) ds \right\| \leq C \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} ((1+s\sigma) \left\|\mathbf{E}^0\right\| + \left\|H^0\right\|) ds$$

d'où

$$\sigma \left\| \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} H^\star(s) ds \right\| \leq C(\sigma t \left\|\mathbf{E}^0\right\| + (1-e^{-\sigma t}) \left\|H^0\right\|)$$

et par conséquent

$$\|H(t)\| \leq C((1+t\sigma) \left\|\mathbf{E}^0\right\| + \left\|H^0\right\|).$$

On peut bien sûr appliquer le même traitement à E_x et finalement obtenir (3.47). ■

Ce résultat donne des estimations en norme L^2 de la solution en fonction des normes L^2 des conditions initiales et confirme encore une fois le caractère fortement bien posé du modèle PML non splitté ainsi que sa stabilité.

Comportements linéaires en temps. Dans l'article de Abarbanel *et. al.* [3], les auteurs observent que la solution du modèle PML non splitté de Gedney (équivalent à celui de Zhao-Cangellaris comme on va le voir plus loin) peut avoir un comportement linéaire en temps, pour des temps relativement longs. Ce n'est pas ce que nous avons appelé dans le paragraphe précédent une instabilité, mais, dans leur exemple, cette croissance linéaire finit par polluer la solution à l'intérieur du domaine de calcul.

A première vue, on pourrait penser que ce résultat est contradictoire avec l'estimation (3.24) qu'on a obtenue par Fourier pour le système de Bérenger, compte tenu du fait qu'on a équivalence entre ce système et le système non splitté. Par ailleurs les estimations de la solution du système non splitté de Zhao-Cangellaris semblent autoriser un tel comportement.

Le système de Gedney étudié dans [3] s'obtient en introduisant comme nouvelle variable $P = \widetilde{E}_x - E_x$ et en éliminant E_x

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \widetilde{E}_x - \sigma(\widetilde{E}_x - P) - \partial_y H = 0 & (a) \\ \partial_t E_y + \sigma E_y + \partial_x H = 0 & (b) \\ \partial_t H + \sigma H + \partial_x E_y - \partial_y \widetilde{E}_x = 0 & (c) \\ \partial_t P = \sigma(\widetilde{E}_x - P) & (d) \end{array} \right. \tag{3.50}$$

Les expériences numériques présentées dans [3] montrent que, bien après que la solution soit sortie du domaine, des instabilités apparaissent sur la variable $\widetilde{E}_x$ (seules les variables $\widetilde{E}_x, E_y, H$ sont représentées).

Supposons ici que σ est une constante positive et $\sigma \leq 1$ et résumons les estimations obtenues d'une part par Fourier et d'autre part par techniques d'énergie (en mettant toutes les dépendances par rapport aux données initiales dans des constantes). Dans tout ce qui suit C désigne une constante indépendante de σ. On peut remarquer d'après les estimations (3.46)

et (3.47) que toutes les variables sont bornées tant que $\sigma t < 1$. Nous supposerons donc ici que t est "assez grand", c'est à dire $t > 1/\sigma > 1$.

– Par Fourier, sur le système de Bérenger, on a:

$$(3.24) \qquad \|E_x\| + \|E_y\| + \|H\| \leq C$$

$$(3.22) \qquad \|H^x\| + \|H^y\| \leq C/\sigma$$

$$(3.25) \qquad \|H^x\| + \|H^y\| \leq C\ t$$

– Par l'énergie, sur Zhao-Cangellaris:

$$(3.47) \quad \|E_x\| \leq C\sigma t, \qquad (3.40) \quad \|E_x\| \leq C/\sigma$$

$$(3.46) \quad \left\|\widetilde{E}_x\right\| \leq C\sigma t$$

$$(3.46) \quad \|E_y\| \leq C\sigma t, \qquad (3.37) \quad \|E_y\| \leq C/\sigma$$

$$(3.47) \quad \|H\| \leq C\sigma t, \qquad (3.39) \quad \|H\| \leq C/\sigma$$

À partir de ces estimations, on peut faire quelques remarques:

1. La seule variable pouvant admettre un comportement linéaire en temps est $\widetilde{E}_x$, toutes les autres sont bornées (à σ fixé) et ce comportement peut devenir sensible lorsque $t > 1/\sigma$ donc pour des instants d'autant plus grands que σ est petit.

2. Les estimations par Fourier semblent être plus précises, puisqu'elles montrent que E_x, E_y et H sont bornées indépendemment de σ, alors que par l'énergie, les bornes explosent lorsque $\sigma \to 0$.

3. Si on considère le système de Gedney (3.50) étudié dans Abarbanel-Gottlieb-Hesthaven, la seule différence c'est qu'on a remplacé l'inconnue E_x par $P = \widetilde{E}_x - E_x$. Si $\widetilde{E}_x$ a un comportement linéaire en temps, et que E_x est borné, il est clair que P admettra également un comportement linéaire en temps.

4. D'après les estimations (3.22) et (3.24), on voit que non seulement les champs physiques E_x, E_y et H sont bornés mais aussi les inconnues splittées H^x et H^y, ce qui montre qu'avec le système de Bérenger, aucune des inconnues ne peut avoir une croissance linéaire en temps...

5. On peut vérifier la remarque précédente par une "étude à la Abarbanel-Gottlieb-Hesthaven"... c'est à dire en regardant les etats d'équilibre atteints pour chacun des systèmes:

   – Bérenger

$$(3.51) \qquad \begin{cases} \partial_t E_x = 0 \Longrightarrow E_x = E_x^0 \\ \partial_t E_y + \sigma E_y = 0 \Longrightarrow E_y = E_y^0 e^{-\sigma t} \\ \partial_t H^x + \sigma H^x = 0 \Longrightarrow H^x = (H^x)^0 e^{-\sigma t} \\ \partial_t H^y = 0 \Longrightarrow H^y = (H^y)^0 \end{cases}$$

Donc ça confirme que toutes les inconnues sont bornées uniformément en temps.

– Zhao-Cangellaris

$$\begin{cases} \partial_t E_x = 0 \Longrightarrow E_x = E_x^0 \\ \partial_t E_y + \sigma E_y = 0 \Longrightarrow E_y = E_y^0 e^{-\sigma t} \\ \partial_t H + \sigma H = 0 \Longrightarrow H = H^0 e^{-\sigma t} \\ (\partial_t + \sigma) E_x = \partial_t \widetilde{E}_x \Longrightarrow \partial_t \widetilde{E}_x = \sigma E_x^0 \Longrightarrow \widetilde{E}_x = \widetilde{E}_x^0 + \sigma t E_x^0 \end{cases} \tag{3.52}$$

On retrouve le comportement linéaire en temps de $\widetilde{E}_x$, les autres variables étant uniformément bornées en temps.

– Gedney

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{E}_x = \sigma(\widetilde{E}_x - P) \Longrightarrow \widetilde{E}_x = \widetilde{E}_x^0 + \sigma t(\widetilde{E}_x^0 - P^0) \\ \partial_t E_y + \sigma E_y = 0 \Longrightarrow E_y = E_y^0 e^{-\sigma t} \\ \partial_t H + \sigma H = 0 \Longrightarrow H = H^0 e^{-\sigma t} \\ \partial_t P = \sigma(\widetilde{E}_x - P) \Longrightarrow \partial_t P = \partial_t \widetilde{E}_x \Longrightarrow P - \widetilde{E}_x = P^0 - \widetilde{E}_x^0 \\ \Longrightarrow \partial_t P = \sigma(\widetilde{E}_x^0 - P^0) \Longrightarrow P = P^0 + \sigma t(\widetilde{E}_x^0 - P^0) \end{cases} \tag{3.53}$$

Les deux inconnues $\widetilde{E}_x$ et P admettent un comportement linéaire en temps.

3.2.3 Sur le comportement aux temps longs des PML [*A12*]

Ce travail a été mené en collaboration avec P. Petropoulos (New Jersey Institute of Technology) et S. Gedney (University of Kentucky). Il a été motivé par l'article de Abarbanel *et. al.* [3] dans lequel les auteurs observent que les solutions de différents modèles PML non splittés peuvent avoir un comportement linéaire en temps, pour des temps relativement longs (cf section précédente). En particulier, le modèle de Zhao-Cangellaris permet une croissance linéaire de la variable $\widetilde{E}_x$.

Dans [***A12***], nous complétons tout d'abord les résultats obtenus dans [***A10***] en établissant un résultat de décroissance d'une énergie d'ordre zéro pour le cas d'un coin. Dans ce papier, nous considérons les équations de Maxwell en polarisation TM (transversalement magnétique). Le problème PML du coin s'écrit alors, en supposant $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \partial_t E_y + 2\sigma E_y + \sigma^2 \int_0^t E_y(t')dt' &= \partial_z H_x - \partial_x H_z \quad (a) \\ \partial_t H_x &= \partial_z E_y \quad (b) \\ \partial_t H_z &= -\partial_x E_y \quad (c). \end{aligned} \tag{3.54}$$

Nous montrons alors la décroissance de l'énergie:

$$\mathcal{E}_0(t) = \frac{1}{2}(||E_y||^2 + ||H_x||^2 + ||H_z||^2) \tag{3.55}$$

ce qui montre que dans un coin, toutes les variables sont uniformément bornées en temps.

On considère ensuite le problème posé dans une couche dans la direction $\hat{z}-$ (parallèle à Ox). Nous avons vu (voir section 3.1.1) que les modèles PML correspondent en fréquence à faire un changement de variable complexe

$$z \to z + \frac{1}{i\omega} \int_0^z \sigma(\xi)\, d\xi,$$

ce qui revient aussi à changer les dérivées par rapport à z par $d(\omega, \sigma(z))\partial_1$ où

$$d(\omega, \sigma(z)) = \frac{i\omega}{\sigma(z) + i\omega} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma(z)}{i\omega}} \tag{3.4}$$

Par ailleurs, un autre changement de variable, que nous noterons "CFS" ("Complex Frequency Shifted"), a été proposé [89, 51, 105, 96] dont l'utilisation est intéressante pour des simulations en domaines allongés ou encore lorsque les excitations sont basses fréquences (voir en particulier [51]), section 5.5.2, p 288). Ce changement de variable consiste à remplacer (3.4) par

$$d(\omega, \sigma(z)) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma(z)}{\gamma + i\omega}}$$

Le problème en temps correspondant nécessite alors d'introduire trois variables auxiliaires (au lieu d'une pour les modèles "classiques"), et peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned}
&\partial_t E_y + \sigma_z(z)(E_y - P_y) = \partial_z H_x - \partial_x H_z && (a)\\
&\partial_t P_y + \gamma(P_y - E_y) = 0 && (b)\\
&\partial_t H_x + \sigma_z(z)(H_x - M_x) = \partial_z E_y && (c)\\
&\partial_t M_x + \gamma(M_x - H_x) = 0 && (d)\\
&\partial_t H_z - \sigma_z(z) H_z - (\gamma + \sigma_z(z)) M_z = -\partial_x E_y && (e)\\
&\partial_t M_z + (\gamma + \sigma_z(z)) M_z + \sigma_z(z) H_z = 0. && (f)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Nous montrons pour ce problème la décroissance de l'énergie du premier ordre:

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}_1(t) \;=\; & \|(\partial_t + \gamma) H_z\|^2 + \|(\partial_t + \gamma + \sigma) E_y\|^2 + \|(\partial_t + \gamma) H_x\|^2 \\
& + \sigma \left(2\gamma \|H_x\|^2 + \sigma \|H_x - M_x\|^2 + \sigma \|M_x\|^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Grâce au lemme 1, ce résultat entraîne que toutes les variables sont uniformément bornées en temps. Les constantes apparaissant dans ces estimations font intervenir $1/(\sigma + \gamma)$ et $1/\gamma$ et sont donc naturellement perdues lorsque $\gamma \to 0$. Le nouveau changement de variable CFS permet donc d'obtenir une version non splittée des PML dont la solution ne souffre pas d'une croissance linéaire.

Des résultats numériques, comparant la solution obtenue avec la version non splittée des PML de Gedney [50] et celle obtenue avec la version des PML-CFS, confirment la suppression de la croissance linéaire avec ce dernier modèle.

Notons cependant que ce modèle est plus coûteux car il demande l'introduction de trois nouvelles inconnues en 2D au lieu d'une. Son utilisation est donc plutôt réservée à certains cas particuliers de simulations (domaines allongés, temps longs, basses fréquences).

3.3 Couches absorbantes PML pour les ondes élastiques [*A*11]

Ce travail a été mené en en collaboration avec S. Fauqueux et P. Joly.

3.3.1 Application du critère de stabilité au cas des ondes élastiques

Nous avons décrit en section 3.1.2 la condition nécessaire hautes fréquences de stabilité du modèle PML de Bérenger pour un système hyperbolique général, qui a été établie dans [***A*11**]. Dans ce même article, une étude plus spécifique des ondes élastique a été menée.

En section 2 de [***A*11**], la construction générale du modèle PML est appliquée aux équations de l'élastodynamique. Pour ce faire, il est nécessaire de formuler le problème comme un système du premier ordre. Nous reprenons ici les notations du cahpitre 1 et plus particulièrement de la section 1.4 et considérons la formulation (1.6) des équations de l'élastodynamique. Des résultats de simulations numériques dans différents milieux élastiques isotropes ou orthotropes sont présentés. Retenons ici en particulier les matériaux (II) et (III) dont les surfaces de lenteur sont représentées sur la figure 3.2.

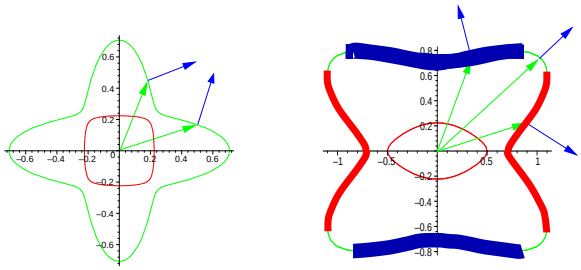


FIG. 3.2: *Slowness diagrams. Left: material (II) - Right: material (III).*

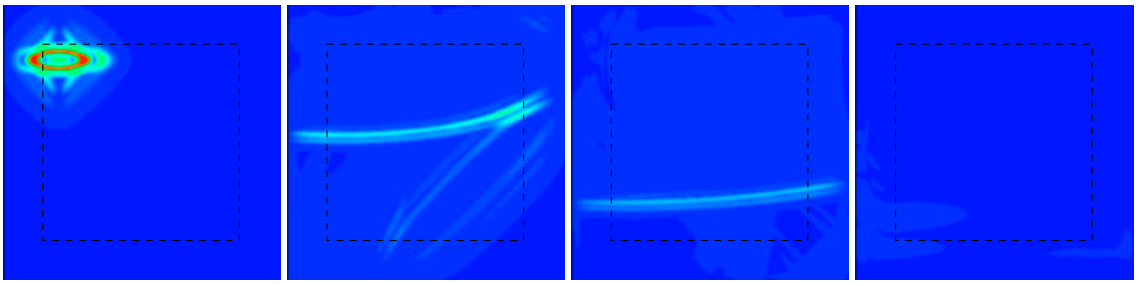


FIG. 3.3: *Some snapshots at different times for the orthotropic medium (II).*

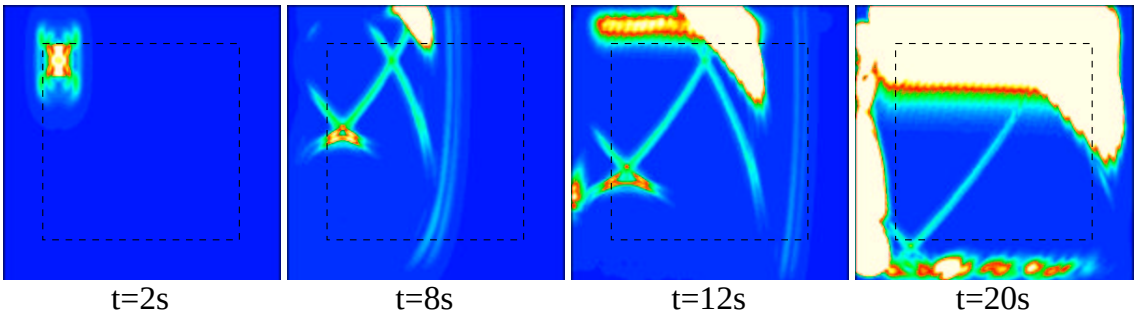


FIG. 3.4: *Some snapshots at different times for the orthotropic media (III).*

Ces illustrations numériques semblent montrer que les PML sont stables dans le milieu (II) (cf Fig. 3.3) alors qu'elles sont clairement instables dans le milieu (III) (cf Fig. 3.4). Ces résultats s'expliquent parfaitement à l'aide de notre critère de stabilité hautes fréquences (3.17) :

- Pour le milieu (II), pour tout K, on a $V_1(K)S_1(K) \geq 0$ et $V_2(K)S_2(K) \geq 0$, par conséquent la condition de stabilité est satisfaite aussi bien pour une couche dans la direction x_1 que pour une couche dans la direction x_2.

- Pour le milieu (III) par contre il existe des vecteurs K (dont les extrêmités décrivent la ligne en trait épais sur la figure) pour lesquels $V_1(K)S_1(K) < 0$ et il existe d'autres vecteurs K dont les extrêmités décrivent la ligne en trait moyen sur la figure) pour lesquels $V_2(K)S_2(K) < 0$ ce qui signifie que le critère géométrique n'est satisfait ni pour une couche dans la direction x_1 ni pour une couche dans la direction x_2.

D'autres résultats numériques sont présentés dans [***A*11**], en particulier des résultats dans un milieu entièrement constitué de la couche ce qui permet d'une part de vérifier que l'explosion observée dans un cas où le critère géométrique n'est pas satisfait, n'est pas dûe à une éventuelle instabilité des conditions mises en bout de couche (l'explosion a alors lieu avant que l'onde n'atteigne le bord du domaine) et d'autre part que cette explosion est bien exponentielle en temps.

Enfin, signalons que la condition géométrique (3.17) peut également s'exprimer en fonction des coefficients d'élasticité :

Théorème 11 *La condition nécessaire de stabilité (3.17) est équivalente à:*

$$(\mathcal{C}_1) \qquad \{(c_{12}+c_{33})^2 - c_{11}(c_{22}-c_{33})\} \times \{(c_{12}+c_{33})^2 + c_{33}(c_{22}-c_{33})\} \leq 0.$$

3.3.2 Conditions suffisantes de stabilité

La condition géométrique est nécessaire mais pas suffisante, comme l'illustre la simulation de la figure 3.6 faite dans un milieu dont les surfaces de lenteur sont clairement convexes (voir Figure 3.5) et donc vérifiant la condition hautes fréquences (3.17).

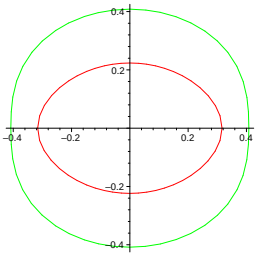


FIG. 3.5: *Slowness curves and Wave fronts in the medium (IV).*

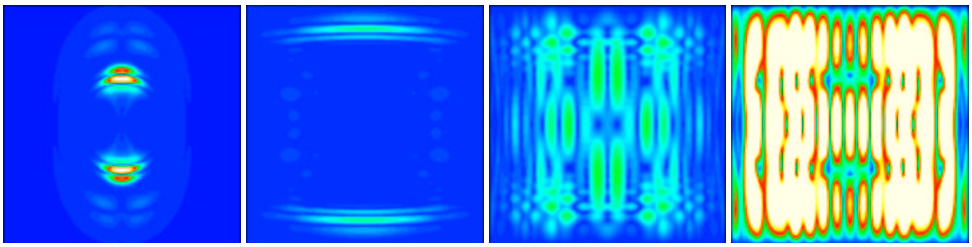


FIG. 3.6: *Experiment (IV) : some snapshots at different times for the orthotropic medium (IV) with only x_1 PML.*

Néanmoins, dans tous les exemples d'instabilité pour lesquels (3.17) est satisfaite, l'explosion avait lieu très tard, bien après que l'onde ait quitté le domaine de calcul.

Rappelons que le système est stable si (voir section 3.1.2)

$$\forall\, k \in \mathbb{R}^m, \text{ les solutions } \omega(k,\varsigma) \text{ satisfont } \Im m\ \omega(k,\varsigma) \geq 0. \tag{3.16}$$

pour toute solution de la relation de dispersion. Lorsque la condition (3.17) est satisfaite, les solutions $\omega(k,\varsigma)$ sont du bon côté du plan complexe pour les hautes fréquences. Pour obtenir une condition suffisante de stabilité, nous exprimons que ces solutions ne doivent pas couper l'axe réel, de telle sorte qu'elles restent toujours du bon côté, pour toutes les fréquences. Nous avons ainsi obtenu le:

Théorème 12 *Une condition suffisante pour que le modèle PML avec absorption dans la direction x_1 soit stable est qu'une des deux conditions soit réalisée:*

$$(\mathcal{C}_{x_1})_1 \qquad (c_{12}+c_{33})^2 < (c_{11}-c_{33})\,(c_{22}-c_{33})$$

$$(\mathcal{C}_{x_1})_2 \quad \begin{cases} \textit{(i)} & (c_{11}-c_{33})\,(c_{22}-c_{33}) \leq (c_{12}+c_{33})^2 \leq \max\left\{-c_{33}(c_{22}-c_{33}), c_{11}(c_{22}-c_{33})\right\} \\ \textit{(ii)} & (c_{11}-c_{33})\left(c_{11}c_{22}-c_{33}^2\right) < (c_{11}+c_{33})\,(c_{12}+c_{33})^2 \\ \textit{(iii)} & (c_{12}+2c_{33})^2 < c_{11}c_{22} \end{cases}$$

Conclusion. Nous avons un critère simple pour prédire si les PML sont stables dans un milieu élastique donné. Il reste à trouver des alternatives pour les milieux anisotropes pour lesquels elles sont instables... C'est actuellement un problème ouvert.

3.4 Couches absorbantes PML pour l'acoustique en écoulement en régime harmonique [*A*13]

Ce travail a été mené en collaboration avec Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia (SMP, CNRS-ENSTA) et Guillaume Legendre (SMP, CNRS-ENSTA et ONERA). Il concerne l'analyse de PML pour un problème d'acoustique en écoulement en régime harmonique.

3.4.1 Introduction

Les PML ont été utilisées pour des problèmes d'acoustique en écoulement en régime temporel. Plusieurs auteurs ont reporté des instabilités du modèle PML splitté (3.2) [78, 59, 72, 108]. Au départ, ces instabilités ont été expliquées par le fait que le système était seulement faiblement bien posé à cause du splitting. Dans [72], Hesthaven a proposé une technique de stabilisation, produisant des couches ayant le même type de comportement que les PML, en ramenant artificiellement le nombre de Mach progressivement à zéro dans la couche. Ces couches ne sont toutefois plus parfaitement adaptées. Par la suite, un nouveau modèle de PML, cette fois-ci fortement bien posé, a été proposé dans [4]. Mais ce modèle souffrait encore d'instabilités - ce qui confirme que du point de vue numérique le concept pertinent est celui de stabilité plutôt que faiblement ou fortement bien posé - et les auteurs ont proposé une stabilisation qui de nouveau détruit le caractère parfaitement adapté des couches. L'analyse de stabilité hautes fréquences développée dans [***A*11**] (voir section 3.1.2) permet de comprendre facilement que l'origine de ces instabilités provient de l'existence d'ondes dont les vitesses de groupe et de phase ne satisfont pas le critère géométrique (3.17). Plus récemment, de nouvelles idées pour construire des PML stables ont émergé indépendemment de plusieurs équipes. Ces idées ont été développées dans [79, 42, 67] pour les applications en temps et dans [***A*13**] pour les applications en harmonique. Ces différents travaux traitent le cas d'un écoulement uniforme, qui est parallèle ou orthogonal aux couches.

Plus précisément, dans [***A*13**] nous considérons un problème de propagation d'ondes acoustiques dans un conduit en présence d'un écoulement uniforme en régime harmonique. Pensant tout d'abord que les PML de Bérenger, étant instables en transitoire, ne conviendraient pas en harmonique, nous avons proposé un nouveau modèle, consistant en une modification du changement de variable classique, qui supprime ces instabilités. Précisons qu'une instabilité en régime transitoire correspond à un comportement exponentiellement croissant en espace, en régime harmonique. Nous avons mené l'analyse de convergence des deux modèles PML lorsque l'épaisseur de la couche tend vers l'infini, et à notre grande surprise, les deux modèles convergent exponentiellement. Il semble donc qu'il y ait une différence essentielle entre les questions se posant pour les problèmes harmoniques et pour les problèmes transitoires. Signalons toutefois que, en pratique, le nouveau modèle se révèle plus robuste que le modèle de Bérenger, qui admet des solutions d'amplitude arbitrairement grande dans la couche.

3.4.2 Présentation du problème

Nous nous intéressons à un problème de propagation d'ondes acoustiques dans un conduit infini $\Omega = \mathbb{R} \times [0, h]$ (voir figure 3.7) en présence d'un écoulement uniforme, de nombre de Mach $M = v_0/c_0 > 0$, en régime fréquentiel. On supposera ici que $k = \omega/c_0 > 0$. Pour un tel écoulement, les équations d'Euler linéarisées se ramènent à l'équation scalaire de Helmholtz

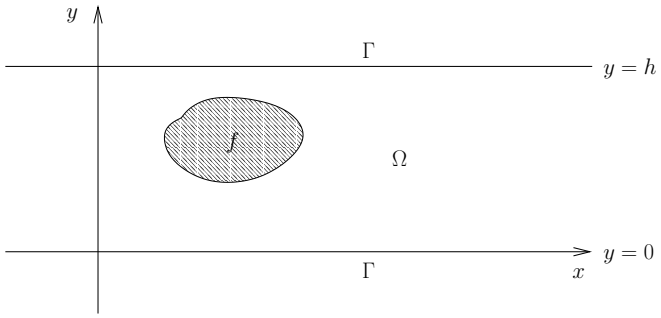


FIG. 3.7: *Le conduit infini.*

convectée satisfaite par le champ de pression :

$$(1-M^2)\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+2ikM\,\frac{\partial p}{\partial x}+k^2\,p=f \text{ in } \Omega, \tag{3.58}$$

auxquelles on ajoute une condition aux limites de Neumann sur le bord du conduit $\Gamma=\partial\Omega$:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0 \text{ on } \Gamma. \tag{3.59}$$

et une condition de radiation qui selectionne les ondes sortantes. Dans ce cas particulier, cette condition de radiation s'exprime à l'aide des modes de conduit. L'analyse modale permet également d'avoir une interprétation des PML et de comprendre d'une autre façon la provenance des instabilités. Sans entrer dans les détails (voir [***A13***]), notons que les modes de conduit sont des fonctions définies par

$$p_n^{\pm}(x,y)=e^{i\beta_n^{\pm}x}\,\varphi_n(y),$$

les $+$ correspondant aux modes sortants et les $-$ aux modes entrants et où $\beta_n^{\pm}$ sont les nombres d'onde. On introduit la quantité

$$K_0=\frac{kh}{\pi\sqrt{1-M^2}}, \tag{3.60}$$

et $N_0=[K_0]$ sa partie entière. Il y a deux types de modes:

– *les modes propagatifs* associés à des nombres d'ondes réels, lorsque $n\le N_0$, $\beta_n^{\pm}$

$$\beta_n^{\pm}=\frac{-kM\pm\sqrt{k^2-\frac{n^2\pi^2}{h^2}(1-M^2)}}{1-M^2}. \tag{3.61}$$

Leur nombre croît avec le nombre de Mach M. Des calculs simples montrent que la vitesse de groupe $\frac{\partial\omega}{\partial\beta}$ est positive pour les modes p_n^+ et négative pour les modes p_n^-. Un effet de l'écoulement est qu'il peut exister, lorsque

$$\sqrt{1-M^2}\,\frac{n\pi}{h}<k<\frac{n\pi}{h},$$

des modes p_n^+ qui ont une vitesse de phase $\frac{\omega}{\beta}$ négative (ce qui revient à dire que $\beta<0$) et une vitesse de groupe positive. Ce sont les modes appelés amont-inverses.

– *les modes evanescents* associés à des nombres d'ondes complexes, lorsque $n > N_0$:

$$\beta_n^{\pm} = \frac{-kM \pm i\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{h^2}(1-M^2) - k^2}}{1-M^2}. \tag{3.62}$$

Dans ce cas, $p_n^{\pm}$ est exponentiellement décroissant quand $x \to \pm\infty$.

Dans ce qui suit je présente brièvement les résultats essentiels de [***A13***]. L'analyse modale permet tout d'abord d'interpréter les PML "usuelles" de Bérenger et de proposer un nouveau modèle ne donnant pas naissance à des modes instables. Nous faisons ensuite l'analyse de convergence lorsque l'épaisseur de la couche tend vers l'infini.

3.4.3 Interprétation des PML de Bérenger à l'aide des modes et présentation du nouveau modèle

Le modèle PML de Bérenger peut être construit dans le domaine fréquentiel comme un changement de variable complexe [28, 102, 36, 35] qui revient à faire la substitution suivante dans l'équation considérée:

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x} \tag{3.63}$$

où α est une fonction complexe, telle que $\alpha = 1$ dans le domaine de calcul Ω_b compris entre $x = x_-$ et $x = x_+$. On va supposer ici que dans les couches α est constant,

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_+ \leq x \leq x_-, \\ \alpha & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.64}$$

Pour n'importe quelle valeur de α, les couches sont parfaitement adaptées. Il est facile de faire l'analyse modale dans la couche et de voir que les modes sont transformés en

$$p_{n,\alpha}^{\pm}(x,y) = e^{i\beta_{n,\alpha}^{\pm} x}\varphi_n(y),\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.65}$$

avec

$$\beta_{n,\alpha}^{\pm} = \frac{\beta_n^{\pm}}{\alpha},\ n \in \mathbb{N}.$$

On peut remarquer que la transformation

$$\begin{array}{rccc} S_\alpha & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \dfrac{z}{\alpha} \end{array}$$

due au changement de variable PML est une similitude de rapport $\frac{1}{|\alpha|}$ et d'angle $\arg\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\arg(\alpha)$ autour de l'origine dans le plan complexe. Pour l'équation de Helmholtz, tous les modes sortants propagatifs sont des réels positifs et les modes evanescents sont imaginaires purs positifs. Si on suppose que α vérifie

$$Re(\alpha) > 0,\ Im(\alpha) < 0, \tag{3.66}$$

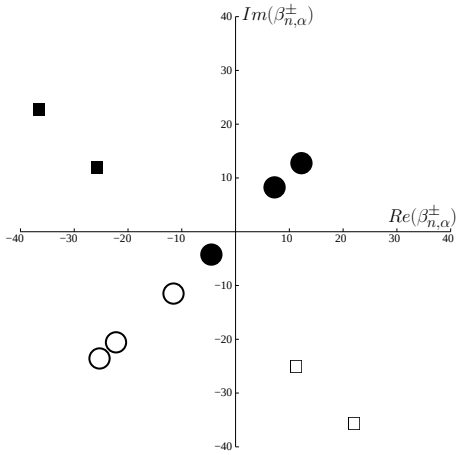


FIG. 3.8: *Effet de la similitude S_α ($\alpha = 0.2(1-i)$) sur les premiers nombres d'onde des modes de Helmholtz convecté en présence d'un mode amont-inverse ($k = 6$, $M = 0.4$ and $h = 1$). Les cercles (resp. les carrés) sont associés aux modes propagatifs (resp. evanescents) tandis que les symboles pleins (resp. vides) correspondent aux modes sortants (resp. entrants).*

cette similitude, appliquée à l'équation de Helmholtz, a pour effet d'envoyer tous les modes dans le demi-plan complexe supérieur c'est à dire de les rendre tous evanescents. Par contre, lorsqu'on l'applique à l'équation de Helmholtz convectée, en présence de modes amonts inverses, ces modes sortants sont envoyés dans le demi-plan complexe inférieur, c'est à dire qu'ils sont transformés en modes instables (exponentiellement croissants). C'est ce qui est représenté sur la figure 3.8 où le nombre d'onde du mode amont-inverse correspond au cercle plein se trouvant dans le demi-plan complexe inférieur. Il est alors naturel de changer l'origine autour de laquelle effectuer la similitude, de manière à envoyer les modes amont inverses dans le demi-plan complexe supérieur, tout en gardant les autres modes sortants du bon côté. Ceci revient à appliquer une translation avant la similitude, ce qui est équivalent à faire la substitution suivante

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x} + i\lambda$$

avec

$$\lambda = -\frac{kM}{1-M^2}. \tag{3.67}$$

Les nombres d'onde sont alors transformés en

$$\beta^{\pm}_{n,\alpha,\lambda} = \frac{\beta^{\pm}_n - \lambda}{\alpha},\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.68}$$

Nous étudions ensuite le problème avec une couche PML de longueur finie L et montrons que ce problème est bien posé. Il est bien connu que l'unicité de la solution d'un problème posé en régime harmonique est assurée par une condition de rayonnement à l'infini, qui sélectionne la "bonne" solution, c'est à dire dans notre cas les ondes sortantes. La condition (3.66) joue un rôle analogue dans le sens que si α la satisfait, ce sera bien l'onde sortante qui sera selectionnée. Par contre, si α ne vérifie pas (3.66), on pourrait montrer que le problème est toujours bien

posé, mais que la solution retenue est la "mauvaise". Si on ne connaît pas la solution qu'on cherche (ce qui en général est le cas!), il est alors très difficile de se rendre compte qu'on n'a pas la bonne solution. C'est très différent de ce qui se passe en transitoire, où la solution explose dès qu'on n'a pas choisi le bon signe du facteur d'amortissement.

3.4.4 Analyse de convergence

En pratique, on travaille avec une couche d'épaisseur finie L. Nous avons étudié l'erreur entre la solution exacte p_b et la solution obtenue avec des PML d'épaisseur L, p_b^L, pour les deux modèles (plus précisément les solutions restreintes au domaine Ω_b). Je renvoie à [***A13***] pour l'analyse détaillée et je présente ici le résultat essentiel que nous avons obtenu. Nous faisons l'hypothèse que le problème est bien posé, ce qui revient à supposer que

$$k \neq \sqrt{1-M^2}\,\frac{n\pi}{h},\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.69}$$

Pour des coefficients α et λ constants, nous avons le :

Théorème 13 *On fait les hypothèses (3.66) et (3.69). Il existe $L_1 > 0$ tel que pour tout $L \geq L_1$, la solution p_b^L du problème avec PML converge vers la solution exacte p_b. Plus précisément, il existe une constante $\mathcal{C}$ dependant de M et k telle que*

$$\left\|p_b - p_b^L\right\|_V \leq \mathcal{C}\, e^{-\eta L/|\alpha|}\, \|p_b\|_V\,, \tag{3.70}$$

où η est défini par:

$$\eta = \frac{2k}{1-M^2}\ \min\left(-\sin(\theta)\sqrt{1-\frac{{N_0}^2}{{K_0}^2}},\ \cos(\theta)\sqrt{\frac{(N_0+1)^2}{{K_0}^2}-1}\right), \tag{3.71}$$

On peut obtenir un résultat analogue pour des coefficients variables. Ce qui est intéressant c'est que la convergence est exponentielle en $L/|\alpha|$. En pratique, on préfèrera fixer la longueur L de la couche et prendre un α de module "assez petit", ce qui entre autres évite de reconstruire des maillages pour chaque longueur de couche.

Ce qui nous a beaucoup étonné c'est que le λ n'intervient pas dans cette étude de convergence: les deux modèles convergent de la même façon! Nous les avons cependant implémenté tous les deux afin de les comparer. Cette étude numérique met en évidence que $|\alpha|$ doit être choisi dans un certain intervalle pour avoir une erreur acceptable. Pour de trop grandes valeurs de $|\alpha|$, la couche n'est pas assez absorbante et des réflexions apparaissent à son extrêmité. Pour de trop petites valeurs de $|\alpha|$, l'absorption dans la couche est très forte mais le maillage devient trop grossier pour représenter les modes qui s'y propagent, ce qui produit des erreurs numériques. En présence de modes amont inverses, le nouveau modèle se révèle plus robuste, dans le sens où l'intervalle des $|\alpha|$ autorisés est plus large et où en sortant de cet intervalle l'erreur ne croît pas aussi brutalement qu'avec le modèle de Bérenger.

Chapitre 4

Conclusions, travaux en cours et perspectives

4.1 Travaux en cours

Les travaux présentés dans les chapitres précédents se poursuivent dans plusieurs directions. Même si pour certains ils sont déjà bien avancés, je ne fais que les décrire brièvement ici.

Visco-élasticité. La première extension des travaux décrits dans le chapitre 1 concerne la propagation en milieu visco-élastique et est développée dans le cadre de la thèse d'A. Ezziani que je co-encadre avec P. Joly. Certains milieux, comme les fonds marins par exemple, peuvent dissiper de l'énergie et il peut être important de tenir compte de ce phénomène, ce qui peut être fait en supposant que ces milieux suivent une loi de comportement du type (1.2). Notre objectif est d'étendre la méthode numérique développée pour le cas élastique à ce type de matériaux.

Raffinement espace-temps en élastodynamique. La deuxième extension en cours des travaux décrits dans le chapitre 1 est développée dans le cadre de la thèse de J. Rodriguez, financée par un contrat EDF, que je co-encadre avec P. Joly. Elle concerne le raffinement espace-temps pour les équations de l'élastodynamique. Il s'agit d'étendre au cas élastique une méthode de raffinement développée par Thierry Fouquet pour les équations de Maxwell [48]. Pour des nombreuses raisons (singularités de la solution, géométrie complexe) il peut être intéressant de raffiner localement dans une certaine région. Si on prend le même pas de temps sur tout le domaine de calcul, pour des raisons de stabilité il sera contraint par le plus petit pas d'espace, ce qui mène à un schéma coûteux et dispersif. L'idée est donc de raffiner aussi localement en temps, afin de garder la même condition de stabilité partout. Il se pose alors la question de proposer des schémas de raccord stables et convergents.

Convergence des domaines fictifs pour le CND. Méthode $Q_1^{div} - P_1^{disc} - P_1^{cont}$. Il s'agit ici de travaux faisant suite aux travaux sur la méthode des domaines fictifs présentés au chapitre 2. Nous avons évoqué en fin de section 2.2.1 que le choix des espaces d'approximation pour (σ, v, λ), à savoir $Q_1^{div} - Q_0 - P_1^{cont}$, posait des questions de convergence dans certaines

configurations de fissures. Des résultats numériques ont en effet montré que plus la fissure se rapproche d'une direction diagonale aux axes (ou plutot sa tangente...) et plus il est difficile de trouver un bon rapport de pas H/h pour lequel il y a convergence. Il semble qu'il existe, en plus de la condition (2.19), une condition du type $H \leq C_2 h$ pour avoir convergence et que l'écart entre les deux constantes C_1 et C_2 s'amenuise avec l'orientation de la fissure...

Cette question de convergence soulève plusieurs points que nous avons commencé à étudier avec J. Rodriguez et C. Tsogka. Nous avons d'abord envisagé le cas simplifié des ondes scalaires. Une étude numérique montre le même type de conclusions que dans le cas élastique (convergence sous des conditions très restrictives sur les pas de discrétisation). Un premier objectif est de comprendre l'origine de ces conditions restrictives pour ce choix d'espaces d'approximation.

Pour améliorer la convergence, nous proposons de remplacer l'espace des vitesses Q_0 par l'espace P_1^{disc} des fonctions discontinues et linéaires par élément, qui contient $\mathrm{div}(Q_1^{div})$. Les résultats numériques obtenus avec ce nouvel élément sont très encourageants tant pour le cas scalaire que pour le cas élastique. Par contre au niveau de l'analyse, nous avons pu montrer la convergence de la méthode dans le cas scalaire, mais le cas élastique pose encore des questions ouvertes (encore une fois à cause de la symétrie du tenseur des contraintes).

Enfin, nous avons jusqu'ici toujours considéré des approximations conformes, en particulier pour le multiplicateur. Or, il peut s'avérer (au moins numériquement) que des choix d'approximations non conformes conduisent à de meilleurs résultats. C'est une piste que nous aimerions aussi explorer.

Diffraction par un obstacle mobile. Ce thème entre dans le cadre de mes travaux sur la méthode des domaines fictifs.

Au niveau mathématique et numérique, c'est un sujet riche en questions ouvertes, auquel je me suis intéressée, en collaboration avec A. Ben Haj Yedder (stage de DEA), P. Joly et A. Komech. Au niveau des applications, son intérêt est plus discutable (intérêt principalement militaire) et je ne le discuterai pas ici...

Du point de vue numérique, l'application de la méthode des domaines fictifs à ce problème est particulièrement avantageuse, car elle ne nécessite pas de remailler tout le domaine de calcul à chaque itération en temps, mais seulement la surface de l'obstacle et de recalculer un nouveau terme de couplage. Nous avons traité le problème en acoustique et avec une condition aux limites de type Dirichlet et nous avons développé une méthode qui donne des résultats prometteurs. Les questions de l'analyse de la méthode (stabilité, convergence) sont pour l'instant ouvertes.

Sur le plan mathématique, il existe également de nombreuses questions ouvertes. En ce qui concerne l'obstacle en rotation uniforme, nous avons émis deux conjectures. La première concerne l'énergie associée au problème de Cauchy. Il existe des résultats de Cooper et Strauss [39, 38], pour un obstacle en mouvement quelconque, montrant que sous des hypothèses restrictives (et difficiles à interpréter) l'énergie est bornée, et il existe également des contrexemples (Popov et Rangelov [99]) d'obstacles en mouvement qui conduisent à une énergie exponentiellement croissante en temps. Nous pensons que pour un solide en rotation uniforme, l'énergie reste toujours bornée. Cette conjecture est confirmée par de nombreux résultats numériques. Une deuxième conjecture concerne le comportement aux temps longs de la solution dûe à une source harmonique. Ce comportement diffère selon que le rapport entre la fréquence de rotation de l'obstacle et celle de la source est rationnel ou non: dans

le premier cas, la solution devient périodique, les fréquences excitées étant des combinaisons linéaires des deux fréquences caractéristiques ; dans le second cas, aucun régime périodique ne s'établit. Nous avons là encore pu confirmer cette conjecture par des expériences numériques. Un article regroupant ces résultats est actuellement en préparation.

4.2 Perspectives

Les directions de recherche sur les problèmes de propagation et diffraction en milieu solide sont évidemment très nombreuses et je me bornerai à indiquer seulement quelques pistes... Une des extension naturelle des travaux précédents est de considérer des complexifications des modèles (conditions de contact avec frottement, thermo-élasticité, milieux poro-élastiques...) pour lesquelles de nouvelles questions se posent (choix des méthodes numériques, analyse). L'objectif est de pouvoir traiter des problèmes le plus réalistes possibles. Or dans bon nombre de situations, les milieux de propagation sont constitués de différentes parties dans lesquelles la propagation peut être très différente, soit que le milieu physique change (fluide/ élastique, élastique/visco-élastique...) soit que les contrastes soient très importants (contrastes de vitesses dans un milieu élastique hétérogène), soit encore qu'on ait une géométrie particulière ou une singularité à prendre en compte localement... Une des voies d'avenir pour repousser les limitations actuelles est d'être capable d'utiliser une méthode numérique adaptée à chaque partie du domaine, la difficulté étant de coupler les différentes méthodes de façon stable. Il existe énormément de travaux dans ce sens à l'heure actuelle, pas seulement dans le domaine des ondes, méthodes de décomposition de domaine (eg []), méthodes hybrides (eg [])... C'est dans ce sens que se situent les travaux entamés avec J. Rodriguez sur le raffinement espace-temps, où la même méthode numérique est utilisée avec des paramètres de discrétisation qui changent. Un autre couplage plus difficile auquel je pense, et sur lequel je ne connais pas de travaux, est le couplage de modèles: le modèle complet (équation des ondes approchée par éléments finis par exemple, dans une partie où le milieu est très complexe) avec un modèle simplifié (rayons, paraxiales... dans une partie du domaine où les hypothèses simplificatrices s'appliquent). Les méthodes asymptotiques permettent par exemple dans beaucoup de cas d'apporter déjà des informations précieuses pour un moindre coût et une des préoccupations du Prof. Kiselev (institut de Mathematiques de St Petersbourg), avec qui je viens de démarrer une collaboration, est justement d'établir des approximations asymptotiques du comportement d'ondes élastiques dans des situations complexes. Notre objectif (tout à fait modeste dans un premier temps...) est de comparer les prédictions données par la théorie asymptotique avec nos résultats numériques et de nous aider à la compréhension de ces phénomènes. Des critères numériques de validité de ces méthodes asymptotiques pourraient se révéler un outil très utile dans la pratique.

Plusieurs pistes également concernant la méthode des domaines fictifs. Le "vrai" problème de CND est un problème de détection de fissures, c'est à dire un problème inverse. Nous avons jusqu'ici seulement traité le problème direct. Or la méthode des domaines fictifs semble particulièrement bien adaptée à la résolution du problème inverse et c'est un point sur lequel j'ai l'intention de collaborer avec Houssem Haddar. Un autre point d'intérêt concernant la méthode des domaines fictifs est la question de la prise en compte de nouvelles conditions aux limites, de type conditions de transmission ou conditions de Robin. Pour l'instant on ne sait pas traiter ce type de conditions avec cette méthode et c'est une de ses limitations actuelles importante pour les applications. Le traitement des conditions de transmission permettrait

de pouvoir bien suivre la géométrie des interfaces dans un milieu hétérogène. Il semble qu'il y ait une réelle difficulté à savoir comment prolonger la solution, liée au fait que ces conditions mêlent à la fois la trace de la solution et celle de sa dérivée normale. Trouver des idées nouvelles pour réussir à traiter ces conditions est vraiment un enjeu pour élargir l'éventail des applications de la méthode.

En ce qui concerne les PML, les travaux présentés dans la section 3 ouvrent de nombreuses voies d'investigation. Pour les problèmes en transitoire, comment construire des PML stables pour un problème réaliste d'aéro-acoustique, avec un écoulement pas forcément uniforme ou parallèle à la couche ? La même question se pose pour les problèmes d'élastodynamique posés dans des milieux anisotropes pour lesquels les PML de Bérenger explosent. Sans entrer dans les détails, il existe encore de nombreuses questions, par exemple en ce qui concerne les comportements aux temps longs pour différents modèles (en 2D et en 3D), ou des questions d'ordre numérique (choix des paramètres de couches, étude de schémas d'ordres élevés...). En ce qui concerne les problèmes posés en régime harmonique, nous avons l'intention, toujours en collaboration avec A-S. Bonnet et G. Legendre, de nous pencher sur des modèles plus complexes, pour lesquels on ne dispose plus nécessairement de conditions de Dirichlet-to-Neumann (équations de Galbrun, ondes le Lamb). Par ailleurs, les PML ont été assez peu étudiées en régime harmonique, contrairement au cas transitoire. Or nous avons vu qu'elles ne se comportent pas de la même façon dans les deux cas, ce qui suscite de nouvelles questions, par exemple comment savoir, lorsqu'on ne dispose pas de solution de référence, que la solution avec PML converge vers la solution exacte ? ...

Appendice

Avant de terminer ce mémoire, j'aimerais faire une remarque biographique troublante. Janvier 1991, date de ma soutenance de thèse, quelques jours plus tard, première guerre du golfe. Mars 2003, je dépose mon HDR, quelques jours plus tard la deuxième guerre du golfe est déclenchée... "Drôle" de coïncidence, comme c'est étrange, comme c'est bizarre... Je me demande pourquoi ils synchronisent toujours leurs guerres avec mes soutenances... Je ne voudrais pas qu'on y voit un rapport de cause à effet, mais dans le doute, c'est la dernière fois que j'écris un mémoire ! En ce début de troisième millénaire, malheureusement, ce constat est plus que jamais d'actualité "Il est hélas devenu évident aujourd'hui que notre technologie a dépassé notre humanité" (A. Einstein). Évidemment, ces évènements dramatiques relativisent l'importance du contenu de ce mémoire, et comme dirait Boris Vian [1]:
"Tout ce que je viens de vous dire, peut-être que ça n'apporte pas grand-chose, mais remarquez bien que *ça ne retire rien non plus* (en italique comme dans les bouquins de G. Leroux, quand *ça va loin*)."

J'aimerais terminer par cette petite histoire de Mulla Nasrudin : [2] :

"Les gens raisonnables voient toujours les choses de la même façon, dit un jour à Nasrudin le khan de Samarcande.
- Précisément, c'est là l'ennui avec les gens "raisonnables", répliqua Nasrudin. Dans le lot il y en a toujours au moins quelques-uns qui ne voient qu'une possibilité là où il y en a deux." ...
Le lendemain, Nasrudin traversa la ville sur un âne, la tête tournée vers la queue de l'animal. Il entra au palais où siégeait le khan, entouré de ses conseillers:
" Sa Majesté voudrait-elle avoir l'obligeance de demander à ces gens ce qu'ils ont sous les yeux ?"
Le khan posa la question. Tous de répondre : "Un homme monté sur un âne sens devant derrière !
- Voilà ! dit Nasrudin. Il ne leur est pas venu à l'idée que ce pouvait être moi qui étais tourné dans le bon sens, et l'âne dans le mauvais."

1. "Textes et Chansons", Appendice et Pièces justificatives
2. "Sens devant derrière", Extrait de Caravane de Rêves, Idries Shah.

Bibliographie

[1] S. Abarbanel and D. Gottlieb, *A mathematical analysis of the PML method*, J. Comput. Phys, 134 (1997), pp. 357–363.

[2] ——, *On the construction and analysis of absorbing layers in CEM* , Applied Num. Math., 27 (1998), pp. 331–340.

[3] S. Abarbanel, D. Gottlieb, and J. Hesthaven, *Long Time Behavior of the Perfectly Matched Layer Equations in Computational Elactromagnetics*, J. Scientific Comp., 17 (2002), pp. 405–422.

[4] S. Abarbanel, D. Gottlieb, and J. S. Hesthaven, *Well-Posed perfectly matched layers for advective acoustics*, J. Comput. Phys., 154 (1999), pp. 266–283.

[5] M. Amara and J. Thomas, *Equilibrium finite elements for the linear elastic problem*, Numer. Math., 33 (1979), pp. 367–383.

[6] D. N. Arnold, F. Brezzi, and J. Douglas, *PEERS: A new mixed finite element for plane elasticity*, Japan J. Appl. Math., 1 (1984), pp. 347–367.

[7] G. P. Astrakhantsev, *Method of fictitious domain method for a second-order elliptic equation with natural boundary conditions*, USRR Compu. Math. and Math. Phys., 18 (1978), pp. 114–121.

[8] I. Babuska, *The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers*, Numer. Math., 20 (1973), pp. 179–192.

[9] A. Bachelot, L. Bounhoure, and A. Pujols, *Couplage éléments finis–potentiels retardés pour la diffraction électromagnétique par un obstacle hétérogène.*, Numer. Math., 89 (2001), pp. 257–306.

[10] A. Bachelot and V. Lubet, *On the coupling of boundary element and finite element methods for a time problem*, in Mathematical and numerical aspects of wave propagation, SIAM, ed., Mandelieu-La Napoule, 1995, pp. 130–139.

[11] A. Bamberger, B. Chalindar, P. Joly, J. Roberts, and J. Téron, *Absorbing boundary conditions for Rayleigh waves*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 9 (1988), pp. 1016–1049.

[12] A. Bamberger, B. Engquist, L. Halpern, and P. Joly, *Higher order paraxial approximations for the wave equation*, SIAM J. Appl. Math., 48 (1988), pp. 129–154.

[13] A. Bamberger and T. Ha Duong, *Formulation Variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiels retardés de la diffraction d'une onde acoustique*, Math. Methods Appl. Sci., 8 (1986), pp. 405–435.

[14] A. Bamberger, P. Joly, and J. Roberts, *Second order absorbing boundary conditions for the wave equation: a solution for the corner problem*, SIAM J. Numer. Anal., 27 (1990), pp. 323–352.

[15] D. Barbier, *Méthode des potentiels retardés pour la simulation de la diffraction d'onde élastodynamique par une fissure tridimensionnelle*, PhD thesis, École Polytechnique, 1999.

[16] A. Bayliss and E. Turkel, *Radiation Boundary Conditions for Wave-Like Equations*, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1980), pp. 707–725.

[17] E. Bécache, *Résolution par une méthode d'équations intégrales d'un problème de diffraction d'ondes élastiques transitoires par une fissure*, PhD thesis, Université de Paris 6, 1991. Thèse.

[18] ——, *Equations intégrales pour l'équation des ondes.*, in Méthodes numériques d'ordre élevé pour les ondes en régime transitoire, G. Cohen and P. Joly, eds., Ecole des Ondes, INRIA, Rocquencourt, 1994.

[19] E. Bécache, A. Chaigne, G. Derveaux, and P. Joly, *Time-domain simulation of a guitar. i: Model and method.*, soumis, (2003).

[20] E. Bécache, E. Chovet, F. Delprat-Jannaud, and P. Lailly, *Reflection tomography : How to cope with multiple arrivals ?*, in Proc. of the 62th S.E.G. Meeting, New-Orleans, 1992.

[21] E. Bécache, F. Collino, and P. Joly, *Higher-order numerical schemes and operator splitting for solving 3D paraxial wave equations in heterogeneous media*, Rapport de Recherche 3497, INRIA., 1998.

[22] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka, *Eléments finis mixtes et condensation de masse en élastodynamique linéaire. (i) construction*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I (1997), pp. 545–550.

[23] ——, *Étude d'un nouvel élément fini mixte permettant la condensation de masse*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I (1997), pp. 1281–1286.

[24] ——, *Fictitious domain method applied to the scattering by a crack of transient elastic waves in anisotropic media : a new family of mixed finite elements leading to explicit schemes*, in Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, SIAM, 1998, pp. 322–326.

[25] A. Bendali and L. Halpern, *Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell dans le vide en dimension* 3, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 307 (1988), pp. 1011–1013.

[26] J. P. Bérenger, *A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves*, J. of Comp. Phys., 114 (1994), pp. 185–200.

[27] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer–Verlag, 1991.

[28] W. C. Chew and W. H. Weedon, *A 3D Perfectly Matched Medium from Modified Maxwell's Equations with stretched coordinates*, IEEE microwave and Optical Tech. Letters, 7 (1994), pp. 599–604.

[29] P. Clément, *Approximation by finite element functions using local regularization*, Rev. Franç. Automat. Informat. Rech. Opér. Sér. Rouge Anal. Numér., 9 (1975), pp. 77–84.

[30] G. Cohen and P. Monk, *Gauss point mass lumping schemes for Maxwell's equations*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 14 (1998), pp. 63–88.

[31] F. Collino, *High order absorbing boundary conditions for wave propagation models: straight line boundary and corner cases.*, in Second International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Newark, DE, 1993), P. SIAM, Philadelphia, ed., 1993, pp. 161–171.

[32] F. Collino and P. Joly, *Splitting of operators, alternate directions and paraxial approximations for the 3-D wave equation*, SIAM J. Sci. Comput., 16 (1995), pp. 1019–1048.

[33] F. Collino, P. Joly, and F. Millot, *Fictitious domain method for unsteady problems: Application to Electromagnetic scattering*, J.C.P, 138 (1997), pp. 907–938.

[34] F. Collino and P. Monk, *Conditions et couches absorbantes pour les équations de Maxwell*, in Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell, G. Cohen and P. Joly, eds., Ecole des Ondes, INRIA, Rocquencourt, 1998, ch. 4.

[35] ——, *The perfectly matched layer in curvilinear coordinates*, SIAM J. Sci. Comput., 19 (1998), pp. 2061–2090.

[36] F. Collino and P. B. Monk, *Optimizing the perfectly matched layer*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 164 (1998), pp. 157–171.

[37] F. Collino and C. Tsogka, *Application of the PML Absorbing Layer Model to the Linear Elastodynamic Problem in Anisotropic Heteregeneous Media*, Geophysics, 66 (2001), pp. 294–307.

[38] J. Cooper and W. Strauss, *Energy boundedness and decay of waves reflecting off a moving obstacle*, Siam J. Math. Anal., 16 (1985), pp. 1165–1179.

[39] ——, *The initial boundary problem for the Maxwell equations in the presence of a moving body*, Siam J. Math. Anal., 16 (1985), pp. 1165–1179.

[40] G. Derveaux, *Modélisation numérique de la guitare acoustique*, PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2002.

[41] K. Dgaygui and P. Joly, *Absorbing boundary conditions for linear gravity waves*, SIAM J. Appl. Math., 54 (1994), pp. 93–131.

[42] J. Diaz and P. Joly, *Stabilized perfectly matched layers for advective wave equations.* In preparation.

[43] Y. Ding, *Méthodes numériques pour l'équation intégrale de bord dans le problème de diffraction d'ondes acoustiques par une surface rigide.* , PhD thesis, Université d'Orsay, 1989. Thèse.

[44] A. Elmkies and P. Joly, *Éléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell: le cas 2D*, Tech. Report 3035, INRIA, Novembre 1996.

[45] B. Engquist and L. Halpern, *Long-time behaviour of absorbing boundary conditions*, Math. Methods Appl. Sci., 13 (1990), pp. 189–203.

[46] B. Engquist and A. Majda, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comp., 31 (1977), pp. 629–651.

[47] M. Filipe-Rocha, *Étude mathématique et numérique d'un problème d'interaction fluide - structure dépendant du temps par la méthode de couplage Élements finis - Équations intégrales.*, PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1994. Thèse de doctorat.

[48] T. Fouquet, *Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell.*, PhD thesis, Dauphine University, Paris, 2000.

[49] S. Garcès, *Application des méthodes de domaines fictifs à la modélisation des structures rayonnantes tridimensionnelles*, PhD thesis, 1998.

[50] S. D. Gedney, *Anisotropic Perfectly Matched Layer-Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices*, IEEE Trans. Antennas Propag., 44 (1996), pp. 1630–1639.

[51] ——, *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, ed. A. Taflove, Artech House, Boston, 1998, ch. 5, "The Perfectly Matched Layer Absorbing Medium", pp. 263–343.

[52] V. Girault and R. Glowinski, *Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem*, Japan J. Indust. Appl. Math., 12 (1995), pp. 487–514.

[53] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, 1986.

[54] D. Givoli, *Non reflecting boundary conditions*, J. Comput. Phys., 94 (1991).

[55] R. Glowinski and Y. Kuznetsov, *On the solution of the Dirichlet problem for linear elliptic operators by a distributed Lagrange multiplier method*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 327 (1998), pp. 693–698.

[56] R. Glowinski, T. Pan, and J. Periaux, *A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 111 (1994), pp. 283–303.

[57] ——, *A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by Navier-Stokes equations*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 112 (1994), pp. 133–148.

[58] R. Glowinski, T.-W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, and J. Periaux, *A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for flows around moving rigid bodies: application to particulate flow*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 30 (1999), pp. 1043–1066.

[59] J. W. Goodrich and T. Hagstrom, *A comparison of two accurate boundary treatments for computational aeroacoustics*, AIAA Paper, 97-1585 (1997).

[60] M. Grote and J. Keller, *Nonreflecting Boundary Conditions for Time Dependent Scattering*, J. Comput. Phys., 127 (1996), pp. 52–81.

[61] T. Ha Duong, *A finite element method for the double-layer potential solutions of the Neumann exterior problem*, Math. Methods Appl. Sci., 2 (1980), pp. 191–208.

[62] T. Ha Duong and P. Joly, *A generalized image principle for the wave equation with absorbing boundary conditions and application to fourth order schemes*, Num. Methods for P.D.E., 10 (1994), pp. 411–434.

[63] ——, *On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods; part i : The homogeneous case*, Math. of Comp., 62 (1994), pp. 539–563.

[64] ——, *The Energy Method for the Heterogeneous Wave Equation with High Order Boundary Conditions*, SEA Bull. Math., 19 (1994), pp. 71—76.

[65] T. Hagstrom, *On High-order Radiation Boundary Condition*, vol. **86** of IMA Vol. Math. Appl., Springer-Verlag New York, Inc., 1997, pp. 1–21.

[66] ——, *Radiation Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves*, Acta Numerica, 8 (1999).

[67] T. Hagstrom and I. Nazarov, *Absorbing layers and radiation boundary conditions for jet flow simulations*, in Proc. of the 8th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, 17-19 june 2002, Breckenridge, CO, USA, 2002. AIAA paper 2002-2606.

[68] L. Halpern, *Étude de conditions aux limites absorbantes pour des schémas numériques relatifs à des équations hyperboliques linéaires*, PhD thesis, Paris IV, 1980.

[69] ——, *Absorbing boundary conditions for the discretization schemes of the one-dimensional wave equation.*, Math. Comp., 38 (1982), pp. 421–435.

[70] E. Heikkola, Y. A. Kuznetsov, and K. N. Lipnikov, *Fictitious domain methods for the numerical solution of three-dimensional acoustic scattering problems*, J. Comput. Acoust., 7 (1999), pp. 161–183.

[71] E. Heikkola, Y. A. Kuznetsov, P. Neittaanmäki, and J. Toivanen, *Fictitious domain methods for the numerical solution of two-dimensional scattering problems*, J. Comput. Phys., 145 (1998), pp. 89–109.

[72] J. S. Hesthaven, *On the Analysis and Construction of Perfectly Matched Layers for the Linearized Euler Equations*, J. Comp. Phys., 142 (1998), pp. 129–147.

[73] R. L. Higdon, *Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multidimensional wave equation*, Math. Comp., 47 (1986), pp. 437–459.

[74] ——, *Radiation boundary conditions for elastic wave propagation*, SIAM J. Numer. Anal., 27 (1990), pp. 831–870.

[75] ——, *Absorbing boundary conditions for elastic waves* , Geophysics, 56 (1991), pp. 231–241.

[76] ——, *Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media*, J. Comput. Phys., 101 (1992), pp. 386–418.

[77] ——, *Initial-Boundary Value Problems for Linear Hyperbolic Systems*, SIAM Review, 28 (86).

[78] F. Q. Hu, *On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer*, J. Comput. Phys., 129 (1996), pp. 201–219.

[79] ——, *A Stable, Perfectly Matched Layer for Linearized Euler Equations in Unsplit Physical Variables*, J. Comput. Phys., 173 (2001), pp. 455–480.

[80] J. C. Nédélec, *A new family of mixed finite elements in* $\mathbb{R}^3$, Numer. Math., 50 (1986), pp. 57–81.

[81] C. Johnson and B. Mercier, *Some equilibrium finite element methods for two-dimensional elasticity problems*, Numer. Math., 30 (1978), pp. 103–116.

[82] P. Joly and L. Rhaouti, *Domaines fictifs, éléments finis h(div) et condition de neumann: le problème de la condition inf-sup*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I (1999), pp. 1225–1230.

[83] P. Joly and J. Tuomela, *A new theoretical approach to absorbing layers*, SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), pp. 671–698.

[84] M. Kern and A. Oloui, *Construction of higher order finite elements with mass lumping using computer algebra techniques*, tech. report, INRIA, 1998. SIGMA annual Repport.

[85] J. Kim, *A boundary thin obstacle problem for a wave equation. Commun. in Partial Differential Equations*, Commun. in Partial Differential Equations, 14 (1989), pp. 1011–1026.

[86] H.-O. Kreiss and J. Lorenz, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*, in Pure and Appl. Math., vol. 136, Academic Press, Boston, USA, 1989.

[87] Y. A. Kuznetsov, *Fictitious component and domain decomposition methods for the solution of eigenvalue problems*, in Computing methods in applied sciences and engineering, VII (Versailles, 1985), North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 155–172.

[88] Y. A. Kuznetsov and K. N. Lipnikov, *3D Helmholtz wave equation by fictitious domain method*, Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, 13 (1998), pp. 371–387.

[89] M. Kuzuoglu and R. Mittra, *Frequency Dependence of the Constitutive Parameters of Causal Perfectly Matched Anisotropic Absorbers*, IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 6 (1996), pp. 447–449.

[90] V. Lange, *Equations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif*, PhD thesis, Univ. Bordeaux I, 1995. Thèse de doctorat.

[91] G. Lebeau and M. Schatzman, *A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary*, J.Diff.Eqs., 53 (1984), pp. 309–361.

[92] V. Lubet, *Couplage Potentiels retardés-Eléments finis pour la résolution d'un problème de diffraction d'ondes par un obstacle inhomogène.*, PhD thesis, Univ. Paris VI, 1991. Thèse de doctorat.

[93] J. Métral and O. Vacus, *Caractère bien posé du problème de Cauchy pour le système de Bérenger*, C.R.A.S., I Math. (1999), pp. 847–852.

[94] M. E. Morley, *A family of mixed finite elements for linear elasticity*, Numer. Math., 55 (1989), pp. 633–666.

[95] P. A. Raviart and J. M. Thomas, *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems*, in Lecture Notes in Mathematics, no. 606, Proc. of math. aspects on the finite element method, Berlin Heidelberg New York: Springer, 1977, pp. 292–315.

[96] P. G. Petropoulos, *Reflectionless sponge layers as absorbing boundary condition for the numerical solution of Maxwell's equations in rectangular, cylindrical, and spherical coordinates.*, SIAM J. Appl. Math., 60 (2000), pp. 1037–1058.

[97] P. G. Petropoulos, L. Zhao, and A. C. Cangellaris, *A reflectionless sponge layer absorbing boundary condition for the solution of Maxwell's equations with high-order staggered finite difference schemes.*, J. Comput. Phys., 139 (1998), pp. 184–208.

[98] J. Pitkäranta, *Boundary Subspaces for the Finite Element Method With Lagrange Multipliers*, Numer. Math., 33 (1979), pp. 273–289.

[99] G. S. Popov and T. V. Rangelov, *On the exponential growth of the local energy for moving bodies*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 40 (1987), pp. 21–23.

[100] A. Pujols, *Equations intégrales Espace-Temps pour le système de Maxwell - Application au calcul de la Surface Equivalente Radar* , PhD thesis, Université de Bordeaux I, 1991. Thèse de doctorat.

[101] A. N. Rahmouni, *Des modèles PML bien posés pour divers problèmes hyperboliques*, PhD thesis, Université Paris Nord-Paris XIII, 2000.

[102] C. Rappaport, *Perfectly Matched Absorbing Conditions Based on Anisotropic Lossy Mapping of Space*, IEEE Microwave and Guided Wave Letters., 5 (1995), pp. 90–92.

[103] A. Reynolds, *Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems*, Geophysics, 43 (1978), pp. 1099–1110.

[104] L. Rhaouti, *Domaines fictifs pour la modélisation d'un probème d' interaction fluide-structure: simulation de la timbale*, PhD thesis, Paris IX, 1999.

[105] J. A. Roden and S. D. Gedney, *Convolutional PML (CPML): An Efficient FDTD Implementation of the CFS-PML for Arbitrary Media*, Microw. Opt. Tech. Letters, 27 (2000), pp. 334–339.

[106] T. Sayah, *Méthodes de potentiels retardés pour les milieux hétérogènes et l'approximation des couches minces par conditions d'impédance généralisées en electromagnétisme.*, PhD thesis, Univ. Paris VI, 1995. Thèse de doctorat.

[107] R. Stenberg, *A family of mixed finite elements for the elasticity problem*, Numer. Math., 53 (1988), pp. 513–538.

[108] C. K. W. Tam, L. Auriault, and F. Cambuli, *Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains*, J. Comput. Phys., 144 (1998), pp. 213–234.

[109] ——, *Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized euler equations in open and ducted domains*, J. Comput. Phys., 144 (1998), pp. 213–234.

[110] I. Terrasse, *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés*, PhD thesis, École Polytechnique, 1993.

[111] N. Tordjman, *Eléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*, PhD thesis, Univ. Paris IX, 1995.

[112] L. Trefethen and L. Halpern, *Well posedness of one way equations and absorbing boundary conditions*, Math. Comp., 47 (1986), pp. 421–435.

[113] L. N. Trefethen, *Group Velocity in Finite Difference Schemes*, SIAM Review, 24 (82).

[114] ——, *Group Velocity Interpretation of the Stability Theory of Gustafsson, Kreiss and Sundström*, J. Comp. Phys., 49 (83).

[115] ——, *Instability of Difference Models for Hyperbolic Initial Boundary Value Problems*, Comm. Pure and Applied Math., 37 (84), pp. 329–367.

[116] C. Tsogka, *Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans des milieux fissurés.*, PhD thesis, Dauphine University, Paris, 1999.

[117] S. V. Tsynkov, *Numerical Solution of Problems on Unbounded Domains*, Appl. Numer. Math., 27 (1998), pp. 465–532.

[118] E. Turkel and A. Yefet, *Absorbing PML boundary layers for wave-like equations*, Appl. Numer. Math., 27 (1998), pp. 533–557.

[119] L. Zhao and A. C. Cangellaris, *A General Approach for the Development of Unsplit-Field Time-Domain Implementations of Perfectly Matched Layers for FDTD Grid Truncation*, IEEE Microwave and Guided Letters, 6 (1996).

[120] L. Zhao and A. C. Cangellaris, *Gt-pml: Generalized theory of perfectly matched layers and its application to the reflectionless truncation of finite-difference time-domain grids*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 44 (1996), pp. 2555–2563.

[121] R. W. Ziolkowski, *Time-derivative Lorentz material model-based absorbing boundary condition*, IEEE Trans. Antennas Propagation, 45 (1997), pp. 1530–1535.

Liste des travaux présentés

Articles publiés ou acceptés

[*A*1] E. Bécache, J. C. Nédélec, N. Nishimura. *Regularization in 3D for anisotropic elastodynamic crack and obstacle problems.* J. of Elasticity, 31, 25-46, 1993.

[*A*2] E. Bécache. *a Variational Boundary Integral Equation Method for an Elastodynamic Antiplane Crack.* Int. J. for Numerical Meth. in Eng.,vol 36, 1993.

[*A*3] E. Bécache, T. Ha Duong. *A Space-Time Variational Formulation for the Boundary Integral Equation in a 2D Elastic Crack Problem.* RAIRO M2AN, vol 28, 1994.

[***A5***] E. Bécache, C. Tsogka, P. Joly. *Éléments finis mixtes et condensation de masse en élastodynamique linéaire. (I) Construction* , C.R. Acad. Sci. Paris, Analyse numérique, t. 325, Série I, 1997.

[***A6***] E. Bécache, F. Collino, P. Joly. *Higher order variational finite difference schemes for solving 3-D paraxial wave equations using splitting techniques*, Wave Motion, vol 31, issue no. 2, 101–116, 2000.

[***A7***] E. Bécache, C. Tsogka, P. Joly. *An analysis of new mixed finite elements for the approximation of wave propagation problems* , SINUM Vol. 37 Number 4 pp. 1053-1084, 2000. (aussi paru en rapport de recherche, INRIA , 3445, juin 98).

[***A8***] E. Bécache, C. Tsogka, P. Joly. *Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers for 2D elastic wave propagation*, J. of Comp. Acous., Vol. 9, No. 3 , pp 1175–1203 (September 2001) (aussi paru en rapport de recherche INRIA, RR-3889, Mars 2000).

[***A9***] E. Bécache, C. Tsogka, P. Joly. *A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem* , SIAM J. of Num. Anal. , Vol. 39, Number 6, pp 2109–2132, 2002 (aussi paru en rapport de recherche, INRIA , 3717, juin 99, avec une autre démonstration de la convergence).

[***A10***] E. Bécache, P. Joly. *On the analysis of Bérenger's Perfectly Matched Layers for Maxwell's equations, M2AN, vol. 36 No 1, pp 87-120, 2002.*

[***A11***] E. Bécache, S. Fauqueux, P. Joly. *Stability of Perfectly Matched Layers, Group Velocities and Anisotropic Waves, à paraître dans J. Comp. Phys. (Rapport de Recherche INRIA, 4304, 2001).*

[***A13***] E. Bécache, A. S. Bonnet, G. Legendre, *Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation, à paraître dans SIAM J. of Num. Anal. (Rapport de (Rapport de Recherche INRIA, 4690, 2003).*

Articles soumis et parus en rapports de recherche

[***A12***] E. Bécache, P. G. Petropoulos, S. Gedney. *On the long-time behavior of unsplit Perfectly Matched Layers, (Rapport de Recherche INRIA, 4538, 2002).*

Proceedings de conférences internationales

[***PR7***] E. Bécache, A. Chaigne, G. Derveaux, P. Joly. *Numerical simulation of a guitar.* ECCM (European Conference on Computational Mechanics), June, 2001, Cracow, Poland.

[***PR8***] E. Bécache, P. Joly, G. Scarella *A fictitious domain method for unilateral contact problems in non-destructive testing.* 1st MIT Conference, June 12-14, 2001, Cambridge, USA.

Rapports de recherche (non inclus dans les sections précédentes)

[***RR1***] E. Bécache, P. Joly , C. Tsogka *Mixed Finite Elements, Strong Symmetry and Mass Lumping for Elastic Waves.* Rapport de recherche, INRIA , 3717, juin 99.

Rapports de contrats

[*RC*1] P. Lailly, F. Delprat-Jannaud, E. Bécache, E. Chovet. *Reflection tomography: How to cope with multiple arrivals? Part I: Method and preliminary results.* 3ème rapport annuel, Consortium PSI , Septembre 1992.

[*RC*2] E. Bécache. *Reflection tomography: How to cope with multiple arrivals? Part II : A new gradient computation method: continuous and discrete problems.* 3ème rapport annuel, Consortium PSI , Septembre 1992.

Encadrements de thèses

J'indique ici les thèses que j'ai co-encadrées ou que je co-encadre toujours avec P. Joly:

- C. Tsogka, thèse de l'université Paris Dauphine, financée par un contrat EDF, soutenue en décembre 1999.
- G. Derveaux, thèse de l'école Polytechnique, soutenue en juin 2002 (participation à l'encadrement de façon un peu moins intensive que sur les autres thèses).
- G. Scarella, thèse en cours, démarrée en Octobre 2000, financée par un contrat EDF, en collaboration avec le LMA (CNRS)
- A. Ezziani, thèse en cours, démarrée en Octobre 2001 au départ dans le cadre d'un contrat avec l'IFREMER (1 an)
- J. Rodriguez, thèse en cours, démarrée en Octobre 2001, financée par un contrat EDF