



HAL
open science

Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun

Guillaume Legendre

► **To cite this version:**

Guillaume Legendre. Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun. Autre. ENSTA ParisTech, 2003. Français. NNT : 2003PA066384 . tel-00004930

HAL Id: tel-00004930

<https://pastel.hal.science/tel-00004930>

Submitted on 14 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie

Spécialité :

SCIENCES MÉCANIQUES

présentée par

Guillaume LEGENDRE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Sujet de la thèse :

**RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DANS UN FLUIDE EN ÉCOULEMENT :
ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE
DE L'ÉQUATION DE GALBRUN**

soutenue le 29 septembre 2003 devant le jury composé de :

| | | |
|-----------------|------------------------------------|---------------------|
| M. | Abderrahmane Bendali | Rapporteur |
| M ^{me} | Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia | Directrice de thèse |
| M. | Bruno Després | Examinateur |
| M. | François Dubois | Rapporteur |
| M. | Vincent Pagneux | Examinateur |
| M. | Christophe Peyret | Examinateur |
| M. | Bernard Poirée | Examinateur |

À ma famille.

Remerciements

Les premiers pas dans la recherche, et plus particulièrement dans la recherche doctorale, se font rarement seul et sans aide ni soutien. Mon cas ne fait pas exception et je tiens ici à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Mes premiers remerciements sont adressés à Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, qui a accepté de diriger ces travaux. Son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'ont conduit bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer. J'ai énormément appris auprès d'elle et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.

Je veux exprimer toute ma reconnaissance à Abderrahmane Bendali et François Dubois qui ont accepté de rédiger un rapport sur ce mémoire et remercier vivement Bruno Després, Vincent Pagneux et Bernard Poirée de m'avoir fait l'honneur, en participant au jury de cette thèse, d'être associés à ce travail.

Je remercie également l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales d'avoir été à l'origine de cette thèse et de l'avoir financée, et plus particulièrement le Département de Simulation Numérique des écoulements et Aéroacoustique pour m'avoir accueilli et fait bénéficier de ses moyens pendant la durée de cette thèse.

Je remercie très sincèrement Christophe Peyret pour toute l'aide, les encouragements, les conseils et l'amitié qu'il m'a largement prodigués durant ces trois dernières années.

Je tiens aussi à remercier Jean-François Mercier, tout d'abord pour m'avoir supporté dans son bureau, mais aussi pour avoir répondu à bon nombre de mes interrogations en mathématiques, en mécanique des fluides ou en acoustique, Éliane Bécache, pour m'avoir fait découvrir plus en détail les fameuses *perfectly matched layers* et leur vaste bibliographie, ainsi que pour l'agréable collaboration qui a suivi, Patrick Ciarlet, Christophe Hazard, Marc Lenoir et Éric Lunéville qui ont toujours su m'aider et répondre à mes diverses questions, ainsi que Christophe Bailly pour les éclaircissements qu'il a pu m'apporter sur certains des aspects de l'acoustique en écoulement.

Je remercie chaleureusement Daniel Martin pour son aide précieuse et efficace lors de mes nombreux déboires avec le code MÉLINA.

Je souhaite remercier mesdames Ghislaine Denis, Brigitte Commelin et Annie Marchal pour leur aide inestimable face aux formalités administratives et logistiques, ainsi que leur éternelle bonne humeur.

Je remercie également les nombreux membres (qu'ils soient permanents ou de passage) de l'unité de mathématiques appliquées de l'ENSTA, du DSN à l'ONERA et du projet ONDES de l'INRIA pour (entre autres) leur accueil, leurs discussions et, plus généralement, l'ambiance de travail conviviale¹. Je salue en particulier deux autres membres de l'auto-baptisé "groupe des doctorants de l'UMA" (qui a aujourd'hui bien grandi...), Fabrice et François, que je remercie pour... Tout !

Je remercie enfin, et non le moins, Maria José pour son soutien indéfectible et sa patience à mon égard, que ce soit durant de difficiles périodes de doute ou simplement jour après jour.

¹N'oublions pas non plus les fameux et formidables psaumes organisés à l'UMA !

Table des matières

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduction | 5 |
| Conventions et notations | 13 |
| 1 Équation de Galbrun | 19 |
| 1.1 Descriptions du mouvement d'un fluide | 19 |
| 1.1.1 Représentation de Lagrange | 19 |
| 1.1.2 Représentation d'Euler | 20 |
| 1.2 Équations de la mécanique des fluides en variables d'Euler | 20 |
| 1.2.1 Équations de conservation pour un fluide parfait en évolution adiabatique | 20 |
| 1.2.2 Équation d'état | 22 |
| 1.2.3 Système des équations de la mécanique des fluides parfaits en évolution adiabatique en variables d'Euler | 22 |
| 1.3 Équations de la mécanique des fluides en variables de Lagrange | 23 |
| 1.3.1 Changement de variables Euler-Lagrange | 23 |
| 1.3.2 Système des équations de la mécanique des fluides parfaits en évolution adiabatique en variables de Lagrange | 24 |
| 1.4 Perturbations des équations de conservation en représentation mixte | 24 |
| 1.4.1 Perturbations des équations en variables de Lagrange | 24 |
| 1.4.2 Passage en représentation mixte | 27 |
| 1.4.3 Retour en représentation d'Euler | 29 |
| 1.5 Équation dite de Galbrun | 29 |
| 1.6 Remarques sur le modèle | 30 |
| 1.7 Notes bibliographiques | 30 |
| 2 Régularisation en écoulement uniforme | 33 |
| 2.1 Le problème dans un guide infini | 33 |
| 2.2 Un cas modèle : le problème sans écoulement | 35 |
| 2.2.1 Analogie avec l'électromagnétisme | 35 |
| 2.2.2 La méthode de régularisation | 37 |
| 2.3 Régularisation en écoulement uniforme | 38 |
| 2.3.1 Une équation pour le rotationnel du déplacement | 38 |
| 2.3.2 Formulation variationnelle du problème régularisé | 39 |
| 2.3.3 Équivalence | 42 |
| 2.4 Convergence et estimations d'erreur | 42 |
| 2.5 Discrétisation du problème par éléments finis | 45 |
| 2.6 Résultats numériques | 46 |
| 2.7 Quelques remarques | 52 |
| 2.7.1 Effets du maillage | 52 |
| 2.7.2 "Limites" du procédé | 54 |

| | | |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3 | Régularisation en écoulement cisailé | 59 |
| 3.1 | Généralités | 59 |
| 3.2 | Écoulement cisailé discontinu | 60 |
| 3.2.1 | Description du problème | 60 |
| 3.2.2 | Quelques observations préliminaires | 61 |
| 3.2.3 | Le problème régularisé | 62 |
| 3.2.4 | Position mathématique du problème | 62 |
| 3.2.5 | Application | 68 |
| 3.3 | Écoulement cisailé “régulier” | 72 |
| 3.3.1 | Équation différentielle pour le rotationnel du déplacement | 72 |
| 3.3.2 | Résolution de l’équation différentielle | 73 |
| 3.3.3 | Étude du problème régularisé | 75 |
| 3.3.4 | Quelques réflexions | 76 |
| 4 | Couches absorbantes parfaitement adaptées | 77 |
| 4.1 | Introduction | 77 |
| 4.2 | The physical and the mathematical models | 78 |
| 4.2.1 | The problem in the infinite duct | 78 |
| 4.2.2 | Reduction to a bounded domain | 80 |
| 4.2.3 | Well posedness | 81 |
| 4.3 | The PML model | 82 |
| 4.3.1 | Modal analysis of Bérenger’s model in a waveguide | 82 |
| 4.3.2 | The new PML formulation for the convected Helmholtz equation | 83 |
| 4.4 | PML truncation. Error estimates | 86 |
| 4.4.1 | Truncation of the absorbing layer and well posedness | 86 |
| 4.4.2 | Reduction to a problem posed in Ω_b | 87 |
| 4.4.3 | Convergence and error estimates | 89 |
| 4.5 | Varying coefficients | 93 |
| 4.6 | Numerical results | 94 |
| 4.6.1 | The no inverse upstream mode case | 94 |
| 4.6.2 | The inverse upstream mode case | 95 |
| 4.6.3 | Some practical remarks on the use of PMLs for time-harmonic problems | 96 |
| 4.7 | Conclusion | 98 |
| 5 | Couches absorbantes parfaitement adaptées pour l’équation de Galbrun | 99 |
| 5.1 | Position du problème dans un guide infini | 99 |
| 5.2 | Le cas dissipatif | 100 |
| 5.2.1 | Principe d’absorption limite | 100 |
| 5.2.2 | Étude du problème dissipatif | 101 |
| 5.2.3 | Convergence vers un problème limite | 102 |
| 5.2.4 | Extension du principe à d’autres écoulements | 106 |
| 5.3 | Problème avec couches absorbantes parfaitement adaptées | 107 |
| 5.3.1 | Position du problème | 107 |
| 5.3.2 | Étude du problème variationnel | 109 |
| 5.3.3 | Convergence et estimations d’erreurs | 114 |
| 5.4 | Résultats numériques | 121 |
| 5.4.1 | Propagation de modes dans un conduit | 121 |
| 5.4.2 | Rayonnement d’une source acoustique | 122 |
| 5.4.3 | Rayonnement d’une source tourbillonnaire | 122 |
| | Conclusion et perspectives | 127 |
| A | Vérifications | 129 |

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| B | Rappels mathématiques | 133 |
| B.1 | Espaces de Hilbert | 133 |
| B.1.1 | Définitions | 133 |
| B.1.2 | Dual topologique d'un espace de Hilbert | 133 |
| B.2 | Formulations faibles | 134 |
| B.2.1 | Généralités sur les espaces de Sobolev | 134 |
| B.2.2 | Lemme de Lax-Milgram | 135 |
| B.3 | Théorie des opérateurs | 136 |
| B.3.1 | Opérateurs bornés | 136 |
| B.3.2 | Opérateurs compacts | 136 |
| B.3.3 | Opérateurs auto-adjoints | 137 |
| B.3.4 | Théorème de Steinberg | 138 |
| C | Calcul de modes guidés | 139 |
| C.1 | Modes guidés en écoulement uniforme | 139 |
| C.2 | Modes en écoulement uniforme par morceaux | 141 |
| D | Étude de solutions particulières d'une équation de transport | 143 |
| D.1 | Quelques préliminaires | 143 |
| D.1.1 | Solution de l'équation homogène | 143 |
| D.1.2 | Fonctions de Green | 144 |
| D.1.3 | Solution générale de l'équation différentielle | 145 |
| D.2 | Résolution en domaine borné | 146 |
| D.3 | Résolution en domaine non borné | 147 |
| E | Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme | 149 |
| | Bibliographie | 159 |

Introduction

Ce document présente les travaux de recherche effectués sous la direction d'Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia dans le cadre de ma thèse, réalisée au Département de Simulation Numérique des écoulements et Aéroacoustique de l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales² ainsi qu'au sein du laboratoire POems³ dans le laboratoire de mathématiques appliquées de l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées. Ces travaux traitent des problèmes de propagation acoustique en présence d'écoulement et en régime périodique établi, ainsi que de leur résolution numérique.

L'aéroacoustique traite aussi bien de la génération de son par des écoulements turbulents ou par l'interaction d'un écoulement avec des corps solides que de problèmes de propagation du son dans des écoulements. Les études effectuées dans ce domaine ont des applications diverses, telles que l'étude du bruit d'origine aérodynamique dans les machines tournantes ou encore la création et la transmission du bruit dans les réacteurs ou les pots d'échappement, et intéressent de nombreux secteurs industriels.

En aéronautique, l'étude des sources sonores d'un avion à l'atterrissage ou au décollage et la réduction du bruit émis en vol sont aujourd'hui des préoccupations importantes des constructeurs. En effet, les normes acoustiques imposées par les instances de régulation aérienne sont de plus en plus contraignantes pour les appareils de l'aviation civile et la réduction du bruit doit maintenant être prise en compte dès le début de la conception d'un nouvel avion.

Il se distingue deux sources majeures de bruit dans un avion en vol : le bruit aérodynamique d'une part, qui résulte du déplacement de l'avion dans l'air, et celui émis par les moteurs d'autre part. Dans le cas des turboréacteurs, il existe encore deux types de sources sonores qui sont le bruit de jet, engendré par le flux d'air éjecté par les tuyères, et le bruit émis à l'intérieur de la nacelle par les parties tournantes (soufflante, compresseurs, turbines) et la combustion. Le bruit de soufflante est réduit en partie grâce à des traitements acoustiques, appliqués sur les parois internes des entrées d'air et des tuyères, qui diminuent les émissions des sources acoustiques à l'extérieur du moteur. La technologie développée dans ce domaine depuis plus d'une trentaine d'années a permis une diminution significative de la nuisance sonore des turboréacteurs. Cependant, dans le même temps, les exigences de réduction de la consommation en carburant et d'accroissement des capacités de transport ont modifié considérablement l'architecture des turboréacteurs, rendant l'élaboration de dispositifs d'atténuation du bruit émis par les nacelles beaucoup plus difficile.

D'importants enjeux commerciaux conduisent cependant les constructeurs aéronautiques et les motoristes à mener des actions de recherche dans le domaine de l'insonorisation des nacelles. Cette dernière repose sur la connaissance de trois domaines techniques très différents : les mécanismes d'émission du bruit par les divers éléments du moteur, la propagation des ondes sonores dans les conduits à parois traitées en présence d'écoulement, et leur rayonnement en champ libre et enfin les solutions technologiques pour réduire le bruit rayonné.

L'optimisation des traitements acoustiques de parois, à des coûts économiquement raisonnables pour les constructeurs, ne peut aujourd'hui se passer des outils de modélisation et de simulation numérique. En effet, les phénomènes physiques qui interviennent, ainsi que les mécanismes qui les régissent, sont complexes, pour certains instationnaires et souvent non linéaires. Leur modélisation lie intimement les effets aérodynamiques, les interactions fluide-structure et l'acoustique. Les méthodes analytiques ou asymptotiques ne sont de ce fait pas adaptées à la résolution de problèmes suffisamment réalistes.

Dans ce document, nous nous intéressons à la propagation acoustique dans un conduit en régime périodi-

²ONERA, BP 72, 29 avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon cedex.

³Laboratoire POems, UMR 2706 CNRS/ENSTA/INRIA, ENSTA, 32 boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15.

que établi. Notre objectif à terme est de pouvoir calculer le bruit rayonné par une nacelle de turboréacteur, comme celle représentée sur la figure 1, dans une configuration de vol subsonique.

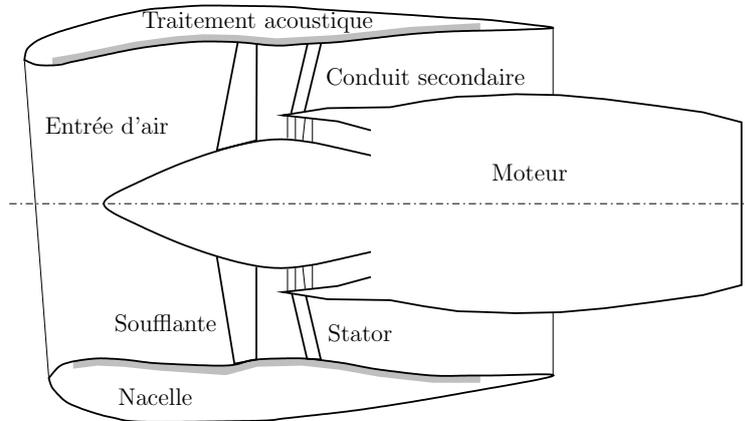


FIG. 1 – Schéma d’une nacelle de turboréacteur *double flux* (seul le compresseur basse pression est représenté).

Le problème harmonique est considéré pour plusieurs raisons.

Tout d’abord, dans une configuration de vol, les moteurs fonctionnent en régime établi. Dans ce cas, en l’absence de traitement des nacelles et en vol subsonique, le bruit de soufflante émis est constitué d’un bruit dit “à large bande” et de sons dits “purs” pour des fréquences isolées, correspondant aux harmoniques de la fréquence de passage des aubes. Ces derniers sont dus à l’interaction entre le rotor et le stator et qualifiés de “bruit de raies”. La figure 2 présente l’aspect typique d’un spectre de soufflante en vol subsonique. C’est notamment l’atténuation de ce bruit de raies par des traitements passifs appliqués sur les parois de conduits qui est visée dans les campagnes d’essais réalisées par les motoristes. Il est donc intéressant de pouvoir évaluer directement le rayonnement acoustique pour ces fréquences.

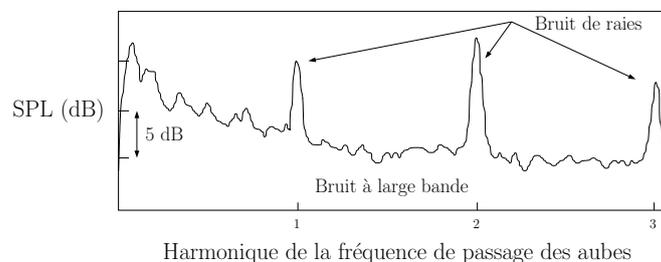


FIG. 2 – Spectre de bruit de soufflante en régime de vol subsonique (source : SNECMA MOTEURS).

Par ailleurs, le traitement acoustique des parois par des matériaux absorbants se caractérise classiquement par une impédance complexe, qui intervient dans les conditions aux limites [114] et est, en général, une fonction de la fréquence des perturbations⁴. L’optimisation des traitements au moyen de simulations numériques en régime harmonique est alors beaucoup plus aisée.

Nous ajouterons enfin que la résolution numérique d’un problème harmonique est beaucoup moins coûteuse que celle d’un problème transitoire, puisqu’elle n’est effectuée que pour certaines fréquences d’intérêt et non à chaque pas de temps. Du point de vue de l’analyse des équations aux dérivées partielles modélisant les phénomènes, l’hypothèse d’un régime périodique établi va nous conduire à nous servir des outils de la théorie spectrale des opérateurs.

Nous allons à présent rappeler quelques généralités concernant les thèmes abordés dans ce travail.

⁴La modélisation et la détermination des impédances de paroi en présence d’un écoulement restent aujourd’hui des sujets de recherche actifs.

Propagation acoustique en présence d'un écoulement. La plupart des phénomènes étudiés dans les problèmes d'aéroacoustique sont linéaires⁵ et les petites perturbations d'un écoulement de fluide autour d'une configuration moyenne, supposée connue, sont considérées. La propagation du son dans un fluide en écoulement subsonique est alors modélisée par un système différentiel du premier ordre d'équations linéarisées⁶. Bien qu'étant à la base de la majorité des modèles présents dans la littérature, le fait qu'aucune solution de ce système, vérifiant des conditions initiales et aux limites générales, ne soit connue pour un écoulement quelconque a longtemps conduit chercheurs et ingénieurs à utiliser des équations portant sur une unique variable pour la résolution de problèmes dans des configurations simplifiées. Cependant, les développements récents et croissants des moyens de simulation numérique en mécanique des fluides les ont amené à considérer des cas d'étude de plus en plus complexes et à ramener ces équations au premier plan.

En régime transitoire, des schémas aux différences finies d'ordre élevé ont ainsi été développés pour la résolution des équations d'Euler linéarisées [152]. Ce type de méthodes de discrétisation des équations provenant initialement en grande partie des simulations numériques en aérodynamique, les spécificités inhérentes aux phénomènes de propagation acoustique doivent être soigneusement prises en compte lors de l'élaboration des schémas, comme il est expliqué dans [148]. Il apparaît aujourd'hui que la méthode des différences finies est employée de manière prépondérante pour la résolution de la majorité des applications transitoires en aéroacoustique numérique [10, 32]. Les dernières années ont cependant vu l'émergence d'applications des méthodes de Galerkin discontinues dans de nombreux domaines [44] et notamment en aéroacoustique [8], le cadre théorique déjà bien établi et les nombreux avantages de ce type de méthodes semblant expliquer ces développements rapides.

Cependant, dès lors que l'on s'intéresse à la propagation acoustique en présence d'un écoulement et en régime périodique établi, force est de constater que les écoulements porteurs envisagés ont un caractère moins général que pour les applications transitoires et ce malgré un grand nombre d'études et de travaux, de nature analytique et numérique, publiés depuis près d'une quarantaine d'années.

En se limitant au cadre de la propagation linéaire dans un conduit en présence d'un écoulement, nous nous proposons de rappeler certains des modèles employés dans la littérature, ainsi que les études dont ils ont fait l'objet. Nous ne prétendons pas être exhaustifs dans ce bref récapitulatif et renvoyons aux articles de référence de Nayfeh *et al.* [115] et Möhring *et al.* [110] pour des synthèses sur l'état de l'art des problèmes de génération et de propagation du son dans un écoulement et de couplage entre l'acoustique et les effets de l'écoulement, ainsi qu'aux études bibliographiques réalisées dans [125, 126].

Dans de nombreux travaux sur le sujet, le conduit est supposé droit et l'écoulement porteur uniforme. Le système d'équations linéarisées du premier ordre se réduit alors à une seule équation aux dérivées partielles d'ordre deux portant sur une inconnue scalaire qui peut être la perturbation de pression ou de potentiel de vitesse. Cette équation est classiquement connue sous le nom d'équation des ondes convectée. La propagation et l'atténuation des ondes dans un conduit en présence d'un écoulement uniforme a largement été étudiée par approche modale, que la géométrie soit bidimensionnelle ou tridimensionnelle, que la section du conduit soit rectangulaire [102] ou circulaire [103], que les parois soient rigides ou traitées. Cette configuration constitue une bonne approximation du problème de propagation dans un écoulement à couches limites minces [63].

Une formulation du problème d'acoustique en potentiel de vitesse permet la prise en compte de certains effets dus à l'écoulement, notamment la présence d'un sillage en aval d'une plaque mince [33]. La superposition des phénomènes acoustiques et hydrodynamiques est dans ce dernier cas réalisée par l'ajout d'une condition de Kutta qui "ferme" le modèle.

Une autre famille d'écoulements couramment traitée dans la littérature est celle des écoulements cisailés. Alors que l'effet d'un écoulement uniforme sur la propagation acoustique se traduit par un phénomène de convection des ondes, la présence d'un écoulement porteur cisailé induit une interaction complexe entre l'acoustique et l'hydrodynamique.

Dans [135], Pridmore-Brown entreprend une approche analytique du problème en écoulement cisailé

⁵Le bruit de jet supersonique, comme tous les mécanismes de génération de bruit par un écoulement, constitue une exception notable à cette règle.

⁶Ce sont les équations linéarisées de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et l'équation d'état linéarisée, encore appelées les équations d'Euler linéarisées.

dans un conduit droit bidimensionnel à parois traitées et en négligeant la viscosité. Il obtient une équation aux valeurs propres régissant les modes dans la direction transverse du conduit qui ne peut, en général, être résolue analytiquement. Ce premier travail est repris et étendu, analytiquement et expérimentalement, par Tack et Lambert [147] pour l'étude de l'atténuation dans un conduit droit. Les résultats sont comparés avec l'expérience. Dans [128], Peube et Jallet généralisent l'équation de Pridmore-Brown aux conduits cylindriques de section constante.

Mungur et Gladwell [113] proposent en 1969 une étude théorique et numérique de la propagation acoustique au sein d'un écoulement cisaillé et dans un guide droit, en tenant notamment compte de la viscosité du fluide. Les solutions obtenues par résolution numérique de l'équation différentielle associée aux modes pour un fluide non visqueux et des parois rigides sont en accord avec celles de Pridmore-Brown. D'autres résultats, en présence d'un écoulement porteur cisaillé et de parois traitées, pour lesquels aucune solution analytique n'est disponible, sont également présentés.

Dans une série d'articles [121, 122, 123, 124, 120], Nilsson *et al.* réalisent des calculs analytiques de solutions par raccordement modal pour des situations complexes, via une méthode de Wiener-Hopf.

Lilley [107] introduit une équation aux dérivées partielles du troisième ordre pour la perturbation de pression⁷. La montée en ordre de l'équation par rapport à l'équation d'onde convectée s'explique par le fait que de nouvelles solutions, rendant compte des effets de convection et de réfraction induit par l'écoulement cisaillé, apparaissent. Notons qu'une séparation des fluctuations en perturbations irrotationnelles (ou fluctuations de pression acoustique) et rotationnelles (ou hydrodynamiques), alors solutions d'un système d'équations découplées, a lieu dans de rares cas de figure, notamment si l'écoulement porteur est uniforme ou cisaillé avec un profil linéaire.

Les effets combinés d'un écoulement et d'un milieu de propagation non isotherme ont également été étudiés par des méthodes analytiques en approximation hautes fréquences (méthode WKB) ou par résolution numérique du problème aux valeurs propres associé [116, 53].

Plus récemment, des méthodes de résolution numériques furent mises en œuvre pour le traitement de géométries ou d'écoulements plus complexes, pour lesquels les approches analytiques ou semi-analytiques sont mises en défaut. Dans ce contexte, la méthode des éléments finis fut utilisée pour résoudre les équations de conservation linéarisées dans un conduit de section variable en présence d'un écoulement non uniforme [6, 7].

Dans le cas particulier d'un écoulement porteur irrotationnel et isentropique, la propagation acoustique est décrite par une équation aux dérivées partielles d'ordre deux portant sur le potentiel de vitesse du type de l'équation des ondes convectée. Là encore, des résolutions numériques de l'équation par la méthode des éléments finis ont été proposées pour l'évaluation du bruit rayonné par une nacelle [54] ou l'atténuation du son dans un conduit [142, 140].

Par ailleurs, une alternative aux équations d'Euler linéarisées est fournie par le modèle proposé en 1931 par Galbrun [67]. Celui-ci repose sur une représentation mixte Lagrange-Euler des variables perturbées en acoustique linéaire et une formulation du problème en termes du déplacement lagrangien. Le milieu de propagation est supposé être un fluide parfait et l'écoulement en évolution adiabatique. L'équation aux dérivées partielles du second ordre en temps et en espace, dite équation de Galbrun, obtenue à l'issue de manipulations algébriques présente une forme très similaire aux équations des ondes vectorielles utilisées en électromagnétisme et en élasticité. Ceci semble naturellement la disposer à l'utilisation d'approches variationnelles pour sa résolution, notamment la méthode des éléments finis, comme en témoignent les travaux publiés sur le sujet [17, 129, 157].

C'est cette dernière approche que nous avons retenue pour nos études. En raison de son établissement et de l'inconnue qu'elle fait intervenir, l'équation de Galbrun semble être relativement originale comparée aux équations linéarisées habituellement employées en acoustique⁸. Le déplacement lagrangien s'avère particulièrement adapté pour le traitement de conditions aux limites dans les problèmes d'interactions fluide-

⁷Plus précisément, cette équation porte sur le logarithme de la pression $\log\left(\frac{p}{p_0}\right)$, où p_0 désigne la pression dans l'écoulement porteur.

⁸Un retour aux inconnues "usuelles" que sont les perturbations eulériennes de masse volumique, de vitesse et de pression est néanmoins possible par dérivation de la perturbation lagrangienne du déplacement lagrangien.

structure ou d'interface entre deux fluides (ou dioptré). D'autre part, un gain sur le nombre d'inconnues mises en jeu est *a priori* observé. Le caractère vectoriel de cette équation aux dérivées partielles rend néanmoins compte de l'interaction, due à la présence d'un écoulement, entre les phénomènes acoustiques et hydrodynamiques, bien qu'elle ne soit que du second ordre. Nous verrons dans nos travaux que la compréhension de cette interaction joue un rôle fondamental pour la résolution numérique de l'équation. En effet, la mise en œuvre d'une méthode d'éléments finis se heurte à des difficultés qui, bien qu'étant du même type que celles rencontrées il y a une vingtaine d'années dans diverses applications numériques en électromagnétisme, ont un caractère propre relatif au phénomène de convection des ondes caractéristique de l'aéroacoustique. Une approche mathématique rigoureuse du problème est alors nécessaire.

Nous présentons dans ce document quelques premiers résultats d'analyse mathématique et numérique concernant l'équation de Galbrun en régime harmonique, en vue de sa résolution par une méthode des éléments finis.

Conditions non réfléchissantes pour l'aéroacoustique. Un autre thème abordé dans cette thèse est celui du traitement des conditions aux limites non réfléchissantes (ou transparentes) pour l'acoustique en écoulement. Celles-ci sont à la fois indispensables du fait du caractère nécessairement borné du domaine de calcul et cruciales pour l'obtention de résultats numériques pertinents. Pour des problèmes de propagation d'ondes en régime harmonique, ces conditions artificielles doivent être en mesure de simuler une condition de rayonnement à l'infini, qui sélectionne, parmi toutes les solutions du problème, la solution "sortante", tout en veillant à ne pas créer de réflexion aux frontières du domaine de calcul. Ce sujet reste aujourd'hui un important axe de recherche dans l'étude et la simulation numérique de l'ensemble des phénomènes de propagation d'ondes, et plus particulièrement en aéroacoustique.

De manière à mieux cerner les difficultés rencontrées pour la construction de conditions aux limites non réfléchissantes en régime harmonique, considérons dans un premier temps la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu au repos, phénomène modélisé par l'équation de Helmholtz. En espace libre, il est bien connu qu'une condition de rayonnement appropriée est fournie par la condition de Sommerfeld. Une approche naturelle consiste alors, en première approximation, à appliquer cette condition non locale à distance finie de la source. Il est cependant possible d'améliorer quelque peu cette condition en exprimant la solution dans le domaine extérieur au domaine de calcul sous la forme d'un développement en série sur une base de fonctions propres du problème. Une condition aux limites exacte est ensuite donnée par un opérateur non local Dirichlet-Neumann, qui fait intervenir le même développement en série de la trace de la solution⁹ sur la frontière du domaine. La forme de cette condition permet de l'associer très facilement à une méthode d'éléments finis et l'on parle de "*méthode de couplage par développement en série*"¹⁰. Ses applications concernent aussi bien des problèmes d'acoustique [64, 76], que d'hydrodynamique [106], d'élasticité [74] ou d'électromagnétisme [2]. Une généralisation de ce procédé est présentée par Givoli et Keller dans [73]. Bendali et Guillaume [18] ont récemment proposé une condition aux limites transparente quasi locale, basée sur une approximation rationnelle de l'opérateur Dirichlet-Neumann, pour des problèmes de propagation dans des guides d'ondes. Notons au passage qu'une alternative possible au couplage par développement en série est fournie par le couplage avec une formule de représentation intégrale [97, 57].

Pour le problème du rayonnement d'une source acoustique dans un conduit, chaque mode propagatif ayant sa vitesse propre, il n'est pas possible d'établir une condition transparente approchée sous une forme différentielle, mais la technique de développement en série reste néanmoins valable. Cette approche est encore valide pour un écoulement porteur de vitesse uniforme, les modes sortants présentant alors la particularité d'être caractérisés par le signe de leur vitesse de groupe [33].

Le passage à un écoulement porteur quelconque soulève plusieurs questions. D'une part, l'existence d'instabilités linéaires pour certains écoulements particuliers [96] amène une incertitude quant à la pertinence même d'un problème linéarisé en régime périodique établi. D'autre part, la présence d'un écoulement conduit à un milieu de propagation non uniforme et l'établissement d'une condition de rayonnement à l'infini n'est absolument pas acquise dans le cas général. Enfin, plusieurs questions complexes et restant ouvertes sur une

⁹Ce développement en série sera évidemment tronqué dans la mise en œuvre numérique de la méthode.

¹⁰La terminologie de "*méthode des éléments finis localisés*" est aussi, quoique rarement, utilisée.

éventuelle orthogonalité et la complétude des modes propres en présence d'un écoulement non uniforme n'autorisent pas une généralisation directe de la méthode de développement en série. Pour certaines géométries particulières [120], une justification analytique de la complétude des modes du conduit est néanmoins possible.

Ces différentes difficultés nous amènent à envisager pour l'élaboration de conditions aux limites non réfléchissantes d'autres approches, qui ne font pas appel à l'analyse modale. Il n'existe cependant que peu de bibliographie concernant les conditions transparentes pour la résolution de problèmes d'acoustique en écoulement en régime harmonique, l'essentiel du travail accompli étant consacré au régime transitoire. Nous avons donc jugé utile d'en rappeler quelques-unes. Celles-ci concernent principalement les équations de conservation linéarisées et trouvent en partie leurs inspirations en dynamique des fluides numérique. Il faut dans ce cas tenir compte non seulement des ondes acoustiques, mais également des ondes hydrodynamiques, entropiques ainsi que de l'écoulement porteur. De fait, trois approches prépondérantes se distinguent.

Tout d'abord, le système d'équations à résoudre étant hyperbolique, la méthode des caractéristiques permet d'écrire des conditions aux limites non réfléchissantes, en considérant localement le problème comme unidimensionnel pour des ondes ayant une incidence normale à la frontière du domaine de calcul. L'analyse des caractéristiques définit alors simplement quelles sont les ondes entrantes et sortantes du domaine. Cette technique a initialement été introduite et développée par Thompson [154, 155] et Poinot et Lele [130] et est très employée pour les simulations en mécanique des fluides. Giles [70] se sert également de cette méthode, ainsi que de l'analyse de Fourier, pour construire des conditions aux limites pour les équations d'Euler linéarisées prenant cette fois-ci en compte des incidences obliques aux frontières.

Par ailleurs, des conditions aux limites locales reposant sur un développement asymptotique, dit de champ lointain, des solutions du problème ont été proposées par Bayliss et Turkel [13] pour les équations d'Euler linéarisées dans un fluide au repos, dans des domaines libres bi- et tridimensionnels ainsi que dans des guides d'ondes. Cette technique fut ensuite adaptée par Tam et Webb [152] pour un écoulement porteur uniforme, et étendue par Tam et Dong [151] pour un écoulement non uniforme. Ce type de conditions aux limites, ainsi que celles basées sur la méthode des caractéristiques que nous venons d'évoquer, et leur implémentation numérique ont été testées par Hixon *et al.* [91] dans un cas simple pour lequel une solution analytique est disponible. Leurs conclusions confirment le mauvais comportement des conditions basées sur les caractéristiques et s'avèrent en faveur des conditions issues de développements en champ lointain.

Une dernière approche est celle des zones absorbantes, dites également "éponges" ou encore appelées *buffer zones* en anglais. Ces dernières ne constituent pas des conditions aux limites au sens propre du terme puisque la stratégie adoptée dans ce cas consiste à accoler au domaine "physique" de calcul un ou plusieurs domaines additionnels dans lesquels les perturbations sortantes sont progressivement atténuées. Les solutions numériques dans ces zones n'ont, en général, pas de pertinence physique, mais les modifications des équations et/ou de leur discrétisation dans les zones absorbantes doivent veiller à ne créer que peu (ou pas) de réflexions aux interfaces avec le domaine "physique". Autant en aérodynamique qu'en aéroacoustique numériques, la construction et l'étude de ces zones absorbantes a été un thème de recherche très actif. Pour la résolution des équations d'Euler linéarisées par des schémas aux différences finies d'ordre élevé, diverses techniques d'atténuation ont été proposées. Citons notamment la dissipation artificielle dans laquelle un terme dissipatif est ajouté aux équations résolues, l'application d'une dilatation du maillage, pouvant être associée à un filtrage, conduisant à une atténuation de la solution causée par la dissipation numérique du schéma utilisé [47], ou encore l'augmentation graduelle de la vitesse de l'écoulement porteur dans la zone jusqu'à ce que celle-ci devienne supersonique, ce qui élimine le besoin d'une condition aux limites non réfléchissante pour les perturbations en limite de zone [146]. Toutes ces techniques présentent plusieurs inconvénients, telle leur dépendance vis-à-vis de la méthode de discrétisation employée, les coûts supplémentaires importants qu'elles peuvent engendrer ainsi que les réflexions produites par le changement de milieu.

L'introduction récente des couches absorbantes parfaitement adaptées (*perfectly matched layers* en anglais) en électromagnétisme [19] a fourni une alternative très performante aux conditions aux limites absorbantes pour les problèmes de propagation d'ondes. Ces couches ont été largement développées et étudiées pour des problèmes transitoires, mais aussi en régime harmonique [158, 84]. Leur application à l'aéroacoustique [94] a laissé entrevoir l'existence d'un traitement général, robuste et efficace des conditions aux limites non réfléchissantes dans ce domaine. Cependant, dans le cas de la propagation dans un conduit en régime transitoire et en présence d'un écoulement porteur uniforme, plusieurs études ont montré que cette méthode

pouvait se révéler instable [78, 150, 89].

Dans [149], Tam revient en détail sur l'application de conditions aux limites en aéroacoustique numérique, et en particulier sur l'ensemble des conditions de non-réflexion qui viennent d'être évoquées. Citons également l'article de synthèse de Givoli [72], qui constitue une excellente introduction aux différents types de conditions aux limites non réfléchissantes pour des problèmes d'ondes issus de contextes aussi divers que la dynamique des gaz, l'hydrodynamique, la météorologie, l'élasticité ou l'électromagnétisme.

Parmi tous les types de conditions aux limites que nous venons brièvement d'aborder, les couches absorbantes parfaitement adaptées nous sont apparues particulièrement indiquées pour l'équation de Galbrun. Celles-ci, déjà mises en œuvre en régime harmonique, sont très simples à implémenter dans une méthode d'éléments finis nodaux et d'un coût additionnel relativement faible du fait de leur caractère local. De plus, nous disposons d'outils mathématiques qui permettront, dans le cas de la propagation au sein d'un écoulement uniforme et dans un conduit, d'obtenir des résultats de convergence pour cette méthode.

Nous passons maintenant à la description précise du plan de la thèse.

Modèle de Galbrun : chapitre 1. Le premier chapitre est consacré à la modélisation du phénomène de propagation acoustique en présence d'écoulement. Dans notre cas, le modèle retenu s'inscrit dans le cadre de la théorie de l'acoustique linéaire et est basé sur une représentation mixte Lagrange-Euler des perturbations dans un milieu continu en mouvement. Cette approche trouve son inspiration dans les travaux de Galbrun [67], qui ont ensuite été largement développés par Poirée [132, 133, 134]. Pour un fluide parfait en mouvement et en évolution adiabatique, nous montrons comment une équation aux dérivées partielles d'ordre deux, dite équation de Galbrun, vérifiée par la perturbation lagrangienne du déplacement lagrangien est établie à partir des équations générales de la mécanique des fluides. Nous concluons ce chapitre par une brève discussion du modèle et quelques éléments de bibliographie le concernant.

Régularisation en écoulement uniforme et extensions : chapitres 2 et 3 (ainsi que l'annexe E). Ce second volet de la thèse traite de la résolution numérique par une méthode d'éléments finis de l'équation de Galbrun en régime harmonique et dans un domaine borné. Abordant dans un premier temps le cas d'un écoulement porteur de vitesse uniforme, nous montrons que l'emploi d'éléments finis nodaux nécessite une "régularisation" de la formulation variationnelle associée à l'équation. En l'absence d'écoulement, cette démarche est voisine de celle proposée en électromagnétisme pour des problèmes similaires. Cette analogie est explorée, puis exploitée en présence d'un écoulement uniforme. L'approche est ensuite poursuivie et étendue à une classe d'écoulements plus complexes : les écoulements cisailés. Nous énonçons plusieurs résultats théoriques et des simulations numériques illustrant les effets de la régularisation sur des problèmes modèles sont enfin présentées.

Couches absorbantes parfaitement adaptées pour l'aéroacoustique : chapitres 4¹¹ et 5. Nous abordons dans la dernière partie de la thèse le traitement de problèmes, plus réalistes, de rayonnement de sources dans un conduit infini en régime périodique établi. Nous considérons tout d'abord un problème de propagation basé sur le modèle scalaire de l'équation de Helmholtz convectée, également sujet aux instabilités constatées en régime transitoire lors de l'usage du modèle de couches absorbantes de Bérenger pour l'aéroacoustique dans un conduit et en présence d'un écoulement uniforme. La cause de ces instabilités reposant sur la présence de modes dits amont inverses [150], dont les vitesses de groupe et de phase sont de signes opposés, nous proposons un nouveau modèle de couches parfaitement adaptées qui remédie à ce problème. L'erreur due à la troncature du domaine de calcul est analysée et nous prouvons que la vitesse de convergence de la méthode en fonction de l'épaisseur des couches est exponentielle. De manière surprenante, nous montrons que ce résultat est également vrai pour le modèle de Bérenger, bien que la solution puisse alors prendre des valeurs arbitrairement élevées dans les couches.

Pour l'application de notre modèle de couches à l'équation de Galbrun, un principe d'absorption limite pour le problème de rayonnement dans un conduit d'une source, acoustique et/ou hydrodynamique, à support

¹¹Ce chapitre est rédigé en anglais car issu d'un article écrit en collaboration avec Éliane Bécache et Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et accepté pour publication dans le SIAM Journal on Numerical Analysis [15].

compact en présence d'un écoulement uniforme est tout d'abord mis en œuvre pour répondre à la question de l'existence d'un régime périodique établi. Une formulation avec couches absorbantes parfaitement adaptées de ce problème est ensuite écrite. Une approche par potentiels rend finalement possible une démonstration rigoureuse de la convergence de cette méthode. Des validations numériques variées illustrent les conclusions formulées lors de l'analyse.

Enfin, les annexes de ce document se composent notamment :

- de rappels de mathématiques généraux et plus particulièrement de quelques définitions et résultats de théorie spectrale,
- de calculs analytiques et semi-analytiques de modes dans un conduit,
- d'une étude de solutions particulières d'une équation de transport en écoulement uniforme,
- de la note parue dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, série IIb Mécanique, **329**(8), et constituant la référence [35].

Conventions et notations

La plupart des conventions et notations utilisées dans ce mémoire sont rassemblées ici pour référence.

Convention de l'indice muet

La convention de l'indice muet est parfois utilisée pour alléger les notations. Celle-ci consiste à sous-entendre qu'il y a sommation sur un indice lorsque celui-ci figure deux fois dans un monôme. Par exemple, si n désigne un entier naturel et que A et B sont des matrices carrées de composantes respectives A_{ij} et B_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, la matrice P , produit de A par B , aura pour composantes :

$$P_{ij} = A_{il} B_{lj} \left(= \sum_{l=1}^n A_{il} B_{lj} \right).$$

Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker δ_{ij} a la signification suivante :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Notations et rappels relatifs aux vecteurs et tenseurs

Soit E un espace vectoriel euclidien sur \mathbb{R} à trois dimensions¹. Nous munissons E d'un référentiel \mathcal{R} , défini par un repère d'origine le point O de coordonnées $(0, 0, 0)$ et une base orthonormée directe $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,3}$.

Un *vecteur*² \mathbf{v} de E est défini par :

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i, \tag{1}$$

les réels v_i étant les composantes de \mathbf{v} dans la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,3}$. Les coordonnées d'un point courant M sont alors notées x_i , $i = 1, 2, 3$, où les x_i sont les composantes du vecteur \mathbf{OM} .

On appelle *tenseur* d'ordre m une application m -linéaire \mathbf{T} de E^m dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} & : & E^m & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) & \mapsto & \mathbf{T}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m). \end{aligned}$$

Ainsi, un tenseur du troisième ordre est une forme trilinéaire $\mathbf{T} : E \times E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. On note :

$$T_{ijk} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$$

les composantes de ce tenseur dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,3}$.

Ajoutons que, par convention, les tenseurs d'ordre zéro sont les scalaires et que les vecteurs peuvent être considérés comme des tenseurs du premier ordre (et inversement).

¹Nous précisons, le cas échéant, les modifications de définition dans un espace E de dimension deux.

²Dans toute la suite, les champs de vecteurs et de tenseurs sont notés en gras afin de les différencier des champs scalaires.

Produit scalaire

Le *produit scalaire euclidien* de deux vecteurs de l'espace E est le scalaire, noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, défini par :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i.$$

C'est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive sur E .

Produit vectoriel

Le *produit vectoriel* de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est le vecteur, noté $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, de composantes :

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k, \text{ pour } i = 1, 2, 3,$$

$$\text{avec } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}.$$

C'est une application bilinéaire et antisymétrique sur E .

Si E est un espace de dimension deux, le produit vectoriel est un scalaire, défini par :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \varepsilon_{3ij} u_i v_j = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Produit tensoriel

Soient \mathbf{R} un tenseur d'ordre $p \geq 1$ et \mathbf{S} un tenseur d'ordre $q \geq 1$. On appelle *produit tensoriel* de \mathbf{R} et de \mathbf{S} le tenseur d'ordre $(p + q)$, noté $\mathbf{R} \otimes \mathbf{S}$, défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \otimes \mathbf{S} & : & E^p \times E^q & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_{p+q}) & \mapsto & \mathbf{R}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p) \mathbf{S}(\mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_{p+q}). \end{aligned}$$

Le produit tensoriel est associatif, non commutatif en général et distributif par rapport à l'addition des tenseurs. Son introduction permet de décomposer un tenseur d'ordre m sur une base tensorielle :

$$\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_m}\}_{i_1=1,2,3,\dots,i_p=1,2,3},$$

ce qui généralise aux tenseurs l'écriture (1) introduite pour les vecteurs. Ainsi, le produit tensoriel du tenseur \mathbf{R} d'ordre 4 :

$$r_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

et du tenseur \mathbf{S} d'ordre 3 :

$$s_{pqr} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_r$$

est le tenseur d'ordre 7 s'écrivant :

$$r_{ijkl} s_{pqr} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_r.$$

Contraction d'un tenseur et produit contracté

On appelle *contraction* d'un tenseur donné l'opération qui consiste à faire une sommation sur deux indices dans l'expression indicielle du tenseur. Brièvement, on peut dire que la contraction substitue un produit scalaire euclidien à un produit tensoriel. Par exemple, la contraction du tenseur \mathbf{S} d'ordre 3 :

$$s_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

sur les deux dernier indices conduit au vecteur :

$$s_{ijj} \mathbf{e}_i.$$

Soient \mathbf{R} un tenseur d'ordre $p \geq 1$ et \mathbf{S} un tenseur d'ordre $q \geq 1$. Le *produit contracté* de \mathbf{R} et de \mathbf{S} , noté $\mathbf{R} \cdot \mathbf{S}$, est le tenseur d'ordre $(p + q - 2)$ obtenu par contraction $(p, p + 1)$ du tenseur $\mathbf{R} \otimes \mathbf{S}$ d'ordre $(p + q)$.

Par exemple, le produit contracté du tenseur \mathbf{R} d'ordre 4 et du tenseur \mathbf{S} d'ordre 3 est le tenseur d'ordre 5 suivant :

$$r_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \cdot s_{pqr} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_r = r_{ijkl} s_{lqr} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_r.$$

Le produit contracté est associatif, non commutatif en général³ et distributif par rapport à l'addition des tenseurs.

Enfin, le *produit doublement contracté* du tenseur \mathbf{R} d'ordre $p \geq 2$ et du tenseur \mathbf{S} d'ordre $q \geq 2$, noté $\mathbf{R} : \mathbf{S}$, est le tenseur d'ordre $(p + q - 4)$ obtenu par contraction $(p, p + 1)$ et $(p - 1, p + 2)$ du tenseur $\mathbf{R} \otimes \mathbf{S}$ d'ordre $(p + q)$. Dans l'exemple précédent, le tenseur $\mathbf{R} : \mathbf{S}$ est le tenseur d'ordre 3 :

$$r_{ijkl} s_{lkr} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_r.$$

Analyse vectorielle et tensorielle

Soit f une fonction ou distribution à valeurs scalaires sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 . On note $\frac{\partial f^m}{\partial x_i^m}$ la dérivée partielle d'ordre m de f par rapport à x_i , $i = 1, \dots, n$. Nous introduisons l'opérateur symbolique ∇ , qui a pour définition :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{e}_n.$$

Opérateur gradient. L'opérateur *gradient* associé à la fonction $\phi(\mathbf{x})$ à valeurs scalaires le champ de vecteurs défini par :

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i.$$

Plus généralement, on peut définir le gradient du tenseur \mathbf{T} d'ordre $p \geq 1$, qui est le tenseur d'ordre $(p + 1)$ obtenu par produit tensoriel de \mathbf{T} avec l'opérateur ∇ :

$$\nabla \mathbf{T} = \mathbf{T} \otimes \nabla.$$

Ainsi, pour un vecteur \mathbf{u} , on a :

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

et pour un tenseur \mathbf{S} d'ordre 2, on a :

$$\nabla \mathbf{S} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k.$$

Opérateur divergence. L'opérateur *divergence* associée à la fonction $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ à valeurs vectorielles le champ scalaire défini par :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Là encore, il est possible d'étendre la définition de cet opérateur à un champ de tenseurs d'ordre $p \geq 2$. On note ainsi $\operatorname{div} \mathbf{T}$ le tenseur d'ordre $(p - 1)$ obtenu par produit contracté de \mathbf{T} avec l'opérateur ∇ :

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \nabla.$$

Par exemple, pour un tenseur \mathbf{S} d'ordre 2, on a :

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i.$$

³Le produit contracté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est un tenseur d'ordre 0 et est une autre manière d'écrire le produit scalaire euclidien $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Il est donc commutatif dans ce cas particulier. De fait, nous utiliserons alors le produit scalaire pour désigner le produit contracté.

Opérateur laplacien. Le laplacien d'un champ de tenseurs \mathbf{T} d'ordre $p \geq 0$, noté $\Delta\mathbf{T}$, est le tenseur d'ordre p défini par :

$$\Delta\mathbf{T} = \operatorname{div}(\nabla\mathbf{T}).$$

Opérateur rotationnel. L'opérateur *rotationnel* associe à la fonction \mathbf{u} à valeurs vectorielles le champ de vecteurs défini par :

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

En dimension deux, il existe deux formes duales de l'opérateur rotationnel. Ainsi, si \mathbf{u} est une fonction à valeurs vectorielles, on a :

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

et si ϕ est une fonction à valeurs scalaires, on a :

$$\operatorname{rot} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \mathbf{e}_2.$$

Quelques identités élémentaires entre opérateurs différentiels

On désigne par \mathbf{u} une fonction de \mathbb{R}^3 à valeurs vectorielles et ϕ une fonction de \mathbb{R}^3 à valeurs scalaires.

$$\Delta\mathbf{u} = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}),$$

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\nabla\phi) (= -\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \phi) \text{ si } \phi \text{ est une fonction de } \mathbb{R}^2),$$

$$\operatorname{rot}(\nabla\phi) = \mathbf{0},$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) = 0.$$

Notations propres au premier chapitre

| | |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------|
| c | la célérité du son. |
| \mathbf{v} | le champ de vitesse. |
| \mathbf{F} | la densité volumique de forces extérieures. |
| r | la densité volumique des sources de chaleur. |
| $\boldsymbol{\xi}$ | le déplacement lagrangien. |
| e | l'énergie interne. |
| s | l'entropie spécifique. |
| \mathbf{q} | le flux de chaleur sortant. |
| f | la grandeur f écrite en fonction des variables d'Euler. |
| \tilde{f} | la grandeur f écrite en fonction des variables de Lagrange. |
| J | le jacobien de l'application $\boldsymbol{\chi}$. |
| ρ | la masse volumique. |
| f^E | la perturbation ou variation eulérienne de la grandeur f . |
| f^L | la perturbation ou variation lagrangienne de la grandeur f . |
| $\boldsymbol{\chi}$ | l'application ou fonction placement. |
| ϕ | le potentiel de forces extérieures. |
| p | la pression statique ou thermodynamique. |
| T | la température absolue. |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | le tenseur des contraintes. |
| $\boldsymbol{\tau}$ | le tenseur des contraintes visqueuses. |
| \mathbf{D} | le tenseur des taux de déformation. |
| \mathbf{I} | le tenseur unité. |
| (\mathbf{x}, t) | les variables indépendantes d'Euler. |
| (\mathbf{a}, t) | les variables indépendantes de Lagrange. |
| τ | le volume spécifique. |

Autres notations

Soit V un espace de Hilbert. On désigne par

- V' le dual de V , c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur V ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V, V'}$ le crochet de dualité entre V et son dual V' ;
- $(\cdot, \cdot)_V$ le produit scalaire dans V ;
- $\| \cdot \|_V$ une norme sur l'espace V .

Espaces de Hilbert usuels et normes associées

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $n = 2$ ou 3 , de frontière $\partial\Omega$ le cas échéant.

$$\begin{aligned}
 L^2(\Omega) &= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable, de carré intégrable}\} & \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |u|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\
 H^1(\Omega) &= \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)^n\} & \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \right)^{1/2} \\
 H_0^1(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\} & \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \\
 D(\Delta, H^1(\Omega)) &= \{u \in H^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\} & \|u\|_{D(\Delta, H^1(\Omega))} &= \left(\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 H(\operatorname{div}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n, \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\} & \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} &= \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 H_0(\operatorname{div}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}; \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\} \\
 H(\operatorname{div} 0; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega\} \\
 H(\operatorname{rot}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{rot} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3\} & \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{rot}; \Omega)} &= \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right)^{1/2} \\
 H_0(\operatorname{rot}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}; \Omega) \mid \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\}
 \end{aligned}$$

Formules d'intégration par parties classiques dans un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Delta \varphi \psi \, d\mathbf{x} &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}, \psi \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} & \forall \varphi \in D(\Delta, H^1(\Omega)), \forall \psi \in H^1(\Omega). \\
 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi \, d\mathbf{x} &= \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} & \forall \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}; \Omega), \forall \varphi \in H^1(\Omega). \\
 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} \varphi \, d\mathbf{x} &= - \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} & \forall \mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}; \Omega), \forall \varphi \in H^1(\Omega).
 \end{aligned}$$

Chapitre 1

Équation de Galbrun

Dans ce chapitre, l'équation de propagation dite de Galbrun est établie à partir du système des équations de la mécanique des fluides. Nous mettons ainsi en évidence les hypothèses nécessaires à la construction du modèle, ceci afin de pouvoir le comparer à d'autres approches utilisées en acoustique linéaire et en aéroacoustique. Le point de vue adopté pour la modélisation physique des phénomènes est celui de la mécanique des milieux continus. Certains éléments simples de mécanique sont rappelés afin d'aider le lecteur à suivre les explications conduisant au modèle, des définitions plus approfondies et de nombreux compléments se trouvant dans les ouvrages d'introduction de Germain [69] et de Bruneau [39]. On pourra également consulter le livre de Morand et Ohayon [111], qui aborde brièvement la formulation en champs de déplacement et pression de problèmes linéarisés d'interaction entre un fluide parfait et une structure.

Après quelques rappels de cinématique, les équations de conservation et la loi d'état d'un fluide parfait en évolution adiabatique sont établies en représentation d'Euler. Elles sont ensuite linéarisées en représentation de Lagrange, sous une hypothèse de petites perturbations d'un écoulement porteur. La représentation mixte Lagrange-Euler des perturbations et l'introduction de la variable déplacement lagrangien mènent finalement à l'obtention de l'équation de Galbrun.

1.1 Descriptions du mouvement d'un fluide

Nous présentons deux descriptions analytiques équivalentes du mouvement d'un fluide considéré comme un milieu continu : la représentation lagrangienne, qui envisage la dynamique des particules de matière dans l'écoulement, et la représentation eulérienne, qui s'intéresse aux variations dans le temps des caractéristiques de l'écoulement en des points fixes de l'espace.

Le système considéré est un domaine matériel en mouvement occupant à l'instant $t \geq 0$ un ouvert connexe $\mathcal{D}(t)$ de \mathbb{R}^3 (au sens où chaque point de $\mathcal{D}(t)$ est occupé par une "*particule*", c'est-à-dire un élément de volume infiniment petit du système, mais très grand par rapport à l'échelle moléculaire). On dit que $\mathcal{D}(t)$ représente la configuration au temps t du système cinématique.

1.1.1 Représentation de Lagrange

En description lagrangienne, toutes les configurations d'un système cinématique constitué par un domaine matériel en mouvement sont rapportées à une configuration particulière, correspondant à un instant arbitraire, dit temps de référence. Cette représentation permet de suivre le déplacement d'une particule, en l'identifiant par sa position au temps de référence. Les variables indépendantes de Lagrange sont le vecteur \mathbf{a} et le temps t , où \mathbf{a} désigne les coordonnées (a_1, a_2, a_3) de la particule dans la configuration de référence. L'inconnue de Lagrange χ , aussi appelée fonction placement, décrit alors la trajectoire de la particule :

$$\mathbf{X}(t) = \chi(\mathbf{a}, t),$$

le vecteur $\mathbf{X}(t)$ désignant l'ensemble des coordonnées du point en lequel se trouve, à un instant t quelconque, la particule située en \mathbf{a} au temps de référence. Notons que l'application χ est bijective et qu'elle met en

correspondance biunivoque la configuration de référence et la configuration à l'instant t . Le vecteur vitesse à l'instant t du point matériel de coordonnées de Lagrange \mathbf{a} est alors défini par :

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{a}, t). \quad (1.1)$$

1.1.2 Représentation d'Euler

La description eulérienne du mouvement d'un milieu continu consiste à observer l'évolution de la vitesse \mathbf{v} , dite inconnue d'Euler, en fonction du temps et en tout point du domaine considéré. Les variables indépendantes d'Euler sont le couple (\mathbf{x}, t) , le vecteur \mathbf{x} représentant la position instantanée d'une particule à un instant t quelconque. Dans cette représentation du mouvement, la trajectoire $\mathbf{X}(t)$ d'une particule est la solution du système différentiel suivant :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t),$$

accompagné de la donnée d'une condition initiale (cf. [69], section *I.1.4.*).

Dans la suite de ce chapitre, toute fonction $f(\mathbf{x}, t)$ des variables d'Euler est notée $\tilde{f}(\mathbf{a}, t)$ en variables de Lagrange afin de distinguer la représentation utilisée lorsque les variables indépendantes ne sont pas indiquées.

1.2 Équations de la mécanique des fluides en variables d'Euler

Nous établissons dans cette section le système des équations de la mécanique des fluides, dans le cas particulier d'un fluide parfait en évolution adiabatique.

À l'instant t , nous désignons par $\mathcal{D}(t)$ un ouvert connexe de \mathbb{R}^3 , occupé par un fluide en mouvement. Toutes les grandeurs physiques sont des fonctions des variables indépendantes d'Euler (\mathbf{x}, t) .

1.2.1 Équations de conservation pour un fluide parfait en évolution adiabatique

Équation de conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse exprime le fait que la masse d'une partie d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante au cours du temps (cf. [69], section *I.2.2.*). Considérons le système formé du fluide contenu dans un sous-domaine $\Omega(t)$ de $\mathcal{D}(t)$, le principe se traduit par :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \, d\mathbf{x} = 0,$$

où ρ désigne la masse volumique du fluide. En utilisant le théorème de dérivation particulaire (cf. [69], appendice *II.5.*), nous obtenons :

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} = 0, \quad (1.2)$$

où le vecteur \mathbf{v} désigne le champ de vitesse.

Si l'égalité (1.2) a lieu pour tout sous-domaine $\Omega(t)$ strictement intérieur à $\mathcal{D}(t)$, la loi de conservation de la masse prend la forme d'une équation aux dérivées partielles vérifiée en tout point de $\mathcal{D}(t)$ qui ne contient pas de source ou de puits :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.3)$$

Cette dernière équation est la forme locale de l'équation de conservation de la masse, aussi appelée équation de continuité.

Équation de conservation de la quantité de mouvement

Le référentiel dans lequel le mouvement est observé étant supposé galiléen, nous appliquons la loi fondamentale de la dynamique (cf. [69], paragraphe I.4.).

Soient $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes et \mathbf{F} la densité volumique de forces extérieures appliquées au système. L'énoncé de la loi fondamentale sur un sous-domaine $\Omega(t)$ de $\mathcal{D}(t)$ conduit à deux égalités vectorielles, dont nous ne retenons que l'équation d'équilibre des forces s'exerçant sur le système :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

avec \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\Omega(t)$ et dirigé vers l'extérieur de $\Omega(t)$. Cette dernière équation peut s'écrire sous une forme locale grâce au théorème de Green-Ostrogradsky, ou théorème de la divergence (cf. [69], R I.5.3.), et au théorème de dérivation particulaire. Ainsi, en tout point de $\mathcal{D}(t)$ où les quantités sont continûment dérivables, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.4)$$

Pour un fluide parfait, c'est-à-dire sans dissipation (non visqueux, sans conductibilité thermique), la loi de comportement s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I}, \quad (1.5)$$

où le scalaire p représente la pression et \mathbf{I} est le tenseur identité. Nous obtenons dans ce cas l'équation de conservation de la quantité de mouvement des fluides parfaits :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I}) = \mathbf{F}. \quad (1.6)$$

Équation de conservation de l'énergie

Nous désignons par e l'énergie interne spécifique du système. L'application du premier principe de la thermodynamique (cf. [69], section IV.3.1.) conduit à l'équation de conservation de l'énergie suivante pour tout sous-domaine $\Omega(t)$ de $\mathcal{D}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + r) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(t)} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (1.7)$$

où r est la densité volumique de source de chaleur et \mathbf{q} le flux de chaleur sortant.

Après utilisation du théorème de dérivation particulaire et du théorème de la divergence, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles suivante, vérifiée en tout point de $\mathcal{D}(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) \mathbf{v} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + r + \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}).$$

En tenant compte des équations (1.3) et (1.4), de la symétrie du tenseur des contraintes et en introduisant le tenseur des taux de déformation :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + {}^t(\nabla \mathbf{v})),$$

nous trouvons l'équation de bilan pour l'énergie interne spécifique e :

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (1.8)$$

Par ailleurs, pour un fluide, l'état thermodynamique d'une particule est complètement déterminé par deux grandeurs locales indépendantes, appelées variables d'état [69]. En particulier, si l'on fait choix pour ces variables du volume spécifique τ ($\tau = \rho^{-1}$) et de l'entropie spécifique s , le premier principe de la

thermodynamique affirme que l'énergie interne spécifique e est une fonction d'état¹ connue de ces deux quantités. Nous avons alors la différentielle suivante pour e (encore appelée équation de Gibbs) :

$$de = T ds - p d\tau, \quad (1.9)$$

où

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\tau \quad \text{et} \quad p = - \left(\frac{\partial e}{\partial \tau} \right)_s$$

sont respectivement la température absolue et la pression thermodynamique². Cette dernière relation permet d'établir une équation de bilan pour l'entropie à partir de l'équation (1.8) :

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{I} + r - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (1.10)$$

avec $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}$ le tenseur des contraintes visqueuses.

Pour un fluide parfait supposé en évolution adiabatique (c'est-à-dire dans lequel $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ et $r = 0$), l'équation (1.10) se résume à :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0. \quad (1.11)$$

Un écoulement de fluide parfait en évolution adiabatique est donc isentropique, c'est-à-dire que l'entropie reste constante le long des trajectoires des particules.

1.2.2 Équation d'état

L'hypothèse d'un écoulement de fluide parfait en évolution adiabatique rend possible la fermeture du système formé des équations aux dérivées partielles (1.3), (1.6) et (1.11) par l'équation d'état pour la pression. Ainsi, en se servant de la caractérisation de l'état thermodynamique d'un fluide par les variables d'état, nous choisissons d'écrire que la pression p est une fonction d'état des variables thermodynamiques indépendantes ρ et s . Ceci se traduit par la loi d'état suivante :

$$p = \mathcal{P}(\rho, s; \mathbf{a}), \quad (1.12)$$

dans laquelle la dépendance explicite de \mathcal{P} en fonction de la particule \mathbf{a} rend compte de l'éventuelle hétérogénéité du fluide.

1.2.3 Système des équations de la mécanique des fluides parfaits en évolution adiabatique en variables d'Euler

Nous supposons que le champ de forces extérieures auquel est soumis le fluide ne dépend que du point en lequel se trouve la particule et qu'il dérive d'un potentiel $\phi(\mathbf{x})$ en variables d'Euler. Ces hypothèses se traduisent par l'égalité suivante :

$$\mathbf{F} = -\rho \nabla \phi. \quad (1.13)$$

Un écoulement de fluide parfait en évolution adiabatique, caractérisé par les quantités ρ , \mathbf{v} , p et s , vérifie alors le système d'équations suivant en variables d'Euler :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p\mathbf{I}) + \rho \nabla \phi = \mathbf{0}, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0, \quad (1.16)$$

$$p = \mathcal{P}(\rho, s; \mathbf{a}). \quad (1.17)$$

¹C'est-à-dire qu'elle est déterminée par la donnée de toutes les variables d'état. Le postulat de l'état local pour un système homogène avance que ce jeu de variables est le même qu'à l'équilibre.

²La pression thermodynamique est équivalente à la pression du fluide dès lors que l'on suppose que le fluide est localement en équilibre thermodynamique.

1.3 Équations de la mécanique des fluides en variables de Lagrange

Les équations de la mécanique des fluides parfaits en variables d'Euler que nous venons d'établir sont classiques et couramment utilisées. Nous présentons maintenant ces mêmes équations, écrites en représentation lagrangienne.

1.3.1 Changement de variables Euler-Lagrange

Le passage des variables d'Euler (\mathbf{x}, t) aux variables de Lagrange (\mathbf{a}, t') se fait grâce aux relations :

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{a}, t'), \quad \mathbf{a} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad t = t'. \quad (1.18)$$

Pour toute fonction f régulière, nous déduisons de ce changement de variables les relations suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (1.20)$$

et :

$$J \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial a_\alpha} \left(J \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \tilde{f} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.21)$$

où J est le jacobien de l'application $\boldsymbol{\chi}$.

Par ailleurs, l'identité

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho f) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i f) = \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \quad (1.22)$$

se démontre en utilisant l'équation de continuité (1.14).

Nous notons à présent F la matrice représentative de l'application linéaire tangente au mouvement, définie par l'application $\boldsymbol{\chi}$, la configuration de référence correspondant à la configuration du fluide à l'instant initial $t = 0$. Les composantes de F sont alors :

$$F_{\alpha i} = \frac{\partial \chi_i}{\partial a_\alpha}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Il découle de plus du principe de conservation de la masse et de l'interprétation de $J = \det F$ comme un rapport de volumes élémentaires (cf. [69], section V.1.1.) que :

$$J \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_\mathbf{a}, \quad (1.23)$$

où $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\rho}_\mathbf{a}$ désignent la masse volumique du fluide parfait en variables de Lagrange respectivement à l'instant t et au temps de référence. Après multiplication de (1.22) par J , nous déduisons, grâce à la relation algébrique ci-dessus, que :

$$J \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) + J \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i f) = \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho}_\mathbf{a} \tilde{f}). \quad (1.24)$$

Soit par ailleurs G la matrice de composantes :

$$G_{j\beta} = \frac{\partial \chi^{-1}_\beta}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \beta = 1, 2, 3.$$

Compte tenu de leurs définitions et du changement de variables (1.18), les matrices F et G peuvent indifféremment être exprimées en fonction des variables indépendantes de Lagrange ou d'Euler. Cette dépendance ne sera donc pas précisée dans les calculs qui vont suivre. En vertu de l'égalité :

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial a_\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker³, nous déduisons que $\mathbf{F}\mathbf{G} = \mathbf{G}\mathbf{F} = \mathbf{I}$, avec \mathbf{I} la matrice identité. Il en découle que

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}.$$

1.3.2 Système des équations de la mécanique des fluides parfaits en évolution adiabatique en variables de Lagrange

Utilisant les relations (1.20), (1.21), (1.24), déduites du changement de variables Euler-Lagrange, ainsi que (1.23), nous écrivons le système d'équations établi en 1.2.3 en variables de Lagrange. Notons que l'équation de continuité nécessite un traitement particulier pour pouvoir s'écrire sous la forme d'une équation de conservation dans cette représentation. Nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\widetilde{\rho_{\mathbf{a}}}}{\widetilde{\rho}} \right) - \frac{\partial}{\partial a_{\alpha}} \left(J \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x_i} \widetilde{v}_i \right) = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\widetilde{\rho_{\mathbf{a}}} \widetilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial a_{\alpha}} \left(J \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x_i} \widetilde{p} \right) + \widetilde{\rho_{\mathbf{a}}} \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial a_{\alpha}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial \widetilde{s}}{\partial t} = 0, \quad (1.27)$$

$$\widetilde{p} = \mathcal{P}(\widetilde{\rho}, \widetilde{s}; \mathbf{a}). \quad (1.28)$$

où $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{\mathbf{v}} = (\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_3)$, \widetilde{p} et \widetilde{s} représentent respectivement la masse volumique, le champ de vitesse, la pression et l'entropie spécifique en variables de Lagrange et où $\widetilde{\phi} = \phi \circ \boldsymbol{\chi}$, le symbole \circ désignant la composition d'applications.

1.4 Perturbations des équations de conservation en représentation mixte

Dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations, nous linéarisons les équations de conservation de la mécanique des fluides parfaits, écrites en représentation lagrangienne, autour d'un écoulement porteur non perturbé. Les perturbations lagrangiennes des quantités sont ensuite exprimées en fonction des variables d'Euler définies par l'écoulement porteur : c'est la représentation mixte des petites perturbations.

1.4.1 Perturbations des équations en variables de Lagrange

Considérons deux écoulements d'un même fluide, définis à partir d'une seule configuration de référence par la fonction de placement $\boldsymbol{\chi}_0$ pour l'écoulement dit porteur (ou non perturbé), supposé connu, et par la fonction $\boldsymbol{\chi}$ pour l'écoulement dit perturbé. Chacun de ces mouvements définit respectivement une relation entre variables de Lagrange et d'Euler :

$$\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}_0(\mathbf{a}, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{a}, t).$$

Nous supposons que le fluide est soumis au même champ de forces extérieures dans le mouvement perturbé et dans le mouvement non perturbé, défini en (1.13) et ne dépendant que du point en lequel se trouve la particule. L'écoulement perturbé est alors défini par les équations de conservation (1.25) à (1.27) et d'état (1.28). L'écoulement porteur est pour sa part caractérisé par $\widetilde{\rho}_0$, $\widetilde{\mathbf{v}}_0 = (\widetilde{v}_{01}, \widetilde{v}_{02}, \widetilde{v}_{03})$, \widetilde{p}_0 et \widetilde{s}_0 , qui désignent respectivement la masse volumique, le champ de vitesse, la pression et l'entropie spécifique en variables de

³ $\delta_{\alpha\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$ et $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$, α et $\beta \in \{1, 2, 3\}$.

Lagrange. Ces quantités sont solutions du système d'équations suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\widetilde{\rho}_{\mathbf{a}}}{\widetilde{\rho}_0} \right) - \frac{\partial}{\partial a_{\alpha}} \left(J_0 \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x_{0i}} \widetilde{v}_{0i} \right) = 0, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\widetilde{\rho}_{\mathbf{a}} \widetilde{v}_{0i}) + \frac{\partial}{\partial a_{\alpha}} (J_0 G_{0i\alpha} \widetilde{p}_0) + \widetilde{\rho}_{\mathbf{a}} G_{0i\alpha} \frac{\partial \widetilde{\phi}_0}{\partial a_{\alpha}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \widetilde{s}_0}{\partial t} = 0, \quad (1.31)$$

$$\widetilde{p}_0 = \mathcal{P}(\widetilde{\rho}_0, \widetilde{s}_0; \mathbf{a}), \quad (1.32)$$

avec $J_0 = \det F_0$ avec $F_{0\alpha i} = \frac{\partial x_{0i}}{\partial a_{\alpha}}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$, le jacobien J_0 vérifiant la relation :

$$J_0 \widetilde{\rho}_0 = \widetilde{\rho}_{\mathbf{a}}, \quad (1.33)$$

et où $G_{0i\alpha} = \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x_{0i}}$, $i = 1, 2, 3$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\widetilde{\phi}_0 = \phi \circ \chi_0$.

Hypothèses de petites perturbations

Dans le cadre de la théorie linéaire de l'acoustique, les perturbations (pour une particule donnée à un instant donné) des quantités caractérisant l'écoulement sont supposées suffisamment petites pour pouvoir limiter au premier ordre les développements (en puissances d'un paramètre caractéristique ε , sans dimension, de l'ordre de grandeur de la perturbation et petit devant l'unité) de ces quantités autour de l'état non perturbé. Cette hypothèse consiste donc à envisager des mouvements de faible amplitude autour d'un état moyen. Nous écrivons :

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{a}, t) = \widetilde{\rho}_0(\mathbf{a}, t) + \varepsilon \widetilde{\rho}_1^{\text{L}}(\mathbf{a}, t) + O(\varepsilon^2), \quad (1.34)$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{a}, t) = \widetilde{\mathbf{v}}_0(\mathbf{a}, t) + \varepsilon \widetilde{\mathbf{v}}_1^{\text{L}}(\mathbf{a}, t) + O(\varepsilon^2), \quad (1.35)$$

$$\widetilde{p}(\mathbf{a}, t) = \widetilde{p}_0(\mathbf{a}, t) + \varepsilon \widetilde{p}_1^{\text{L}}(\mathbf{a}, t) + O(\varepsilon^2), \quad (1.36)$$

$$\widetilde{s}(\mathbf{a}, t) = \widetilde{s}_0(\mathbf{a}, t) + \varepsilon \widetilde{s}_1^{\text{L}}(\mathbf{a}, t) + O(\varepsilon^2), \quad (1.37)$$

où $\widetilde{\rho}_1^{\text{L}}(\mathbf{a}, t)$, $\widetilde{\mathbf{v}}_1^{\text{L}}(\mathbf{a}, t)$, $\widetilde{p}_1^{\text{L}}(\mathbf{a}, t)$ et $\widetilde{s}_1^{\text{L}}(\mathbf{a}, t)$ sont les perturbations ou variations lagrangiennes d'ordre un à l'instant t , relatives à la particule situé en \mathbf{a} dans la configuration de référence. Notons que la définition des mouvements perturbé et non perturbé à partir d'une unique configuration de référence implique que ces perturbations lagrangiennes sont identiquement nulles au temps de référence.

Parallèlement, nous introduisons le déplacement lagrangien, qui est la grandeur définie comme suit :

$$\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{a}, t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{a}, t) - \mathbf{a}.$$

De la définition (1.1) du champ de vitesse, nous déduisons :

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\xi}}}{\partial t}(\mathbf{a}, t). \quad (1.38)$$

En variables eulériennes (\mathbf{x}, t) , ce champ a pour composantes :

$$v_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3,$$

soit encore, en notation tensorielle :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.39)$$

Il découle par conséquent de l'égalité (1.35) le développement au premier ordre suivant pour le déplacement lagrangien :

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{a}, t) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}_0(\mathbf{a}, t) + \varepsilon \tilde{\boldsymbol{\xi}}_1^L(\mathbf{a}, t) + O(\varepsilon^2), \quad (1.40)$$

avec $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0(\mathbf{a}, t) = \boldsymbol{\chi}_0(\mathbf{a}, t) - \mathbf{a}$, d'où :

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{a}, t) = \boldsymbol{\chi}_0(\mathbf{a}, t) + \varepsilon \tilde{\boldsymbol{\xi}}_1^L(\mathbf{a}, t) + O(\varepsilon^2). \quad (1.41)$$

Physiquement, cette dernière relation traduit le fait qu'une particule de fluide située au point \mathbf{x}_0 à un instant t dans l'écoulement porteur se trouve au même moment en $\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}^L$, où $\boldsymbol{\xi}^L = \varepsilon \boldsymbol{\xi}_1^L + O(\varepsilon^2)$, dans l'écoulement perturbé, ce que nous avons représenté sur la figure 1.1.

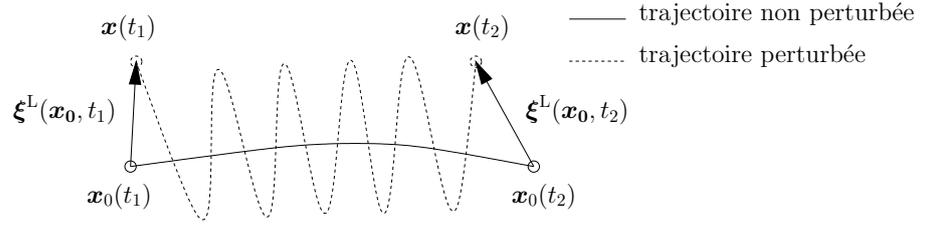


FIG. 1.1 – Perturbation du déplacement lagrangien pour une particule fluide à deux instants t_1 et t_2 .

L'hypothèse de petites perturbations et l'égalité (1.40) impliquent également les développements asymptotiques à l'ordre un suivants pour les matrices F , G et le jacobien J :

$$F = F_0 + \varepsilon F_1^L + O(\varepsilon^2), \quad (1.42)$$

$$G = G_0 + \varepsilon G_1^L + O(\varepsilon^2), \quad (1.43)$$

$$J = J_0 + \varepsilon J_1^L + O(\varepsilon^2). \quad (1.44)$$

Linéarisation des équations

Le système d'équations linéaires au premier ordre vérifié par les perturbations lagrangiennes est établi en reportant les égalités (1.34) à (1.37), (1.43) et (1.44) dans (1.23), (1.26) et (1.27), tout en tenant compte du système d'équations pour l'écoulement porteur et en négligeant les termes en ε d'ordre supérieur à un.

Relation traduisant la conservation de la masse. La linéarisation de l'équation de continuité en variables de Lagrange (1.25) étant compliquée, nous utilisons celle de la relation algébrique (1.23). Nous avons alors :

$$\tilde{\rho}_1^L = -\tilde{\rho}_0 \frac{J_1^L}{J_0} + O(\varepsilon). \quad (1.45)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement. Après linéarisation au premier ordre en ε de l'équation (1.26), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho}_\alpha \tilde{v}_1^L) + \frac{\partial}{\partial a_\alpha} (J_0 G_{0i\alpha} \tilde{p}_1^L + J_1^L G_{0i\alpha} \tilde{p}_0 + J_0 G_{1i\alpha}^L \tilde{p}_0) + \tilde{\rho}_\alpha \tilde{\xi}_1^L_j G_{0j\beta} \frac{\partial}{\partial a_\beta} \left(G_{0i\alpha} \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial a_\alpha} \right) = O(\varepsilon), \quad (1.46)$$

pour $i = 1, 2, 3$.

Équation de bilan pour l'entropie et loi d'état. La linéarisation au premier ordre de l'équation de bilan (1.27) donne :

$$\frac{\partial \tilde{s}_1^L}{\partial t} = O(\varepsilon). \quad (1.47)$$

La perturbation lagrangienne d'entropie reste donc constante le long des trajectoires des particules de fluide, d'où :

$$\widetilde{s}_1^L = O(\varepsilon). \quad (1.48)$$

Les lois d'état (1.28) et (1.32) sont à présent utilisées. Pour une particule de fluide, considérée successivement dans l'écoulement porteur et dans l'écoulement perturbé, nous avons alors :

$$\widetilde{p}(\mathbf{a}, t) - \widetilde{p}_0(\mathbf{a}, t) = \mathcal{P}(\widetilde{\rho}, \widetilde{s}; \mathbf{a}) - \mathcal{P}(\widetilde{\rho}_0, \widetilde{s}_0; \mathbf{a}).$$

Un développement de Taylor au premier ordre en ε autour de l'état non perturbé donne :

$$\widetilde{p}(\mathbf{a}, t) - \widetilde{p}_0(\mathbf{a}, t) = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \widetilde{\rho}}(\widetilde{\rho}_0, \widetilde{s}_0; \mathbf{a}) \widetilde{\rho}_1^L(\mathbf{a}, t) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \widetilde{s}}(\widetilde{\rho}_0, \widetilde{s}_0; \mathbf{a}) \widetilde{s}_1^L(\mathbf{a}, t) \right) + O(\varepsilon^2).$$

En portant (1.36) et (1.48) dans cette dernière relation, nous trouvons :

$$\widetilde{p}_1^L(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \widetilde{\rho}}(\widetilde{\rho}_0, \widetilde{s}_0; \mathbf{a}) \widetilde{\rho}_1^L(\mathbf{a}, t) + O(\varepsilon).$$

Finalement, nous obtenons une relation liant les perturbations lagrangiennes de pression et de masse volumique au premier ordre :

$$\widetilde{p}_1^L(\mathbf{a}, t) = \widetilde{c}_0^2(\mathbf{a}, t) \widetilde{\rho}_1^L(\mathbf{a}, t) + O(\varepsilon). \quad (1.49)$$

où $\widetilde{c}_0^2(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \widetilde{\rho}}(\widetilde{\rho}_0, \widetilde{s}_0; \mathbf{a})$, c_0 désignant la célérité du son adiabatique dans l'écoulement porteur.

1.4.2 Passage en représentation mixte

Un choix usuel de variables indépendantes pour la formulation d'un problème de propagation d'ondes est celui des coordonnées eulériennes relatives à l'écoulement non perturbé, ici notées (\mathbf{x}_0, t) . En représentation mixte Lagrange-Euler, les perturbations lagrangiennes sont exprimées dans la représentation d'Euler liée à l'écoulement porteur. Nous effectuons dans les équations linéarisées le changement de variables défini par :

$$\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}_0(\mathbf{a}, t'), \quad \mathbf{a} = \boldsymbol{\chi}_0^{-1}(\mathbf{x}_0, t), \quad t = t'. \quad (1.50)$$

Pour toute fonction f régulière, nous avons les relations suivantes :

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t) + v_{0i}(\mathbf{x}_0, t) \frac{\partial f}{\partial x_{0i}}(\mathbf{x}_0, t), \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial a_\alpha}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial f}{\partial x_{0i}}(\mathbf{x}_0, t) \frac{\partial x_{0i}}{\partial a_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (1.52)$$

$$J_0 \frac{\partial f}{\partial x_{0i}}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial}{\partial a_\alpha} \left(J_0 G_{0i\alpha} \widetilde{f} \right) (\mathbf{a}, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.53)$$

$$J_0 \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 f) (\mathbf{x}_0, t) + J_0 \frac{\partial}{\partial x_{0i}} (\rho_0 v_{0i} f) (\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\widetilde{\rho}_\alpha \widetilde{f} \right) (\mathbf{a}, t). \quad (1.54)$$

Dans le cas particulier d'un fluide au repos, nous constatons que la représentation mixte Lagrange-Euler et la représentation de Lagrange sont strictement identiques.

Équations de l'acoustique linéaire en représentation mixte

Une fois le changement de variables Lagrange-Euler (1.50) effectué dans l'équation (1.46), il reste à calculer explicitement les perturbations lagrangiennes d'ordre un du jacobien J et de la matrice G . Comme indiqué dans [132], il y a avantage à utiliser la représentation mixte et à introduire le déplacement lagrangien dans les calculs.

Perturbation lagrangienne du jacobien. Utilisant la relation

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_{0j}}{\partial a_\alpha}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

et portant le développement (1.41) dans la définition du jacobien J , nous obtenons, en variables indépendantes eulériennes (\mathbf{x}_0, t) :

$$J = \det \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \frac{\partial \xi_{11}^L}{\partial x_{01}} + O(\varepsilon^2) & \varepsilon \frac{\partial \xi_{12}^L}{\partial x_{01}} + O(\varepsilon^2) & \varepsilon \frac{\partial \xi_{13}^L}{\partial x_{01}} + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon \frac{\partial \xi_{11}^L}{\partial x_{02}} + O(\varepsilon^2) & 1 + \varepsilon \frac{\partial \xi_{12}^L}{\partial x_{02}} + O(\varepsilon^2) & \varepsilon \frac{\partial \xi_{13}^L}{\partial x_{02}} + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon \frac{\partial \xi_{11}^L}{\partial x_{03}} + O(\varepsilon^2) & \varepsilon \frac{\partial \xi_{12}^L}{\partial x_{03}} + O(\varepsilon^2) & 1 + \varepsilon \frac{\partial \xi_{13}^L}{\partial x_{03}} + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} J_0.$$

En développant le déterminant, nous trouvons :

$$J = J_0 + \varepsilon J_0 \frac{\partial \xi_{1k}^L}{\partial x_{0k}} + O(\varepsilon^2),$$

d'où, après identification au premier ordre avec (1.44) :

$$J_1^L = J_0 \frac{\partial \xi_{1k}^L}{\partial x_{0k}} + O(\varepsilon). \quad (1.55)$$

Perturbation lagrangienne de la matrice G. La matrice G étant l'inverse de la matrice F , les développements (1.42) et (1.43) donnent respectivement à l'ordre zéro et à l'ordre un en ε :

$$G_0 = F_0^{-1} + O(\varepsilon)$$

et

$$G_1^L = -G_0 F_1^L F_0^{-1} + O(\varepsilon),$$

d'où :

$$G_1^L = -F_0^{-1} F_1^L F_0^{-1} + O(\varepsilon).$$

Par conséquent, nous avons :

$$G_{1i\alpha}^L = -\frac{\partial a_\beta}{\partial x_{0i}} \frac{\partial \xi_{1l}^L}{\partial a_\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_{0l}} + O(\varepsilon) = -\frac{\partial \xi_{1l}^L}{\partial x_{0i}} G_{0l\alpha} + O(\varepsilon), \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (1.56)$$

Relation traduisant la conservation de la masse. En introduisant (1.55) dans (1.45), nous obtenons :

$$\rho_1^L = -\rho_0 \frac{\partial \xi_{1k}^L}{\partial x_{0k}} + O(\varepsilon). \quad (1.57)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement. L'utilisation des relations (1.53) à (1.56) dans (1.46) conduit, après division par J_0 , à l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 v_{1i}^L) + \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \left[\rho_0 v_{1i}^L v_{0j} + p_1^L \delta_{ij} + \left(\frac{\partial \xi_{1k}^L}{\partial x_{0k}} \delta_{ij} - \frac{\partial \xi_{1j}^L}{\partial x_{0i}} \right) p_0 \right] + \rho_0 \xi_{1j}^L \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_{0j} \partial x_{0i}} = O(\varepsilon), \quad (1.58)$$

pour $i = 1, 2, 3$.

Relation entre les perturbations lagrangiennes de pression et de masse volumique d'ordre un. Nous introduisons l'expression (1.57) dans (1.49) pour obtenir :

$$p_1^L = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial \xi_{1k}^L}{\partial x_{0k}} + O(\varepsilon). \quad (1.59)$$

Expression pour la perturbation lagrangienne d'ordre un de la vitesse. La linéarisation au premier ordre et l'écriture en représentation mixte de l'égalité (1.38) conduisent à la relation suivante pour la perturbation lagrangienne de vitesse à l'ordre un :

$$v_{1i}^L = \frac{\partial \xi_{1i}^L}{\partial t} + v_{0j} \frac{\partial \xi_{1i}^L}{\partial x_{0j}} + O(\varepsilon), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.60)$$

1.4.3 Retour en représentation d'Euler

En représentation mixte, les perturbations lagrangiennes sont des fonctions des variables d'Euler liées à l'écoulement porteur. Pour revenir à la représentation eulérienne usuelle des perturbations, il suffit d'exprimer les perturbations lagrangiennes d'ordre un en fonction des perturbations eulériennes de même ordre. Par définition, la perturbation lagrangienne d'ordre un d'une grandeur f quelconque, notée f_1^L , est donnée par la différence :

$$\tilde{f}(\mathbf{a}, t) - \tilde{f}_0(\mathbf{a}, t) = \varepsilon \tilde{f}_1^L(\mathbf{a}, t) + O(\varepsilon^2).$$

En variables d'Euler, cette même perturbation lagrangienne est l'écart d'ordre ε , à un instant t , entre le champ perturbé, considéré au point \mathbf{x} de l'écoulement perturbé, et le champ non perturbé, considéré au point \mathbf{x}_0 de l'écoulement porteur. Nous écrivons :

$$f(\mathbf{x}, t) - f_0(\mathbf{x}_0, t) = \varepsilon f_1^L(\mathbf{x}_0, t) + O(\varepsilon^2). \quad (1.61)$$

La perturbation, dite eulérienne, d'ordre un d'une grandeur f , notée f_1^E , mesure l'écart entre les champs perturbé et non perturbé de f au même point \mathbf{x}_0 de l'écoulement porteur :

$$f(\mathbf{x}_0, t) - f_0(\mathbf{x}_0, t) = \varepsilon f_1^E(\mathbf{x}_0, t) + O(\varepsilon^2). \quad (1.62)$$

Un développement de Taylor de $f(\mathbf{x}, t)$ autour de \mathbf{x}_0 est effectué dans la relation (1.61) en utilisant (1.41). Au premier ordre en ε , nous obtenons :

$$\varepsilon f_1^L(\mathbf{x}_0, t) = f(\mathbf{x}_0, t) + \varepsilon \boldsymbol{\xi}_1^L(\mathbf{x}_0, t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0, t) - f_0(\mathbf{x}_0, t) + O(\varepsilon^2).$$

Nous trouvons alors la relation entre les perturbations lagrangienne et eulérienne d'ordre un de f :

$$f_1^L(\mathbf{x}_0, t) = f_1^E(\mathbf{x}_0, t) + \boldsymbol{\xi}_1^L(\mathbf{x}_0, t) \cdot \nabla f_0(\mathbf{x}_0, t) + O(\varepsilon). \quad (1.63)$$

1.5 Équation dite de Galbrun

Par introduction des relations (1.59) et (1.60) dans l'équation (1.58), nous obtenons au premier ordre une équation linéaire de propagation, portant sur la perturbation lagrangienne d'ordre un du déplacement. Elle s'écrit, en notation vectorielle et en variables d'Euler (\mathbf{x}_0, t) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{D\boldsymbol{\xi}_1^L}{Dt} \right) + \operatorname{div} \left[\rho_0 \frac{D\boldsymbol{\xi}_1^L}{Dt} \otimes \mathbf{v}_0 - \rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_1^L \mathbf{I} + \left(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_1^L \mathbf{I} - {}^t \nabla \boldsymbol{\xi}_1^L \right) p_0 \right] + \rho_0 \nabla (\nabla \phi_0) \cdot \boldsymbol{\xi}_1^L = \mathbf{0}, \quad (1.64)$$

où $\frac{D\boldsymbol{\xi}_1^L}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_1^L}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{\xi}_1^L \cdot \mathbf{v}_0$ désigne la dérivée particulaire de la perturbation de déplacement lagrangien dans l'écoulement porteur.

La forme de (1.64) est celle d'une équation de conservation. Elle tient par conséquent compte d'éventuelles discontinuités de l'écoulement porteur, les coefficients ρ_0 , \mathbf{v}_0 , c_0 et p_0 étant supposés réguliers (de classe C^∞).

par exemple) par morceaux, et l'équation est vérifiée au sens des distributions [132, 131]. Si les coefficients sont *a fortiori* réguliers dans tout l'écoulement porteur, nous pouvons alors écrire :

$$\rho_0 \frac{D^2 \xi_1^L}{Dt^2} - \nabla \left(\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \xi_1^L \right) + \left(\operatorname{div} \xi_1^L \right) \nabla p_0 - {}^t \nabla \xi_1^L \cdot \nabla p_0 + \rho_0 \nabla (\nabla \phi_0) \cdot \xi_1^L = \mathbf{0}, \quad (1.65)$$

qui est une équation similaire à celle obtenue par Galbrun dans [67] (chapitre III, section V, système d'équations (50)).

Enfin, la relation (1.63) permet, à partir des égalités (1.57), (1.59) et (1.60), d'exprimer les perturbations eulériennes de masse volumique, de vitesse et de pression en fonction de la perturbation du déplacement lagrangien⁴, celui-ci jouant alors le rôle d'un potentiel vecteur pour le champ de perturbations :

$$\rho_1^E = -\rho_0 \operatorname{div} \xi_1^L - \xi_1^L \cdot \nabla \rho_0, \quad (1.66)$$

$$v_1^E = \frac{D \xi_1^L}{Dt} - \nabla v_0 \cdot \xi_1^L, \quad (1.67)$$

$$p_1^E = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \xi_1^L - \xi_1^L \cdot \nabla p_0. \quad (1.68)$$

Il apparaît que, lorsque les grandeurs caractéristiques de l'écoulement porteur sont constantes en espace, les perturbations lagrangiennes et eulériennes au premier ordre s'identifient.

1.6 Remarques sur le modèle

Remarquons tout d'abord que les hypothèses de validité de la mécanique des milieux continus imposent des limites en fréquence pour les phénomènes modélisés. S'il n'y a pas de borne inférieure pour celle-ci, elle ne doit pas dépasser le seuil pour lequel la longueur d'onde devient de l'ordre des échelles moléculaires.

Nous avons également supposé que l'évolution de l'écoulement est adiabatique. Pour les basses fréquences, ceci ne se justifie que si le fluide est un très mauvais conducteur de chaleur. Pour les hautes fréquences (à partir d'environ 1000 Hz pour un gaz), les compressions et détentes ont lieu si rapidement que l'on considère qu'il n'y a pas d'échange de chaleur entre le fluide et son environnement.

Pour sa part, l'hypothèse d'un fluide non visqueux n'est plus valable lorsque la propagation des ondes se fait sur de longues distances.

Il est à noter que si la représentation lagrangienne et la formulation en déplacement sont peu utilisées en mécanique des fluides⁵, elles le sont couramment en mécanique des solides. L'utilisation de la perturbation de déplacement comme inconnue principale permet notamment d'écrire de façon claire les conditions de transmission à l'interface régulière entre un fluide parfait et un solide élastique dans des problèmes de vibroacoustique ou d'interactions fluide-structure.

Terminons en indiquant que l'hypothèse formulée sur la petite perturbation du déplacement lagrangien, nécessaire pour linéariser les équations, semble plus restrictive que celles portant sur les perturbations de masse volumique, de vitesse et de pression pour le modèle "classique" des équations de conservation linéarisées en représentation eulérienne.

1.7 Notes bibliographiques

Nous concluons ce chapitre par une brève étude bibliographique sur les applications de la représentation mixte Lagrange-Euler et l'utilisation du déplacement lagrangien comme variable, ainsi que quelques travaux concernant l'équation de Galbrun.

Indiquons tout d'abord que l'équation de propagation (1.65) est introduite par Galbrun [67], sous la forme de trois équations scalaires appelées "équations des petits mouvements". Celles-ci sont établies par un

⁴Ces expressions sont solutions des équations de conservation et d'état linéarisées au premier ordre en représentation eulérienne, comme cela est vérifié dans l'annexe A.

⁵On peut néanmoins citer les travaux de Andrews et McIntyre [3] et le livre de Tolstoy [156] pour l'utilisation de la variable déplacement en acoustique.

calcul direct de petites perturbations en représentation de Lagrange (chapitre III, section V), mais également à partir des équations générales de l'hydrodynamique en utilisant la représentation mixte Lagrange-Euler (chapitre III, section VI). Ce deuxième formalisme est repris, de manière plus systématique, pour une équation de conservation générale et pour les équations de conservation de la mécanique des fluides, par Poirée [132, 133]. Par une approche similaire et dans le cadre de la mécanique des milieux continus, Bermúdez de Castro [26] obtient cette équation de manière rigoureuse et l'étudie dans le cas particulier d'un fluide initialement au repos, montrant que le modèle tient compte des ondes acoustiques et des ondes de gravité internes. L'auteur indique également comment l'équation de Pekeris et l'équation des ondes classique se déduisent de l'équation de Galbrun lorsque les effets de la gravité sont négligés et que le fluide est homogène en l'absence de perturbation.

Formulant l'hypothèse d'un écoulement de fluide parfait isentropique, Hayes [85] se sert de la représentation mixte et du déplacement lagrangien pour établir une densité lagrangienne associée aux perturbations du problème linéarisé (section 8, équation (57)), dont dérive une équation très proche de l'équation de Galbrun (équation (58)).

Dans [75], Godin introduit comme variable le déplacement "oscillatoire" des particules en représentation mixte du mouvement afin d'établir une équation de propagation des ondes linéaire (sous-section 2.3, équation (29)), identique à (1.65), à partir des équations de l'hydrodynamique pour un fluide parfait, non homogène, en évolution adiabatique et placé dans un champ de pesanteur. L'auteur montre que le déplacement oscillatoire et le déplacement lagrangien coïncident au premier ordre de perturbation et exhibe une densité lagrangienne (sous-section 2.3, équation (31)) dont dérive l'équation de propagation, qui est la même que celle établie par Hayes dans [85].

Indiquons par ailleurs qu'une équation très similaire peut être établie, encore par l'écriture des équations de l'hydrodynamique en représentation mixte Lagrange-Euler et l'introduction du déplacement lagrangien, en magnéto-hydrodynamique linéarisée⁶ pour l'étude de la stabilité de plasmas en équilibre stationnaire, comme le montrent les équations (2.19) et (2.20) de [81]. Le problème aux valeurs propres associé est ensuite résolu par des méthodes variationnelles, comme le principe de Rayleigh (cf. Bernstein *et al.* [27], Frieman et Rotenberg [66] ou Newcomb [119]). La mise en œuvre de méthodes d'éléments finis, non sujettes aux phénomènes de "pollution spectrale", pour ces problèmes est largement discutée par Gruber et Rappaz dans [81].

En plus des articles de Poirée [132, 133, 134] déjà évoqués, citons quelques travaux concernant les applications de l'équation de Galbrun ainsi que sa résolution numérique.

Minkevitch *et al.* [109] étudient la réfraction des rayons sonores dans des fluides se trouvant dans un champ newtonien de gravité, la vitesse de propagation des ondes c_0 étant alors exprimée en fonction du potentiel de gravité au moyen de l'équation d'état de Tait, utilisée en acoustique non linéaire. L'une des équations de propagation envisagées dans cette étude est l'équation de Galbrun (équation (26)).

Ben Tahar et Dias [17] réalisent un couplage entre deux méthodes numériques pour traiter un problème de propagation et de rayonnement acoustique en présence d'écoulement. Dans un domaine borné, à l'intérieur duquel l'écoulement porteur est non uniforme, l'équation de Galbrun est résolue par une méthode d'éléments finis alors qu'une méthode d'éléments finis de frontière assure la prise en compte de la condition de rayonnement en domaine infini, où l'écoulement porteur est supposé nul. Le couplage des méthodes est fait à l'interface entre les deux domaines. Cette technique est ensuite appliquée au calcul de la propagation acoustique dans un cylindre avec corps central.

Dans l'article de Peyret et Élias [129], les solutions obtenues par la résolution numérique au moyen d'une méthode d'éléments finis de l'équation de Galbrun pour la propagation de modes dans des conduits de section constante ou variable et à parois traitées sont comparées à celles trouvées par résolution de l'équation de Lilley. La dépendance en temps est harmonique et l'écoulement porteur est similaire à celui employé par Eversman dans [62], bien qu'il ne vérifie pas les équations de conservation des fluides parfaits.

Récemment, Treyssède *et al.* [157] ont proposé de résoudre l'équation de Galbrun par une méthode d'éléments finis reposant sur une formulation mixte en pression-déplacement. Les résultats obtenus sont alors validés par comparaisons avec les solutions de l'équation de Pridmore-Brown [135] pour un écoulement

⁶Un plasma confiné dans le champ magnétique d'un tokamak se comporte en effet comme un fluide dont l'évolution est décrite par les équations de l'hydrodynamique couplées aux équations de Maxwell.

porteur cisailé dans un guide droit et celles d'un modèle analytique dû à Rienstra [139] pour un écoulement porteur potentiel dans des conduits à section variable.

Chapitre 2

Régularisation en écoulement uniforme

La résolution numérique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme subsonique et en régime harmonique est étudiée dans ce chapitre. Bien que la propagation acoustique puisse dans ce cas particulier être décrite au moyen d'une équation scalaire comme l'équation de Helmholtz convectée, nous traitons le problème dans toute sa généralité en considérant également l'évolution d'une perturbation rotationnelle. Cette configuration permet alors non seulement d'appréhender certains des aspects fondamentaux de la propagation d'ondes acoustiques au sein d'un écoulement, mais également de comprendre pleinement la méthode de régularisation utilisée. Nous verrons que cette dernière tire en effet entièrement parti du découplage, déjà mentionné en introduction, entre l'acoustique et l'hydrodynamique qui a lieu dans ce type d'écoulement.

De fait, l'écoulement uniforme constitue une étape primordiale en vue du traitement d'écoulements plus complexes. Indiquons enfin qu'il est connu, et démontré par une méthode de développements asymptotiques raccordés, que la solution d'un problème de propagation dans un conduit à parois traitées ou non et en présence d'un écoulement à couches limites minces est très proche de celle du même problème de propagation en présence d'un écoulement totalement uniforme [63]. Cette approximation de l'écoulement porteur fournit par conséquent un modèle raisonnable du problème physique dans le cas de couches limites de très faible épaisseur.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet, dans le cas bidimensionnel, d'une note publiée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [35], écrite avec Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Éric Lunéville et reproduite dans l'annexe E.

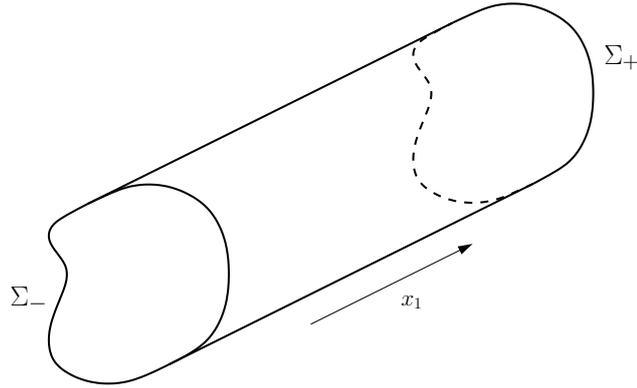
2.1 Le problème dans un guide infini

Nous traitons le problème de propagation d'ondes en présence d'un écoulement uniforme de fluide parfait homogène et dans un conduit rigide de section constante, modélisé par un guide droit infini $\mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$ de \mathbb{R}^3 , dont la section droite $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné, régulier¹. L'écoulement porteur, indépendant du temps, est modélisé par une masse volumique ρ_0 , une pression statique p_0 et une célérité du son c_0 constantes et un champ de vitesse \mathbf{v}_0 dirigé selon la direction axiale \mathbf{e}_1 du guide et de norme v_0 constante. L'équation de Galbrun (1.65) devient alors :

$$\rho_0 \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \rho_0 c_0^2 \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x_1}$ désigne la dérivée particulaire dans l'écoulement porteur. Notons que, pour des questions de lisibilité, nous omettons dans toute la suite l'exposant L et l'indice $_1$ précédemment attribués aux variations lagrangiennes d'ordre un.

¹Notons que tous les résultats de ce chapitre restent valables pour une section du guide convexe, à frontière lipschitzienne et polygonale.

FIG. 2.1 – Exemple de géométrie pour le domaine Ω .

Position du problème en régime harmonique

Précisons tout d'abord la terminologie de problème en régime dit “harmonique” ou encore “périodique établi”. Il est entendu par là que nous recherchons une solution particulière de l'équation (2.1) de la forme :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad (2.2)$$

avec ω une constante réelle strictement positive², appelée pulsation. Le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ est alors une solution périodique dans le temps du problème et l'on parle de régime temporel harmonique pour la perturbation.

Dans la suite, toutes les inconnues du problème ont une dépendance implicite en $e^{-i\omega t}$. Le déplacement lagrangien, jusqu'à présent considéré comme réel à valeurs dans \mathbb{R}^3 , est donc représenté, d'un point de vue mathématique, au moyen d'une quantité complexe (*i.e.*, à valeurs dans \mathbb{C}^3), ses valeurs physiques étant ensuite obtenues en prenant la partie réelle du champ $\boldsymbol{\xi}$ dans l'expression (2.2).

Nous adimensionnons l'équation (2.1) en la divisant par la quantité constante $\rho_0 c_0^2$ et nous notons $k = \frac{\omega}{c_0}$ le nombre d'onde et $M = \frac{v_0}{c_0}$ le nombre de Mach, qui sont tous deux des données du problème. L'écoulement porteur étant supposé subsonique, le nombre de Mach est de valeur absolue strictement inférieure à un. Nous supposons qu'une source de perturbations est présente dans le conduit. L'équation modélisant la propagation des fluctuations de déplacement lagrangien s'écrit alors :

$$-k^2 \mathbf{u} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} - \nabla(\text{div } \mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (2.3)$$

où le champ de vecteurs \mathbf{f} est une donnée à support compact qui représente la source de perturbations. Enfin, la condition aux limites imposée sur les parois rigides du conduit est celle de la nullité du déplacement normal à la paroi, c'est-à-dire :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

avec \mathbf{n} le vecteur normal unitaire sur les parois, dirigé vers l'extérieur du conduit.

En utilisant la propriété d'invariance par translation de la solution dans la géométrie envisagée, il est possible de poser le problème de propagation, en vue d'un traitement numérique, sur une portion de conduit de longueur finie, notée Ω et représentée sur la figure 2.1. Pour le problème modèle que nous nous proposons de résoudre dans ce chapitre, le déplacement normal est supposé connu sur les frontières Σ_- et Σ_+ , respectivement situées en $x_1 = x_-$ et $x_1 = x_+$.

Afin d'être en mesure de résoudre le problème posé lorsque la vitesse de l'écoulement est non nulle³, il nous reste à préciser des conditions aux limites supplémentaires. Ceci sera fait dans la suite, mais indiquons qu'une première possibilité consiste en la donnée de l'ensemble des composantes du champ de déplacement sur Σ_- et Σ_+ .

²Le cas $\omega = 0$ correspond au problème statique.

³Comme nous le verrons dans la section suivante, la donnée de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ sur le bord du domaine suffit pour bien poser le problème dans le cas sans écoulement.

2.2 Un cas modèle : le problème sans écoulement

Dans le cas particulier pour lequel la vitesse de l'écoulement porteur est nulle, l'équation (2.3) prend la forme suivante :

$$-k^2 \mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f}.$$

Nous utilisons le principe de superposition pour nous ramener au problème de condition aux limites homogène suivant :

$$-k^2 \mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.5)$$

dans lequel la notation \mathbf{f} pour le second membre modifié de l'équation a été conservée. Nous supposons par ailleurs, afin de simplifier l'exposé, que la source \mathbf{f} est irrotationnelle, c'est-à-dire que $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ dans le domaine Ω . Nous en déduisons l'importante contrainte d'irrotationnalité pour la solution du problème :

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \quad (2.6)$$

qui est ici une simple conséquence⁴ de l'équation de Galbrun, le nombre d'onde k étant non nul. Indiquons pour conclure que l'équation (2.4) ainsi que la contrainte (2.6) qui lui est associée interviennent dans des problèmes simples d'interaction fluide-structure, notamment pour l'étude des résonances d'un fluide à l'intérieur d'une cavité. À ce titre, plusieurs travaux concernant la formulation et l'approximation numérique de ces problèmes sont disponibles dans la littérature [83, 41, 12, 22, 68, 159, 29].

2.2.1 Analogie avec l'électromagnétisme

Nous remarquons des similitudes entre le problème (2.4)-(2.5) et un problème stationnaire classique, provenant de l'électromagnétisme, de calcul de champ électrique dans un matériau homogène et isotrope, délimité par un conducteur parfait. Si Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^3 , de frontière $\partial\Omega$ régulière ou polyédrique, convexe à frontière supposée lipschitzienne, le champ électrique \mathbf{E} est solution du système, issu d'une formulation au second ordre des équations de Maxwell, suivant :

$$-k^2 \mathbf{E} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \mathbf{j} \text{ dans } \Omega, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.8)$$

Le champ de vecteurs \mathbf{j} est une donnée du problème représentant la densité de courant appliquée au système et \mathbf{n} désigne le vecteur normal unitaire sur la frontière $\partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur de Ω . La condition aux limites (2.8) modélise le conducteur parfait et nous supposons pour simplifier que $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ dans Ω , c'est-à-dire que la densité de charges est nulle dans le domaine.

Les équations (2.7) et (2.8) ne définissent pas un problème elliptique et leur discrétisation par des éléments finis nodaux conduit par conséquent à un problème mal posé. Ce fait est connu depuis de nombreuses années des ingénieurs qui cherchent à déterminer les fréquences et modes de résonance de cavités, car il se traduit par la présence de modes dits "*parasites*" (c'est-à-dire des solutions numériques sans signification physique) dans les résultats, comme ceci est expliqué dans [36].

Pour la résolution de ce problème par une méthode d'éléments finis, l'emploi d'éléments d'arêtes, introduits par Nédélec [117, 118], conformes dans l'espace de Hilbert

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \},$$

est alors indiqué⁵. Dans ce cas, une formulation mixte du problème est obtenue en introduisant une inconnue scalaire supplémentaire p (une pseudo-pression), qui joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de divergence nulle vérifiée par toute solution de (2.7)-(2.8). Le couple d'inconnues (\mathbf{E}, p) est alors solution du système suivant :

$$-k^2 \mathbf{E} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) - \nabla p = \mathbf{j} \text{ dans } \Omega, \quad (2.9)$$

⁴Il suffit en effet d'appliquer formellement l'opérateur rotationnel à l'équation (2.4) et d'utiliser le fait que le rotationnel du gradient d'un champ scalaire est nul pour obtenir ce résultat.

⁵Observons que l'espace $H(\operatorname{rot}; \Omega)$ est l'espace fonctionnel naturellement associé à l'équation (2.7), celle-ci ne faisant intervenir que le rotationnel comme opérateur différentiel.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.11)$$

$$p = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.12)$$

Les conditions requises pour obtenir la convergence d'une telle méthode d'éléments finis font usage des outils d'approximation des problèmes de type point-selle (la condition dite *inf-sup* notamment), comme celui associé à la forme variationnelle du problème associé aux équations (2.9) à (2.12), et de propriétés de compacité discrète des éléments finis choisis pour la discrétisation [100]. Cependant, les raisons fournies pour expliquer le bon comportement des approximations par éléments d'arêtes ont souvent été erronées et la théorie mathématique sous-jacente a connu des développements actifs depuis une dizaine d'années. Plusieurs démonstrations de convergence, reposant soit sur la théorie de l'approximation spectrale des opérateurs non compacts dans le cas d'un problème de guide d'ondes [24], soit sur une formulation mixte équivalente faisant intervenir un opérateur compact pour des problèmes aux valeurs propres [30], sont aujourd'hui disponibles, y compris pour des méthodes d'éléments finis d'arête d'ordre élevé [58].

Néanmoins, la discrétisation de ce problème d'électromagnétisme par éléments finis nodaux est possible, mais il convient pour cela de le "régulariser" au préalable. Cette opération consiste formellement à remplacer l'opérateur différentiel $\mathbf{rot}(\mathbf{rot})$ par l'opérateur elliptique qu'est le laplacien vectoriel. La technique, dite *de régularisation*, utilisée se traduit alors par l'ajout d'un terme $\mathbf{grad}(\operatorname{div})$ à l'équation (2.7), sachant que toute solution du problème (2.7)-(2.8) est à divergence nulle. Ainsi, en vertu de l'identité :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}) - \nabla(\operatorname{div}) = -\Delta, \quad (2.13)$$

tout champ \mathbf{E} solution de (2.7) vérifie aussi l'équation de Helmholtz vectorielle :

$$-k^2 \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = \mathbf{j} \text{ dans } \Omega, \quad (2.14)$$

avec les conditions aux limites :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.15)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.16)$$

L'addition de la condition aux limites (2.16) s'avère nécessaire pour la résolution de la forme régularisée du problème, constituée des équations (2.14) à (2.16), ainsi que pour son équivalence avec le problème fort (2.7)-(2.8). En effet, la divergence du champ \mathbf{E} , notée ici φ , vérifie alors le problème :

$$-k^2 \varphi - \Delta \varphi = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

qui a pour solution la solution triviale $\varphi = 0$, dès que φ est supposée assez régulière et que k^2 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $(-\Delta)$ avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

La méthode de régularisation propose ainsi une alternative à l'emploi d'éléments finis mixtes en permettant l'utilisation d'éléments finis nodaux. En effet, si le problème régularisé est naturellement posé dans l'espace

$$H_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap H(\operatorname{div}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mid \mathbf{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 ; \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) ; (\mathbf{v} \wedge \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \},$$

celui-ci coïncide avec son sous-espace fermé

$$H = H^1(\Omega)^3 \cap H_0(\mathbf{rot}; \Omega)$$

lorsque le domaine Ω est polyédrique et convexe ou encore si la frontière $\partial\Omega$ est régulière ([71], théorème 3.7). Une méthode d'éléments finis nodaux, conformes dans l'espace $H^1(\Omega)$, converge alors vers la solution du problème régularisé si ce dernier est bien posé.

L'idée de régulariser les équations de Maxwell remonte aux années soixante avec les travaux de Werner [160] et de Leis [105]. Ses applications sont variées, citons par exemple l'étude de modes dans des résonateurs [100], le calcul de modes guidés [11] ou les problèmes de diffraction [87]. Cette régularisation se généralise aisément au cas d'un milieu de propagation hétérogène, lorsque la permittivité électrique ou la perméabilité

magnétique du matériau considéré sont variables en espace. Le terme ajouté à l'équation prend alors la forme $\mathbf{grad}(s \operatorname{div})$, où s est un coefficient réel positif donné⁶, voire, plus généralement, une fonction bornée. Il n'y a aucune difficulté à traiter par cette méthode le cas d'une densité de courant \mathbf{j} donnée dont la divergence est non nulle et appartient à l'espace $L^2(\Omega)^3$.

Soulignons cependant que cette approche du problème n'est plus valide lorsque le domaine Ω possède des singularités géométriques, comme des coins ou arêtes rentrants [50]. Dans ce cas, la solution du problème régularisé converge vers une solution qui n'est pas à divergence nulle et n'est donc pas celle du problème physique de départ⁷. Néanmoins, une discrétisation par éléments finis nodaux reste possible dans le cadre d'une décomposition du champ électrique en parties régulière et singulière, inspirée par les travaux de Birman et Solomyak [28], qui a donné lieu à différentes méthodes de résolution numérique [34, 5], ou bien en considérant des régularisations du problème formulées dans des espaces L^2 à poids dans lesquels l'espace H est dense [51]. Le lecteur intéressé pourra consulter la référence [86] pour un résumé de travaux récents concernant la résolution numérique de problèmes aux limites dérivant des équations de Maxwell en présence de singularités géométriques.

2.2.2 La méthode de régularisation

Revenons au problème sans écoulement (2.4)-(2.5) concernant l'équation de Galbrun. La solution étant à rotationnel nul, nous pouvons ajouter de manière formelle un terme $\mathbf{rot}(\mathbf{rot})$ à l'équation (2.4). Ainsi, en suivant une démarche en quelque sorte symétrique de celle qui vient d'être détaillée pour le problème (2.7)-(2.8), nous obtenons le problème régularisé suivant :

$$-k^2 \mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.19)$$

Notons que la condition supplémentaire (2.19) permet de résoudre ce nouveau problème et de prouver son équivalence avec le problème de départ. Alors qu'il est possible de montrer que la forme régularisée, ou encore augmentée, (2.17) à (2.19) du problème est bien posée dans l'espace

$$V = H^1(\Omega)^3 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 \mid (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0 \},$$

la résolution de l'équation (2.4) par une méthode d'éléments finis conformes dans l'espace $H^1(\Omega)$ conduit à l'apparition de modes "parasites", qui dépendent fortement du maillage employé.

Dans le cadre d'un problème de couplage fluide-structure, une méthode de pénalisation a été proposée par Hamdi *et al.* [83] pour la résolution d'une équation similaire afin de circonvenir cette difficulté. Les modes "parasites" étant identifiés comme étant des solutions numériques à rotationnel non nul, les auteurs imposent une contrainte d'irrotationnalité du déplacement en modifiant la formulation variationnelle du problème par pénalisation. Sans toutefois les éliminer, cette méthode permet de "déplacer" les modes incriminés vers des fréquences plus élevées. Cette démarche s'avère voisine de la technique de régularisation que nous venons d'introduire, l'équation (2.17) pouvant d'ailleurs être vue comme une pénalisation "exacte" de (2.4).

Nous terminons l'examen du cas modèle que constitue l'écoulement de vitesse nulle en indiquant qu'il est possible d'établir une formulation mixte du problème (2.4)-(2.5) par une démarche identique à celle suivie pour le problème provenant de l'électromagnétisme que nous avons évoqué. Des éléments finis conformes dans l'espace

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}$$

doivent alors être utilisés pour sa résolution numérique. Nous renvoyons notamment aux travaux Bermúdez *et al.* [25, 22, 23] pour des applications d'une telle approche à des problèmes d'interaction fluide-structure.

⁶Dans ce cas, le coefficient s est appelé le *paramètre de régularisation*.

⁷Ce phénomène, découvert numériquement, est connu en électromagnétisme sous le nom de "*paradoxe des coins*".

2.3 Régularisation en écoulement uniforme

Notre objectif est à présent d'étendre la méthode de régularisation au cas d'un écoulement uniforme de vitesse non nulle. Nous considérons le problème posé dans le domaine borné Ω et modélisé par les équations suivantes :

$$-k^2 \mathbf{u} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \text{ donné sur } \partial\Omega. \quad (2.21)$$

Nous constatons immédiatement deux nouvelles difficultés. D'une part, le cadre fonctionnel naturel n'apparaît plus aussi clairement qu'auparavant en raison de la présence de termes supplémentaires dans l'équation (2.20), provenant de la dérivée convective et mettant en jeu certaines des composantes du gradient de \mathbf{u} . Une approche mixte "classique" du problème semble donc, à première vue, difficilement envisageable et la régularisation particulièrement indiquée. Par ailleurs, et c'est la seconde difficulté, il n'est pas possible de montrer que le champ de déplacement \mathbf{u} est à rotationnel nul, même si le champ \mathbf{f} est irrotationnel. La technique de régularisation visant à donner à l'équation de Galbrun un caractère elliptique en lui ajoutant le terme $\mathbf{rot}(\mathbf{rot})$, nous allons devoir considérer le fait que, pour un écoulement porteur uniforme de vitesse non nulle, le rotationnel de la solution de l'équation aux dérivées partielles (2.20) dépend bien du caractère rotationnel ou non de la source \mathbf{f} , mais également des conditions aux limites imposées sur le bord du domaine. Ceci est l'objet du paragraphe suivant. Nous allons notamment voir que la donnée de $\mathbf{rot} \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$ va désormais fournir une condition aux limites permettant la résolution du problème régularisé.

2.3.1 Une équation pour le rotationnel du déplacement

Supposons que le champ \mathbf{f} appartienne à $H(\mathbf{rot}; \Omega)$. En appliquant formellement l'opérateur différentiel \mathbf{rot} à l'équation (2.20), nous établissons le problème vérifié par le rotationnel du champ de déplacement lagrangien $\mathbf{rot} \mathbf{u}$, ici noté ψ . La dérivée convective dans un écoulement porteur uniforme étant un opérateur à coefficients constants, elle commute avec l'opérateur rotationnel et nous trouvons :

$$-k^2 \psi - 2ikM \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = \mathbf{rot} \mathbf{f} \text{ dans } \Omega. \quad (2.22)$$

Pour chaque couple (x_2, x_3) appartenant à $\tilde{\Omega}$, l'équation (2.22) est une équation différentielle du second ordre décrivant le phénomène de transport de tourbillons à la vitesse de l'écoulement porteur. Nous retrouvons ainsi la propriété bien connue de "séparation" des perturbations acoustiques et hydrodynamiques dans un écoulement uniforme, les évolutions de ces dernières étant régies par des équations découplées.

Il reste à définir des conditions aux limites au bord du domaine pour permettre la résolution de l'équation (2.22). Le champ ψ étant à divergence nulle, la donnée $\psi \wedge \mathbf{n}$ sur le bord $\partial\Omega$, alliée à la connaissance du rotationnel du champ \mathbf{f} dans le domaine Ω , suffit pour le déterminer analytiquement. L'extension du théorème D.1 de l'annexe D au cas tridimensionnel nous apprend par ailleurs que ψ appartient à l'espace $L^2(\Omega)^3$ dès que sa trace tangentielle appartient à $L^2(\partial\Omega)^3$.

Par utilisation du principe de superposition, nous ramenons la condition aux limites (2.21) à une condition homogène ; le problème régularisé à résoudre est alors le suivant :

$$-k^2 \mathbf{u} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + s \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u} - \psi) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = \psi \wedge \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.25)$$

où le paramètre de régularisation s est un réel strictement positif. En électromagnétisme, les conditions aux limites (2.24) et (2.25) sont celles apparaissant naturellement au bord d'un conducteur parfait pour le problème régularisé portant sur le champ magnétique. Ceci tend à justifier notre choix, *a priori* arbitraire, de la donnée des composantes tangentielles au bord du champ ψ pour la résolution de (2.22).

Nous allons maintenant introduire le cadre fonctionnel du problème, afin de pouvoir donner en toute rigueur un sens faible à ce système d'équations et de conditions aux limites.

2.3.2 Formulation variationnelle du problème régularisé

Nous commençons par écrire une formulation variationnelle du problème régularisé composé des équations (2.23) à (2.25). Soit \mathbf{v} une fonction test régulière, telle que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. En multipliant (2.23) par $\bar{\mathbf{v}}$ et en intégrant sur le domaine Ω , nous trouvons :

$$\int_{\Omega} \left(-k^2 \mathbf{u} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + s \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u} - \psi) \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}.$$

À l'aide de la formule de Green et en se servant des conditions aux limites (2.24) et (2.25), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{x} \\ & + \int_{\partial\Omega} M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + s \psi \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite une nouvelle fois les conditions aux limites (2.24) et (2.25). Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma &= \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma \\ &= \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} M^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \bar{v}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \bar{v}_3 \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma \\ &= \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} M^2 \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \psi_3 \right) \bar{v}_2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \psi_2 \right) \bar{v}_3 \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma \\ &= \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} M^2 (\psi_3 \bar{v}_2 - \psi_2 \bar{v}_3) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Le cadre fonctionnel du problème faible est enfin précisé ; nous choisissons de nous placer dans l'espace

$$V = H^1(\Omega)^3 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3 \mid (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

Le problème variationnel s'énonce alors : *trouver \mathbf{u} appartenant à V tel que, pour tout \mathbf{v} de V ,*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + s \psi \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} M^2 (\psi_3 \bar{v}_2 - \psi_2 \bar{v}_3) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma, \end{aligned}$$

ou encore, sous une forme abstraite : *trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{2.26}$$

avec $a(\cdot, \cdot) = b(\cdot, \cdot) + c(\cdot, \cdot)$, où nous notons :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left(\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{x},$$

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left(-(k^2 + 1) \mathbf{u} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x},$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + s \psi \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} M^2 (\psi_3 \bar{v}_2 - \psi_2 \bar{v}_3) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma.$$

En ce qui concerne l'existence et l'unicité d'une solution du problème (2.26), nous avons le

Théorème 2.1 *Si $s \geq 1$, le problème variationnel (2.26) relève de l'alternative de Fredholm.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que la forme sesquilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est continue sur $H^1(\Omega)^3$. Nous allons montrer qu'elle est également coercive sur l'espace V pour $s \geq 1$. Nous procédons à la manière de Costabel dans [48]. Pour tout $\mathbf{u} \in V$, nous avons :

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \left(|\mathbf{u}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right|^2 + |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + s |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left(|\mathbf{u}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right|^2 + |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + (s-1) |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) dx \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot (\bar{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}) d\sigma \\
&= \int_{\Omega} \left(|\mathbf{u}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right|^2 + |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + (s-1) |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 + (\nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) dx \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot (\bar{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}) d\sigma \\
&= \int_{\Omega} \left(|\mathbf{u}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right|^2 + (s-1) |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 + |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) dx \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} \left((\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot (\bar{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}) - (\operatorname{div} \mathbf{u})(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) d\sigma.
\end{aligned}$$

Ce dernier terme de bord est identiquement nul par utilisation de la condition aux limites (2.24). En effet, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \left((\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot (\bar{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}) - (\operatorname{div} \mathbf{u})(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \left((\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot (\bar{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\mathbf{n} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\sigma.
\end{aligned}$$

Nous nous servons ensuite de la formule d'analyse vectorielle

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a},$$

et du fait que $\operatorname{rot} \mathbf{n} \equiv \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{n}} \equiv \mathbf{0}$, pour arriver à :

$$\int_{\partial\Omega} \left((\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot (\bar{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}) - (\operatorname{div} \mathbf{u})(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) d\sigma = \int_{\partial\Omega} (\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\sigma.$$

En vertu de (2.24), nous avons de plus :

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} = (\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Enfin, le vecteur \mathbf{n} est constant sur Σ_- et Σ_+ et donc que $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{n} \equiv \mathbf{0}$ sur $\Sigma_- \cup \Sigma_+$, tandis que l'on vérifie que $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}$ s'annule sur $\partial\Omega \setminus \Sigma_- \cup \Sigma_+$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ étant nul sur cette partie de la frontière du domaine.

Finalement, si $s \geq 1$, nous obtenons :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left(|\mathbf{u}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right|^2 + (s-1) |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 + |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) dx \geq (1 - M^2) \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3}, \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

Nous en déduisons le résultat de coercivité, puisque $M^2 < 1$.

Nous montrons ensuite que la forme sesquilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ est associée à un opérateur compact. Nous utilisons tout d'abord le théorème de représentation de Riesz (théorème B.6). Ainsi, il existe un opérateur

$$\begin{aligned}
K &: H^1(\Omega)^3 \rightarrow H^1(\Omega)^3 \\
\mathbf{u} &\mapsto K\mathbf{u}
\end{aligned}$$

tel que :

$$(K\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega)^3} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3.$$

Cet opérateur est continu de $H^1(\Omega)^3$ dans $H^1(\Omega)^3$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \|K\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3}^2 &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, K\mathbf{u} \right)_{L^2(\Omega)^3} \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3} \|K\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3} \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3} \|K\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\|K\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3}.$$

Il est aussi compact. Soit $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $H^1(\Omega)^3$. Par continuité de l'opérateur K , la suite $(K\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)^3$. En se servant de la compacité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, nous en extrayons une sous-suite, encore notée $(K\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge dans $L^2(\Omega)^3$. À partir des inégalités précédentes, nous pouvons alors écrire :

$$\|K\mathbf{u}_m - K\mathbf{u}_n\|_{H^1(\Omega)^3}^2 \leq \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_n\|_{H^1(\Omega)^3} \|K\mathbf{u}_m - K\mathbf{u}_n\|_{L^2(\Omega)^3}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2.$$

Nous en déduisons que la suite $(K\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega)^3$ et que l'opérateur K est compact de $H^1(\Omega)^3$ dans lui-même.

Ainsi, l'opérateur associé à la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est une perturbation compacte d'un isomorphisme de V . On vérifie enfin aisément que la forme antilinéaire $l(\cdot)$ est continue sur V .

Le problème variationnel (2.26) vérifie donc les hypothèses requises pour l'application de l'alternative de Fredholm (corollaire B.32). □

Par conséquent, l'unicité de la solution implique son existence. Le problème (2.26) est donc bien posé si et seulement si le problème homogène associé : *trouver \mathbf{u} appartenant à V tel que, pour tout \mathbf{v} de V ,*

$$\int_{\Omega} \left(-k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{x} = 0, \quad (2.27)$$

a pour unique solution la solution triviale $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Nous concluons en énonçant le résultat suivant, relatif aux fréquences singulières de ce problème.

Théorème 2.2 *Si $s \geq 1$, le problème (2.26) admet une unique solution sauf peut-être pour un ensemble discret de valeurs $k = k(M, s)$ (en nombre fini sur tout compact de \mathbb{C}).*

DÉMONSTRATION. Ce résultat repose sur les propriétés d'analyticité du problème par rapport au réel strictement positif k . Nous avons vu que la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, associée au problème (2.26), définit un opérateur sur $H^1(\Omega)^3$, noté $A(k)$, qui est la somme d'un isomorphisme et d'un opérateur compact. La dépendance de l'opérateur compact par rapport à k étant polynomiale et, par conséquent, analytique, il est aisé de faire entrer le problème dans le cadre du théorème de Steinberg (théorème B.37). Il découle alors de la situation (ii) de l'énoncé de ce théorème que l'opérateur $A(k)^{-1}$ est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . □

Revenons à présent brièvement sur l'approche que nous avons choisie et la méthode mise en œuvre. Variationnellement parlant, la régularisation de l'équation se traduit par l'ajout d'un terme de la forme $\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}$ à la forme sesquilinéaire naturellement associée au problème (ainsi qu'un autre à la forme antilinéaire au second membre). La contrainte portant sur le rotationnel du déplacement est donc prise en compte de manière faible, par pénalisation de la formulation variationnelle, plutôt qu'explicitement dans l'espace fonctionnel. D'un point de vue pratique, cette méthode présente l'avantage d'autoriser l'emploi

d'éléments finis nodaux, puisque V est un sous-espace de $H^1(\Omega)^3$. Notons cependant que, à la différence des méthodes de pénalisation habituelles, la valeur du paramètre s n'a pas à être grande pour obtenir une solution numérique correcte. Pour cette raison, on parle parfois de *pénalisation exacte* du problème.

Enfin, si seule la régularisation du problème est envisagée pour sa résolution, c'est qu'une approche utilisant des éléments finis mixtes ne semble pas réalisable. D'une part, les différents éléments finis déjà introduits par Raviart et Thomas [137] ou Nédélec ne sont pas en mesure de discrétiser les opérateurs associés aux termes de convection de l'équation et d'éventuels éléments *ad hoc* restent par conséquent à développer. D'autre part, la démonstration de convergence d'une éventuelle méthode de ce type resterait une question ouverte, alors que nous disposons pour la régularisation du cadre et des outils pour les problèmes relevant de la théorie de Riesz-Fredholm.

2.3.3 Équivalence

Il reste à établir l'équivalence entre la formulation variationnelle (2.26) et le problème régularisé fort (2.23) à (2.25), qui est une question non résolue en dimension trois⁸. Formellement, la preuve consiste à appliquer l'opérateur rotationnel à l'équation de Galbrun régularisée (2.23), puis à utiliser (2.22) pour obtenir l'équation vérifiée par la quantité $\mathbf{rot} \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}$. En lui adjoignant la condition aux limites (2.25), nous trouvons un problème type, dont le champ $\mathbf{rot} \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}$ est solution, qui est de la forme : *trouver \mathbf{w} tel que* :

$$-k^2 \mathbf{w} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x_1^2} + s \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{w}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \quad (2.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{w} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.30)$$

Il faut ensuite montrer, dans un cadre fonctionnel approprié, que le problème (2.28) à (2.30) a pour unique solution la solution nulle, sauf pour des valeurs exceptionnelles du paramètre de régularisation s .

Sur le plan technique, pour arriver au problème ci-dessus et définir le cadre fonctionnel adéquat, il faut considérer dans la formulation variationnelle (2.26) des fonctions test \mathbf{v} qui sont des rotationnels de champs test et effectuer des intégrations par parties conduisant à une relation d'orthogonalité dans $L^2(\Omega)^3$. Les difficultés pour prouver ce résultat proviennent, et c'est la différence avec le cas bidimensionnel, du caractère vectoriel de $\mathbf{rot} \mathbf{u}$ en dimension trois. Plus particulièrement, l'étude du problème vectoriel composé des équations (2.28) à (2.30) à laquelle nous sommes confrontés est comparable à celle du problème de Galbrun non régularisé de départ : *trouver \mathbf{u} tel que* :

$$-k^2 \mathbf{u} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega,$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega,$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

alors qu'en dimension deux, le problème obtenu porte sur un champ scalaire.

2.4 Convergence et estimations d'erreur

L'obtention d'un résultat de convergence et d'estimations d'erreur pour une approximation du problème variationnel (2.26) par une méthode de Galerkin comme la méthode des éléments finis s'appuie sur la démonstration de la stabilité des formes sesquilinéaires associées aux problèmes variationnels approchés.

Pour diverses raisons⁹, comme, par exemple, le calcul d'intégrales par quadrature numérique, l'approximation des données du problème ou encore le fait que la frontière courbe $\partial\Omega$ est prise en compte de manière inexacte en raison de l'approximation polyédrique du domaine Ω , le problème approché résolu en pratique est, en général, une approximation interne du problème initial de la forme : *trouver $\mathbf{u}_h \in V_h$ tel que, pour tout $\mathbf{v}_h \in V_h$,*

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l_h(\mathbf{v}_h), \quad (2.31)$$

⁸Nous renvoyons cependant le lecteur à l'annexe E pour une preuve de l'équivalence dans le cas bidimensionnel.

⁹On parle dans la littérature de "*crimes variationnels*" (voir par exemple le chapitre 4 du livre de Strang et Fix [145]).

où V_h est un sous-espace de dimension finie de l'espace V et où les formes respectivement sesquilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ et antilinéaire $l_h(\cdot)$ sont issues des approximations des formes $a(\cdot, \cdot)$ et $l(\cdot)$; le paramètre positif h , caractérisant la discrétisation, est quand à lui destiné à tendre vers 0. On dit que la méthode de Galerkin converge dès lors que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V = 0,$$

où \mathbf{u} désigne la solution du problème continu. Nous voulons dans cette section établir des conditions suffisantes de convergence de la méthode. Cependant, avant même de tenter d'estimer $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V$, la question se pose de savoir si les problèmes approchés du type de (2.31), dépendant du paramètre h , sont bien posés. Pour ce faire, nous introduisons la notion de *stabilité* d'une famille de formes sesquilinéaires approchées.

Définition 2.3 *On dit que les formes sesquilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$, dépendantes du paramètre h , forment une famille stable s'il existe une constante $\gamma > 0$, indépendante de h , telle que :*

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_V} \geq \gamma \|\mathbf{v}_h\|_V, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h.$$

Lemme 2.4 *Si les formes sesquilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ forment une famille stable, alors les problèmes approchés (2.31) sont bien posés.*

DÉMONSTRATION. Supposons le paramètre h fixé. Soient \mathbf{u}_h et \mathbf{u}'_h deux solutions de (2.31). Nous avons alors :

$$a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}'_h, \mathbf{w}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h,$$

d'où $\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}'_h\|_V = 0$ en vertu de l'hypothèse de stabilité des formes $a_h(\cdot, \cdot)$. Nous avons donc montré l'unicité de la solution du problème (2.31). Son existence s'en déduit, l'espace V_h étant de dimension finie. \square

Le résultat suivant, connu sous le nom de second lemme de Strang, va maintenant justifier pleinement l'intérêt de la définition 2.3.

Théorème 2.5 *Considérons une famille de problèmes discrets du type de (2.31) pour lesquels les formes sesquilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ forment une famille stable. Il existe alors une constante C , indépendante de h , telle que :*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|a(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) - a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_V} \right) + \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|l(\mathbf{w}_h) - l_h(\mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_V} \right).$$

DÉMONSTRATION. Nous avons tout d'abord :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_V, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h,$$

et par conséquent :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_V). \quad (2.32)$$

La famille des formes sesquilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ étant stable, nous avons par ailleurs :

$$\gamma \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_V \leq \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_V} \leq \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + l_h(\mathbf{w}_h) - l(\mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_V},$$

puisque $a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h)$ et $a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = l_h(\mathbf{w}_h)$ pour tout \mathbf{w}_h de V_h . Nous en déduisons :

$$\gamma \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_V \leq \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|a(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_V} + \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|a(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) - a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_V} + \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|l(\mathbf{w}_h) - l_h(\mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_V}.$$

L'inégalité du théorème résulte alors de cette dernière inégalité, de (2.32) et de la continuité de la forme $a(\cdot, \cdot)$. \square

Nous devons par conséquent prouver la stabilité de la famille de formes sesquilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ associées à l'approximation du problème (2.26). Pour les problèmes traités dans ce mémoire, la forme sesquilinéaire intervenant dans la formulation variationnelle définit un opérateur qui n'est éloigné d'un opérateur coercif que d'une perturbation compacte. Le théorème suivant, qui s'inspire d'un résultat d'Aubin sur l'approximation d'une somme d'un isomorphisme et d'un opérateur compact (théorème 1-5 du chapitre 3 de [9]), permet alors de conclure.

Théorème 2.6 *Si $a(\cdot, \cdot)$ est une forme sesquilinéaire sur V de la forme :*

$$a(\cdot, \cdot) = b(\cdot, \cdot) + c(\cdot, \cdot),$$

où la forme $b(\cdot, \cdot)$ est coercive sur V et où la forme $c(\cdot, \cdot)$ définit un opérateur compact de V dans V par le théorème de représentation de Riesz. Si la famille de sous-espaces V_h de V est telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_V = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (2.33)$$

et qu'il existe une fonction $C(h)$, qui tend vers 0 avec h , vérifiant :

$$|a(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) - a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| \leq C(h) \|\mathbf{v}_h\|_V \|\mathbf{w}_h\|_V, \quad \forall \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in V_h, \quad (2.34)$$

alors la famille d'approximations $a_h(\cdot, \cdot)$ est stable dès que le paramètre h est suffisamment petit.

DÉMONSTRATION. Nous prouvons ce résultat par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite de sous-espaces $(V_{h(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, $h(n)$ tendant vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$, et une suite de fonctions $(\mathbf{v}_{h(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{v}_{h(n)} \in V_{h(n)}$, telles que :

- i) $\|\mathbf{v}_{h(n)}\|_V = 1, \forall n \in \mathbb{N}$,
- ii) $\sup_{\mathbf{w}_{h(n)} \in V_{h(n)}} \frac{|a_{h(n)}(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{w}_{h(n)})|}{\|\mathbf{w}_{h(n)}\|_V} < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Nous avons alors, pour toute fonction \mathbf{w} de V et tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{w})| &\leq |a(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{w} - \mathbf{w}_{h(n)})| + |(a - a_{h(n)})(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{w}_{h(n)})| + |a_{h(n)}(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{w}_{h(n)})| \\ &\leq \|A\|_{\mathcal{L}(V,V)} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_{h(n)}\|_V + C(h(n)) \|\mathbf{w}_{h(n)}\| + \|\mathbf{w}_{h(n)}\|_V \sup_{\mathbf{s}_{h(n)} \in V_{h(n)}} \frac{|a_{h(n)}(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{s}_{h(n)})|}{\|\mathbf{s}_{h(n)}\|_V}, \end{aligned}$$

où A désigne l'opérateur de V dans V associé à la forme $a(\cdot, \cdot)$. Choisissons alors un réel ε strictement positif. D'après l'hypothèse (2.33) de l'énoncé, nous avons :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \Rightarrow \inf_{\mathbf{w}_{h(n)} \in V_{h(n)}} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_{h(n)}\|_V \leq \frac{\varepsilon}{3 \|A\|_{\mathcal{L}(V,V)}}, \forall \mathbf{w} \in V \right).$$

Nous en déduisons qu'il est possible de déterminer une suite de fonctions $(\mathbf{w}_{h(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{L}(V,V)} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_{h(n)}\|_V \leq \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Par ailleurs, d'après ii), il suffit que l'entier n soit suffisamment grand pour que l'on ait :

$$\sup_{\mathbf{w}_{h(n)} \in V_{h(n)}} \frac{|a_{h(n)}(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{w}_{h(n)})|}{\|\mathbf{w}_{h(n)}\|_V} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Enfin, en vertu de (2.34) et pour n assez grand, nous avons :

$$C(h(n)) \|\mathbf{w}_{h(n)}\|_V \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

et, par conséquent,

$$|a(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{w})| \leq \varepsilon, \quad \forall \mathbf{w} \in V,$$

pour n assez grand ; la suite $(A\mathbf{v}_{h(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tend alors vers $\mathbf{0}$ faiblement dans V . L'opérateur A étant continu de V dans lui-même, nous en déduisons que $(\mathbf{v}_{h(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tend également faiblement vers $\mathbf{0}$ et que, l'opérateur K étant compact, la suite $(K\mathbf{v}_{h(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers $\mathbf{0}$.

Nous montrons à présent que la suite $(\mathbf{v}_{h(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tend fortement vers $\mathbf{0}$, ce qui constituera une contradiction. Nous avons :

$$b(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{v}_{h(n)})_V = (a(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{v}_{h(n)}) - a_{h(n)})(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{v}_{h(n)}) + a_{h(n)}(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{v}_{h(n)}) - (K\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{v}_{h(n)})_V,$$

d'où, d'après ii) et l'hypothèse (2.34) :

$$|b(\mathbf{v}_{h(n)}, \mathbf{v}_{h(n)})_V| \leq C(h(n))\|\mathbf{v}_{h(n)}\|_V^2 + \frac{\|\mathbf{v}_{h(n)}\|_V}{n} + \|K\mathbf{v}_{h(n)}\|_V\|\mathbf{v}_{h(n)}\|_V.$$

Notons α la constante de coercivité de la forme $b(\cdot, \cdot)$. Nous déduisons finalement que :

$$(\alpha - C(h(n))\|\mathbf{v}_{h(n)}\|_V) \leq \frac{1}{n} + \|K\mathbf{v}_{h(n)}\|_V, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui est incompatible avec i), puisque $K\mathbf{v}_{h(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{0}$. □

Comme dans le cas "classique" de problèmes elliptiques, nous déduisons de ces résultats que l'erreur de la méthode est proportionnelle aux erreurs d'interpolation commises.

2.5 Discrétisation du problème par éléments finis

Nous souhaitons résoudre le problème variationnel (2.26) par une méthode d'éléments finis de Lagrange et allons en décrire la mise en œuvre dans le cas d'éléments de degré un. Celle-ci consiste dans un premier temps à écrire un problème discret dans lequel les conditions aux limites essentielles¹⁰ ne sont pas prises en compte. Une pseudo-élimination de ces conditions est ensuite réalisée.

Soit \mathcal{T}_h une triangulation donnée du domaine Ω telle que $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$. Le paramètre h , qui caractérise dans ce cas la finesse du maillage, est défini de la manière suivante :

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K,$$

avec h_K le diamètre de la plus petite sphère contenant l'élément K . Nous introduisons ensuite l'espace d'approximation

$$V_h = \{ \mathbf{v}_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid \mathbf{v}_h|_K \in (P_1)^3, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \},$$

qui est le sous-espace vectoriel des fonctions à valeurs vectorielles continues sur $\bar{\Omega}$ et de restrictions affines sur chaque élément et correspond à l'utilisation d'éléments finis de Lagrange de type P_1 . Celui-ci constitue une approximation conforme de l'espace $H^1(\Omega)^3$ et sa dimension est égale au nombre de degrés de liberté du problème, soit $3N_h$, où N_h désigne le nombre de nœuds de la triangulation \mathcal{T}_h appartenant à $\bar{\Omega}$. À chaque nœud n_i , $i = 1, \dots, N_h$, de la triangulation sont alors associées trois fonctions de bases \mathbf{w}_{i1} , \mathbf{w}_{i2} et \mathbf{w}_{i3} appartenant à V_h et vérifiant :

$$\mathbf{w}_{i1}(n_j) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta_{ij}, \quad \mathbf{w}_{i2}(n_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_{i3}(n_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta_{ij}, \quad j = 1, \dots, N_h,$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Tout champ \mathbf{v}_h de V_h se décompose alors sous la forme

$$\mathbf{v}_h = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{\alpha=1}^3 v_{h\alpha}(n_i) \mathbf{w}_{i\alpha}. \quad (2.35)$$

¹⁰C'est-à-dire les conditions aux limites apparaissant explicitement dans l'espace d'approximation variationnelle.

Ainsi, tout élément de V_h peut être identifié à un vecteur colonne formé des valeurs complexes $v_{h\alpha}(n_i)$, $i = 1, \dots, N_h$ et $\alpha = 1, 2, 3$, des composantes de \mathbf{v}_h aux nœuds du maillage.

Considérons à présent le problème variationnel approché (2.31). En utilisant (2.35) et en notant $U_{j\beta}$, $\beta = 1, 2, 3$, la valeur de la fonction $u_{h\beta}$ au nœud n_j et \mathbf{U} le vecteur colonne de composantes $U_{j\beta}$, $j = 1, \dots, N_h$, nous obtenons la formulation discrète suivante : trouver $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{3N_h}$ tel que, pour tout $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{3N_h}$,

$$\sum_{i,j=1}^{N_h} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 V_{i\alpha} U_{j\beta} a_h(\mathbf{w}_{j\beta}, \mathbf{w}_{i\alpha}) = \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{\beta=1}^3 V_{i\beta} l_h(\mathbf{w}_{i\alpha}),$$

où $V_{i\alpha} = v_{h\alpha}(n_i)$ et \mathbf{V} est le vecteur colonne de composantes $V_{i\alpha}$. Ce dernier problème conduit naturellement à un système linéaire de la forme :

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{B},$$

où les coefficients de la matrice \mathbf{A} de $\mathbb{C}^{3N_h \times 3N_h}$ et du vecteur colonne \mathbf{B} de \mathbb{C}^{3N_h} sont donnés par :

$$A_{ij\alpha\beta} = a_h(\mathbf{w}_{j\alpha}, \mathbf{w}_{i\beta}) \text{ et } B_{i\alpha} = l_h(\mathbf{w}_{i\alpha}).$$

La matrice \mathbf{A} est creuse puisque les supports des fonctions $\mathbf{w}_{i\alpha}$ et $\mathbf{w}_{j\beta}$ sont d'intersection de mesure nulle si les nœuds n_i et n_j n'appartiennent pas à un même élément.

Une fois la matrice et le second membre du système linéaire construits par assemblage des matrices et vecteurs élémentaires calculés sur chacun des éléments de la triangulation, nous pouvons procéder à une pseudo-élimination des conditions aux limites. Cette étape consiste d'une part à remplacer par les équations exprimant les conditions aux limites essentielles les lignes correspondant aux degrés de liberté imposés et d'autre part à substituer ces coefficients par leurs valeurs dans toutes les autres équations du système linéaire. Il est également possible d'éliminer les lignes et colonnes de la matrice dont les indices correspondent à ces degrés de liberté. La technique proposée présente cependant l'avantage de ne nécessiter aucune renumérotation et, par conséquent, aucune modification de la structure de stockage de la matrice¹¹. Le système linéaire est ensuite résolu par une méthode de factorisation de type LU.

2.6 Résultats numériques

Description de l'application

Cette application concerne la propagation de modes acoustiques et hydrodynamiques à l'intérieur d'un conduit rigide bidimensionnel infini en présence d'un écoulement uniforme de fluide homogène et en l'absence de force extérieure, problème pour lequel la solution analytique est connue¹².

La configuration traitée est la suivante : nous considérons une portion de longueur égale à 2 d'un conduit à parois rigides de hauteur constante $l = 1$, représentée par le domaine $\Omega =]0, 2[\times]0, 1[$. Nous désignons par $\Sigma =]0, 2[\times \{0\} \cup]0, 2[\times \{1\}$ la frontière de Ω correspondant aux parois rigides du conduit et par $\Sigma_- = \{0\} \times]0, 1[$ et $\Sigma_+ = \{2\} \times]0, 1[$ les frontières "artificielles" du problème. Les conditions aux limites du problème sont d'une part une condition de paroi rigide sur Σ , se traduisant par la nullité du déplacement normal à la paroi :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

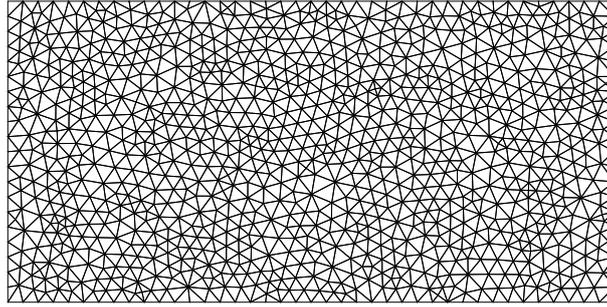
et d'autre part une condition de déplacement normal imposé sur Σ_- et Σ_+ , le mode propagé étant donné par une formule analytique. La régularisation de l'équation nécessite par ailleurs une condition aux limites supplémentaire sur le rotationnel du déplacement :

$$\text{rot } \mathbf{u} = \psi \text{ sur } \partial\Omega,$$

où ψ désigne le rotationnel du déplacement pour le mode imposé, également connu analytiquement. Nous supposons enfin que le nombre de Mach M de l'écoulement porteur est positif ou nul.

¹¹En effet, cette structure de stockage est particulière, car adaptée au fait que la matrice du système linéaire issu de la discrétisation par éléments finis du problème est, par nature, creuse.

¹²Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C pour le calcul de modes dans un conduit rigide en présence d'un écoulement uniforme.

FIG. 2.2 – Maillage non structuré du domaine Ω .

Le maillage utilisé, non structuré, est constitué de 1928 triangles et représenté sur la figure 2.2. Les éléments finis employés sont des éléments de Lagrange de type P_1 . Tous les résultats présentés ont été obtenus avec le code MÉLINA¹³. Notons qu’en vertu du théorème 2.2, il existe une infinité dénombrable de fréquences singulières pour lesquelles il n’y a pas unicité de la solution. Ceci se traduit pour le problème approché par une pollution fréquente des résultats numériques par des solutions du problème homogène, qualifiées de “*modes de cavité*”, au voisinage des fréquences singulières. L’utilisation d’éléments finis d’ordre plus élevé, comme par exemple les éléments de type P_2 , ou d’un maillage plus fin permet de résoudre cet inconvénient. Les effets de la régularisation restent néanmoins clairement visibles sur les résultats qui suivent, ceux-ci étant à l’occasion légèrement parasités par des modes de cavité.

Modes acoustiques

Le fluide étant homogène et l’écoulement uniforme, nous considérons tout d’abord les modes dits *acoustiques*, qui sont par définition des solutions à variables séparées irrotationnelles de l’équation de Galbrun ; nous avons par conséquent $\psi = 0$ pour ces simulations. Le nombre de Mach étant supposé positif, on dira qu’un mode acoustique est *aval* (resp. *amont*) s’il se propage dans le sens du vecteur \mathbf{e}_1 (resp. $-\mathbf{e}_1$).

Nous traitons tout d’abord le problème sans écoulement. La propagation d’un mode aval plan (mode d’indice $n = 0$) est présentée sur la figure 2.3. Nous avons choisi de représenter les parties réelles des deux composantes du champ de déplacement.

| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
|---------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $s = 0$ | $2,7446 \cdot 10^{-1}$ | 2,5877 |
| $s = 1$ | $1,6339 \cdot 10^{-2}$ | $2,0712 \cdot 10^{-2}$ |

TAB. 2.1 – Erreurs relatives en normes $L^2(\Omega)^2$ et $H^1(\Omega)^2$ pour la propagation d’un mode aval d’indice $n = 0$, $k = 5, 4$ et $M = 0$.

En l’absence de régularisation, les résultats se trouvent pollués par des solutions à rotationnel non nul, dont le module est parfois beaucoup plus élevé que celui du mode propagé (figure 2.3(a)). Ce dernier est par contre obtenu de manière satisfaisante pour une valeur du coefficient de régularisation s égale à 1 (figure 2.3(b)). Indiquons que, dans le cas d’un mode plan, la composante selon la direction \mathbf{e}_2 de la solution est identiquement nulle. Si cela n’apparaît pas de manière évidente sur la figure 2.3(b), les valeurs prises par la solution calculée avec régularisation sont néanmoins extrêmement petites, ce parasitage numérique étant très probablement dû à la présence d’un mode de cavité. La figure 2.4 illustre la propagation d’un mode d’indice $n = 1$, également en l’absence d’écoulement. Les conclusions sur les effets de la régularisation dans ce cas restent identiques à celles déjà formulées. Nous constatons enfin que la présence d’un écoulement n’améliore pas la stabilité de la méthode d’éléments finis pour le problème non régularisé, que la propagation se fasse dans le sens de l’écoulement (figure 2.5) ou dans le sens opposé (mode amont, figure 2.6).

¹³Ce code, développé par Daniel Martin (IRMAR, université de Rennes 1) en collaboration avec les chercheurs du groupe laboratoire POems à l’ENSTA, est disponible à l’adresse suivante : <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/www/homepage.html>.

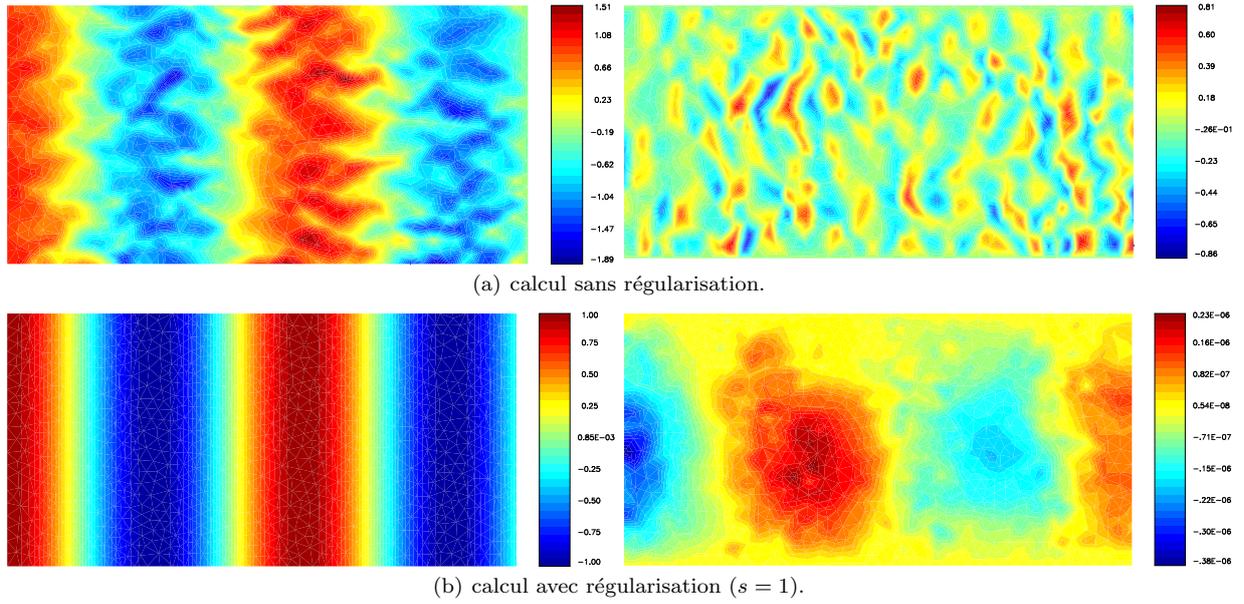


FIG. 2.3 – Isovaleurs des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} pour la propagation d'un mode aval d'indice $n = 0$, $k = 5, 4$ et $M = 0$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
|---------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $s = 0$ | $9,295 \cdot 10^{-1}$ | 6,868 |
| $s = 1$ | $4,9969 \cdot 10^{-2}$ | $5,2882 \cdot 10^{-2}$ |

TAB. 2.2 – Erreurs relatives en normes $L^2(\Omega)^2$ et $H^1(\Omega)^2$ pour la propagation d'un mode aval d'indice $n = 1$, $k = 7, 7$ et $M = 0$.

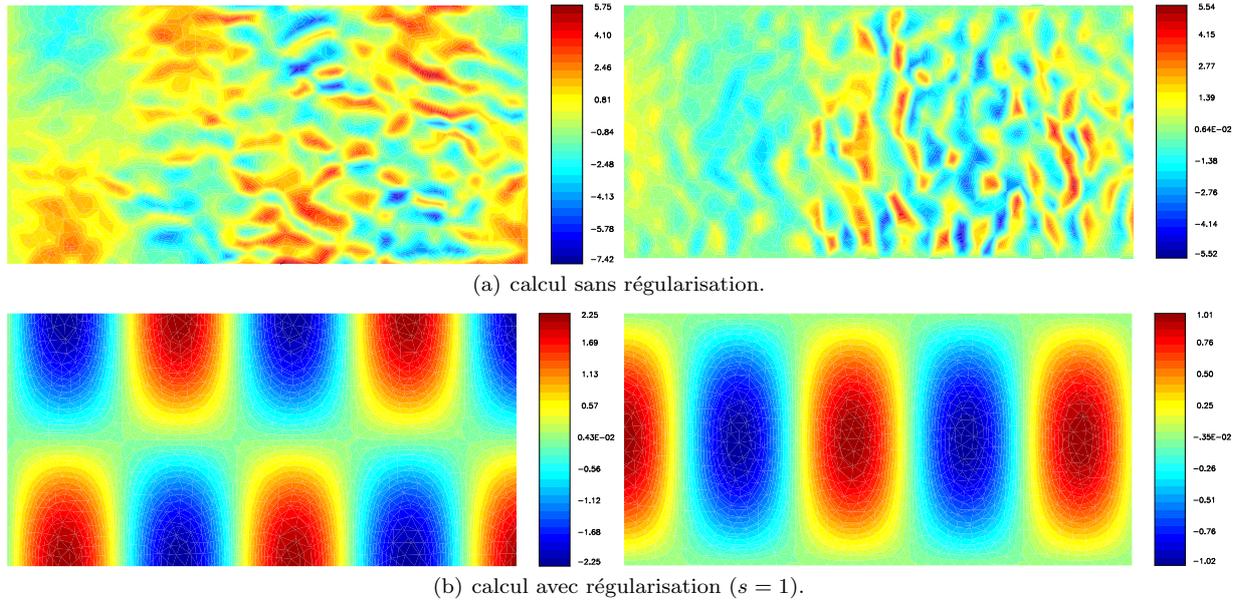


FIG. 2.4 – Isovaleurs des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} pour la propagation d'un mode aval d'indice $n = 1$, $k = 7, 7$ et $M = 0$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

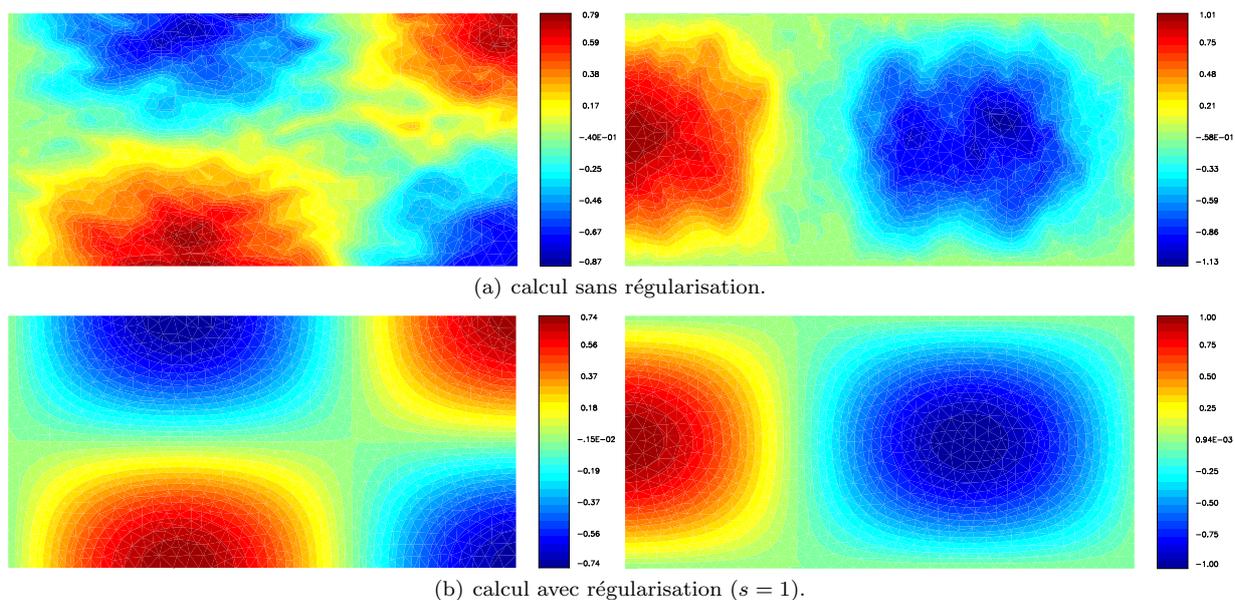


FIG. 2.5 – Isovaleurs des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} pour la propagation d'un mode aval d'indice $n = 1$, $k = 4, 6$ et $M = 0, 3$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
|---------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $s = 0$ | $1,369 \cdot 10^{-1}$ | 1,0845 |
| $s = 1$ | $4,961 \cdot 10^{-3}$ | $1,1727 \cdot 10^{-2}$ |

TAB. 2.3 – Erreurs relatives en normes $L^2(\Omega)^2$ et $H^1(\Omega)^2$ pour la propagation d'un mode aval d'indice $n = 1$, $k = 4, 6$ et $M = 0, 3$.

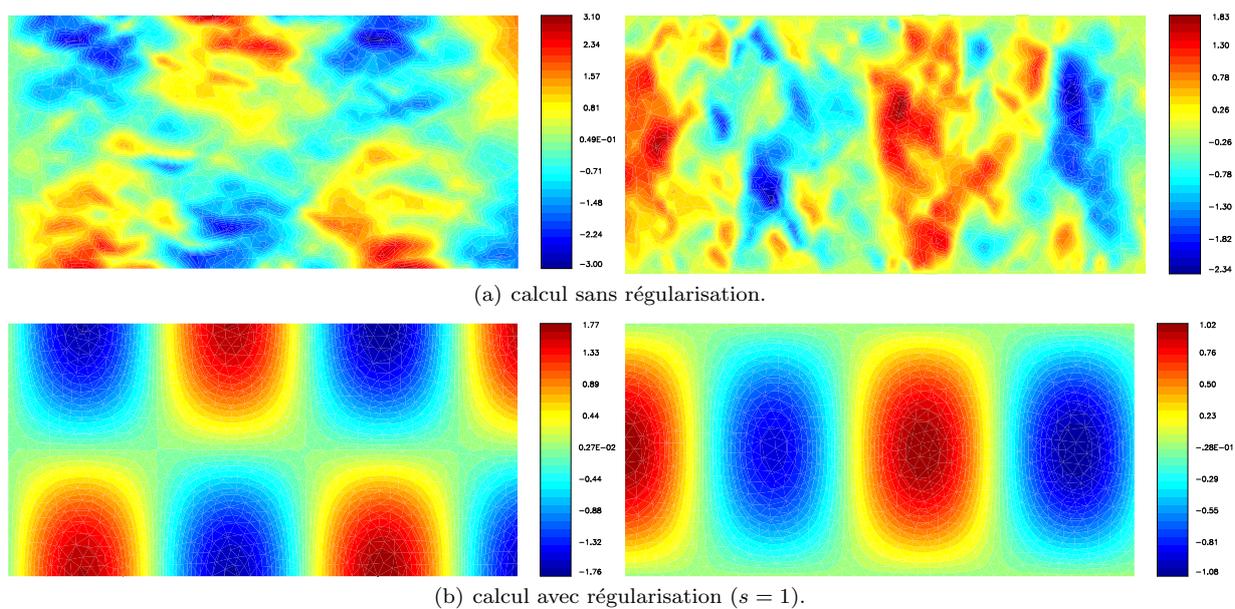


FIG. 2.6 – Isovaleurs des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} pour la propagation d'un mode amont d'indice $n = 1$, $k = 4, 6$ et $M = 0, 3$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
|---------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $s = 0$ | $6,4466 \cdot 10^{-1}$ | 3,5609 |
| $s = 1$ | $5,555 \cdot 10^{-2}$ | $4,1484 \cdot 10^{-2}$ |

TAB. 2.4 – Erreurs relatives en normes $L^2(\Omega)^2$ et $H^1(\Omega)^2$ pour la propagation d'un mode amont d'indice $n = 1$, $k = 4, 6$ et $M = 0, 3$.

Mode hydrodynamique

Nous procédons ensuite à la propagation d'un mode à rotationnel non nul, dit hydrodynamique. Ce type de mode est à divergence nulle et se propage à la vitesse de l'écoulement porteur. Les modes hydrodynamiques forment un continuum puisque, pour toute fonction φ de l'espace $H_0^1([0, l])$, où l désigne la hauteur du conduit (ici égale à 1), le champ

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \left(i \frac{M}{k} \varphi'(x_2) \mathbf{e}_1 + \varphi(x_2) \mathbf{e}_2 \right) e^{i \frac{k}{M} x_1}$$

est celui d'un mode hydrodynamique¹⁴. Leur rotationnel, noté ψ , est alors :

$$\psi(x_1, x_2) = i \left(\frac{k}{M} \varphi(x_2) + \frac{M}{k} \varphi''(x_2) \right) e^{i \frac{k}{M} x_1}.$$

Pour les simulations présentées sur la figure 2.7, nous avons choisi $\varphi(x_2) = \sin\left(\frac{\pi}{l} x_2\right)$. La solution est donc donnée par :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \left(i \frac{M}{k} \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi}{l} x_2\right) \mathbf{e}_1 + \sin\left(\frac{\pi}{l} x_2\right) \mathbf{e}_2 \right) e^{i \frac{k}{M} x_1}.$$

Nous constatons une nouvelle fois la nécessité de régulariser l'équation pour la résoudre au moyen d'une méthode d'éléments finis nodaux.

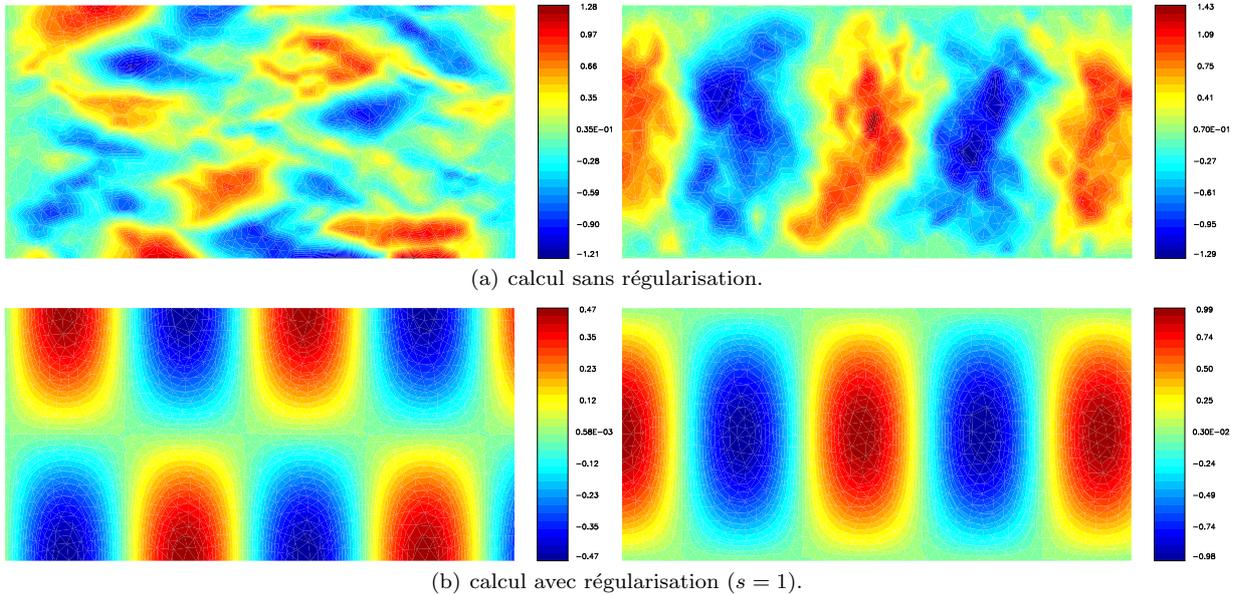


FIG. 2.7 – Isovaleurs des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} pour la propagation d'un mode hydrodynamique, $k = 2$ et $M = 0, 3$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

¹⁴Nous renvoyons une nouvelle fois le lecteur à l'annexe C pour le calcul de cette expression analytique.

| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
|---------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $s = 0$ | $7,2725 \cdot 10^{-1}$ | 2,7778 |
| $s = 1$ | $9,547 \cdot 10^{-3}$ | $2,0791 \cdot 10^{-2}$ |

TAB. 2.5 – Erreurs relatives en normes $L^2(\Omega)^2$ et $H^1(\Omega)^2$ pour la propagation d'un mode hydrodynamique, $k = 2$ et $M = 0, 3$.

Illustration de l'effet convectif de l'écoulement

Nous terminons cette partie consacrée aux résultats numériques par une illustration de l'effet convectif de l'écoulement uniforme sur la propagation des ondes acoustiques. Nous avons utilisé des éléments de Lagrange de type P_2 pour ces simulations, afin d'éviter les problèmes de pollution numérique importante causée par des modes de cavité lorsque le nombre de Mach est proche de un.

La propagation d'un mode aval d'indice $n = 2$, pour une fréquence fixée et pour diverses valeurs du nombre de Mach M est présentée sur les figures 2.8 à 2.10 ; nous observons l'allongement caractéristique de la longueur d'onde du mode lorsque la vitesse du fluide augmente.

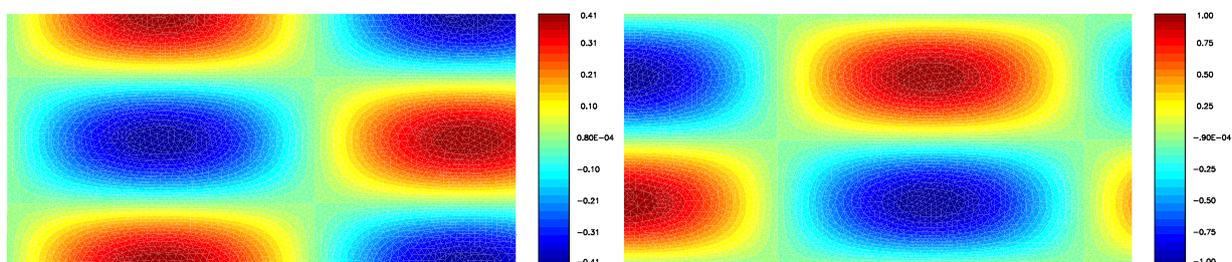


FIG. 2.8 – Isovaleurs des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} , calculé avec régularisation ($s = 1$), pour la propagation d'un mode aval d'indice $n = 2$, $k = 6, 8$ et $M = 0$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

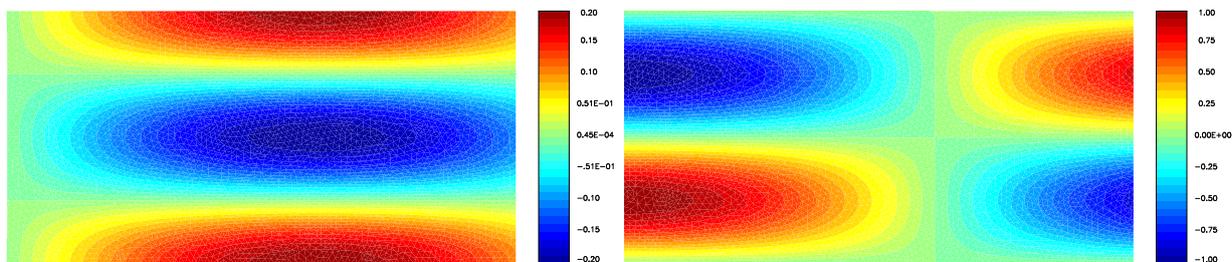


FIG. 2.9 – Isovaleurs des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} , calculé avec régularisation ($s = 1$), pour la propagation d'un mode aval d'indice $n = 2$, $k = 6, 8$ et $M = 0, 3$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

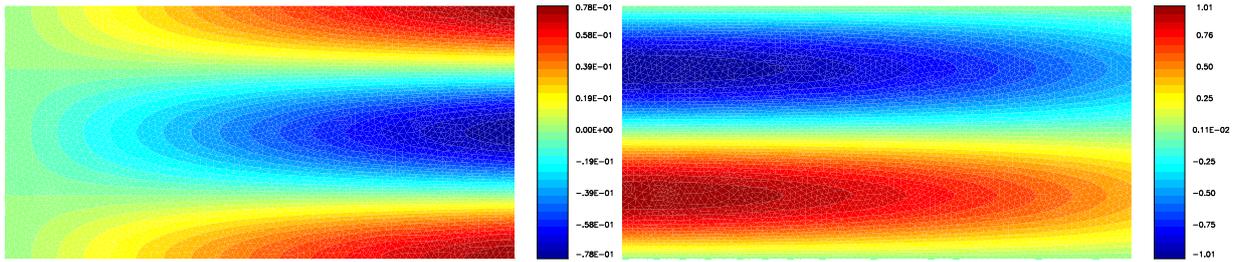


FIG. 2.10 – Isovaleurs des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} , calculé avec régularisation ($s = 1$), pour la propagation d'un mode aval d'indice $n = 2$, $k = 6, 8$ et $M = 0, 9$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

2.7 Quelques remarques

2.7.1 Effets du maillage

Comme il est souligné dans l'article de Hamdi *et al.* [83], les modes “parasites” qui affectent les résultats obtenus par des méthodes d'éléments finis nodaux dépendent du maillage. De fait, dans l'approximation de problèmes aux valeurs propres en électromagnétisme, l'emploi de maillages réguliers et structurés, dits consistants, permet d'obtenir des solutions numériques non polluées, malgré l'utilisation d'éléments finis nodaux [161].

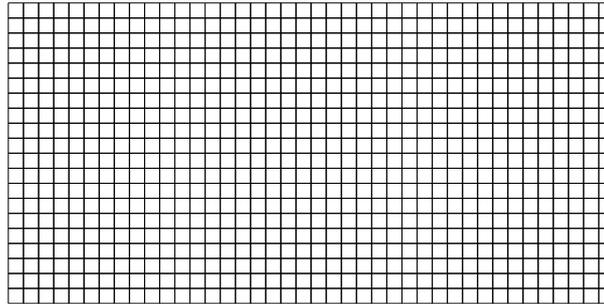


FIG. 2.11 – Maillage quadrangulaire régulier du domaine Ω .

À titre d'illustration, les simulations présentées dans la section précédente ont été reproduites sur un maillage quadrangulaire régulier. Le pas de discrétisation employé est le même que celui du maillage non structuré de la figure 2.2, ce qui conduit au maillage représenté sur la figure 2.11 et composé 800 quadrangles identiques. Les éléments finis employés sont des éléments de Lagrange Q_1 . Le tableau 2.6 contient les erreurs relatives obtenues pour certains des cas testés.

Nous constatons que, pour la propagation de modes acoustiques¹⁵, la régularisation s'avère inutile et n'a que peu d'influence sur les résultats, ceux-ci étant déjà corrects, voire dans certains cas meilleurs, en son absence. Indiquons que ce phénomène, propre au problème discrétisé, n'a pas lieu sur un maillage triangulaire régulier.

Cependant, les erreurs trouvées sur le maillage quadrangulaire quelque peu déformé représenté sur la figure 2.12, reportées dans le tableau 2.7, sont comparables à celles obtenues sur un maillage non structuré et traduisent la pollution numérique du champ de déplacement calculé sans régularisation observée sur la figure 2.13.

¹⁵Il en va de même pour la propagation de modes hydrodynamiques.

| mode aval $n = 1, k = 7, 7$ et $M = 0$ | | |
|--------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
| $s = 0$ | $3,5703 \cdot 10^{-2}$ | $4,6552 \cdot 10^{-2}$ |
| $s = 1$ | $4,3666 \cdot 10^{-2}$ | $4,3073 \cdot 10^{-2}$ |
| mode aval $n = 1, k = 4, 6$ et $M = 0, 3$ | | |
| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
| $s = 0$ | $2,3654 \cdot 10^{-3}$ | $6,362 \cdot 10^{-3}$ |
| $s = 1$ | $4,6776 \cdot 10^{-3}$ | $5,3226 \cdot 10^{-3}$ |
| mode amont $n = 1, k = 4, 6$ et $M = 0, 3$ | | |
| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
| $s = 0$ | $2,6846 \cdot 10^{-2}$ | $1,9488 \cdot 10^{-2}$ |
| $s = 1$ | $4,0458 \cdot 10^{-2}$ | $2,8059 \cdot 10^{-2}$ |

TAB. 2.6 – Erreurs relatives en normes $L^2(\Omega)^2$ et $H^1(\Omega)^2$ pour la propagation de modes acoustiques sur un maillage quadrangulaire régulier.

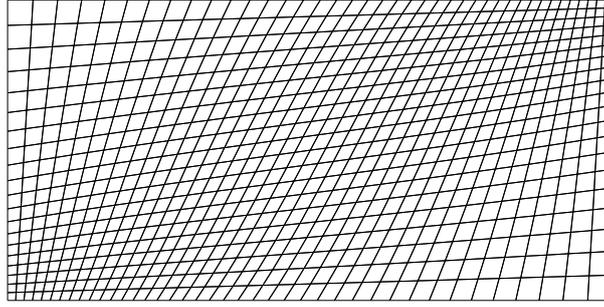


FIG. 2.12 – Maillage quadrangulaire non régulier du domaine Ω .

| mode aval $n = 1, k = 7, 7$ et $M = 0$ | | |
|--------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
| $s = 0$ | $1,1554 \cdot 10^{-1}$ | $7,9172 \cdot 10^{-1}$ |
| $s = 1$ | $8,4182 \cdot 10^{-2}$ | $8,3382 \cdot 10^{-2}$ |
| mode aval $n = 1, k = 4, 6$ et $M = 0, 3$ | | |
| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
| $s = 0$ | $1,5056 \cdot 10^{-1}$ | $8,7823 \cdot 10^{-1}$ |
| $s = 1$ | $8,2638 \cdot 10^{-3}$ | $1,0121 \cdot 10^{-2}$ |
| mode amont $n = 1, k = 4, 6$ et $M = 0, 3$ | | |
| | erreur relative en norme $L^2(\Omega)^2$ | erreur relative en norme $H^1(\Omega)^2$ |
| $s = 0$ | $9,2001 \cdot 10^{-2}$ | $3,8759 \cdot 10^{-1}$ |
| $s = 1$ | $8,0225 \cdot 10^{-2}$ | $5,7293 \cdot 10^{-2}$ |

TAB. 2.7 – Erreurs relatives en normes $L^2(\Omega)^2$ et $H^1(\Omega)^2$ pour la propagation de modes acoustiques sur un maillage quadrangulaire non régulier.

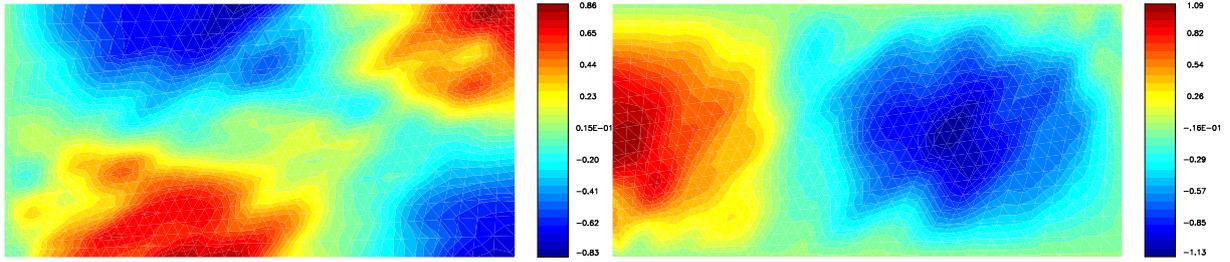


FIG. 2.13 – Isovaleurs des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} , calculé sans régularisation sur un maillage quadrangulaire non régulier, pour la propagation d’un mode aval d’indice $n = 1$, $k = 4, 6$ et $M = 0, 3$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

Ainsi, en l’absence de régularisation, la qualité des résultats semble tributaire du maillage, mais aussi de l’ordre des éléments finis employés, d’une manière plus ou moins marquée selon le cas traité. Par ailleurs, la nécessité de répéter un motif régulier ou particulier pour la génération du maillage du domaine de calcul limite grandement les géométries admissibles. L’absence de robustesse et de flexibilité de ce type d’approche nous amène donc à la proscrire dans des cas plus complexes et à lui préférer une méthode dont la convergence est prouvée de manière théorique.

2.7.2 “Limites” du procédé

Nous concluons ce chapitre en évoquant quelques configurations présentant un intérêt majeur du point de vue applicatif et pour lesquelles l’emploi de la méthode de régularisation demande encore plusieurs développements théoriques importants. Nous indiquons à l’occasion quelques pistes susceptibles d’amener des réponses partielles aux questions ici soulevées.

Les principales difficultés rencontrées sont liées d’une part à la non-convexité du domaine (coins ou arêtes rentrants), d’autre part au souhait d’appliquer des conditions aux limites de pression imposée ou de paroi traitée. En l’absence d’écoulement cependant, l’analogie du problème avec ceux de l’électromagnétisme permettent de bénéficier en grande partie des résultats des nombreuses études mathématiques et numériques menées dans ce domaine.

Coin rentrant sans écoulement. Dans des applications comme l’étude de la diffraction en l’absence d’écoulement, nous sommes confrontés au problème de la propagation d’une onde acoustique dans un domaine polyédrique, à frontière lipschitzienne, présentant des singularités géométriques, telles des coins ou arêtes rentrants, dans le voisinage desquelles le champ de déplacement est singulier. Dans ce cas, la solution du problème appartient encore à $H_0(\text{div}, \Omega) \cap H(\mathbf{rot}, \Omega)$, mais cet espace ne s’identifie plus à l’espace $H^1(\Omega)^3 \cap H_0(\text{div}, \Omega)$. Le problème régularisé reste bien posé, en vertu des résultats de [48], mais une méthode d’éléments finis nodaux converge alors vers une solution qui n’est pas à rotationnel nul (l’équivalence avec le problème fort n’étant dans ce cas plus valable) et qui ne représente donc pas la solution du problème de départ. Ce fait est illustré sur la figure 2.14, sur laquelle est comparée la solution d’un problème régularisé, posé dans un domaine bidimensionnel présentant un coin rentrant, avec celle d’une méthode d’éléments finis conformes dans l’espace $H(\text{div}; \Omega)$, qui est en mesure d’approcher de manière correcte la solution “physique” de ce problème. Précisons que la connaissance précise du champ singulier au voisinage du coin requiert un raffinement très important du maillage. Nous constatons également sur la figure 2.14 que l’effet de la singularité n’est pas local, puisque les champs calculés diffèrent aussi à distance du coin rentrant.

Cependant, il semble qu’il ne soit pas possible de construire une fonction à valeurs vectorielles, polynomiale par morceaux qui soit contenue dans $H(\text{div}; \Omega) \cap H(\mathbf{rot}; \Omega)$ et non dans $H^1(\Omega)^3$. En effet, une telle fonction devrait alors avoir des composantes normale et tangentielle continues au travers des interfaces des éléments, ce qui implique son appartenance à $H^1(\Omega)^3$. Les travaux de recherche réalisés en électromagnétisme, brièvement évoqués dans la sous-section 2.2.1, indiquent néanmoins des recours possibles, au moins en dimension deux.

Tout d’abord, il est connu que l’espace

$$H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\mathbf{rot}; \Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2 \mid \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega) ; \mathbf{rot } \mathbf{u} \in L^2(\Omega) ; (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

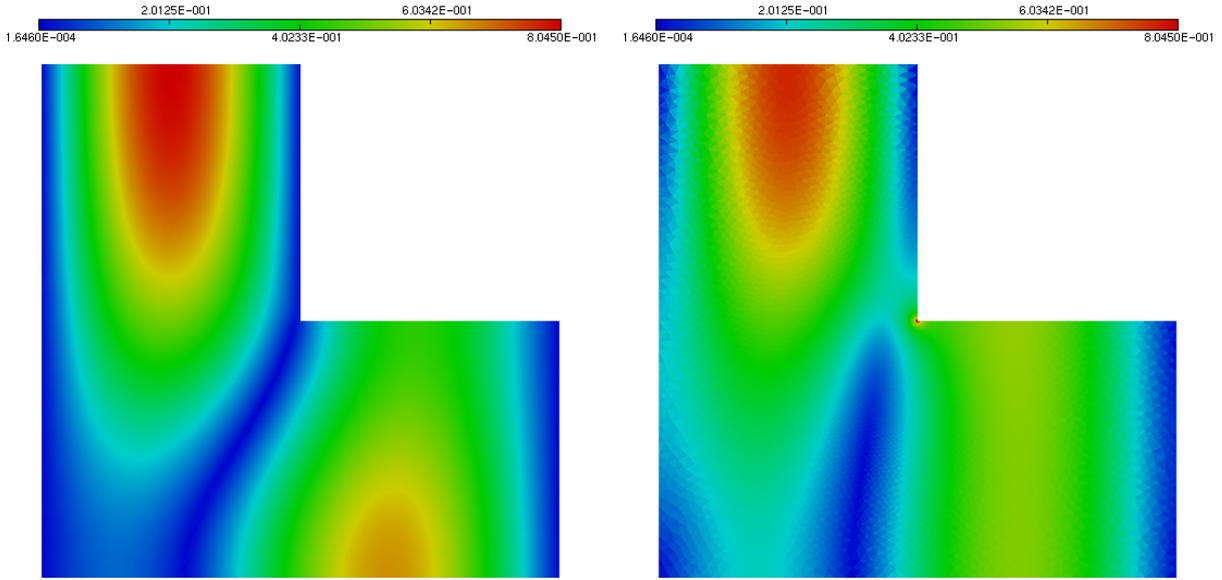


FIG. 2.14 – Isovaleurs de la norme du vecteur déplacement \mathbf{u} , calculé dans une cavité polygonale présentant un coin rentrant en l'absence d'écoulement. À gauche, un problème régularisé ($s = 1$) est résolu par une méthode d'éléments finis de Lagrange P_1 (calcul réalisé avec le code MÉLINA), tandis qu'à droite, on résout le problème par une méthode d'éléments finis mixtes de Raviart-Thomas RT_0 (la représentation de la solution est constante dans chaque élément).

admet une décomposition directe de la forme :

$$H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega) = H_0(\mathbf{grad}; \Omega) \oplus \mathbf{rot} \mathcal{S},$$

où $H_0(\mathbf{grad}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2 \mid (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0\}$ et où \mathcal{S} désigne l'espace des fonctions singulières de l'opérateur laplacien. Se basant sur ce dernier résultat et sachant que la partie régulière de la solution est susceptible d'être approchée par une méthode d'éléments finis de Lagrange, il suffit de prendre en compte de manière explicite sa partie singulière par des fonctions de base conformes aux singularités présentes, l'espace des singularités étant de dimension finie et égale au nombre de coins rentrants du domaine pour tout ouvert de \mathbb{R}^2 . Ce type d'approche fait partie des *méthodes de fonctions singulières (ou de compléments singuliers)* précédemment citées et utilisées en électromagnétisme [4, 88].

Dans [29], Boffi *et al.* étudient le problème régularisé dans des domaines non convexes au moyen d'éléments finis nodaux. La discrétisation est alors modifiée par une procédure d'intégration réduite de manière à ce que l'espace discret obtenu soit bien un sous-espace de $H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega)$. Plusieurs tests numériques de calcul de valeurs et fonctions propres sont présentés et confirment les résultats théoriques établis. Par ailleurs, une formulation variationnelle associée à l'opérateur $(-\mathbf{grad} \text{ div} + s \mathbf{rot} \text{ rot})$ n'utilisant pas l'espace $H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega)$ ainsi qu'une manière de la discrétiser par éléments finis ont récemment été proposées [31]. Cette formulation fait intervenir des champs de vecteurs distincts, respectivement appliqués aux opérateurs divergence et rotationnel. Cette méthode n'a toutefois pas fait l'objet de tests numériques.

Citons enfin la méthode de régularisation à poids, introduite par Costabel et Dauge [51], qui consiste à poser le problème régularisé dans un espace de Sobolev à poids, les poids en question s'annulant au voisinage des coins rentrants et faisant apparaître les exposants des singularités du domaine.

Dans le cas d'un ouvert de \mathbb{R}^3 , la situation s'avère beaucoup plus difficile puisque l'espace des singularités est de dimension infinie du fait de la présence d'arêtes rentrantes en plus de coins rentrants. La méthode de régularisation à poids, qui présente l'avantage sur les méthodes de compléments singuliers ne pas nécessiter de calcul explicite des fonctions singulières, semble alors prometteuse et indiquée.

Coin rentrant en écoulement uniforme : cas d'une plaque rigide en bord d'attaque. En dimension deux, nous considérons une plaque rigide et semi-infinie¹⁶ placée dans un conduit, cette configuration étant la seule autorisant un coin rentrant en présence d'un écoulement uniforme de nombre de Mach M non nul. Dans ce cas, la position d'un problème régularisé semble mettre en évidence une ou plusieurs incohérences du modèle.

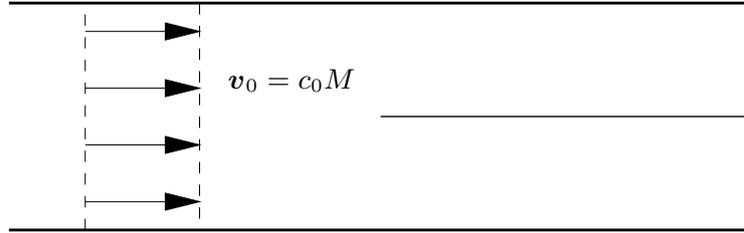


FIG. 2.15 – Plaque rigide en bord d'attaque.

Une modélisation classiquement admise de ce problème n'impose pas de condition de Kutta au bord d'attaque [93, 40]. Il n'y a donc pas d'introduction de sillage et la solution est considérée irrotationnelle au voisinage du bord de la plaque. Le problème régularisé reste bien posé et admet une solution unique dans l'espace V . Pourtant, cette dernière est *a priori* à rotationnel non nul car, comme dans le paragraphe précédent, la démonstration d'équivalence est alors mise en défaut. Nos deux suppositions initiales, à savoir un déplacement appartenant à $H^1(\Omega)^2$ et irrotationnel, paraissent par conséquent incompatibles. Si, en l'absence d'écoulement, il était possible d'affaiblir la première hypothèse en se plaçant dans $H(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega)$ et donc en cherchant une solution singulière, il faut ici pouvoir donner un sens aux termes de l'équation provenant de l'opérateur de convection, le nombre de Mach étant non nul. L'espace $H^1(\Omega)^2$ semble pour cette raison incontournable. Cependant, la remise en cause de l'hypothèse d'irrotationnalité implique une modification du modèle et reste donc une question ouverte.

Conditions aux limites naturelles. Nous considérons dans ce paragraphe le cas de conditions aux limites dites "*naturelles*", qui, dans le cas de l'équation de Galbrun, reviennent à imposer la divergence du déplacement aux limites du domaine. Physiquement, ces conditions naturelles correspondent à des conditions de pression imposée et interviennent généralement dans des problèmes de couplage fluide-structure ou pour des raisons de symétries apparentes du problème.

Les conditions aux limites naturelles sont, au même titre que les conditions de type Neumann pour les problèmes elliptiques, imposées dans la formulation variationnelle du problème et non dans l'espace d'approximation. Le cadre fonctionnel s'en trouve donc modifié et, comme dans le cas d'une condition de paroi traitée (cf. paragraphe suivant), le résultat de Costabel [48] n'est pas vérifié.

Conduit à parois traitées. Dans le domaine aéronautique, les parois des nacelles de turboréacteurs sont traitées à l'aide de matériaux absorbants qui visent à atténuer le bruit rayonné en sortie de conduit. Ces matériaux sont caractérisés par leur impédance spécifique, qui est en général une fonction de la fréquence¹⁷. Pour un écoulement uniforme de vitesse v_0 et en régime harmonique, la condition aux limites pour une paroi traitée, d'impédance réduite complexe notée $Z(\omega, v_0)$, se traduit par la relation, reliant les perturbations de pression et de déplacement normal à la paroi, suivante :

$$p = \rho_0 c_0 Z(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}),$$

où \mathbf{n} désigne la normale unitaire dirigée vers l'extérieur du domaine contenant le fluide [112, 153]. En utilisant la relation (1.68) dans un écoulement uniforme, nous obtenons une condition aux limites, dite *condition d'impédance*, portant uniquement sur le déplacement \mathbf{u} :

$$\text{div } \mathbf{u} = -\frac{Z}{c_0}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}).$$

¹⁶Dans ce cas, la frontière du domaine n'est plus lipschitzienne.

¹⁷Ceci est évidemment un modèle idéalisé. Une condition aux limites plus réaliste ferait en effet intervenir un opérateur d'impédance traduisant la réaction non locale des matériaux absorbants dont sont tapissées les parois des conduits.

L'interprétation variationnelle du problème avec parois traitées fait ainsi intervenir un espace vectoriel dont les champs ont une trace normale appartenant à l'espace L^2 sur les bords du domaine représentant les parois traitées. N'étant plus dans le sous-espace de $H^1(\Omega)^d$ ($d = 2$ ou 3) de conditions aux limites homogènes $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0$, nous ne disposons pas du résultat du théorème 4.1 de [48] pour montrer la coercivité de la forme sesquilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ du problème (2.26) sur l'espace d'approximation considéré. Néanmoins, si la vitesse de l'écoulement porteur est nulle, nous pouvons nous baser sur les notes [43] (dans le cas d'un domaine polyédrique) et [49] (pour un domaine lipschitzien quelconque), qui montrent que $H^1(\Omega)^d$ est dense dans

$$W = \left\{ \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}; \Omega) \cap H(\mathbf{rot}; \Omega) \mid (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega) \right\},$$

qui est l'espace fonctionnel auquel appartiennent les solutions recherchées. Par conséquent, il est possible de discrétiser le problème régularisé par une méthode d'éléments finis nodaux, même lorsque le domaine n'est pas convexe. L'équivalence entre le problème régularisé et le problème initial est par ailleurs immédiate. Cette dernière approche n'est cependant plus valable en présence d'un écoulement, puisque l'espace dans lequel la solution est recherchée n'est plus W , mais bel et bien $H^1(\Omega)^d$, avec $d = 2$ ou 3 .

Chapitre 3

Régularisation en écoulement cisailé

La méthode de régularisation, précédemment introduite pour la résolution de problèmes de propagation dans un guide en présence d'un écoulement porteur uniforme, va à présent être étendue aux cas d'écoulements porteurs cisailés. Deux configurations distinctes sont considérées, leurs traitements mathématiques respectifs étant relativement différents. Nous étudions tout d'abord un écoulement uniforme par morceaux, qui présente donc une (ou des) discontinuité(s) et constitue peut-être l'exemple le plus simple d'écoulement cisailé. Nous traitons ensuite le cas d'un écoulement cisailé de fluide parfait compressible dont le profil de vitesse ne présente pas de discontinuité.

3.1 Généralités

Par définition, un écoulement porteur cisailé est unidirectionnel et seule l'une des composantes de son champ de vitesse est non nulle.

Considérons un écoulement porteur cisailé et stationnaire de fluide parfait à l'intérieur d'un conduit rigide. Son champ de vitesse est de la forme :

$$\mathbf{v}_0(x_1, x_2, x_3, t) = v_0(x_2, x_3) \mathbf{e}_1,$$

et vérifie des conditions aux limites de glissement sur les parois du guide :

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0,$$

le vecteur \mathbf{n} désignant le vecteur normal unitaire extérieur au conduit. Rappelons que, dans ce type d'écoulement et en l'absence de discontinuité du champ porteur, la perturbation de pression vérifie l'équation de Lilley [107], équation aux dérivées partielles du troisième ordre en temps et en espace qui remplace l'équation des ondes convectée valable pour un écoulement porteur uniforme. En effet, en plus des effets de convection déjà observés dans les simulations numériques du chapitre précédent, l'écoulement cisailé provoque une réfraction des ondes et une interaction entre les parties¹ irrotationnelles et rotationnelles du champ de fluctuations, ce qui se traduit par la montée en ordre de dérivation de l'équation régissant l'évolution des perturbations.

Plusieurs des aspects caractéristiques et des particularités de la propagation du son dans un écoulement cisailé sont abordés dans la section III de l'article de Möhring *et al.* [110], ainsi que dans les références qu'il contient.

Il est par ailleurs connu que les écoulements cisailés peuvent présenter, selon les profils considérés, des instabilités linéaires². Certaines solutions du système sont alors exponentiellement croissantes en espace et/ou en temps, rendant ainsi caduques les hypothèses de linéarisation et de régime périodique établi du modèle ici considéré. La détermination et l'étude de ces instabilités est un sujet difficile qui dépasse le cadre, principalement numérique, de cette thèse. Nous insistons cependant sur le fait que, pour certaines configurations de l'écoulement porteur, dites absolument instables, le problème harmonique n'admet pas de solution d'énergie localement finie (*i.e.*, au sens L^2_{loc}).

¹Si tant est que l'on puisse encore parler d'une telle décomposition du champ de perturbations dans cet écoulement porteur.

²Nous renvoyons le lecteur à la sous-section 5.2.4 du chapitre 5 pour une description plus détaillée de ces instabilités.

3.2 Écoulement cisailé discontinu

Soient deux fluides parfaits, homogènes, non miscibles, de caractéristiques différentes et chacun animé d'un mouvement uniforme stationnaire. Dans la littérature, la surface de contact séparant ces fluides, qu'ils soient animés de vitesses constantes différentes ou bien en mouvement relatif, est appelée *nappe de vortécité* (*vortex sheet* en anglais) ou encore *dioptré* [131]. Elle peut être assimilée à une ligne de discontinuité tangentielle de l'écoulement. Nous traiterons ici un cas simplifié du phénomène physique, puisque le modèle linéarisé utilisé ne tient pas compte des déformations de la surface de discontinuité pour l'écoulement porteur³ et qu'il n'y a pas d'"épaississement" de celle-ci, puisque la diffusion est négligée. Nous renvoyons entre autres à Friedland et Pierce [65], Jones et Morgan [98] et Nilsson [120] pour des études de ce modèle.

Après avoir posé les équations mises en jeu, nous présentons une régularisation du problème. Du point de vue mathématique, il apparaît, comparativement au cas d'un écoulement porteur uniforme, des difficultés nouvelles, qui vont nous obliger à modifier le cadre fonctionnel et à introduire un terme de régularisation supplémentaire dans la formulation faible du problème. Nous montrons ensuite le caractère bien posé du problème variationnel régularisé, ainsi que son équivalence avec le problème fort initial. Des résultats numériques sont enfin présentés.

3.2.1 Description du problème

Le problème étudié est bidimensionnel. Nous nous plaçons dans un conduit droit, à parois rigides, représenté par l'ouvert Ω , tel que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_+ \cup \bar{\Omega}_-$, où Ω_+ et Ω_- sont deux ouvert (disjoints), de bords respectifs $\partial\Omega_+$ et $\partial\Omega_-$. Chacun de ces sous-domaines est occupé par un fluide parfait de caractéristiques propres. Nous notons respectivement $\rho_{0\pm} = \rho_0|_{\Omega_{\pm}}$, $v_{0\pm} = v_0|_{\Omega_{\pm}}$ et $c_{0\pm} = c_0|_{\Omega_{\pm}}$ les restrictions à Ω_{\pm} de la masse volumique ρ_0 , de la vitesse v_0 et de la célérité du son c_0 dans l'écoulement porteur. Par hypothèse, $\rho_{0\pm}$, $v_{0\pm}$ et $c_{0\pm}$ sont des constantes.

L'interface séparant les deux fluides est définie comme l'intersection $\Gamma = \partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$. Celle-ci est supposée plane dans l'approximation linéaire qui est faite de l'écoulement porteur. Les parois rigides du conduit sont quant à elle notées Σ . Le domaine Ω est représenté sur la figure 3.1.

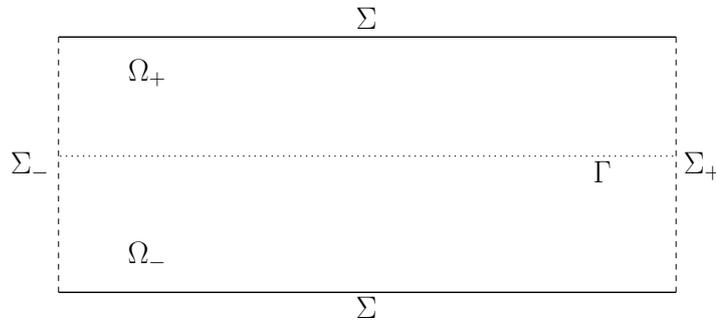


FIG. 3.1 – Le domaine Ω .

Les effets de la gravité étant négligés, la pression statique p_0 est constante dans l'écoulement. L'équation de Galbrun (1.64), écrite au sens des distributions en raison des discontinuités des coefficients, devient alors :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \boldsymbol{\xi} - \nabla (\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (3.1)$$

où la source \mathbf{f} est supposée appartenir à l'espace $H(\operatorname{rot}, \Omega)$, la condition aux limites de parois rigides se traduisant par :

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

Nous cherchons des solutions du problème harmonique et posons :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t},$$

³En d'autres mots, l'interface reste plane en l'absence d'instabilités.

avec $\omega > 0$ la pulsation. Dans la suite, la dérivée convective dans l'écoulement appliquée au vecteur \mathbf{u} sera donc définie par :

$$\frac{D}{Dt} = -i\omega + v_0 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

3.2.2 Quelques observations préliminaires

Les conditions vérifiées par le champ acoustique au passage de l'interface sont d'une part la continuité du déplacement normal à l'interface, c'est-à-dire :

$$[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma = 0,$$

et d'autre part la continuité de la perturbation de pression, dont nous tenons compte de façon implicite dès lors que l'équation (3.1) est écrite au sens des distributions, cette dernière condition de transmission se traduisant par :

$$[\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u}]_\Gamma = 0,$$

en vertu de la relation (1.59). Le vecteur \mathbf{n}_Γ est le vecteur unitaire normal à Γ dirigé de Ω_- vers Ω_+ et le saut sur l'interface Γ a pour définition :

$$[g]_\Gamma = g_{+|\Gamma} - g_{-|\Gamma},$$

où g_\pm désigne la restriction à Ω_\pm d'une fonction g définie sur le domaine Ω .

Par ailleurs, en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (3.1) au sens des distributions, soit encore :

$$\operatorname{rot} \left(\rho_0 \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} \right) = \operatorname{rot} \mathbf{f} \text{ dans } \Omega,$$

nous obtenons, par la formule des sauts, l'équation suivante :

$$\rho_0 \frac{D^2}{Dt^2} (\operatorname{rot} \mathbf{u}) = \operatorname{rot} \mathbf{f} \text{ dans } \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad (3.2)$$

ainsi que la condition de transmission au travers de l'interface Γ :

$$\left[\rho_0 \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} \wedge \mathbf{n}_\Gamma \right]_\Gamma = 0. \quad (3.3)$$

Remarque 3.1 Lorsque la vitesse de l'écoulement porteur est nulle de part et d'autre de l'interface, que la discontinuité de l'écoulement ne provient que de la différence de masses volumiques pour les fluides en contact et que la source \mathbf{f} est irrotationnelle, nous retrouvons en (3.2) et (3.3) l'équation et la condition de passage portant sur la perturbation du déplacement pour un dioptré acoustique au repos, données dans la référence [131] (système (4.9)) :

$$\operatorname{rot} (\rho_0 \mathbf{u}) = 0 \text{ et } [\rho_0 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma = 0.$$

Posant $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \psi$, la fonction ψ est solution de

$$\rho_0 \frac{D^2 \psi}{Dt^2} = \operatorname{rot} \mathbf{f} \text{ dans } \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad (3.4)$$

qui est, pour chaque valeur de la variable x_2 , une équation différentielle d'ordre deux en x_1 . Le calcul d'une solution de cette équation à partir de la donnée de ψ sur le bord du domaine Ω est en tout point identique à ce qui a été fait dans le chapitre précédent. De nouveau, nous obtenons que le champ ψ appartient à $L^2(\Omega)$ si sa trace appartient à $L^2(\partial\Omega)$.

3.2.3 Le problème régularisé

Nous récapitulons les équations du problème de propagation :

$$\rho_0 \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \rho_0 c_0^2 \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \text{ donné sur } \Sigma_+ \cup \Sigma_-, \quad (3.7)$$

$$[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma = 0, \quad (3.8)$$

$$[\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u}]_\Gamma = 0. \quad (3.9)$$

Une solution de ce problème vérifie par ailleurs les “relations” suivantes :

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \psi \text{ dans } \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad (3.10)$$

$$\left[\rho_0 \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} \wedge \mathbf{n}_\Gamma \right]_\Gamma \equiv \left[\rho_0 \frac{D^2 u_1}{Dt^2} \right]_\Gamma = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (3.11)$$

Par utilisation du principe de superposition déjà invoqué dans le chapitre 2, nous ramenons les conditions aux limites (3.6) et (3.7) à l’unique condition homogène $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Nous pouvons alors introduire le problème régularisé suivant :

$$\rho_0 \left(\frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - c_0^2 \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) + s \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{u} - \psi) \right) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \psi \text{ sur } \partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_-, \quad (3.14)$$

dans lequel le coefficient de régularisation s est maintenant une fonction, qui peut *a priori* prendre des valeurs différentes dans les sous-domaines Ω_+ et Ω_- .

3.2.4 Position mathématique du problème

Nous nous consacrons dans cette section à l’établissement d’une formulation variationnelle du problème (3.12) à (3.14). Si les équations de ce problème conservent une forme familière, nous allons constater que la régularisation de l’équation de Galbrun, telle qu’elle a été appliquée dans le cas d’un écoulement porteur uniforme, nécessite ici quelques aménagements, notamment au niveau du cadre fonctionnel. Afin de mieux comprendre la démarche adoptée et les choix qui seront faits par la suite, nous allons tenter d’explicitier en quelques mots les difficultés qui se présentent.

Tout d’abord, une position “naïve” du problème faible dans l’espace fonctionnel “naturel”⁴

$$V = \left\{ \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega) ; \mathbf{u}|_{\Omega_\pm} \in H^1(\Omega_\pm)^2 \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

ne rend pas possible la décomposition en une partie coercive⁵ et une partie associée à un opérateur compact de la forme sesquilinéaire intervenant dans la formulation variationnelle. En effet, nous remarquons qu’à l’issue des intégrations par parties, des termes de bord non nuls sont obtenus en raison du saut de la composante tangentielle du champ \mathbf{u} sur l’interface Γ . Cependant, la contrainte (3.14), tirée de l’équation de Galbrun et vérifiée par la solution du problème, nous fournit une propriété de régularité supplémentaire pour la trace de \mathbf{u} sur Γ qui, incluse dans l’espace d’approximation et alliée à une formulation faible de (3.14), permet de retrouver un cadre propice à l’application de l’alternative de Fredholm.

⁴Remarquons que la condition de transmission (3.8) est bien incluse dans cet espace.

⁵Le défaut de coercivité ici observé est similaire à celui apparaissant lors de l’application de conditions aux limites naturelles pour les problèmes régularisés évoqués dans la section 2.7.2 du chapitre 2.

Vers une formulation variationnelle du problème

Nous laissons pour l'instant délibérément flou le cadre variationnel. En multipliant l'équation (3.12) par une fonction test $\bar{\mathbf{v}}$ régulière et en intégrant par parties sur Ω , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 \left(-\omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2i\omega v_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + c_0^2 (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s (\operatorname{rot} \mathbf{u} - \psi)(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{x} \\ & + \int_{\partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_-} \rho_0 \left(v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) - c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) - s (\operatorname{rot} \mathbf{u} - \psi)(\bar{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{n}) \right) d\sigma = \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

L'utilisation des conditions aux limites (3.13) et (3.14), ainsi que de la condition de transmission (3.9), mène à :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 \left(-\omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2i\omega v_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + c_0^2 (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \rho_0 s \psi (\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} - \int_{\Sigma_+ \cup \Sigma_-} \rho_0 v_0^2 \psi \bar{v}_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) d\sigma. \end{aligned}$$

Si cette première formulation variationnelle du problème est similaire à celle obtenue pour un écoulement porteur uniforme, nous ne sommes pas en mesure, avec le choix d'espace fonctionnel V précédemment fait, de vérifier les hypothèses requises par l'alternative de Fredholm. Plus précisément, il est possible de prouver que la forme sesquilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ définie par :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 \left(\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + c_0^2 (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{x}.$$

n'est pas coercive sur V , même pour de grandes valeurs du paramètre s . Nous avons cependant plutôt choisi d'illustrer la difficulté qui apparaît en montrant comment la formule d'intégration par parties qui fait le lien entre $(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}$ d'une part et $(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}$ et $(\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}$ d'autre part, établie dans [48] et utilisée dans la démonstration du théorème 2.1, est ici mise en défaut. Il nous suffit pour cela de réaliser des intégrations par parties du terme $\int_{\Omega_+} \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x}$ (et également du terme $\int_{\Omega_-} \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x}$) pour tout élément \mathbf{u} de l'espace V . Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_+} (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_+} \mathbf{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_+} (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\bar{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{n}) d\sigma \\ &= \int_{\Omega_+} (-\Delta \mathbf{u} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u})) \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_+} (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\bar{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{n}) d\sigma \\ &= \int_{\Omega_+} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \bar{\mathbf{v}} - (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_+} \left((\operatorname{rot} \mathbf{u})(\bar{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{n}) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{v}} - (\operatorname{div} \mathbf{u})(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous déduisons, en utilisant la condition de transmission (3.8) sur l'interface Γ , que :

$$\int_{\Gamma} \left[\rho_0 v_0^2 \left(\operatorname{rot} \mathbf{u}(\bar{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{n}_\Gamma) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_\Gamma} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \operatorname{div} \mathbf{u}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_\Gamma) \right) \right] d\sigma = \int_{\Gamma} \left([\rho_0 v_0^2 \bar{v}_1]_\Gamma \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - [\rho_0 v_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}]_\Gamma \bar{v}_2 \right) d\sigma,$$

et finalement, après intégration par parties de ce dernier terme d'interface et utilisation des conditions aux limites (3.13), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 v_0^2 (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 v_0^2 (\nabla \mathbf{u} : \nabla \bar{\mathbf{v}} - (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left(u_2 [\rho_0 v_0^2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1}]_\Gamma + [\rho_0 v_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}]_\Gamma \bar{v}_2 \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La définition de l'espace fonctionnel V ne permet donc pas de prouver la compacité de l'opérateur associé à la forme sesquilinéaire définie par l'intégrale sur l'interface Γ dans (3.15) et, par suite, de retrouver un cadre autorisant l'application de l'alternative de Fredholm. Il faut néanmoins se rappeler que les solutions du problème, si elles existent, vérifient des relations supplémentaires, déduites des équations, qui vont en quelque sorte nous indiquer le "bon" cadre fonctionnel pour la régularisation.

Un espace d'approximation

Développons la condition de saut (3.11). Il vient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [\rho_0 v_0^2 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma - 2i\omega \frac{\partial}{\partial x_1} [\rho_0 v_0 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma - \omega^2 [\rho_0 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma = 0.$$

Nous déduisons de l'appartenance de $\mathbf{u}|_{\Omega_\pm}$ à $H^1(\Omega_\pm)^2$ que $[\rho_0 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma \equiv [\rho_0 u_1]_\Gamma$ et $\frac{\partial}{\partial x_1} [\rho_0 v_0 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} [\rho_0 v_0 u_1]_\Gamma$ sont respectivement des éléments des espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire⁶ notés $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Par utilisation de l'égalité ci-dessus, nous avons directement que le terme $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [\rho_0 v_0^2 u_1]_\Gamma$ appartient à $H^{-1/2}(\Gamma)$. Une mise sous forme variationnelle de l'équation (3.11), après multiplication par une fonction test $[\rho_0 v_0^2 \bar{v}_1]_\Gamma$, donne dans ce cas :

$$\int_\Gamma \left(\left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma + 2i\omega \left[\rho_0 v_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma [\rho_0 v_0^2 \bar{v}_1]_\Gamma + \omega^2 [\rho_0 u_1]_\Gamma [\rho_0 v_0^2 \bar{v}_1]_\Gamma \right) d\sigma = 0.$$

Par conséquent, si \mathbf{u} est solution du problème, $[\rho_0 v_0^2 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma$ est de régularité H^1 sur Γ . Ceci nous conduit à choisir un nouvel espace pour l'approximation du problème. Désormais, V sera l'espace vectoriel défini par :

$$V = \left\{ \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega) ; \mathbf{u}|_{\Omega_\pm} \in H^1(\Omega_\pm)^2 ; [\rho_0 v_0^2 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma \in H_0^1(\Gamma) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

sur lequel nous optons naturellement pour la norme :

$$\|u\|_V = \left(\|u|_{\Omega_+}\|_{H^1(\Omega_+)^2}^2 + \|u|_{\Omega_-}\|_{H^1(\Omega_-)^2}^2 + \left\| [\rho_0 v_0^2 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma \right\|_{H^1(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall u \in V. \quad (3.16)$$

Nous avons la

Proposition 3.2 *L'espace vectoriel V , muni du produit scalaire associé à la norme (3.16), est un espace de Hilbert sur \mathbb{C} .*

DÉMONSTRATION. Soit $(\mathbf{u}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans V . Il existe une fonction \mathbf{u} , appartenant à $H^1(\Omega_\pm)^2$, telle que :

$$\mathbf{u}_p|_{\Omega_\pm} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \mathbf{u}|_{\Omega_\pm} \text{ dans } H^1(\Omega_\pm)^2 \text{ et } [\rho_0 v_0^2 \mathbf{u}_p \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} [\rho_0 v_0^2 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma \text{ dans } H^1(\Gamma).$$

De plus, il existe v appartenant à $H^1(\Gamma)$ tel que :

$$[\rho_0 v_0^2 \mathbf{u}_p \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} v \text{ dans } H^1(\Gamma).$$

D'où $v = [\rho_0 v_0^2 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma$ dans $H^1(\Gamma)$, par unicité de la limite. Par conséquent, \mathbf{u} appartient à l'espace V et la suite $(\mathbf{u}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers \mathbf{u} dans V . □

Remarque 3.3 *Il nous sera utile pour pouvoir traiter la configuration dans laquelle la vitesse de l'écoulement porteur s'annule d'un côté de l'interface, par exemple dans le domaine Ω_- , de remarquer que la norme :*

$$\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_-)^2}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega_+)^2}^2 + \left\| [\rho_0 v_0^2 \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma]_\Gamma \right\|_{H^1(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}$$

définit dans ce cas une norme équivalente à celle précédemment introduite sur l'espace V . En effet, nous avons :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega_-)^2}^2 \leq C \left(\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\mathbf{u}|_{\Omega_-} \cdot \mathbf{n}_\Gamma\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right),$$

par utilisation de la condition de transmission (3.8).

⁶Par définition, l'espace $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ est l'espace d'interpolation "situé" à mi-chemin entre $H_0^1(\Gamma)$ et $L^2(\Gamma)$. L'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ n'est autre que son dual.

La définition de la norme sur V nous conduit à modifier la formulation variationnelle *a priori* “naturelle” du problème, en tenant compte de la contrainte (3.11) de manière faible. Nous introduisons alors un second paramètre de régularisation, à savoir une constante réelle positive notée s_Γ , et formulons le problème variationnel régularisé suivant : *trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que, pour tout $\mathbf{v} \in V$,*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 \left(-\omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2i\omega v_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + c_0^2 (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{x} \\ & + s_\Gamma \int_\Gamma \left(\left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma + 2i\omega \left[\rho_0 v_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma [\rho_0 v_0^2 \bar{v}_1]_\Gamma + \omega^2 [\rho_0 u_1]_\Gamma [\rho_0 v_0^2 \bar{v}_1]_\Gamma \right) d\sigma \\ & = \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \rho_0 s \psi (\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} - \int_{\Sigma_+ \cup \Sigma_-} \rho_0 v_0^2 \psi \bar{v}_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) d\sigma. \end{aligned}$$

Nous introduisons ensuite la constante ν , définie comme étant :

$$\nu = \min \left(\frac{c_0^2}{v_0^2} \right) = \min \left(\frac{1}{M^2} \right),$$

et nous nous servons de la relation (3.15) pour écrire ce problème variationnel sous la forme : *trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que, pour tout $\mathbf{v} \in V$,*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad (3.17)$$

où les formes sesquilinéaires $b(\cdot, \cdot)$ et $c(\cdot, \cdot)$ sont respectivement définies par :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 \left(\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + (c_0^2 - \nu v_0^2) (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 \left((s - \nu v_0^2) (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) + \nu v_0^2 \nabla \mathbf{u} : \nabla \bar{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{x} \\ & + s_\Gamma \int_\Gamma \left(\left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma + [\rho_0 v_0^2 u_1]_\Gamma [\rho_0 v_0^2 \bar{v}_1]_\Gamma \right) d\sigma, \\ c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} -\rho_0 \left((\omega^2 + 1) \mathbf{u} + 2i\omega v_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x} - \nu \int_\Gamma \left(u_2 \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma + \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma \bar{v}_2 \right) d\sigma \\ & + s_\Gamma \int_\Gamma \left(2i\omega \left[\rho_0 v_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma + \omega^2 [\rho_0 u_1]_\Gamma - [\rho_0 v_0^2 u_1]_\Gamma \right) [\rho_0 v_0^2 \bar{v}_1]_\Gamma d\sigma, \end{aligned}$$

et la forme antilinéaire $l(\cdot)$ par :

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \rho_0 s \psi (\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} - \int_{\Sigma_+ \cup \Sigma_-} \rho_0 v_0^2 \psi \bar{v}_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) d\sigma.$$

Alternative de Fredholm

Nous nous intéressons à présent au caractère bien posé du problème variationnel (3.17) et énonçons le

Théorème 3.4 *Si $s \geq \nu v_0^2$, le problème variationnel (3.17) relève de l'alternative de Fredholm.*

DÉMONSTRATION. Nous commençons par montrer que la forme sesquilinéaire $b(\cdot, \cdot)$, clairement continue sur V , est coercive sur cet espace. Pour toute fonction \mathbf{u} de V , nous avons :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 \left(|\mathbf{u}|^2 - v_0^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right|^2 + (c_0^2 - \nu v_0^2) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + (s - \nu v_0^2) |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 + \nu v_0^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) d\mathbf{x} \\ & + s_\Gamma \int_\Gamma \left(\left| \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma \right|^2 + \left| [\rho_0 v_0^2 u_1]_\Gamma \right|^2 \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Si $s \geq \nu v_0^2$, les quantités $(s - \nu v_0^2)$, $(c_0^2 - \nu v_0^2)$ et $(\nu - 1)v_0^2$ sont toutes trois positives, puisque le coefficient ν est, par définition, toujours strictement supérieur à un. Le coefficient s_Γ étant par ailleurs strictement positif, nous déduisons ensuite facilement que :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C \|\mathbf{u}\|_V^2,$$

avec $C = \min(\rho_0, \rho_0 v_0^2(\nu - 1), s_\Gamma)$ si $v_{0\pm} \neq 0$ et $C = \min(\rho_0, \rho_0 c_0^2, s_\Gamma)$ sinon.

Il faut maintenant prouver que la forme sesquilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ définit, en vertu des injections compactes de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et de $H^1(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma)$, un opérateur compact de V dans V . Nous ne démontrerons cette affirmation que pour la forme sesquilinéaire suivante :

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Gamma \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \bar{v}_2 \, d\sigma,$$

les autres termes apparaissant dans la forme $c(\cdot, \cdot)$ ayant déjà été traités dans le chapitre précédent. Ainsi, par le théorème de représentation de Riesz, il existe un opérateur K de V dans V tel que :

$$(K\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = k(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\|K\mathbf{u}\|_V^2 = (K\mathbf{u}, K\mathbf{u})_V = k(\mathbf{u}, K\mathbf{u}) \leq \|u_1\|_{H^1(\Gamma)^2} \|K\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma)^2}. \quad (3.18)$$

Soit $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy sur V ; la suite $(K\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors bornée dans ce même espace. Par conséquent, la suite $((K\mathbf{u}_n)|_\Gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^{1/2}(\Gamma)^2$ et nous utilisons l'injection compacte de $H^{1/2}(\Gamma)^2$ dans $L^2(\Gamma)^2$ pour en extraire une sous-suite convergeant dans $L^2(\Gamma)^2$. Il vient finalement de l'inégalité (3.18) qu'il existe une suite extraite de $(K\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans V et donc que K est un opérateur compact de V dans lui-même. \square

Unicité

Comme pour le problème en écoulement uniforme traité dans le chapitre 2, il y a unicité de la solution du problème (3.17), sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de la pulsation ω , valeurs qui dépendent du domaine Ω , des vitesses $v_{0\pm}$, du paramètre de régularisation s et de s_Γ . Pour des raisons de clarté de l'exposé, nous n'entrerons pas dans les détails de la détermination des nombres d'onde k pour lesquels le problème est mal posé, celle-ci s'avérant relativement fastidieuse et par ailleurs sans intérêt majeur, compte tenu de la nature du problème posé. Les fréquences associées à ces nombres d'onde n'ont en effet pas de signification physique, puisqu'elles proviennent du fait que le problème a été artificiellement ramené sur un domaine borné sans faire usage de conditions aux limites "transparentes".

Équivalence

Nous concluons l'analyse mathématique du problème en démontrant l'équivalence entre la formulation variationnelle (3.17) du problème régularisé et le problème constitué des équations (3.5) et (3.10), ainsi que de la condition aux limites (3.13). Nous avons le

Théorème 3.5 *Toute solution \mathbf{u} du problème (3.17) vérifie $\text{rot } \mathbf{u} = \psi$ dans $\Omega_+ \cup \Omega_-$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\phi \in \left\{ \varphi|_{\Omega_\pm} \in H^3(\Omega_\pm) \mid [\varphi]_\Gamma = 0; \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right]_\Gamma = -\frac{1}{s_\Gamma} \varphi; \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \right\}$. Posons $\mathbf{v} = \mathbf{rot } \phi$; le vecteur \mathbf{v} appartient bien à l'espace V . En remplaçant dans la formulation variationnelle, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 \left(-\omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot } \bar{\phi} - 2i\omega v_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{rot } \bar{\phi} - v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathbf{rot } \bar{\phi}) - s (\text{rot } \mathbf{u} - \psi) \Delta \bar{\phi} \right) \, d\mathbf{x} \\ & + s_\Gamma \int_\Gamma \left(\left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_\Gamma + 2i\omega \left[\rho_0 v_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_\Gamma \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_2} \right]_\Gamma + \omega^2 [\rho_0 u_1]_\Gamma \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_2} \right]_\Gamma \right) \, d\sigma \\ & = \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \mathbf{f} \cdot \mathbf{rot } \bar{\phi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_+ \cup \Sigma_-} \rho_0 v_0^2 \psi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Nous réalisons ensuite des intégrations par parties et utilisons l'équation (3.4) pour aboutir à :

$$\int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 (\operatorname{rot} \mathbf{u} - \psi) \left(-\omega^2 \bar{\phi} + 2i\omega v_0 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_1} + v_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_1^2} - s \Delta \bar{\phi} \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.19)$$

Par un résultat de densité que nous admettrons, cette égalité reste vraie pour toute fonction ϕ appartenant à l'espace

$$D = \left\{ \phi|_{\Omega_{\pm}} \in H^2(\Omega_{\pm}) \mid [\phi]_{\Gamma} = 0 ; \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right]_{\Gamma} = -\frac{1}{s_{\Gamma}} \phi ; \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \right\}.$$

La suite de la démonstration est alors relativement différente selon que la vitesse de l'écoulement porteur est nulle d'un côté ou de l'autre de l'interface Γ ou non.

Supposons pour l'instant que celle-ci est non nulle sur Ω_+ et sur Ω_- . Nous considérons alors l'opérateur

$$\mathcal{H} = \rho_0 v_0^2 \left(-\omega^2 I - 2i\omega v_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - s \Delta \right),$$

de domaine D . Nous montrons tout d'abord que \mathcal{H} est symétrique. Pour tous ϕ et φ appartenant à D , nous avons :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}\phi, \varphi)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 v_0^2 \left(-\omega^2 \phi - 2i\omega v_0 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + v_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - s \Delta \phi \right) \bar{\varphi} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \rho_0 v_0^2 \left(-\omega^2 \bar{\varphi} + 2i\omega v_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_1} + v_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_1^2} - s \Delta \bar{\varphi} \right) \phi d\mathbf{x} \\ &= (\phi, \mathcal{H}\varphi)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous montrons ensuite qu'il existe une constante positive c telle que l'opérateur $\mathcal{H} + cI$ est surjectif. Pour tout ϕ de D , nous avons :

$$\begin{aligned} ((\mathcal{H} + cI)\phi, \phi)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \left((c - \rho_0 v_0^2 \omega^2) \phi - 2i\omega \rho_0 v_0^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \rho_0 v_0^4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \rho_0 v_0^2 s \Delta \phi \right) \bar{\phi} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \left((c - \rho_0 v_0^2 \omega^2) |\phi|^2 + \rho_0 v_0^2 (s - v_0^2) \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right|^2 + \rho_0 v_0^2 s \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|^2 \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Gamma} s \left[\rho_0 v_0^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right]_{\Gamma} \bar{\phi} d\sigma \\ &= \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} \left((c - \rho_0 v_0^2 \omega^2) |\phi|^2 + \rho_0 v_0^2 (s - v_0^2) \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right|^2 + \rho_0 v_0^2 s \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|^2 \right) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{s}{s_{\Gamma}} |\phi|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

En utilisant ensuite le lemme de Lax-Milgram, la surjectivité est une conséquence directe du lemme suivant.

Lemme 3.6 *Il existe une constante C telle que la forme sesquilinéaire définie par $((\mathcal{H} + cI) \cdot, \cdot)$ est coercive sur $H^1(\Omega)$.*

Considérons à présent le cas pour lequel la vitesse s'annule sur le sous-domaine Ω_- . Nous procédons en deux temps. Nous introduisons tout d'abord l'opérateur \mathcal{H}_+ , défini sur l'espace

$$V_+ = \left\{ \phi \in H^2(\Omega_+) \mid \rho_0 v_0^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{1}{s_{\Gamma}} \phi \text{ sur } \Gamma ; \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_+ \setminus \Gamma \right\}$$

par :

$$\mathcal{H}_+ = \rho_0 \left(-\omega^2 I - 2i\omega v_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - s \Delta \right).$$

Il est alors facile de montrer que l'opérateur \mathcal{H}_+ est auto-adjoint et surjectif, sauf pour des valeurs exceptionnelles du paramètre s . Nous déduisons de sa surjectivité que, pour tout g de $L^2(\Omega)$, il existe un unique ϕ_+ appartenant à $H^1(\Omega_+)$ vérifiant :

$$\mathcal{H}_+ \phi_+ = g|_{\Omega_+}.$$

Nous utilisons ensuite cette solution pour poser le problème suivant sur le domaine Ω_- au moyen de la condition de transmission $[\phi]_\Gamma = 0$ contenue dans D :

$$\rho_0 (-\omega^2 \phi - s \Delta \phi) = g|_{\Omega_-} \text{ dans } \Omega_-,$$

$$\phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_- \setminus \Gamma,$$

$$\phi = \phi_+|_\Gamma \text{ sur } \Gamma.$$

Ce dernier problème est bien posé dans $H^1(\Omega_-)$, ce qui nous permet de conclure de (3.19) que $\text{rot } \mathbf{u} = \psi$ dans $\Omega_+ \cup \Omega$. □

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.6. Nous raisonnons par l'absurde. Si l'énoncé du lemme était faux, il existerait une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $H^1(\Omega)$, telle que :

$$\|\varphi_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \text{ et } \int_{\Omega} (|\nabla \varphi_n|^2 + n |\varphi_n|^2) \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} |\varphi_n|^2 \, d\sigma \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, nous pouvons extraire de cette suite une sous-suite convergente, encore notée $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui vérifie :

$$\int_{\Omega} (|\nabla \varphi_n|^2 + n |\varphi_n|^2) \, d\mathbf{x} \leq \frac{1}{n} + \int_{\Gamma} |\varphi_n|^2 \, d\sigma, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

Ceci implique que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)$ et faiblement vers une limite φ dans $H^1(\Omega)$. Par convergence forte de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^2(\Omega)$, φ est nulle et donc $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ dans $L^2(\Gamma)$ fortement. Nous déduisons alors de l'inégalité (3.20) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 \, d\mathbf{x} = 0,$$

et que $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ dans $H^1(\Omega)$ fortement. Ceci est impossible, puisque l'on a par hypothèse $\|\varphi_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ pour tout entier naturel n . □

3.2.5 Application

Nous abordons à présent la mise en œuvre pratique de la méthode de régularisation proposée pour un écoulement uniforme par morceaux et étudiée dans ce chapitre. Celle-ci nous amène à formuler quelques remarques.

Notons tout d'abord que le calcul effectif de l'intégrale sur l'interface Γ , dans laquelle apparaissent les sauts de diverses quantités, pose plusieurs difficultés. D'une part, les intégrands considérés ont des définitions sur le bord du domaine non intrinsèques, car elles font intervenir des dérivées de la composante du déplacement tangentielle à l'interface par rapport à la direction de l'écoulement, donnée ici par le vecteur \mathbf{e}_1 . Ceci conduit à des problèmes conceptuels pour leur implémentation dans le code MÉLINA, principalement vis-à-vis de l'application de la condition de transmission (3.8). On remarque d'autre part que les différents termes de cette intégrale ont des ordres de grandeur distincts, les expressions des fonctions intégrées faisant notamment apparaître des puissances des vitesses v_{0+} et v_{0-} de l'écoulement porteur. Sans même envisager un choix de

valeur pour le paramètre s_Γ , ceci peut évidemment avoir des conséquences négatives sur le conditionnement de la matrice obtenue à l'issue de la discrétisation du problème par la méthode des éléments finis.

Ces deux aspects pratiques semblent donc être, à première vue, autant de freins à l'élaboration d'un traitement à la fois général et robuste d'écoulements porteurs discontinus par une méthode de régularisation. Nous avons par ailleurs observé *a posteriori* que, si la formulation variationnelle augmentée "en volume" (c'est-à-dire celle obtenue par ajout d'un terme intégral défini sur le domaine $\Omega_+ \cup \Omega_-$) était bien indispensable pour le calcul de résultats corrects, l'apport du terme intégral surfacique n'avait pas d'effet appréciable. Bien que des études numériques approfondies complémentaires restent nécessaires pour s'assurer de cette constatation, les résultats préliminaires qui suivent ont été obtenus sans ce terme de surface supplémentaire.

Configuration

Nous simulons numériquement la propagation de modes guidés à l'intérieur d'un conduit rigide bidimensionnel infini et en présence d'un écoulement uniforme par morceaux d'un fluide homogène, l'interface étant située à mi-hauteur du guide. Comme pour les simulations du chapitre précédent, nous considérons une portion de longueur égale à 2 d'un conduit de hauteur l constante et égale à 1. Le maillage non structuré est composé de 1968 triangles et nous utilisons des éléments de Lagrange P_2 .

Les modes propagés sont irrotationnels dans le volume $\Omega_+ \cup \Omega_-$, la vorticité est concentrée sur l'interface Γ , et de la forme :

$$\boldsymbol{\xi}(x_1, x_2, t) = \mathbf{u}(x_1, x_2) e^{-i\omega t} = \begin{pmatrix} i\beta \varphi(x_2) \\ \varphi'(x_2) \end{pmatrix} e^{i(\beta x_1 - \omega t)}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

où le nombre complexe β désigne le nombre d'onde axial du mode choisi, le lecteur étant renvoyée à la section C.2 de l'annexe C pour l'expression analytique de la fonction φ . Il n'existe pas d'expression analytique des constantes de propagation β et les valeurs utilisées pour ces expériences ont été obtenues à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson.

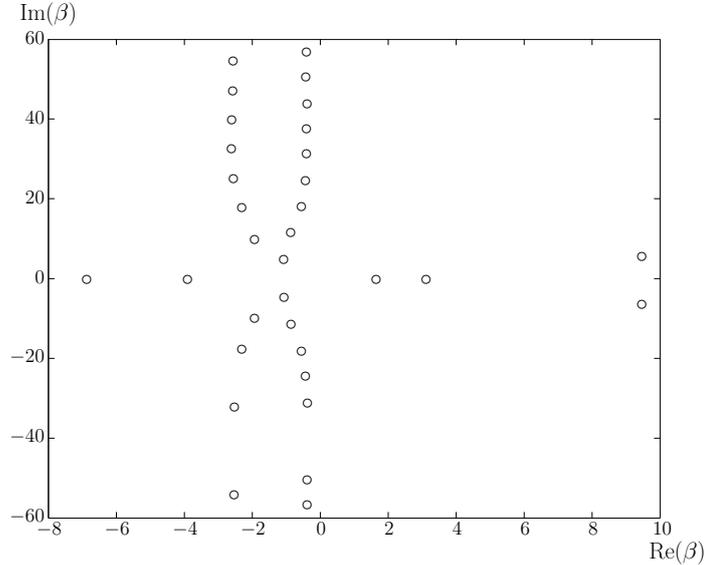


FIG. 3.2 – Nombres d'ondes axiaux dans le plan complexe, obtenus par une méthode de Newton-Raphson, pour le cas $k = 4$, $M_- = 0, 1$ et $M_+ = 0, 5$.

La figure 3.2 représente les constantes déterminées par cette méthode pour une valeur de k égale à 4 et des nombres de Mach valant respectivement $M_- = 0, 1$ dans la couche de fluide inférieure et $M_+ = 0, 5$ dans la couche supérieure. Les nombres d'onde situés sur l'axe réel correspondent à des modes propagatifs, tandis que les deux "branches" de constantes de parties imaginaires non nulles sont associées à des modes évanescents. Ces deux types de modes sont analogues à ceux existant lorsque l'écoulement porteur est globalement uniforme (voir par exemple la figure 4.3 pour ce cas de figure). Nous observons ici de plus

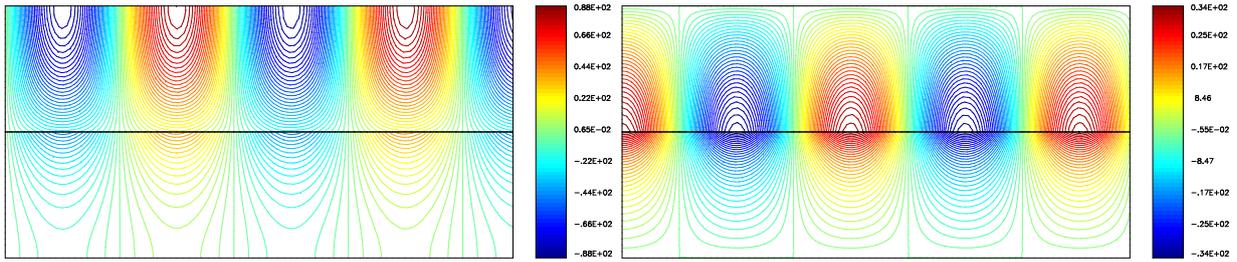


FIG. 3.3 – Lignes de niveau de la partie réelle des composantes du champ de déplacement \mathbf{u} , calculé avec régularisation volumique ($s = 1$), pour la propagation d'un mode, $\beta \approx -6,9719$, $k = 4$, $M_- = 0,1$ et $M_+ = 0,5$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

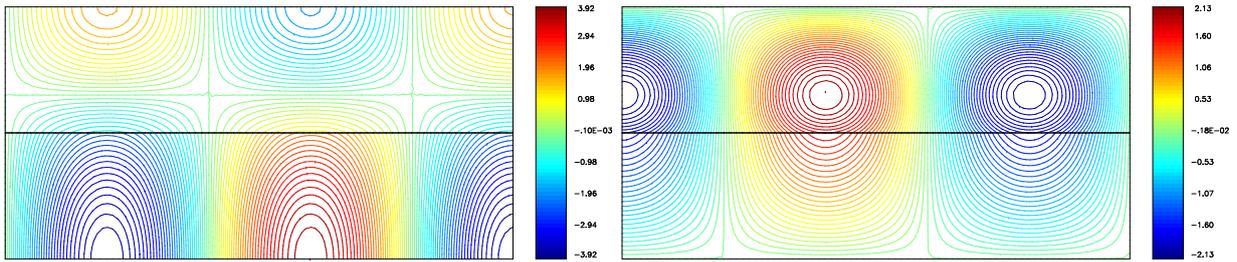


FIG. 3.4 – Lignes de niveau de la partie réelle des composantes du champ de déplacement \mathbf{u} , calculé avec régularisation volumique ($s = 1$), pour la propagation d'un mode, $\beta \approx -3,9163$, $k = 4$, $M_- = 0,1$ et $M_+ = 0,5$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

deux valeurs du nombre d'onde axial correspondant à des modes dits "hydrodynamiques". Une analyse du problème en régime transitoire montre que les solutions qui leur sont associées se propagent vers l'aval. Autrement dit, le mode hydrodynamique dont le nombre axial β a une partie imaginaire strictement positive est exponentiellement croissant dans la direction aval et est par conséquent qualifié d'instable. Notons pour terminer cette description que ces deux modes sont confinés au voisinage de l'interface.

Résultats numériques

Les figures 3.3 à 3.8 présentent la propagation des modes propagatifs et hydrodynamiques pour le cas $k = 4$, $M_- = 0,1$ et $M_+ = 0,5$. Les modes imposés sont retrouvés numériquement avec moins d'un pour cent d'erreur, sauf dans le cas des deux modes hydrodynamiques (figures 3.7 et 3.8) pour lesquels nous constatons, apparemment, la présence de modes parasites. Nous observons, pour chacun des modes, la discontinuité et la continuité des composantes du déplacement respectivement tangentielle et normale à l'interface Γ .

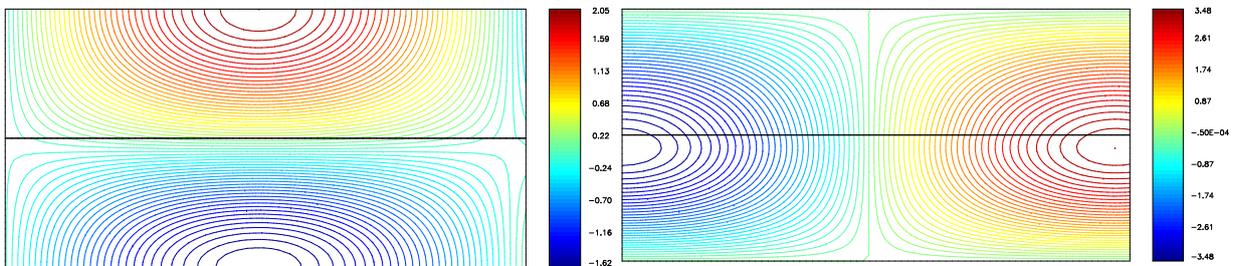


FIG. 3.5 – Lignes de niveau de la partie réelle des composantes du champ de déplacement \mathbf{u} , calculé avec régularisation volumique ($s = 1$), pour la propagation d'un mode, $\beta \approx 1,6153$, $k = 4$, $M_- = 0,1$ et $M_+ = 0,5$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

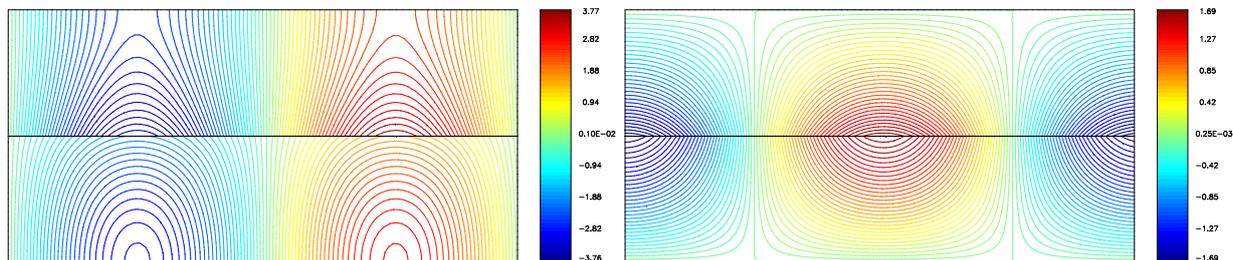


FIG. 3.6 – Lignes de niveau de la partie réelle des composantes du champ de déplacement \mathbf{u} , calculé avec régularisation volumique ($s = 1$), pour la propagation d'un mode, $\beta \approx 3,0959$, $k = 4$, $M_- = 0,1$ et $M_+ = 0,5$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

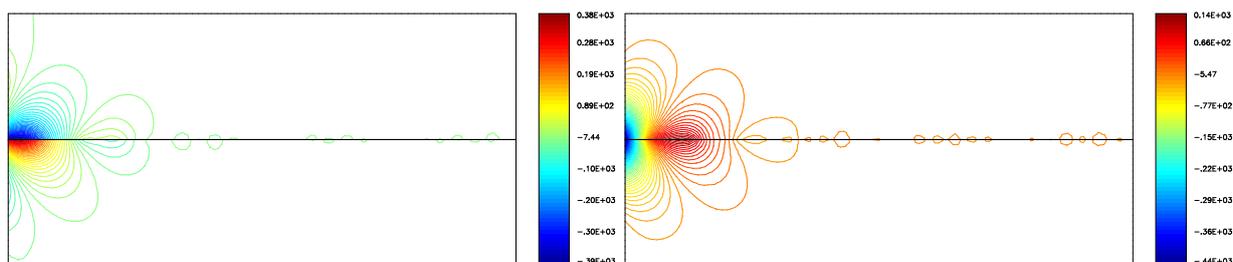


FIG. 3.7 – Lignes de niveau de la partie réelle des composantes du champ de déplacement \mathbf{u} , calculé avec régularisation volumique ($s = 1$), pour la propagation d'un mode, $\beta \approx 9,4467 + 6,0596i$, $k = 4$, $M_- = 0,1$ et $M_+ = 0,5$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

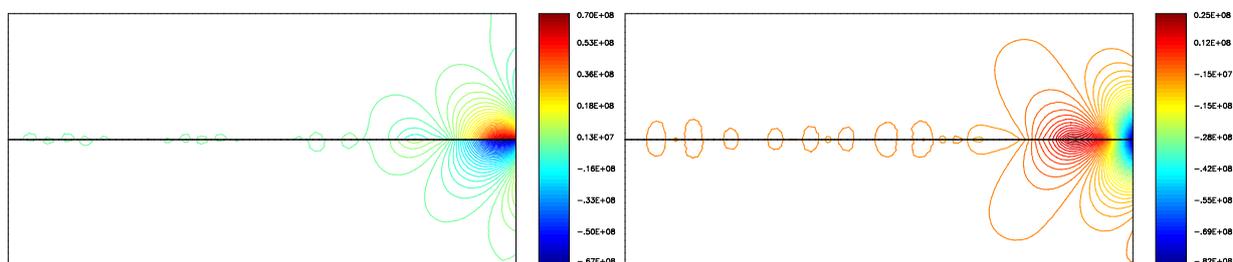


FIG. 3.8 – Lignes de niveau de la partie réelle des composantes du champ de déplacement \mathbf{u} , calculé avec régularisation volumique ($s = 1$), pour la propagation d'un mode, $\beta \approx 9,4467 - 6,0596i$, $k = 4$, $M_- = 0,1$ et $M_+ = 0,5$ (à gauche composante u_1 , à droite composante u_2).

3.3 Écoulement cisailé “régulier”

La méthodologie de régularisation telle qu'elle a été appliquée à l'équation de Galbrun jusqu'à présent prend un tour plus complexe lorsque le profil de vitesse de l'écoulement est cisailé. Dans ce cas en effet, les évolutions des parties rotationnelle et irrotationnelle du déplacement sont couplées par l'écoulement porteur. Nous présentons dans la suite une approche théorique de ce problème, tout en nous contentant d'indiquer en conclusion des pistes possibles en vue de sa résolution numérique.

Le cas traité dans cette partie est similaire à ceux déjà abordés. Le domaine Ω est une portion d'un guide bidimensionnel de hauteur l à parois rigides, située entre $x_1 = x_-$ et $x_1 = x_+$. La source à support compact \mathbf{f} appartient à l'espace $H(\text{rot}, \Omega)$.

La vitesse \mathbf{v}_0 de l'écoulement porteur stationnaire est dirigée selon la direction \mathbf{e}_1 , mais dépend cette fois-ci continûment de la coordonnée transverse du guide et nous posons :

$$\mathbf{v}_0(x_1, x_2, t) = v_0(x_2) \mathbf{e}_1.$$

La masse volumique ρ_0 , la pression p_0 et la vitesse du son c_0 dans l'écoulement porteur sont alors constantes et nous supposons une dépendance harmonique des inconnues. Notons que nous formulerons dans la section suivante des hypothèses plus précises sur la fonction v_0 , en particulier sur sa régularité.

Les équations modélisant ce problème s'écrivent alors :

$$\rho_0 \left(-\omega^2 \mathbf{u} - 2i\omega v_0(x_2) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + v_0^2(x_2) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} \right) - \nabla (\rho_0 c_0^2 \text{div } \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.22)$$

avec $\omega > 0$, les notations de la section précédente étant conservées.

Nous supposons également, afin de simplifier l'étude, que le rotationnel du champ de déplacement est donné et nul sur les frontières Σ_{\pm} (*i.e.*, en $x_1 = x_{\pm}$) du domaine Ω . La méthode présentée se généralise sans difficulté au cas de données non homogènes pour $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ et $\text{rot } \mathbf{u}$.

3.3.1 Équation différentielle pour le rotationnel du déplacement

Nous considérons le rotationnel de l'équation de Galbrun (3.21) :

$$\text{rot} \left(\frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \nabla(\text{div } \mathbf{u}) \right) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \text{rot } \mathbf{f},$$

soit encore :

$$\text{rot} \left(\frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} \right) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \text{rot } \mathbf{f},$$

en notant $\frac{D}{Dt} = -ik + M(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1}$ la dérivée convective dans l'écoulement cisailé et en régime harmonique, avec $k = \frac{\omega}{c_0}$ le nombre d'onde et $M = \frac{v_0}{c_0}$ le nombre de Mach. Nous supposons dans la suite que la vitesse v_0 , et donc M , ne s'annule pas. En l'absence d'écoulement, l'équation ci-dessus dégénère en effet en

$$-k^2 \text{rot } \mathbf{u} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \text{rot } \mathbf{f},$$

du fait de la disparition de l'effet de convection du fluide. Indiquons que le passage à la limite $M \rightarrow 0$ est un problème délicat, entrant dans le cadre des problèmes de perturbations singulières, et ne sera pas traité ici. Une seconde hypothèse demandée pour la réalisation de l'étude mathématique qui va suivre est une régularité de classe C^2 pour la vitesse⁷.

Nous cherchons à présent à commuter l'opérateur rotationnel avec la dérivée convective. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(-k^2 \mathbf{u} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} \right) &= \frac{D^2}{Dt^2} (\text{rot } \mathbf{u}) + 2ik \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - 2MM' \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ &= \frac{D^2}{Dt^2} (\text{rot } \mathbf{u}) - 2M' \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right), \end{aligned}$$

⁷Il est cependant possible d'affaiblir quelque peu cette hypothèse en demandant simplement à la fonction v_0 d'être continue et de classe C^1 par morceaux.

où M' désigne la dérivée de M par rapport à la variable x_2 . Nous avons finalement :

$$\frac{D^2}{Dt^2}(\text{rot } \mathbf{u}) = 2M' \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \text{rot } \mathbf{f}. \quad (3.23)$$

Le fait que le rotationnel du déplacement soit lié au déplacement lui-même par le biais de l'équation différentielle (3.23) traduit l'effet caractéristique d'interaction entre les phénomènes acoustiques et hydrodynamiques au sein d'un écoulement cisailé. Cependant, la méthode de régularisation reste applicable, même si la résolution de l'équation (3.23) doit à présent s'ajouter à celle de l'équation aux dérivées partielles (3.21). Nous allons à présent effectivement montrer que la régularité de $\psi = \text{rot } \mathbf{u}$ déduite de (3.23) rend cette démarche possible.

Remarque 3.7 *L'équation différentielle (3.23) reste valable en régime transitoire, la dérivée particulière reprenant alors son sens usuel. Cette équation peut d'ailleurs être vue comme l'analogue de l'équation de diffusion de Beltrami linéarisée vérifiée par la perturbation de vorticité, c'est-à-dire par le rotationnel de la perturbation de vitesse eulérienne [110]. Nous observons ici que, même pour un profil de vitesse linéaire, il n'y a plus de découplage entre les parties rotationnelle et irrotationnelle du déplacement comme cela était le cas en présence d'un écoulement porteur uniforme.*

3.3.2 Résolution de l'équation différentielle

La variable $x_2 \in [0, l]$ étant fixée, nous cherchons à résoudre l'équation différentielle à coefficients constants suivante :

$$\frac{D^2 \psi}{Dt^2} = 2M' \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \text{rot } \mathbf{f}, \quad \forall x_1 \in [x_-, x_+], \quad (3.24)$$

le champ ψ étant donné (ici, nul) sur les frontières Σ_- et Σ_+ . La solution de cette équation est donnée par l'intégrale :

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{x_-}^{x_+} G(x_1, z) \left(2M' \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \text{rot } \mathbf{f} \right) (z, x_2) dz,$$

où le noyau

$$G(x_1, z) = \begin{cases} \frac{(x_+ - z)}{M^2(x_+ - x_-)} (x_- - x_1) e^{i \frac{k}{M}(x_1 - z)} & \text{si } x_1 \leq z, \\ \frac{(x_+ - x_1)}{M^2(x_+ - x_-)} (x_- - z) e^{i \frac{k}{M}(x_1 - z)} & \text{si } x_1 > z. \end{cases}$$

désigne la fonction de Green, vérifiant des conditions de Dirichlet homogènes sur les frontières Σ_{\pm} du domaine, calculée dans la section D.1.2 de l'annexe D, à laquelle nous renvoyons le lecteur pour plus de détails. Nous aboutissons alors à une expression du champ de rotationnel de la forme :

$$\psi = \mathcal{A}\mathbf{u} + \psi_{\mathbf{f}},$$

où nous avons posé :

$$\psi_{\mathbf{f}} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \int_{x_-}^{x_+} G(x_1, z) \text{rot } \mathbf{f}(z, x_2) dz,$$

et où $\mathcal{A}\mathbf{u}$ est la solution s'annulant sur $\Sigma_- \cup \Sigma_+$ de l'équation :

$$\frac{D^2 \psi}{Dt^2} = 2M' \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right).$$

Une intégration par parties donne :

$$\mathcal{A}\mathbf{u}(x_1, x_2) = - \int_{x_-}^{x_+} 2M' \frac{\bar{D}G}{Dt}(x_1, z) \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right) (z, x_2) dz,$$

avec $\frac{\bar{D}}{Dt} = ik + M \frac{\partial}{\partial z}$. Nous avons par ailleurs :

$$\frac{\bar{D}G}{Dt}(x_1, z) = \begin{cases} -\frac{(x_- - x_1)}{M(x_+ - x_-)} e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} & \text{si } x_1 < z, \\ -\frac{(x_+ - x_1)}{M(x_+ - x_-)} e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} & \text{si } x_1 > z, \end{cases}$$

d'où :

$$\mathcal{A}u(x_1, x_2) = \frac{2M'}{M(x_+ - x_-)} \left[(x_+ - x_1) \int_{x_-}^{x_1} \frac{\partial u_1}{\partial z}(z, x_2) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} dz + (x_- - x_1) \int_{x_1}^{x_+} \frac{\partial u_1}{\partial z}(z, x_2) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} dz \right].$$

En remarquant que :

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(z, x_2) = \frac{1}{M} \left(\frac{Du_1}{Dt}(z, x_2) + ik u_1(z, x_2) \right),$$

la fonction $\mathcal{A}u$ s'écrit encore :

$$\mathcal{A}u(x_1, x_2) = -\frac{2M'}{M} \int_{x_-}^{x_+} \frac{\bar{D}G}{Dt}(x_1, z) \left(\frac{Du_1}{Dt} + ik u_1 \right)(z, x_2) dz,$$

et, après une intégration par parties, nous obtenons :

$$\mathcal{A}u(x_1, x_2) = -\frac{2M'}{M} \left(ik \int_{x_-}^{x_+} \frac{\bar{D}G}{Dt}(x_1, z) u_1(z, x_2) dz - \int_{x_-}^{x_+} \frac{\bar{D}^2 G}{Dt^2}(x_1, z) u_1(z, x_2) dz + \left[\frac{\bar{D}G}{Dt}(x_1, z) u_1(z, x_2) \right]_{z=x_-}^{x_+} \right).$$

En utilisant enfin le fait que :

$$\frac{\bar{D}^2 G}{Dt^2}(x_1, z) = \delta(z - x_1),$$

et la condition aux limites (3.22), nous arrivons à :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u(x_1, x_2) &= \frac{2ikM'}{M^2(x_+ - x_-)} (x_+ - x_1) \int_{x_-}^{x_1} u_1(z, x_2) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} dz \\ &+ \frac{2ikM'}{M^2(x_+ - x_-)} (x_- - x_1) \int_{x_1}^{x_+} u_1(z, x_2) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} dz \\ &+ \frac{2M'}{M} u_1(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Nous énonçons à présent le résultat, préliminaire à l'étude du problème variationnel régularisé, suivant :

Lemme 3.8 *L'opérateur \mathcal{A} est continu de $H^1(\Omega)^2$ dans $H^1(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Nous indiquons une idée de la preuve de ce lemme. Le résultat annoncé est établi par densité et nous supposons tout d'abord que le champ \mathbf{u} est dans l'espace $C^1(\bar{\Omega})$. La démonstration repose alors sur des majorations d'intégrales, via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, rendues possibles grâce aux hypothèses formulées sur le champ de vitesse par le biais de la fonction v_0 . □

3.3.3 Étude du problème régularisé

Nous sommes à présent en mesure d'étudier la forme faible du problème (3.21)-(3.22). Nous commençons par écrire la version régularisée de l'équation (3.21) :

$$-k^2 \mathbf{u} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + s \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathcal{A}\mathbf{u} - \psi_{\mathbf{f}}) = \rho_0^{-1} c_0^{-2} \mathbf{f} \text{ dans } \Omega,$$

où s désigne un réel positif, ainsi que les conditions aux limites :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathcal{A}\mathbf{u} + \psi_{\mathbf{f}} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Une formulation variationnelle du problème est ensuite établie dans l'espace fonctionnel

$$V = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Nous avons alors : trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que, pour tout $\mathbf{v} \in V$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s(\operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathcal{A}\mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\rho_0^{-1} c_0^{-2} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + s \psi_{\mathbf{f}}(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}})) d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_+ \cup \Sigma_-} M^2 \psi \bar{v}_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Théorème 3.9 *Le problème variationnel (3.25) relève de l'alternative de Fredholm si $s > 1$.*

DÉMONSTRATION. La preuve de ce théorème suit les lignes classiques des démonstrations précédentes. Nous commençons par écrire le problème (3.25) sous la forme : trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

avec

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \left(\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s(\operatorname{rot} \mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} \right) d\mathbf{x}, \\ c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \left(-(k^2 + 1) \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - s(\mathcal{A}\mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

et

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\rho_0^{-1} c_0^{-2} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + s \psi_{\mathbf{f}}(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}})) d\mathbf{x}.$$

Nous montrons ensuite classiquement que la forme sesquilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive sur l'espace V pour les valeurs de s choisies et que la forme sesquilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ définit un opérateur compact par le théorème de représentation de Riesz. Il existe en effet un opérateur K de $H^1(\Omega)^2$ dans $H^1(\Omega)^2$ tel que :

$$(K\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega)^2} = (\mathcal{A}\mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2.$$

En prenant $\mathbf{v} = K\mathbf{u}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|K\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq \|\mathcal{A}\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{rot}(K\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}.$$

Une simple majoration conduit alors à :

$$\|K\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2} \leq \|\mathcal{A}\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.26)$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que l'opérateur K est compact. Soit $(\mathbf{u}_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée dans $H^1(\Omega)^2$. En vertu du lemme 3.8, la suite $(\mathcal{A}\mathbf{u}_n)_{n \geq 0}$ est également bornée dans $H^1(\Omega)$. Nous extrayons alors une sous-suite, également notée $(\mathcal{A}\mathbf{u}_n)_{n \geq 0}$, convergeant dans $L^2(\Omega)$. Nous déduisons alors de l'inégalité (3.26) que la suite $(K\mathbf{u}_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy et que K est par conséquent un opérateur compact. Nous concluons enfin la preuve en montrant que la forme antilinéaire $l(\cdot)$ est continue sur l'espace V . \square

3.3.4 Quelques réflexions

Une première possibilité en vue de la résolution numérique du problème en écoulement cisailé consiste à discrétiser la formulation (3.25) avec des éléments finis de Lagrange. Le caractère non local du terme $\int_{\Omega} (\mathcal{A}\mathbf{u}) \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}$ conduit à un remplissage partiel de la matrice, normalement creuse, du système linéaire obtenu à l'issue de la discrétisation, tous les degrés de liberté placés sur une même ligne de courant étant liés entre eux par l'équation différentielle (3.24). Ceci constitue un inconvénient majeur pour la méthode.

Notons que si le maillage "suit" les lignes de courant de l'écoulement, ce terme supplémentaire est facilement évalué. Il est également possible de passer ce terme au second membre et d'itérer par résolutions successives.

Signalons enfin que si nous n'avons pas exploré plus en avant les possibilités d'une résolution numérique de l'équation (3.24), qui est une équation de transport linéaire du second ordre, couplée à la résolution par éléments finis de l'équation de Galbrun régularisée sur des maillages non structurés, celle-ci pourrait certainement être envisagée dans le cadre de l'utilisation de méthodes dites lagrangiennes, comme les méthodes particulières.

Chapitre 4

Couches absorbantes parfaitement adaptées

Dans le but de traiter des problèmes plus réalistes, nous cherchons à simuler une condition aux limites non réfléchissante ou transparente, laissant sortir les ondes du domaine de calcul, qui est par nécessité borné, sans provoquer de réflexions. En régime harmonique, pour des équations portant sur une inconnue scalaire, la décomposition de la solution sur les modes du conduit permet, au moyen d'un opérateur Dirichlet-Neumann, de construire une telle condition. Cependant, pour des inconnues vectorielles, cette décomposition est difficile, en raison des différentes "familles" de modes existant et de leur non-orthogonalité. Les couches absorbantes parfaitement adaptées (en abrégé et en anglais *PML* pour *Perfectly Matched Layers*) introduites par Bérenger constituent alors une alternative particulièrement intéressante, d'une part pour la simplicité de leur implémentation dans un code d'éléments finis, d'autre part pour leur efficacité à un coût additionnel relativement faible.

Ce chapitre, rédigé en anglais, est issu d'un article¹ écrit avec Éliane Bécache² et Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, intitulé "*Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation*" et accepté pour publication dans le *SIAM Journal on Numerical Analysis* [15]. Un nouveau modèle de couches absorbantes pour l'équation de Helmholtz convectée, qui porte sur la pression acoustique, est proposé pour répondre à d'apparentes difficultés relevées dans la littérature et concernant d'éventuelles instabilités du modèle de Bérenger pour le problème de propagation en conduit en présence d'un écoulement uniforme et en régime transitoire. Une analyse mathématique des modèles est présentée, le cadre de travail offert par la dépendance harmonique en temps du problème et la propagation en conduit permettant d'obtenir des résultats et estimations théoriques de convergence de la méthode, et suivie de validations numériques.

4.1 Introduction

Perfectly matched layers (PMLs) were introduced by Bérenger [19] in order to design efficient numerical absorbing boundary conditions (more precisely, absorbing layers) for the computation of time-dependent solutions of Maxwell's equations in unbounded domains. They have since been used for numerous applications, mostly in the time domain [20, 162, 21, 127] but also for time-harmonic wave-like equations [158, 84].

In particular, PMLs have been used for the solution in the time domain of the linearized Euler equations [94, 78, 89, 150], which model acoustic propagation in the presence of a flow. In this case, it has been observed that PMLs can lead to instabilities, due to the presence of waves whose phase and group velocities have opposite signs [150] (see [16] for a general analysis of this phenomenon). Some techniques have been developed to overcome this difficulty, making the layers stable but, unfortunately, no longer perfectly matched [89, 1]. More recently, ideas for designing stable PMLs for this problem have emerged from several teams independently. These new approaches, which seem to be very closely related, have been developed for

¹Ceci explique certaines différences de notation entre ce chapitre et le reste du mémoire.

²Éliane Bécache, projet ONDES, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex.

time-dependent applications in [95, 59, 82] and for time-harmonic applications in the present paper. These different works all deal with the case of a parallel flow, which is orthogonal to the layers.

We are concerned with the propagation of acoustic waves in a duct in the presence of a uniform flow. For such a mean flow, the time-harmonic linearized Euler equations reduce into a scalar convected Helmholtz equation for the pressure. In this particular case, one could, of course, use a Dirichlet-to-Neumann (DtN) operator to obtain an equivalent problem in a bounded domain. However, the PMLs, being local, are easier to implement, and we intend to extend this method to vectorial cases, involving more general flows in a forthcoming paper.

When applying the *classical* (i.e., Bérenger’s) PMLs to the convected Helmholtz equation in a duct, a simple modal analysis shows that the presence of the so-called inverse upstream modes produces an exponential blow-up of the solution in the space variable. This is easy to see, remembering the interpretation of the PMLs as a complex change of variable [42, 136, 46, 45]. This change of variable corresponds to a similarity applied on the axial wave numbers of the modes. For the classical Helmholtz equation, this similarity makes all outgoing modes become evanescent. But in the presence of a flow, the transformation sends the inverse upstream modes into the “bad” part of the complex plane, leading to the instabilities observed in the time domain.

The idea proposed here, which is similar to those developed independently in [95, 82] for time domain applications, consists of applying a translation before the similarity to the axial wave numbers. This removes the unstable modes. We will call the PMLs thus obtained *new* PMLs.

The object of this paper is the analysis of the convergence of both PML models as the thickness of the sponge layer tends to infinity. Similar convergence analyses have already been carried out for the Helmholtz equation, via boundary integral equation techniques in [104] or using the pole condition in [92]. Surprisingly, we prove that, for the convected Helmholtz equation, the two models always converge. In other words, contrary to time domain applications, the presence of unstable modes does not affect the efficiency of the classical PMLs.

Finally, let us emphasize that, in most papers concerning PMLs for time-harmonic applications, coefficients are designed in order to satisfy requirements established for time domain applications. We show that this choice is too restrictive: for instance, the particular dependence of these coefficients regarding the frequency has no more justification for the present case.

The outline of this paper is as follows: the equations of the scattering problem are presented in Section 4.2. A formulation in a bounded domain is given, involving DtN conditions on the fictitious boundaries, which are known explicitly through modal expansions. Finally, the well posedness is proven using Fredholm theory.

Classical and new PML techniques, with constant coefficients, are described in Section 4.3. A modal analysis indicates that these layers are “perfectly matched.” Besides, they are absorbing, except the classical PMLs in the presence of the so-called inverse upstream modes.

Section 4.4 is devoted to the analysis of the error due to the truncation of the layers. An equivalent formulation of the problem with PMLs is written in the physical domain, the thickness of the layers appearing in the expression of the DtN maps. In this way, we prove that both PML models converge to the physical solution, as the length of the layers tends to infinity. More precisely, the error in the physical domain does not depend on the PML model under consideration and decreases exponentially fast for both models. Note, however, that classical PMLs lead to an exponentially large solution in the layers, whereas the solution computed with new PMLs is evanescent in the layers.

Extension to the case of layers with spatially varying coefficients is discussed in Section 4.5, and numerical illustrations are given in the last section.

4.2 The physical and the mathematical models

4.2.1 The problem in the infinite duct

We consider an infinite rigid duct carrying a mean fluid flow; see Figure 4.1. The problem is two-dimensional, set in the xy -plane, where the x - (resp., y -) axis is parallel (resp., normal) to the walls of the duct. Mathematically, the duct is defined by the unbounded domain $\Omega = \mathbb{R} \times [0, h]$, where h denotes the distance between the rigid walls.

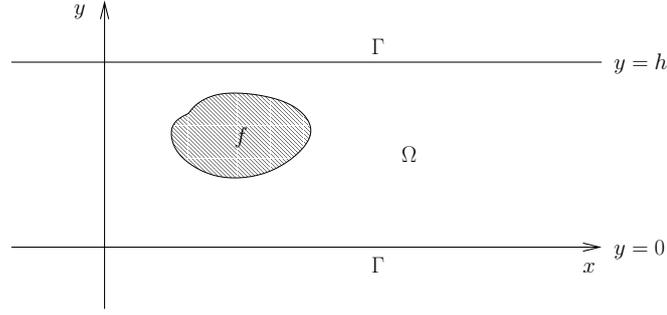


Figure 4.1: The infinite duct.

To describe the propagation of acoustic waves in the duct, we assume the following approximations to be valid:

- The fluid is homogeneous, nonviscous, and nonheat conductive.
- The thermodynamic processes are adiabatic.
- The mean velocity v_0 is subsonic and uniform.
- The perturbations are small, and equations are linear in the acoustic quantities.
- A harmonic time dependence $\exp(-i\omega t)$, $\omega > 0$ being the pulsation, is assumed (although this factor is suppressed throughout).

The acoustic pressure field $p(x, y)$ then satisfies the convected Helmholtz equation in the infinite duct:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2ikM \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = f \text{ in } \Omega, \quad (4.1)$$

where $f \in L^2(\Omega)$ is a compactly supported function and $M = v_0/c_0$ and $k = \omega/c_0$ are, respectively, the Mach number ($-1 < M < 1$) and the wave number, c_0 being the sound velocity in the fluid. In addition to (4.1), the pressure satisfies the Neumann homogeneous boundary condition on the two rigid walls of the duct:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ on } \Gamma = \partial\Omega. \quad (4.2)$$

To obtain a well posed problem, a “radiation condition,” which selects the “outgoing” waves, needs to be defined at infinity. This condition is nonlocal and is given in terms of the DtN operator. This requires the introduction of the so-called modes of the duct, which are the solutions of (4.1)-(4.2) in the absence of a source ($f = 0$) and with separated variables. These are given by

$$p_n^\pm(x, y) = e^{i\beta_n^\pm x} \varphi_n(y),$$

where

$$\varphi_0(y) = \sqrt{\frac{1}{h}}, \quad \varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{h}} \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (4.3)$$

and where the axial wave numbers β_n^\pm are the solutions of

$$-(1 - M^2)\beta^2 - 2kM\beta + k^2 = \frac{n^2\pi^2}{h^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Let us introduce

$$K_0 = \frac{kh}{\pi\sqrt{1 - M^2}}, \quad (4.4)$$

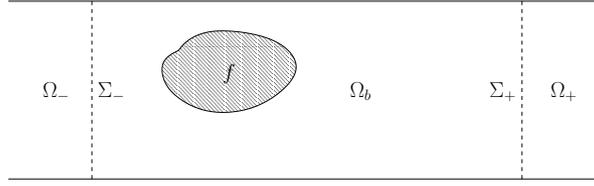


Figure 4.2: The bounded domain.

and let $N_0 = [K_0]$ denote the integer part of K_0 . If $n \leq N_0$, β_n^\pm is real and equal to

$$\beta_n^\pm = \frac{-kM \pm \sqrt{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{h^2}(1 - M^2)}}{1 - M^2}. \quad (4.5)$$

In this case, p_n^\pm is called a propagative mode. The number of propagative modes is an increasing function of the Mach number M , which is assumed to be positive. Simple calculations show that the group velocity $\frac{\partial\omega}{\partial\beta}$ is positive for the p_n^+ modes and negative for the p_n^- modes. A well-known effect of the presence of flow is the existence, when

$$\sqrt{1 - M^2} \frac{n\pi}{h} < k < \frac{n\pi}{h},$$

of modes p_n^+ which have a negative phase velocity $\frac{\omega}{\beta}$ and a positive group velocity. These are called inverse upstream modes.

The axial wave number β_n^\pm is complex if $n > N_0$:

$$\beta_n^\pm = \frac{-kM \pm i\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{h^2}(1 - M^2) - k^2}}{1 - M^2}. \quad (4.6)$$

In this case, p_n^\pm is exponentially decreasing when $x \rightarrow \pm\infty$ and is called an evanescent mode.

4.2.2 Reduction to a bounded domain

We now want to select the outgoing solution (4.1)-(4.2), which corresponds to a superposition of p_n^+ (resp., p_n^-) modes when $x \rightarrow +\infty$ (resp., $x \rightarrow -\infty$), i.e., either to the propagative modes with a positive (resp., negative) group velocity or to the evanescent modes.

To derive the appropriate DtN boundary condition, we introduce the bounded domain Ω_b , located in between two boundaries Σ_\pm , respectively, located at $x = x_-$ and $x = x_+$ (see Figure 4.2), such that the support of the source f is included in Ω_b :

$$\Omega_b = \{(x, y) \in \Omega, x_- \leq x \leq x_+\}.$$

We set Ω_\pm the complementary domains

$$\Omega_- = \{(x, y) \in \Omega, x < x_-\} \text{ and } \Omega_+ = \{(x, y) \in \Omega, x > x_+\}.$$

The solution p of (4.1) then satisfies the homogeneous equation

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2ikM \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = 0 \text{ in } \Omega_\pm, \quad (4.7)$$

and therefore can be decomposed on the modes. Consequently, in Ω_- , i.e., for $x < x_-$, we have

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p(x_-, \cdot), \varphi_n)_{L^2(\Sigma_-)} \varphi_n e^{i\beta_n^-(x-x_-)},$$

and in Ω_+ , i.e., for $x > x_+$,

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p(x_+, \cdot), \varphi_n)_{L^2(\Sigma_+)} \varphi_n e^{i\beta_n^+(x-x_+)},$$

where $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Sigma_+)}$ (resp., $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Sigma_-)}$) denotes the $L^2(\Sigma_+)$ (resp., $L^2(\Sigma_-)$) inner product for scalar functions:

$$(u, v)_{L^2(\Sigma_\pm)} \equiv \int_{\Sigma_\pm} u(y)\bar{v}(y) \, dy.$$

The DtN operators T_\pm can then be defined as

$$\begin{aligned} T_\pm : H^{1/2}(\Sigma_\pm) &\rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_\pm) \\ \phi &\mapsto \mp \sum_{n=0}^{+\infty} i\beta_n^\pm (\phi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_\pm)} \varphi_n(y), \end{aligned} \quad (4.8)$$

and we have the following boundary conditions on Σ_\pm for the solution of (4.1):

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -T_\pm p \text{ on } \Sigma_\pm, \quad (4.9)$$

where the vector \mathbf{n} denotes the unit outward normal to Σ_\pm .

Having established exact boundary conditions satisfied by p , we can now define a problem in the bounded domain Ω_b : find $p \in H^1(\Omega_b)$ such that

$$\begin{cases} (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2ikM \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = f & \text{in } \Omega_b, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & \text{on } \Gamma \cap \partial\Omega_b, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -T_\pm p & \text{on } \Sigma_\pm. \end{cases} \quad (4.10)$$

The fact that f is compactly supported in Ω_b shows clearly that problems (4.10) and (4.1)-(4.2) are equivalent in the sense of the following proposition.

Proposition 4.1 *If p is a solution of system (4.1)-(4.2), then $p|_{\Omega_b}$ is a solution of (4.10). Conversely, if \tilde{p} is a solution of (4.10), then \tilde{p} can be extended in a unique way to a solution of (4.1)-(4.2).*

4.2.3 Well posedness

Formulation (4.10) has two main advantages. First, from a theoretical point of view, it provides a result of existence and uniqueness of the solution. Second, it can be used to obtain numerical solutions, since it is posed in a bounded domain.

An equivalent weak form of system (4.10) can then be written as follows: find $p \in H^1(\Omega_b)$ such that

$$a_{\Omega_b}(p, q) = - \int_{\Omega_b} f \bar{q} \, dx \, dy \quad \forall q \in H^1(\Omega_b), \quad (4.11)$$

where the sesquilinear form $a_{\Omega_b}(\cdot, \cdot)$ is defined by

$$a_{\Omega_b}(p, q) = b(p, q) + c(p, q), \quad (4.12)$$

with

$$b(p, q) = \int_{\Omega_b} \left((1 - M^2) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + p \bar{q} \right) dx \, dy + \langle T_+ p, q \rangle_{\Sigma_+} + \langle T_- p, q \rangle_{\Sigma_-}, \quad (4.13)$$

where the brackets $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_+}$ (resp., $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_-}$) denote the natural duality pairing between $H^{-1/2}(\Sigma_+)$ and $H^{1/2}(\Sigma_+)$ (resp., $H^{-1/2}(\Sigma_-)$ and $H^{1/2}(\Sigma_-)$), and

$$c(p, q) = \int_{\Omega_b} \left(-2ikM \frac{\partial p}{\partial x} \bar{q} - (1 + k^2) p \bar{q} \right) dx \, dy. \quad (4.14)$$

It was shown in [33] that this problem is of Fredholm type. By the Fredholm alternative, problem (4.11) is well posed if and only if the homogeneous problem has no solution except the trivial one, $p = 0$.

Theorem 4.1 *The problem is well posed if and only if*

$$k \neq \sqrt{1 - M^2} \frac{n\pi}{h} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.15)$$

PROOF. Suppose that p is a solution of (4.1)-(4.2) with $f = 0$. Then, there are complex constants A_n^+ and A_n^- such that

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(A_n^+ e^{i\beta_n^+ x} + A_n^- e^{i\beta_n^- x} \right) \varphi_n(y),$$

with definitions (4.3) through (4.6). Boundary condition (4.9) then gives

$$A_n^-(\beta_n^- - \beta_n^+) = A_n^+(\beta_n^- - \beta_n^+) = 0$$

so that p vanishes identically if $\beta_n^+ \neq \beta_n^-$ or, likewise, if $k^2 \neq (1 - M^2) \frac{n^2 \pi^2}{h^2}$.

Suppose conversely that $k = \sqrt{1 - M^2} \frac{n\pi}{h}$, then

$$\beta_n^+ = \beta_n^- = -\frac{kM}{1 - M^2},$$

and $\varphi_n(y) e^{i\beta_n^+ x}$ is a nontrivial solution of the homogeneous problem. □

In what follows, we assume the problem is well posed, which means that (4.15) is satisfied.

4.3 The PML model

The PML model introduced by Bérenger for the time-dependent Maxwell equations can be constructed using a complex change of variable in the frequency domain, as shown in [42, 46, 45]. We use this same approach in the present paper. This is closely related to the technique known as dilation analyticity for the study of resonances [90].

In this section, we briefly recall some properties of the classical PML formulation for the Helmholtz equation. Note that in the context of propagation in a waveguide, the interpretation of the method relies on the modal approach instead of the usual plane wave approach. This modal analysis allows us to point out the origin of the instabilities in the presence of flow and leads naturally to the introduction of a new model of PMLs as a remedy.

4.3.1 Modal analysis of Bérenger's model in a waveguide

The purpose of the method is to provide a fictitious, absorbing medium such that its interface with the "physical" bounded domain does not reflect any outgoing mode. Transposing Bérenger's formulation in the frequency domain from its original setting in the time domain consists of making the following substitution:

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.16)$$

where α is a complex function taken to be

$$\alpha(x) = \frac{-i\omega}{-i\omega + \sigma(x)} \quad (4.17)$$

with $\sigma(x)$ a real, positive function such as $\sigma(x) = 0$ (and therefore $\alpha(x) = 1$) in Ω_b , the derivative with respect to y being left unchanged.

In the case of the Helmholtz equation, we obtain

$$\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = f \text{ in } \Omega. \quad (4.18)$$

Note that the writing of this equation in the weak sense implies the following jump conditions at the interfaces between Ω_b and the PMLs:

$$[p(x, y)] = 0 \text{ and } \left[\alpha(x) \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) \right] = 0. \quad (4.19)$$

For the modal analysis in the waveguide, we now assume that $\alpha(x)$ is a constant in $\Omega \setminus \Omega_b$, which we still denote by α for the sake of simplicity. In other words:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_- \leq x \leq x_+, \\ \alpha & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.20)$$

For any α , the interface between the PML and the physical domain is perfectly transparent, and we will see that if α is well chosen, the transmitted waves decrease exponentially in the layer.

Classically, the modes in a waveguide are given by

$$p_n^\pm(x, y) = e^{\pm i\beta_n x} \varphi_n(y), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.21)$$

where functions φ_n , for all $n \in \mathbb{N}$, are defined by (4.3) and axial wave numbers β_n are solutions of the dispersion equation

$$\beta_n^2 = k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{h^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

such that $\beta_n > 0$ for the propagative modes and $\text{Im}(\beta_n) > 0$ for the evanescent modes. Referring to subsection 4.2.1, note that

$$\beta_n = \beta_n^+ = -\beta_n^-,$$

with the Mach number M taken equal to zero in the definitions (4.5) and (4.6) of β_n^\pm .

In the same manner, one can define the modes in the PML as

$$p_{n,\alpha}^\pm(x, y) = e^{\pm i\beta_{n,\alpha} x} \varphi_n(y), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.22)$$

with

$$\beta_{n,\alpha} = \frac{\beta_n}{\alpha}.$$

If α satisfies the hypotheses

$$\text{Re}(\alpha) > 0, \quad \text{Im}(\alpha) < 0, \quad (4.23)$$

then $p_{n,\alpha}^\pm$ is exponentially decreasing as $x \rightarrow \pm\infty$ for any n corresponding either to a propagative or to an evanescent mode. It is now straightforward to show that an incident mode p_n^+ generates an evanescent transmitted mode $p_{n,\alpha}^+$ in Ω_+ and no reflection at the interface Σ_+ . Let us stress that assumption (4.23) is the only requirement on α to obtain a PML. Surprisingly, the fairly restrictive choice (4.17) seems to be used in most time-harmonic applications.

4.3.2 The new PML formulation for the convected Helmholtz equation

A natural idea for designing a PML for the convected Helmholtz equation, already used in the literature for applications in the time domain, is to apply the technique described in the previous subsection. It has been observed by several authors that this approach leads to instabilities in the time domain [94, 78, 89, 150]. The presence of instabilities have been explained in [16], thanks to an analysis via group velocities. In the context of a duct, this phenomenon can be easily understood using the modal approach.

As in the no-flow case, the axial wave numbers $\beta_{n,\alpha}^\pm$ of the modes $p_{n,\alpha}^\pm$ in the PML are given by

$$\beta_{n,\alpha}^\pm = \frac{\beta_n^\pm}{\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

This can be illustrated by representing the β_n^\pm and $\beta_{n,\alpha}^\pm$ in the complex plane. We clearly notice in Figures 4.3 and 4.4 that the transformation

$$S_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ z \mapsto \frac{z}{\alpha},$$

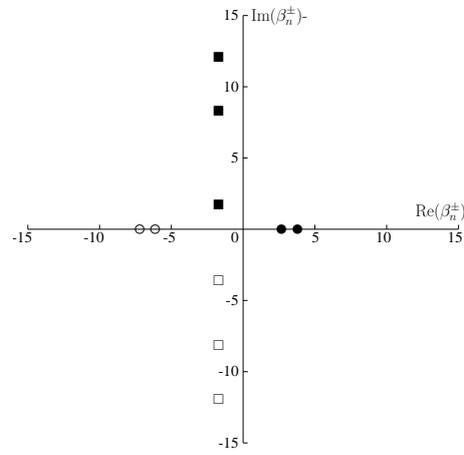


Figure 4.3: First axial wave numbers of the modes for the convected Helmholtz equation ($k = 5$, $M = 0.3$, and $h = 1$). Circles and squares are respectively associated with propagative and evanescent modes, while filled and empty symbols, respectively, refer to downstream and upstream modes.

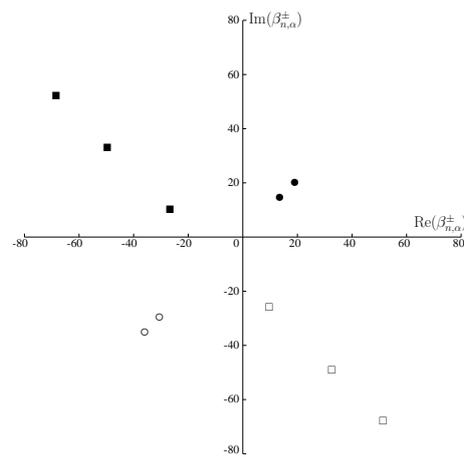


Figure 4.4: Effect of the similarity S_α ($\alpha = 0.1(1 - i)$) on the first axial wave numbers of the modes for the convected Helmholtz equation ($k = 5$, $M = 0.3$, and $h = 1$).

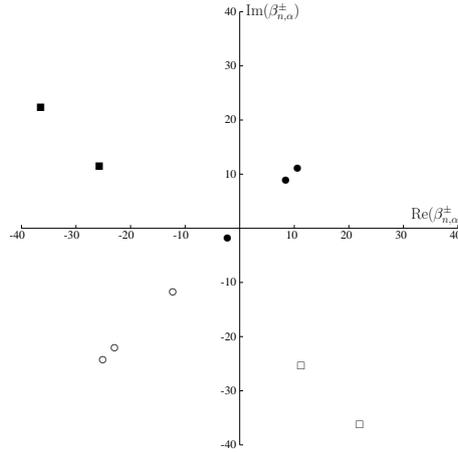


Figure 4.5: Effect of the similarity S_α ($\alpha = 0.2(1 - i)$) on the first axial wave numbers of the modes for the convected Helmholtz equation in presence of an inverse upstream mode ($k = 6$, $M = 0.4$, and $h = 1$).

due to the change of variable used in the PML, is a similarity of ratio $\frac{1}{|\alpha|}$ and angle $\arg\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\arg(\alpha)$ around the origin in the complex plane. The main difference between the equation considered here and the Helmholtz equation is the possible existence of inverse upstream modes. Indeed, if p_n^+ is an inverse upstream mode (as defined in subsection 4.2.1), the corresponding β_n^+ is negative so that $\text{Im}\left(\frac{\beta_n^+}{\alpha}\right)$ becomes negative for any α satisfying assumption (4.23). This is illustrated in Figure 4.5, the third propagative downstream mode of the case presented being an inverse upstream mode. This leads us to the conclusion that the PML model does not produce any unstable (i.e., exponentially growing in the layer) modes if all the axial wave numbers $\beta_{n,\alpha}$ for the propagative downstream (resp., upstream) modes are strictly located in the upper (resp., lower) half of the complex plane.

Guided by the previous geometrical interpretation, we apply a translation in the complex plane prior to the similarity which moves all the $\beta_{n,\alpha}^+$'s corresponding to the inverse upstream modes in the right half-plane and keeps the $\beta_{n,\alpha}^-$'s associated with propagative modes in the left one. Such a transformation is equivalent to the following substitution in (4.1):

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x} + i\lambda$$

with $\lambda \in \mathbb{R}$. The resulting axial wave numbers are now given by

$$\beta_{n,\alpha,\lambda}^\pm = \frac{\beta_n^\pm - \lambda}{\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.24)$$

Although λ could be chosen from among several values, the most appropriate choice is the following:

$$\lambda^* = -\frac{kM}{1 - M^2}. \quad (4.25)$$

This value corresponds to the real part of the wave number of each evanescent mode and, for any α satisfying assumption (4.23), the $\beta_{n,\alpha,\lambda^*}^\pm$'s are well located. Other choices for λ would require further restrictions on α in order to ensure that the β_n 's associated with evanescent modes also stay in the “good side” of the complex plane (see Figure 4.6).

We denote in the following by $\lambda(x)$ the function defined by

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_- \leq x \leq x_+, \\ \lambda & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.26)$$

Finally, the equation in the new PML medium can be written as

$$(1 - M^2) \left(\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x} + i\lambda(x) \right)^2 p + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2ikM \left(\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x} + i\lambda(x) \right) p + k^2 p = f \text{ in } \Omega, \quad (4.27)$$

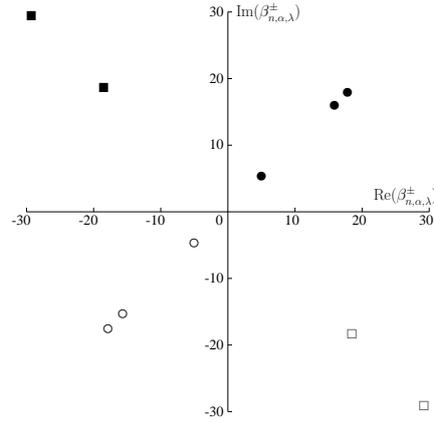


Figure 4.6: Effect of the new transformation (translation prior to similarity S_α) on the first axial wave numbers of the modes for the convected Helmholtz equation in presence of an inverse upstream mode ($k = 6$, $M = 0.4$, and $h = 1$), $\alpha = 0.2(1 - i)$, and $\lambda = -\frac{kM}{1-M^2}$.

where the function $\alpha(x)$ (resp., $\lambda(x)$) is defined in (4.20) (resp., in (4.26)) with $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\alpha \in \mathbb{C}$ satisfying assumption (4.23). Writing this equation in a weak sense implies jump conditions at the interfaces between Ω_b and the layers:

$$[p(x, y)] = 0 \text{ and } \left[\alpha(x) \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) + i\lambda(x) p(x, y) \right] = 0. \quad (4.28)$$

Remark: This new change of variable can also be used to derive stable PMLs in the time domain, as is done in [95, 82].

4.4 PML truncation. Error estimates

4.4.1 Truncation of the absorbing layer and well posedness

Until now, we have considered an absorbing layer of infinite length. In practice, one has to bound the computational domain and layers are of finite length L in this section.

We denote by Ω^L the truncated domain and by Σ_\pm^L the external boundaries, presented in Figure 4.7. For simplicity, we choose to use homogeneous Dirichlet boundary conditions on these boundaries, but the

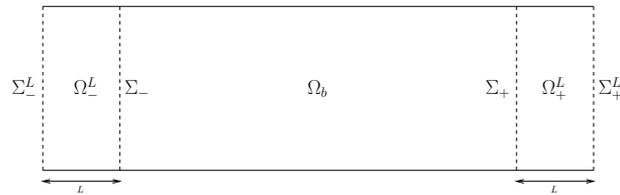


Figure 4.7: The truncated domain Ω^L .

analysis done in the following would still be valid for the natural boundary conditions $\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + i\lambda p = 0$. Let p^L denote the solution in the truncated domain, satisfying

$$\begin{cases} (1 - M^2) \left(\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x} + i\lambda(x) \right)^2 p + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2ikM \left(\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x} + i\lambda(x) \right) p + k^2 p = f & \text{in } \Omega^L, \\ \frac{\partial p^L}{\partial y} = 0 & \text{on } \Gamma \cap \partial\Omega^L, \\ p^L = 0 & \text{on } \Sigma_\pm^L. \end{cases} \quad (4.29)$$

Denoting $V_L = \{q \in H^1(\Omega^L) \mid q = 0 \text{ on } \Sigma_{\pm}^L\}$, a variational formulation of (4.29) can be written as follows: find $p^L \in V_L$ such that

$$a_{\Omega^L}(p^L, q) = - \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} f \bar{q} \, dx \, dy \quad \forall q \in V_L, \quad (4.30)$$

where the sesquilinear form $a_{\Omega^L}(\cdot, \cdot)$ is defined by

$$a_{\Omega^L}(p, q) = b_L(p, q) + c_L(p, q),$$

with

$$b_L(p, q) = \int_{\Omega^L} \left((1 - M^2) \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + p \bar{q} \right) \, dx \, dy$$

and

$$\begin{aligned} c_L(p, q) &= \int_{\Omega^L} i \left(((M^2 - 1)\lambda - 2kM) \frac{\partial p}{\partial x} \bar{q} + (1 - M^2)\lambda p \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right) \, dx \, dy \\ &\quad + \int_{\Omega^L} \left((1 - M^2) \frac{\lambda^2}{\alpha} + 2kM \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{k^2}{\alpha} - 1 \right) p \bar{q} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Theorem 4.2 *If α satisfies (4.23), then problem (4.30) is of Fredholm type.*

PROOF. The bounded operator C_L on $H^1(\Omega^L)$, defined by the Riesz representation theorem as

$$(C_L p, q)_{H^1(\Omega^L)} = c_L(p, q) \quad \forall (p, q) \in H^1(\Omega^L)^2,$$

is clearly compact (from the compactness of the embedding of $H^1(\Omega^L)$ into $L^2(\Omega^L)$). On the other hand, the sesquilinear form $b_L(\cdot, \cdot)$ is coercive on V_L . To check this, it suffices to take the real part of $b_L(q, q)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(b_L(q, q)) &= \int_{\Omega^L} \left(\operatorname{Re}(\alpha)(1 - M^2) \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right|^2 + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right|^2 + |q|^2 \right) \, dx \, dy \\ &\geq C \|q\|_{H^1(\Omega^L)}^2, \end{aligned}$$

where, because of assumption (4.23), C is a strictly positive constant depending on the complex constant α and the Mach number M :

$$C = \inf \left((1 - M^2) \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\right), 1 \right).$$

□

4.4.2 Reduction to a problem posed in Ω_b

Remember that our original problem (4.1)-(4.2) has been proved in section 4.2.2 to be equivalent to the problem (4.10) posed in Ω_b . Having in mind the comparison between the solution p^L of problem (4.29), posed in the truncated domain, and the solution p of the original problem, we first reformulate (4.29) as a problem posed only in Ω_b . Consider the following problem: find $p_b^L \in H^1(\Omega_b)$ such that

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1 - M^2) \frac{\partial^2 p_b^L}{\partial x^2} + 2ikM \frac{\partial p_b^L}{\partial x} + \frac{\partial^2 p_b^L}{\partial y^2} + k^2 p_b^L = f & \text{in } \Omega_b, \\ \frac{\partial p_b^L}{\partial y} = 0 & \text{on } \Gamma \cap \partial\Omega_b, \\ \frac{\partial p_b^L}{\partial \mathbf{n}} = -T_{\pm}^L p_b^L & \text{on } \Sigma_{\pm}, \end{array} \right. \quad (4.31)$$

where T_{\pm}^L are operators defined as follows:

$$\begin{aligned} T_{\pm}^L : H^{1/2}(\Sigma_{\pm}) &\rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_{\pm}), \\ \phi &\mapsto \mp \sum_{n=0}^{+\infty} i\nu_n^{\pm}(L) (\phi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_{\pm})} \varphi_n(y), \end{aligned} \quad (4.32)$$

with

$$\nu_n^\pm(L) = \beta_n^\pm + \frac{\beta_n^\mp - \beta_n^\pm}{1 - e^{i(\beta_n^- - \beta_n^+)L/\alpha}}. \quad (4.33)$$

Note that values $\nu_n^\pm(L)$ are well defined, because of assumption (4.15).

Proposition 4.2 *If p^L is a solution of (4.29), then $p^L|_{\Omega_b}$ is a solution of (4.31). Conversely, if p_b^L is a solution of (4.31), then it can be extended in a unique way to a solution of (4.29).*

PROOF. The key idea for reformulating the problem as a problem posed in Ω_b is to write an exact boundary condition satisfied by the solution on the boundaries Σ_\pm . We define the complementary domains Ω_\pm^L by

$$\Omega_-^L = \{(x, y) \in \Omega^L, x_- - L < x < x_-\} \text{ and } \Omega_+^L = \{(x, y) \in \Omega^L, x_+ < x < x_+ + L\}.$$

Since $p_\pm^L = p^L|_{\Omega_\pm^L}$ satisfies a homogeneous equation in these domains, it can be given as a modal expansion.

Consider, for instance, the solution in the right domain Ω_+^L . Using the Dirichlet boundary condition on the external layer boundary Σ_+^L , the solution can be written as

$$p_+^L(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p_+^L(x_+, \cdot), \varphi_n)_{L^2(\Sigma_+)} \left(A_n^+ e^{i\gamma_n^+(x-x_+)} + A_n^- e^{i\gamma_n^-(x-x_+)} \right) \varphi_n(y),$$

where we have denoted $\gamma_n^\pm = \beta_{n,\alpha,\lambda}^\pm$, for the sake of clarity, and

$$A_n^\pm = \mp \frac{e^{i\gamma_n^\mp L}}{e^{i\gamma_n^+ L} - e^{i\gamma_n^- L}}.$$

We check easily that these quantities are always defined. Actually, the denominator would vanish if there existed an integer n for which $(\gamma_n^+ - \gamma_n^-)L \in 2\pi\mathbb{Z}$, which means that $(\beta_n^+ - \beta_n^-)L/\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$. If $k^2 \neq (1 - M^2) \frac{n^2 \pi^2}{h^2}$, the quantity $\beta_n^+ - \beta_n^-$ is never zero. Furthermore, with α satisfying assumption (4.23), $(\beta_n^+ - \beta_n^-)L/\alpha$ always has a nonzero imaginary part and thus cannot belong to $2\pi\mathbb{Z}$. We then write an exact boundary condition satisfied by p_+^L on Σ_+ :

$$\left(\frac{\partial p_+^L}{\partial x} \right)_{|\Sigma_+} = \sum_{n=0}^{+\infty} (p_+^L(x_+, \cdot), \varphi_n)_{L^2(\Sigma_+)} (A_n^+ i\gamma_n^+ + A_n^- i\gamma_n^-) \varphi_n(y).$$

Using the jump conditions (4.28) and relation (4.24), this yields an exact boundary condition satisfied in the interior by p_b^L :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p_b^L}{\partial x} \right)_{|\Sigma_+} &= \alpha \left(\frac{\partial p_+^L}{\partial x} \right)_{|\Sigma_+} + i\lambda p_+^L|_{\Sigma_+} \\ &= i \sum_{n=0}^{+\infty} (p_b^L(x_+, \cdot), \varphi_n)_{L^2(\Sigma_+)} (A_n^+ \beta_n^+ + A_n^- \beta_n^-) \varphi_n(y). \end{aligned}$$

Setting $\nu_n^+(L) = A_n^+ \beta_n^+ + A_n^- \beta_n^-$, this can also be written as

$$\left(\frac{\partial p_b^L}{\partial x} \right)_{|\Sigma_+} = -T_+^L(p_b^L)|_{\Sigma_+},$$

where T_+^L denotes the operator defined in (4.32). □

Remark: It clearly appears in the expression (4.33) that operators T_\pm^L , and thus problem (4.31), do not depend on λ . In fact, the computed solution p^L depends on λ only in the layers.

4.4.3 Convergence and error estimates

We have shown that the original system (4.1)-(4.2) and system (4.29) with absorbing layers of finite length are both equivalent to problems posed only in Ω_b (respectively, (4.10) and (4.31)). We are now able to compare the solutions of these two problems, which are solutions of the following variational formulations:

For the original problem (4.10): find $p_b \in H^1(\Omega_b)$ such that

$$a_{\Omega_b}(p_b, q) = - \int_{\Omega_b} f \bar{q} \, dx \, dy \quad \forall q \in H^1(\Omega_b), \quad (4.34)$$

where the sesquilinear form $a_{\Omega_b}(\cdot, \cdot)$ is given by (4.12) and can be written as

$$a_{\Omega_b}(p, q) = (Ap, q)_{H^1(\Omega_b)} + \langle T_+ p, q \rangle_{\Sigma_+} + \langle T_- p, q \rangle_{\Sigma_-}, \quad (4.35)$$

with A the bounded linear operator on $H^1(\Omega_b)$ defined by

$$(Ap, q)_{H^1(\Omega_b)} = \int_{\Omega_b} \left((1 - M^2) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} - 2ikM \frac{\partial p}{\partial x} \bar{q} - k^2 p \bar{q} \right) dx \, dy. \quad (4.36)$$

For the problem with absorbing layers of finite length (4.31): find $p_b^L \in H^1(\Omega_b)$ such that

$$a_{\Omega_b}^L(p_b^L, q) = - \int_{\Omega_b} f \bar{q} \, dx \, dy \quad \forall q \in H^1(\Omega_b), \quad (4.37)$$

where the sesquilinear form $a_{\Omega_b}^L(\cdot, \cdot)$ can be written as

$$a_{\Omega_b}^L(p, q) = (Ap, q)_{H^1(\Omega_b)} + \langle T_+^L p, q \rangle_{\Sigma_+} + \langle T_-^L p, q \rangle_{\Sigma_-}, \quad (4.38)$$

the operator A being defined in (4.36).

To prove convergence and get error estimates, we follow an idea developed in [138], which has also been used in [77].

Lemma 4.3 *Suppose that assumptions (4.15) and (4.23) hold. Then there exist strictly positive constants $\mathcal{C} = \mathcal{C}(k, M)$ and $\eta = \eta(\theta, k, h, M)$ (where θ denotes the argument of α) such that, for all $(p, q) \in (H^1(\Omega_b))^2$, we have*

$$|a_{\Omega_b}(p, q) - a_{\Omega_b}^L(p, q)| \leq \mathcal{C} e^{-\eta L/|\alpha|} \|p\|_{H^1(\Omega_b)} \|q\|_{H^1(\Omega_b)}. \quad (4.39)$$

More precisely, the constant η is determined by

$$\eta = \frac{2k}{1 - M^2} \min \left(-\sin(\theta) \sqrt{1 - \frac{N_0^2}{K_0^2}}, \cos(\theta) \sqrt{\frac{(N_0 + 1)^2}{K_0^2} - 1} \right), \quad (4.40)$$

where K_0 is defined in (4.4).

PROOF. From expressions (4.35) and (4.38), we have

$$a_{\Omega_b}(p, q) - a_{\Omega_b}^L(p, q) = \left(\langle T_+ p, q \rangle_{\Sigma_+} - \langle T_+^L p, q \rangle_{\Sigma_+} \right) + \left(\langle T_- p, q \rangle_{\Sigma_-} - \langle T_-^L p, q \rangle_{\Sigma_-} \right).$$

Let us focus on the first term in the right-hand side, the estimation of the second one being analogous. From the definitions (4.8) and (4.32) of operators T_+ and T_+^L , we have, for any $\phi \in H^{1/2}(\Sigma_+)$,

$$(T_+ - T_+^L) \phi = - \sum_{n=0}^{+\infty} i(\beta_n^+ - \nu_n^+(L)) \phi_n \varphi_n(y) \quad \text{with } \phi_n = (\phi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_+)}.$$

Therefore, for any $(\phi, \psi) \in (H^{1/2}(\Sigma_+))^2$,

$$\langle (T_+ - T_+^L) \phi, \psi \rangle_{\Sigma_+} = - \sum_{n=0}^{+\infty} i(\beta_n^+ - \nu_n^+(L)) \phi_n \bar{\psi}_n,$$

with $\phi_n = (\phi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_+)}$ and $\psi_n = (\psi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_+)}$. This implies the following estimate:

$$\left| \langle (T_+ - T_+^L) \phi, \psi \rangle_{\Sigma_+} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\beta_n^+ - \nu_n^+(L)| |\phi_n \bar{\psi}_n|. \quad (4.41)$$

From (4.33), we have

$$|\beta_n^+ - \nu_n^+(L)| = \frac{|\beta_n^+ - \beta_n^-|}{\left| 1 - e^{i(\beta_n^- - \beta_n^+)L/\alpha} \right|}.$$

Noticing that, for any $z \in \mathbb{C}$,

$$|1 - e^{iz}| \geq \left| e^{-\text{Im}(z)} - 1 \right|$$

so that, if $\text{Im}(z) < 0$ and $|\text{Im}(z)|$ is large enough, we conclude that this quantity is larger than

$$|1 - e^{iz}| \geq \left| e^{-\text{Im}(z)} - 1 \right| \geq \frac{1}{2} e^{-\text{Im}(z)}.$$

We can easily check, using assumption (4.23), that we have $\text{Im}((\beta_n^- - \beta_n^+)L/\alpha) < 0$ for all $n \in \mathbb{N}$ so that, for L large enough, the previous estimate gives us

$$|\beta_n^+ - \nu_n^+(L)| \leq 2 |\beta_n^+ - \beta_n^-| e^{\text{Im}((\beta_n^- - \beta_n^+)L/\alpha)}. \quad (4.42)$$

Let us now distinguish the two cases.

The propagative modes $n \leq N_0$ From (4.5), we have

$$\beta_n^+ - \beta_n^- = \frac{2k}{1 - M^2} \sqrt{1 - \frac{n^2}{K_0^2}} = \delta_n > 0.$$

Noting that

$$\delta_{N_0} \leq \delta_n \leq \frac{2k}{1 - M^2},$$

we derive from estimate (4.42)

$$|\beta_n^+ - \nu_n^+(L)| \leq 2\delta_n e^{-\delta_{N_0} L \text{Im}(1/\alpha)} \leq \frac{4k}{1 - M^2} e^{-\delta_{N_0} L \text{Im}(1/\alpha)}. \quad (4.43)$$

The evanescent modes $n \geq N_0 + 1$ From (4.6), we have

$$\beta_n^+ - \beta_n^- = \frac{2ik}{1 - M^2} \sqrt{\frac{n^2}{K_0^2} - 1} = i\delta_n, \quad \delta_n > 0.$$

This time, δ_n is increasing and $\sqrt{\frac{n^2}{K_0^2} - 1} \leq \frac{n}{K_0}$. Estimate (4.42) thus yields

$$|\beta_n^+ - \nu_n^+(L)| \leq \frac{4k}{1 - M^2} \frac{n}{K_0} e^{-\delta_{N_0+1} L \text{Re}(1/\alpha)}. \quad (4.44)$$

By substituting these estimates into (4.41), we see that

$$\begin{aligned} \left| \langle (T_+ - T_+^L) \phi, \psi \rangle_{\Sigma_+} \right| &\leq \frac{4k}{1 - M^2} \left(\sum_{n=0}^{N_0} e^{-\delta_{N_0} L \text{Im}(1/\alpha)} |\phi_n \bar{\psi}_n| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{n}{K_0} e^{-\delta_{N_0+1} L \text{Re}(1/\alpha)} |\phi_n \bar{\psi}_n| \right). \end{aligned}$$

Setting $\eta = |\alpha| \min(\delta_{N_0} \operatorname{Im}(1/\alpha), \delta_{N_0+1} \operatorname{Re}(1/\alpha))$, we then have

$$\begin{aligned} \left| \langle (T_+ - T_+^L) \phi, \psi \rangle_{\Sigma_+} \right| &\leq \frac{4k}{1-M^2} e^{-\eta L/|\alpha|} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{n^2}{K_0^2}\right)^{1/2} |\phi_n \bar{\psi}_n| \\ &\leq \mathcal{C} e^{-\eta L/|\alpha|} \|\phi\|_{H^{1/2}(\Sigma_+)} \|\psi\|_{H^{1/2}(\Sigma_+)}. \end{aligned}$$

The trace theorem now yields, for any $(p, q) \in (H^1(\Omega_b))^2$,

$$\left| \langle (T_+ - T_+^L)p, q \rangle_{\Sigma_+} \right| \leq \mathcal{C} e^{-\eta L/|\alpha|} \|p\|_{H^1(\Omega_b)} \|q\|_{H^1(\Omega_b)}.$$

One can obviously obtain the same estimate on Σ_- and thus conclude the proof of claim (4.39). \square

Setting $V = H^1(\Omega_b)$, we introduce linear operators \mathcal{A} and \mathcal{A}^L in $\mathcal{L}(V, V')$, respectively, associated with the sesquilinear forms $a_{\Omega_b}(\cdot, \cdot)$ and $a_{\Omega_b}^L(\cdot, \cdot)$: for all $(p, q) \in V^2$,

$$\langle \mathcal{A}p, q \rangle_{V', V} = a_{\Omega_b}(p, q) \text{ and } \langle \mathcal{A}^L p, q \rangle_{V', V} = a_{\Omega_b}^L(p, q).$$

Obviously estimate (4.39) implies

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{A}^L\|_{\mathcal{L}(V, V')} \leq \mathcal{C} e^{-\eta L/|\alpha|}. \quad (4.45)$$

Problems (4.34) and (4.37) can both be written in terms of these operators:

$$\mathcal{A}p_b = -f, \quad (4.46)$$

$$\mathcal{A}^L p_b^L = -f. \quad (4.47)$$

It follows from taking the difference between (4.46) and (4.47) that the error $p_b - p_b^L$ satisfies the following equation:

$$\mathcal{A}^L (p_b - p_b^L) = (\mathcal{A}^L - \mathcal{A}) p_b. \quad (4.48)$$

Using estimate (4.45), we are now able to show the following result.

Theorem 4.4 *Suppose that assumptions (4.23) and (4.15) hold. There exists $L_1 > 0$ such that for all $L \geq L_1$, \mathcal{A}^L is an isomorphism on $H^1(\Omega_b)$ and the solution p_b^L of problem (4.31) converges to the solution p_b of problem (4.10). Furthermore, there exists a constant \mathcal{C} depending on M and k such that*

$$\|p_b - p_b^L\|_V \leq \mathcal{C} e^{-\eta L/|\alpha|} \|p_b\|_V, \quad (4.49)$$

with η being defined in (4.40).

PROOF. For $g \in V'$, we consider the following problem: find $u \in V$ such that

$$\mathcal{A}^L u = g. \quad (4.50)$$

We can rewrite the operator \mathcal{A}^L as $\mathcal{A}^L = \mathcal{A} + (\mathcal{A}^L - \mathcal{A})$ and, using that \mathcal{A} is an isomorphism on V ,

$$\mathcal{A}^L = \mathcal{A} (I + \mathcal{A}^{-1} (\mathcal{A}^L - \mathcal{A})).$$

Problem (4.50) thus becomes

$$(I + \mathcal{A}^{-1} (\mathcal{A}^L - \mathcal{A})) u = \mathcal{A}^{-1} g.$$

Applying the Banach fixed point theorem, this problem admits a unique solution if

$$\|\mathcal{A}^{-1} (\mathcal{A}^L - \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(V, V')} < 1,$$

which is satisfied as soon as

$$\|\mathcal{A}^L - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(V, V')} < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(V, V')}^{-1}.$$

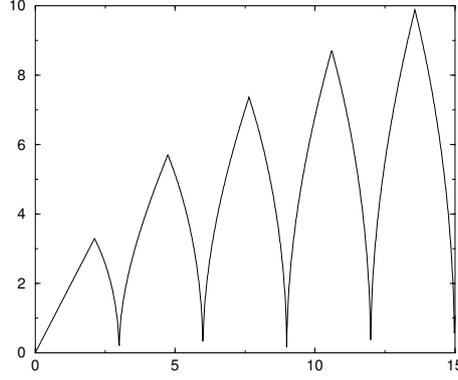


Figure 4.8: Coefficient η plotted as a function of wave number k for $M = 0.3$, $h = 1$, and $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

This can be achieved for L large enough, that is, $L \geq L_1$, since $\|\mathcal{A}^L - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(V,V')}$ tends to zero as L tends to infinity, because of (4.45). Moreover, we have

$$\left\| (I + \mathcal{A}^{-1} (\mathcal{A}^L - \mathcal{A}))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V,V')} < \frac{1}{1 - \|\mathcal{A}^{-1} (\mathcal{A}^L - \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(V,V')}} ,$$

which implies the following estimate:

$$\|u\|_V < \frac{\|\mathcal{A}^{-1}g\|_V}{1 - \|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}^L - \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(V,V')}} .$$

Applying this result to the error, the solution of problem (4.48) yields

$$\begin{aligned} \|p_b - p_b^L\|_V &< \frac{\|\mathcal{A}^{-1} (\mathcal{A}^L - \mathcal{A}) p_b\|_V}{1 - \|\mathcal{A}^{-1} (\mathcal{A}^L - \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(V,V')}} \\ &\leq \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(V,V')} \|\mathcal{A}^L - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(V,V')} \|p_b\|_V}{1 - \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(V,V')} \|\mathcal{A}^L - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(V,V')}} . \end{aligned}$$

When $\|\mathcal{A}^L - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(V,V')}$ is small enough, the quantity in the right-hand side can be bounded by

$$\|p_b - p_b^L\|_V \leq 2 \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(V,V')} \|\mathcal{A}^L - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(V,V')} \|p_b\|_V \leq 2\mathcal{C} e^{-\eta} \|p_b\|_V ,$$

the last inequality coming from (4.45). □

Remarks: 1. We emphasize that error estimate (4.49) of Theorem 4.4 does not depend on the parameter λ . As a consequence, exponential convergence is obtained for both the classical and the new PML models. This is the main difference between the behaviour of the new PMLs and that of the classical PMLs in the time domain, as in that case the layers lead to instabilities in the presence of inverse upstream modes [94, 150, 1, 16].

2. Note that estimate (4.49) also proves that convergence holds when the length of the layers L is fixed and $|\alpha|$ tends to 0. This is useful in practice for numerical computations. Indeed, L has to be small in order to reduce the number of degrees of freedom. Moreover, it is more convenient to change the value of parameter α than the length of the layers, which requires a new mesh of the computational domain.

3. The value of η is strongly related to the position of wave number k with respect to the cut-off frequencies. More precisely, for a given value of the argument θ of coefficient α , the accuracy deteriorates when k is close to a cut-off wave number (see Figure 4.8).

4.5 Varying coefficients

In practical computations, it is very common to use a spatially varying coefficient $\alpha(x)$ in the layers. Actually, it has been proven for finite difference schemes that discontinuities in α through the boundaries Σ_{\pm} generate spurious reflections after discretization [46]. In this section, we show that the analysis done previously for constant coefficients α and λ can be easily extended to varying coefficients. Let us point out, however, that the numerical results presented in the next section are obtained with constant coefficients and that no significant effects due to the discontinuities have been observed.

Let α and λ be two functions of the coordinate x , defined from \mathbb{R} to \mathbb{C} , such that

$$\alpha(x) = 1 \text{ and } \lambda(x) = 0 \text{ for } x \in [x_-, x_+].$$

We assume, moreover, that $\alpha(x)$ satisfies (4.23) for all $x > x_+$ or $x < x_-$. Let us consider once more problem (4.29). Since the proof of Theorem 4.2 does not use the fact that α and λ are constant in the layers, the theorem still holds, and the problem is of Fredholm type.

To establish a convergence result with respect to the size of the layers, we follow the steps of sections 4.4.2 and 4.4.3. The main point is that the modal solutions in the right-hand side layer, for instance, are now

$$p_n^{\pm}(x, y) = \psi_n^{\pm}(x)\varphi_n(y), \quad n \in \mathbb{N},$$

where φ_n is given by (4.3) and ψ_n^{\pm} is defined by

$$\begin{cases} \left(\alpha(x) \frac{d}{dx} + i\lambda(x) \right) \psi_n^{\pm} = i\beta_n^{\pm} \psi_n^{\pm}, \\ \psi_n^{\pm}(x_+) = 1. \end{cases}$$

It then follows from straightforward calculations that problem (4.29) is equivalent to problem (4.31) set in domain Ω_b , with the following new definition for the coefficient $\nu_n^{\pm}(L)$:

$$\nu_n^+(L) = \beta_n^+ + \frac{\beta_n^- - \beta_n^+}{1 - \frac{\psi_n^-(x_+ + L)}{\psi_n^+(x_+ + L)}}, \quad (4.51)$$

and a similar definition for $\nu_n^-(L)$. Note, moreover, that

$$\frac{\psi_n^-(x_+ + L)}{\psi_n^+(x_+ + L)} = e^{i(\beta_n^- - \beta_n^+)L} \int_{x_+}^{x_+ + L} \frac{1}{\alpha(x)} dx$$

so that again the coefficients $\nu_n^{\pm}(L)$ do not depend on λ .

The final result then reads as follows.

Theorem 4.5 *Problem (4.29) is well posed, and the solution p_b^L of problem (4.31), with $\nu_n^{\pm}(L)$ defined above, exists and converges to the solution p_b of problem (4.10) as $L \rightarrow +\infty$. Furthermore, there exist three constants $\mathcal{C} = \mathcal{C}(k, M)$ and $\tau_{\pm} = \tau_{\pm}(k, M, \alpha, L)$ such that*

$$\|p_b - p_b^L\|_V \leq \mathcal{C} (e^{-\tau_+} + e^{-\tau_-}) \|p_b\|_V,$$

with

$$\tau_{\pm} = \frac{2k}{1 - M^2} \min \left(\operatorname{Im}(I_{\pm}) \sqrt{1 - \frac{N_0^2}{K_0^2}}, \operatorname{Re}(I_{\pm}) \sqrt{\frac{(N_0 + 1)^2}{K_0^2} - 1} \right),$$

where $I_{\pm} = \pm \int_{x_{\pm}}^{x_{\pm} \pm L} \frac{1}{\alpha(x)} dx$, K_0 is defined in (4.4), and N_0 denotes the integer part of K_0 .

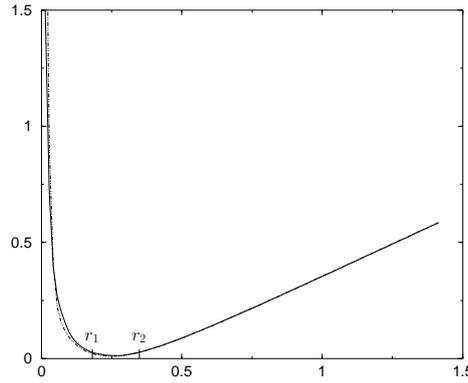


Figure 4.9: Relative error $\frac{\|p-p_{\text{ref}}\|_{H^1(\Omega_b)}}{\|p_{\text{ref}}\|_{H^1(\Omega_b)}}$ as a function of $|\alpha|$, $k = 10$, and $M = 0.3$. The solid line is the result for the new PML model, while the dotted line refers to the classical PML model.

4.6 Numerical results

In order to illustrate the conclusions previously drawn concerning the PML models, numerical examples are presented. The following configuration is considered: the computational domain is the same as the one presented in Figure 4.7, extending from $x = -0.2$ to $x = 2.2$ and $y = 0$ to $y = 1$. The layers occupy the region from $x = -0.2$ to $x = 0$ in the downstream direction and from $x = 2$ to $x = 2.2$ in the upstream direction, the thickness L of the layers then being fixed and equal to 10% of the length of domain Ω_b . A compactly supported source f is given by

$$f = \begin{cases} 1 & \text{if } (x-1)^2 + (y-0.7)^2 \leq 0.04, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

The numerical solution of problem (4.30) posed in the domain bounded with PMLs is compared to the computed solution (which is called the *reference solution*) of problem (4.11) posed in the domain bounded with DtN operators. Both approximations are done with a finite element method. The DtN map, usually expressed through an infinite series expansion, is here approximated by truncating the series.

All the simulations have been conducted with the same unstructured mesh, whose mesh size is linked to the problem via a resolution of approximately 20 nodal points per wavelength when using second-order triangular (P_2) Lagrange finite elements. For the computation of the reference solution, the number of terms in the truncated DtN map is 8, which is sufficient for accuracy in each of the cases tested. The coefficient α is chosen to be a complex constant in the layers, whose argument is taken to be equal to $-\frac{\pi}{4}$, and coefficient λ of the new PML model takes the value λ^* defined in (4.25). Homogeneous Dirichlet boundary conditions are imposed on the outer boundaries of the layers. The computations are done with the finite element library MÉLINA [108].

4.6.1 The no inverse upstream mode case

In this first simulation, we choose $k = 10$ and $M = 0.3$. For such values of the wave number and the Mach number, four modes are propagative, and there is no inverse upstream mode. The solution in the layers is then exponentially decaying for both the classical (i.e., $\lambda = 0$) and new PML models.

In Figure 4.9, the relative error to the reference solution in the $H^1(\Omega_b)$ norm is plotted as a function of the modulus of α for the two models. We observe no noticeable discrepancy between the classical and new PML models, which behave similarly in this case. Both curves present a minimum plateau, and we can roughly distinguish three zones, as indicated in Figure 4.9:

- $|\alpha| \in [r_1, r_2]$ A very good agreement between the DtN and the PML solutions, for the classical and new PML models, is obtained for a large range of values of $|\alpha|$ corresponding to the plateau seen in Figure 4.9. The real part of the corresponding solution is shown in Figure 4.10. We also observe in this Figure the effect

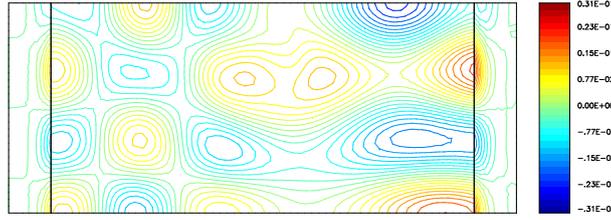


Figure 4.10: Real part of the pressure field; $k = 10$ and $M = 0.3$, $\alpha = .19(1 - i)$, and $\lambda = -\frac{kM}{1-M^2}$.

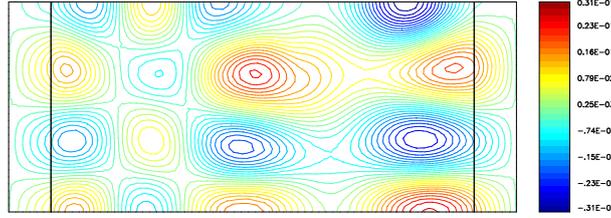


Figure 4.11: Real part of the pressure field; $k = 10$ and $M = 0.3$, $\alpha = 1 - i$, and $\lambda = -\frac{kM}{1-M^2}$.

of the flow on the propagation of sound, as the wavelength of the solution is longer downstream from the source than upstream.

- $|\alpha| > r_2$ For larger values of $|\alpha|$, the layer is insufficiently absorbing, and a reflection occurs at the end of the layers, as shown in Figure 4.11.

- $|\alpha| < r_1$ For small values of $|\alpha|$, the absorption in the layers is high, but the mesh resolution becomes too coarse to correctly represent modes in the PML medium, thus producing spurious numerical errors, as seen in Figure 4.12.

We want to confirm the convergence estimate of Theorem 4.4, which implies

$$-\ln \left(\frac{\|p_b - p_b^L\|_V}{\|p_b\|_V} \right) \geq \frac{\eta L}{|\alpha|} - \ln(\mathcal{C}).$$

To this end, the opposite of the logarithm of the relative error in $H^1(\Omega_b)$ norm is plotted as a function of the inverse of $|\alpha|$ for both PML models. The exponential convergence of the method, which can be deduced from the slope of curves in Figure 4.13, agrees satisfactorily with the estimation given by the theory for both PML models, as the two curves coincide for this case.

4.6.2 The inverse upstream mode case

For the choice of $k = 9$ and $M = 0.4$, the last of the four propagative downstream modes (i.e., $n = 3$) has a negative phase velocity and is therefore called an inverse upstream mode. The solution in the downstream layer is then exponentially decreasing or increasing with the distance, depending on the applied PML model.

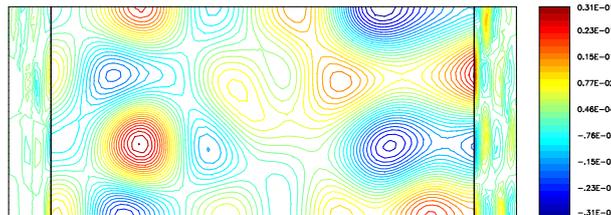


Figure 4.12: Real part of the pressure field; $k = 10$ and $M = 0.3$, $\alpha = .02(1 - i)$, and $\lambda = -\frac{kM}{1-M^2}$.

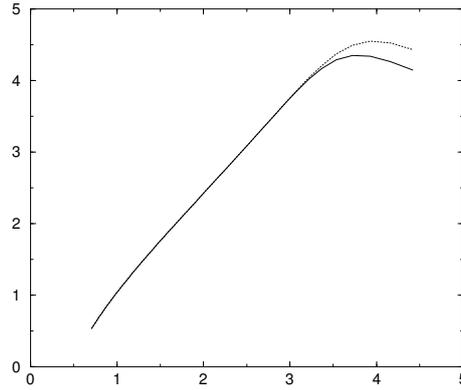


Figure 4.13: $-\ln\left(\frac{\|p-p_{\text{ref}}\|_{H^1(\Omega_b)}}{\|p_{\text{ref}}\|_{H^1(\Omega_b)}}\right)$ as a function of $\frac{1}{|\alpha|}$, $k = 10$, and $M = 0.3$. The solid and dotted lines, respectively, refer to results for the new and classical PML models.

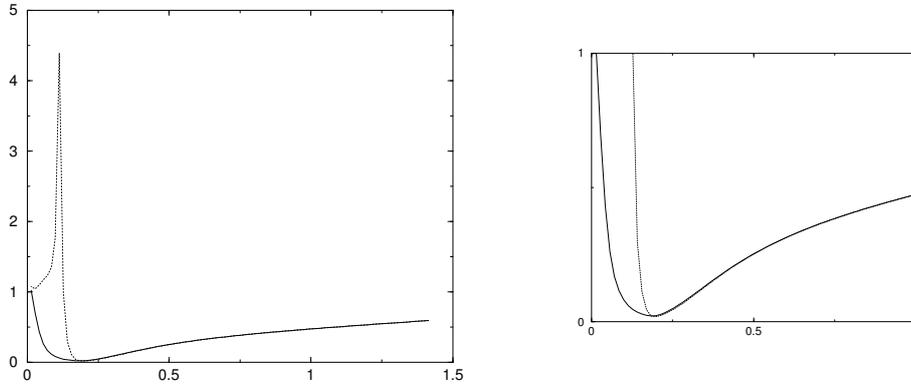


Figure 4.14: Left: relative error $\frac{\|p-p_{\text{ref}}\|_{H^1(\Omega_b)}}{\|p_{\text{ref}}\|_{H^1(\Omega_b)}}$ as a function of $|\alpha|$, $k = 9$, and $M = 0.4$, right: zoom on the zone of interest. The solid line is the result for the new PML model while the dotted line refers to the classical PML model.

Results for this case are shown in Figures 4.14 and 4.15, where the relative error in the $H^1(\Omega_b)$ norm and the opposite of its logarithm, respectively, are shown.

As one can observe in the zoom in Figure 4.14, the curves of the relative error have again a minimum plateau for both PML models. This time, the size of the plateau is smaller for the classical PML and the error for this model has a rather erratic behavior for small values of $|\alpha|$. The convergence of the method is nonetheless achieved for both models, with the predicted exponential rate (see Figure 4.15). However, the new PML model seems better suited to practical computations, as one can choose an appropriate and optimal value of α for convergence more conveniently.

To conclude, Figures 4.16 and 4.17, respectively, show the solutions for the new and classical models, the value of $|\alpha|$ for this case corresponding to the minimum of the curves in Figure 4.14. Note that whatever the behavior of the solution in the layers, the solution in the “physical” domain remains almost the same.

4.6.3 Some practical remarks on the use of PMLs for time-harmonic problems

We would like to point out that the numerical analysis which has been carried out in this section was based on the knowledge of a reference solution. In practice, it would be useful to have a posteriori criteria which indicate whether the numerical solution is satisfactory or not. In transient applications, the quality of the PML model is ensured as soon as the reflections produced at the interface between the physical and the absorbing layer can be neglected. In particular, if the excitation is a pulse localized in time, the exact solution

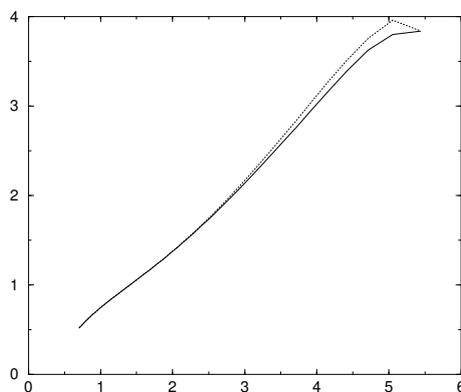


Figure 4.15: $-\ln\left(\frac{\|p-p_{\text{ref}}\|_{H^1(\Omega_b)}}{\|p_{\text{ref}}\|_{H^1(\Omega_b)}}\right)$ as a function of $\frac{1}{|\alpha|}$, $k = 9$, and $M = 0.4$. The solid and dotted lines, respectively, refer to results for the new and classical PML models.

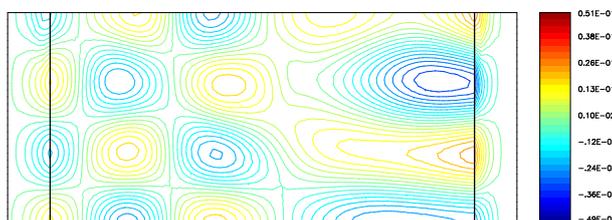


Figure 4.16: Real part of the pressure field; $k = 9$ and $M = 0.4$, $\alpha = .14(1 - i)$, and $\lambda = -\frac{kM}{1-M^2}$.

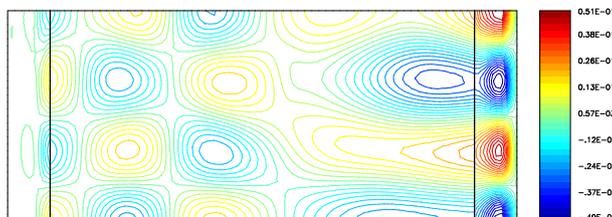


Figure 4.17: Real part of the pressure field; $k = 9$ and $M = 0.4$, $\alpha = .14(1 - i)$, and $\lambda = 0$.

should vanish after a large time, which gives a criterion for evaluating the efficiency of the absorbing layer. The situation is completely different in time-harmonic applications. For instance, we have the following:

- The notion of reflection is more difficult to exploit: as illustrated in the previous numerical results, it is not clear how to distinguish a “reflected” wave from an “incident” wave.
- The experiment of a pulse localized in time has no counterpart in time-harmonic applications.
- A good choice of the absorbing layer parameters allows one to select the outgoing solution of the problem. A bad choice ($\text{Im}(\alpha) > 0$) would select the ingoing solution, which is difficult to detect when one does not know the exact solution.
- However, one can note that when $|\alpha|$ is too small, spurious numerical errors are observed. They can be removed by refining the mesh in the layer.

4.7 Conclusion

In this paper, we have studied PMLs for the convected Helmholtz equation. In the presence of inverse upstream modes, the solution can have arbitrarily large values in the classical PMLs, thus causing the instabilities observed in time domain applications. We have investigated a new PML model which always leads to an exponentially decreasing solution in the layer, even in the presence of inverse upstream modes. The error analysis surprisingly showed the convergence for both the classical and new models. Nevertheless, numerical results seem to indicate that the error is best controlled with the new model when inverse upstream modes are present. In order to understand the different numerical behaviors of the two models, there remains to analyze the convergence of the solution of the discretized PML models with respect to both the finite element mesh size and the layer parameters α and L .

This is a preliminary step in dealing with more complex time-harmonic problems. In particular, it would be interesting to extend the present method to nonuniform flows. This gives rise to several difficulties. First, even for a parallel flow, the problem can no longer be reduced to a simple scalar equation and has to be modeled with a vectorial model, for instance linearized Euler equations or Galbrun’s equation [35]. Furthermore, a modal analysis cannot be done so easily, since the orthogonality of the modes is lost and their completeness is an open question. Finally, for some flows, there exist physical outgoing unstable modes which have to be adequately treated by the absorbing model.

Chapitre 5

Couches absorbantes parfaitement adaptées pour l'équation de Galbrun

Dans ce chapitre, nous montrons comment poser et résoudre numériquement l'équation de Galbrun en présence d'un écoulement porteur uniforme, dans un conduit infini et en régime harmonique établi.

Nous commençons par établir, au moyen d'un principe d'absorption limite, les conditions satisfaites à l'infini par le champ rayonné et démontrons ensuite que le problème peut être approché numériquement à l'aide du modèle de couches absorbantes parfaitement adaptées que nous avons précédemment étudié.

Pour l'analyse des couches absorbantes dans un guide et appliquées à l'équation de Galbrun régularisée, nous ne disposons pas d'opérateur de Dirichlet-Neumann comme cela était le cas dans le chapitre 4. En effet, à la différence d'un problème scalaire, un couplage entre les composantes du déplacement, induit d'une part par l'opérateur mis en jeu dans l'équation et d'autre part par les conditions aux limites du problème régularisé, complique la diagonalisation de l'opérateur transverse intervenant dans la condition aux limites "transparente". De plus, la non orthogonalité des bases de fonctions propres fait de l'étude de leur complétude et de la construction explicite d'un opérateur Dirichlet-Neumann des questions ardues et encore ouvertes¹, même pour un écoulement porteur uniforme.

Néanmoins, le fait que l'écoulement soit uniforme permet de contourner cette difficulté en ramenant le problème vectoriel à deux problèmes scalaires découplés via un passage en potentiels. Nous obtenons ainsi indirectement des estimations théoriques sur la convergence de la méthode, en utilisant les résultats du chapitre précédent.

La dernière partie du chapitre est consacrée à la présentation de simulations numériques de propagation de modes et de rayonnement de sources à supports compacts en présence d'un écoulement porteur uniforme et dans un conduit rigide.

5.1 Position du problème dans un guide infini

Nous considérons le problème de propagation en écoulement uniforme, de vitesse subsonique v_0 , dans un conduit infini à parois rigides. Une dépendance harmonique implicite des inconnues en $e^{-i\omega t}$, avec $\omega > 0$ la pulsation, est supposée. Le problème est alors modélisé par les équations suivantes :

$$-k^2 \mathbf{u} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} - \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (5.2)$$

où Ω et $\partial\Omega$ désignent respectivement le conduit infini de hauteur l et ses parois rigides, $k = \frac{\omega}{c_0}$ est le nombre d'onde et $M = \frac{v_0}{c_0}$ le nombre de Mach ($0 < M < 1$). Une hypothèse supplémentaire est faite sur le second

¹Ces difficultés sont également présentes dans d'autres problèmes faisant intervenir des équations d'ondes vectorielles similaires à l'équation de Galbrun régularisée, comme l'équation de Navier en élasticité linéaire ou l'équation aux dérivées partielles d'ordre deux (sous une forme régularisée) issue des équations de Maxwell en électromagnétisme.

membre à support compact \mathbf{f} , qui est supposé admettre une décomposition de type Helmholtz de la forme :

$$\mathbf{f} = \nabla g_a + \mathbf{rot} g_h, \quad (5.3)$$

où g_a et g_h sont également à supports compacts. D'un point de vue physique, ceci signifie que la source \mathbf{f} contient une partie "acoustique" g_a , donnant naissance à des perturbations irrotationnelles (c'est-à-dire des fluctuations de pression), et une partie "rotationnelle" g_h , à l'origine de perturbations hydrodynamiques (ou fluctuations de vitesse). Nous supposons comme auparavant que la source \mathbf{f} appartient à l'espace :

$$H(\mathbf{rot}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 \mid \mathbf{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}.$$

Cette hypothèse implique de manière évidente une certaine régularité sur les potentiels g_a et g_h de la source \mathbf{f} . Pour le problème bidimensionnel que nous souhaitons traiter, des conditions suffisantes de régularité sont :

$$g_a \in H^1(\Omega) \text{ et } g_h \in H^2(\Omega).$$

Afin d'obtenir un problème bien posé, il est nécessaire de définir la condition vérifiée à l'infini par la solution. S'il est peu aisé de l'obtenir en raisonnant directement sur la variable déplacement, nous pouvons tirer parti du fait que l'écoulement est uniforme et exploiter la séparation entre perturbations acoustiques et hydrodynamiques. L'étude du problème dans un cas dissipatif et l'emploi du principe d'absorption limite vont alors nous permettre de déterminer une telle condition, cette étape utilisant de manière essentielle les résultats connus pour des problèmes scalaires [33].

Mais relevons dès à présent une difficulté majeure, provenant de la régularisation de l'équation (5.1), dans l'utilisation de couches absorbantes. Rappelons-nous que la démarche suivie dans les chapitres 2 et 3 conduisait, entre autres, à l'ajout d'un terme source de la forme $\mathbf{rot} \psi$ à l'équation de Galbrun, le champ ψ vérifiant une équation différentielle ordinaire d'ordre deux à coefficients constants. Nous constatons ici que la fonction ψ n'est pas à support compact, ce qui amène une interrogation quant à la possibilité de ramener le problème de rayonnement en domaine borné. L'établissement d'une formulation avec couches absorbantes du problème non régularisé constitué des équations (5.1) et (5.2) va cependant fournir une réponse très simple à cette question. Nous verrons en effet lors de la régularisation de ce nouveau problème que le champ $\psi_{\alpha, \lambda}$, dépendant des paramètres introduits par le modèle de couches, est à présent exponentiellement décroissant avec la distance dans les couches. Nous pouvons de ce fait espérer procéder à une troncature de celles-ci en créant une erreur pouvant, comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, être rendue aussi petite que voulu, pour peu que la longueur des couches soit assez grande.

5.2 Le cas dissipatif

5.2.1 Principe d'absorption limite

Malgré le fait qu'aucune condition de rayonnement à l'infini ne soit disponible pour définir la solution sortante du problème harmonique (5.1)-(5.2), il est possible de donner un sens à ce dernier en invoquant le principe d'absorption limite [61]. La démarche est la suivante. Dans un premier temps, nous substituons au nombre d'onde k , réel et strictement positif, un nombre complexe k_ϵ tel que :

$$k_\epsilon = k + i\epsilon,$$

où ϵ désigne un nombre réel positif. Le problème nous concernant devient alors un cas limite (pour lequel ϵ vaut zéro) du problème dissipatif. Physiquement, cette substitution peut être interprétée par la présence d'un milieu de propagation dissipatif. Mathématiquement, elle permet de prouver l'existence d'une solution d'"énergie finie" (*i.e.*, appartenant à l'espace $H^1(\Omega)^2$) pour le problème dissipatif. La technique d'absorption limite proprement dite consiste à faire ensuite tendre le paramètre ϵ vers zéro et à montrer que la suite des solutions des problèmes dissipatifs converge dans l'espace $H_{\text{loc}}^1(\Omega)^2$ vers une unique limite vérifiant les équations (5.1) et (5.2).

5.2.2 Étude du problème dissipatif

Nous considérons dans cette section un problème dissipatif, dont l'inconnue dépend explicitement du réel ϵ . Nous cherchons une fonction \mathbf{u}^ϵ appartenant à $H^1(\Omega)^2$ et vérifiant les équations :

$$-k_\epsilon^2 \mathbf{u}^\epsilon - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^\epsilon}{\partial x_1^2} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}^\epsilon) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{u}^\epsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (5.5)$$

Pour montrer que ce problème est bien posé, nous allons le régulariser. Nous introduisons pour cela la fonction $\psi^\epsilon = \operatorname{rot} \mathbf{u}^\epsilon$ appartenant à $L^2(\Omega)$, qui est solution de l'équation différentielle à coefficients constants suivante :

$$-k_\epsilon^2 \psi^\epsilon - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \psi^\epsilon}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \psi^\epsilon}{\partial x_1^2} = \operatorname{rot} \mathbf{f} \text{ dans } \Omega. \quad (5.6)$$

Nous énonçons un résultat préliminaire.

Lemme 5.1 *L'équation (5.6) admet une unique solution ψ^ϵ appartenant à $L^2(\Omega)$. Celle-ci est identiquement nulle à l'amont du support de la source \mathbf{f} et vérifie l'inégalité :*

$$\|\psi^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\epsilon \|\operatorname{rot} \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)},$$

où C_ϵ désigne une constante positive dépendant du paramètre réel ϵ .

Nous renvoyons à l'annexe D pour une preuve de ce lemme (théorème D.2).

Nous établissons ensuite une formulation variationnelle du problème dissipatif régularisé. Celle-ci s'écrit : trouver $\mathbf{u}^\epsilon \in H^1(\Omega)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ tel que

$$a_\Omega(k_\epsilon; \mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{v}) = \int_\Omega (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \psi^\epsilon(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}})) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega), \quad (5.7)$$

où la forme sesquilinéaire $a_\Omega(k_\epsilon; \cdot, \cdot)$ est définie par :

$$a_\Omega(k_\epsilon; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \left(-k_\epsilon^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{x}.$$

Nous avons le

Théorème 5.2 *Le problème variationnel (5.7) est bien posé.*

DÉMONSTRATION. En intégrant par parties, nous obtenons, pour tout $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2$,

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} = - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \, d\mathbf{x} = - \overline{\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x}},$$

d'où $\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} \in i\mathbb{R}$. Nous avons alors l'égalité suivante :

$$\operatorname{Im} \left(-\frac{1}{k_\epsilon} a_\Omega(k_\epsilon; \mathbf{u}, \mathbf{u}) \right) = \int_\Omega \left(\frac{\operatorname{Im}(k_\epsilon)}{|k_\epsilon|^2} \left(|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right|^2 \right) + \operatorname{Im}(k_\epsilon) |\mathbf{u}|^2 \right) d\mathbf{x}.$$

Puisque $M^2 < 1$ et $\operatorname{Im}(k_\epsilon) > 0$, la forme sesquilinéaire $a_\Omega(k_\epsilon; \cdot, \cdot)$ est coercive sur $H^1(\Omega)^2$ en vertu du théorème 4.1 de [48]. Il est clair qu'elle est aussi continue sur cet espace. Par ailleurs, le lemme 5.1 permet d'établir simplement la continuité de la forme antilinéaire du problème, par utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le caractère bien posé du problème variationnel (5.7) résulte alors de l'application du lemme de Lax-Milgram. □

Nous sommes également en mesure de démontrer l'équivalence entre le problème variationnel (5.7) et le problème fort (5.4)-(5.5). Nous avons en effet la

Proposition 5.3 *La solution \mathbf{u}^ϵ du problème variationnel (5.7) est telle que $\operatorname{rot} \mathbf{u}^\epsilon = \psi^\epsilon$ dans $L^2(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Envisageons une fonction test de la forme $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \varphi$, avec $\varphi \in \{\phi \in H^3(\Omega) \mid \phi|_{\partial\Omega} = 0\}$; on vérifie que $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$. Après quelques intégrations par parties et l'utilisation des conditions aux limites, nous aboutissons à la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u}^\epsilon - \psi^\epsilon) (\mathcal{H}_{k_\epsilon, M} \bar{\varphi}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

où $\mathcal{H}_{k_\epsilon, M}$ désigne l'opérateur $-k_\epsilon^2 I + 2ik_\epsilon M \frac{\partial}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \Delta$. Par un résultat de densité ([80], théorème 1.6.2), ce résultat reste vrai pour toute fonction φ de $D = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Pour conclure que $\operatorname{rot} \mathbf{u}^\epsilon = \psi^\epsilon$ dans $L^2(\Omega)$, il suffit donc de montrer que $\mathcal{H}_{k_\epsilon, M}$ est surjectif de D dans cet espace. Pour tout φ appartenant à D , nous avons :

$$(\mathcal{H}_{k_\epsilon, M} \varphi, \varphi) = \int_{\Omega} \left(-k_\epsilon^2 |\varphi|^2 + 2ik_\epsilon M \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \bar{\varphi} + |\nabla \varphi|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 \right) d\mathbf{x}.$$

Nous savons par ailleurs, en nous référant à la preuve du théorème précédent, que $\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} \in i\mathbb{R}$. Nous en déduisons que :

$$\operatorname{Im} \left(-\frac{1}{k_\epsilon} (\mathcal{H}_{k_\epsilon, M} \varphi, \varphi) \right) = \int_{\Omega} \left(\frac{\operatorname{Im}(k_\epsilon)}{|k_\epsilon|^2} \left(|\nabla \varphi|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 \right) + \operatorname{Im}(k_\epsilon) |\varphi|^2 \right) d\mathbf{x},$$

et la surjectivité de l'opérateur est une conséquence du lemme de Lax-Milgram appliqué à la forme sesquilinéaire $(\mathcal{H}_{k_\epsilon, M} \cdot, \cdot)$. □

Nous en déduisons le

Corollaire 5.4 *Le problème (5.4)-(5.5) a une unique solution dans l'espace $H^1(\Omega)^2$.*

DÉMONSTRATION. Choisissons $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^2 \subset H^1(\Omega)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ et utilisons le résultat de la proposition précédente dans la formulation variationnelle (5.7). Nous trouvons :

$$\int_{\Omega} \left(-k_\epsilon^2 \mathbf{u}^\epsilon \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + (\operatorname{div} \mathbf{u}^\epsilon)(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}.$$

En se servant de formules classiques d'intégration par parties, nous obtenons que l'unique solution \mathbf{u}^ϵ du problème (5.7) vérifie l'équation (5.4) au sens des distributions. □

Remarque 5.5 *Comme on aura pu le remarquer, nous avons choisi 1 comme valeur du paramètre de régularisation s dans le problème (5.7). Notons que, à la différence des preuves d'équivalence du chapitre 3 et de l'annexe E, le résultat de la proposition 5.3 est vrai dès que le réel s est strictement supérieur à M^2 , quelle que soit la valeur du nombre d'onde k_ϵ .*

5.2.3 Convergence vers un problème limite

Nous devons à présent faire tendre le paramètre ϵ vers zéro. Nous nous attendons évidemment à avoir :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_{H^1(\Omega)^2} = +\infty,$$

et la solution du problème limite sera donc cherchée dans l'espace $H_{\operatorname{loc}}^1(\Omega)^2$. Nous sommes ainsi conduits à tout d'abord ramener le problème en domaine borné. Pour ce faire, nous introduisons deux problèmes scalaires associés, utilisant l'hypothèse (5.3) sur la forme du second membre \mathbf{f} pour effectuer une décomposition de Helmholtz de la solution \mathbf{u}^ϵ du problème régularisé dissipatif.

Passage en potentiels

Nous considérons les problèmes suivants : trouver $\varphi_a^\epsilon \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} -k_\epsilon^2 \varphi_a^\epsilon - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \varphi_a^\epsilon}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \varphi_a^\epsilon}{\partial x_1^2} - \Delta \varphi_a^\epsilon &= g_a \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_a^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5.8)$$

et : trouver $\varphi_h^\epsilon \in L^2(\Omega)$ tel que

$$-k_\epsilon^2 \varphi_h^\epsilon - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \varphi_h^\epsilon}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \varphi_h^\epsilon}{\partial x_1^2} = g_h \text{ dans } \Omega. \quad (5.9)$$

Ceux-ci sont bien posés, un problème analogue à (5.8) étant en effet traité dans [33] (théorème 1) et le problème (5.9) étant étudié dans l'annexe D. En utilisant la régularité du second membre g_a et de la géométrie du domaine Ω , nous obtenons que l'unique solution φ_a^ϵ de (5.8) appartient à $H^2(\Omega)$. De la même façon, la régularité du terme g_h implique que le champ φ_h^ϵ , solution de (5.9) identiquement nulle en amont du support de g_h , est dans l'espace $H^2(\Omega)$.

Il apparaît alors clairement que $\mathbf{u}^\epsilon = \nabla \varphi_a^\epsilon + \mathbf{rot} \varphi_h^\epsilon$ est l'unique solution de (5.4)-(5.5), en vertu de l'unicité de la solution du problème (5.7), puisque l'on a :

$$\frac{D_\epsilon^2 \mathbf{u}^\epsilon}{Dt^2} - \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}^\epsilon) = \nabla \left(\frac{D_\epsilon^2 \varphi_a^\epsilon}{Dt^2} - \Delta \varphi_a^\epsilon \right) + \mathbf{rot} \left(\frac{D_\epsilon^2 \varphi_h^\epsilon}{Dt^2} \right),$$

avec $\frac{D_\epsilon}{Dt} = -ik_\epsilon + M \frac{\partial}{\partial x_1}$ la dérivée particulière dans l'écoulement porteur uniforme et en régime harmonique, et que :

$$\mathbf{u}^\epsilon \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi_a^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{rot} \varphi_h^\epsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

La fonction g_h étant à support compact, le champ φ_h^ϵ est en effet nul sur le bord $\partial\Omega$, impliquant que $(\mathbf{rot} \varphi_h^\epsilon \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0$.

Nous allons maintenant passer à la limite dans les problèmes (5.8) et (5.9), utilisant à l'occasion plusieurs résultats théoriques établis dans la référence [33] pour des problèmes scalaires de même type.

Limite et convergence du problème en potentiel acoustique

Afin de pouvoir faire tendre ϵ vers 0 dans le problème (5.8), nous ramenons ce dernier à un domaine borné Ω_b , délimité par les frontières verticales Σ_\pm , respectivement placées en $x_1 = x_\pm$, et contenant le support de g_a , au moyen d'opérateurs Dirichlet-Neumann $T_{a_\pm}^\epsilon$ définis comme suit :

$$\begin{aligned} T_{a_\pm}^\epsilon : H^{1/2}(\Sigma_\pm) &\rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_\pm) \\ \phi &\mapsto \mp \sum_{n=0}^{+\infty} i\beta_n^{\epsilon\pm} (\phi, C_n)_{L^2(\Sigma_\pm)} C_n(x_2), \end{aligned}$$

avec :

$$\beta_n^{\epsilon\pm} = \frac{-k_\epsilon M \pm \sqrt{k_\epsilon^2 - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} (1 - M^2)}}{1 - M^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

la détermination choisie pour la racine carrée d'un nombre complexe étant :

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2}}, \quad 0 \leq \arg(z) < 2\pi, \quad (5.10)$$

et où :

$$C_0(x_2) = \sqrt{\frac{1}{l}} \text{ et } C_n(x_2) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{n\pi x_2}{l}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.11)$$

Nous considérons alors la formulation équivalente de (5.8) suivante : trouver $\varphi_a^\epsilon \in H^1(\Omega_b)$ tel que

$$\begin{aligned} -k_\epsilon^2 \varphi_a^\epsilon - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \varphi_a^\epsilon}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \varphi_a^\epsilon}{\partial x_1^2} - \Delta \varphi_a^\epsilon &= g_a \text{ dans } \Omega_b, \\ \frac{\partial \varphi_a^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_b, \\ \frac{\partial \varphi_a^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} &= -T_{a\pm}^\epsilon \varphi_a^\epsilon \text{ sur } \Sigma_\pm, \end{aligned}$$

dans laquelle nous pouvons maintenant passer formellement à la limite et définir ainsi un problème pour $\epsilon = 0$. Posant $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \beta_n^{\epsilon\pm} = \beta_n^\pm$, nous remarquons tout d'abord que le choix (5.10) conduit à :

$$\beta_n^\pm = \begin{cases} \frac{-kM \pm \sqrt{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{l^2}(1-M^2)}}{1-M^2} & \text{si } k \geq \frac{n\pi}{l} \sqrt{1-M^2}, \\ \frac{-kM \pm i\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2}(1-M^2) - k^2}}{1-M^2} & \text{si } k < \frac{n\pi}{l} \sqrt{1-M^2}. \end{cases}$$

Le problème limite s'écrit alors : trouver $\varphi_a \in H^1(\Omega_b)$ tel que

$$\begin{aligned} -k^2 \varphi_a - 2ikM \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x_1^2} - \Delta \varphi_a &= g_a \text{ dans } \Omega_b, \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_b, \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial \mathbf{n}} &= -T_{a\pm} \varphi_a \text{ sur } \Sigma_\pm, \end{aligned} \tag{5.12}$$

la définition des opérateurs de Dirichlet-Neumann $T_{a\pm}$ étant :

$$\begin{aligned} T_{a\pm} : H^{1/2}(\Sigma_\pm) &\rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_\pm) \\ \phi &\mapsto \mp \sum_{n=0}^{+\infty} i\beta_n^\pm (\phi, C_n)_{L^2(\Sigma_\pm)} C_n(x_2), \end{aligned}$$

Nous avons le

Théorème 5.6 *Le problème (5.12) est bien posé sauf si $k = k_n, \forall n \in \mathbb{N}$, où $k_n = \sqrt{1-M^2} \frac{n\pi}{l}$ est une "fréquence" singulière du problème.*

Nous renvoyons le lecteur à la démonstration du théorème 4.1 du chapitre précédent pour une preuve de ce résultat (ou encore la sous-section 4.2 de [33], le problème (5.12) étant un cas particulier du problème traité dans cette référence). Nous sommes à présent en mesure d'énoncer un résultat de convergence pour le problème (5.8).

Théorème 5.7 *Si $k \neq k_n, \forall n \in \mathbb{N}$, la solution φ_a^ϵ du problème (5.8) converge vers φ_a dans $H^2(\Omega_b)$ lorsque ϵ tend vers 0, où φ_a est la solution du problème (5.12).*

DÉMONSTRATION. Le théorème 4 de [33] nous donne la convergence de φ_a^ϵ vers φ_a dans $H^1(\Omega_b)$. Nous avons alors que :

$$(1-M^2) \frac{\partial^2 \varphi_a^\epsilon}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_a^\epsilon}{\partial x_2^2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (1-M^2) \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x_2^2} \text{ dans } L^2(\Omega_b).$$

Le domaine étant convexe, nous en déduisons (cf. [79]) la convergence dans l'espace $H^2(\Omega_b)$ annoncée dans le théorème. □

Limite et convergence du problème en potentiel hydrodynamique

La solution du problème (5.9) est explicitement donnée par le produit de convolution $\varphi_h^\epsilon(x_1, x_2) = G_\epsilon * g_h(\cdot, x_2)(x_1)$, où le noyau G_ϵ désigne la fonction de Green causale de l'équation (5.6), donnée par² :

$$G_\epsilon(x_1) = \frac{x_1}{M^2} e^{i\frac{k_\epsilon}{M}x_1} H(x_1),$$

où H est la fonction de Heaviside. Introduisons la limite formelle G de G_ϵ lorsque ϵ tend vers 0 :

$$G(x_1) = \frac{x_1}{M^2} e^{i\frac{k}{M}x_1} H(x_1).$$

Nous remarquons que cette fonction est localement de carré intégrable. Nous pouvons montrer que G_ϵ converge vers G dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Soit alors φ_h la solution du problème limite, vérifiant l'équation :

$$-k^2 \varphi_h - 2ikM \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_1^2} = g_h \text{ dans } \Omega, \quad (5.13)$$

et donnée par $\varphi_h(x_1, x_2) = G * g_h(\cdot, x_2)(x_1)$. Nous avons :

$$|\varphi_h^\epsilon - \varphi_h| = |(G_\epsilon - G) * g_h(\cdot, x_2)|,$$

puis, par utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|\varphi_h^\epsilon - \varphi_h\|_{L^2(\Omega_b)} \leq \left(\int_{x_-}^{x_+} |G_\epsilon(z) - G(z)|^2 dz \right)^{1/2} \|g_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous en déduisons que φ_h^ϵ converge vers φ_h dans $L^2(\Omega_b)$, en utilisant la convergence de G_ϵ vers G dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ lorsque ϵ tend vers 0. En nous basant sur la remarque D.3 de l'annexe D, nous établissons finalement le

Théorème 5.8 *La solution φ_h^ϵ du problème (5.9) converge vers la fonction φ_h dans $H^2(\Omega_b)$ lorsque ϵ tend vers 0.*

Remarque 5.9 *Nous attirons l'attention sur le fait que nous avons délibérément choisi, pour des raisons de simplicité, de traiter le problème sur le potentiel hydrodynamique φ_h provenant de l'équation (5.1) et non de l'équation de Galbrun mise sous forme régularisée. Cette autre caractérisation possible du champ φ_h nous sera néanmoins nécessaire pour prouver rigoureusement la convergence du problème avec couches parfaitement adaptées. Nous renvoyons à la référence [14] pour les détails du passage à la limite pour cette seconde approche.*

Convergence

Nous concluons en déduisant des théorèmes 5.7 et 5.8 le

Théorème 5.10 *Si k n'est pas une "fréquence" singulière, la solution \mathbf{u}^ϵ du problème dissipatif (5.4)-(5.5) converge vers $\mathbf{u} = \nabla \varphi_a + \text{rot } \varphi_h$ dans $H^1(\Omega_b)^2$ lorsque ϵ tend vers 0, le champ \mathbf{u} vérifiant les équations (5.1)-(5.2) dans le domaine Ω_b .*

L'utilisation du principe d'absorption limite nous a donc permis de caractériser l'unique solution de (5.1)-(5.2) représentant le régime périodique établi. Nous l'appellerons la solution sortante du problème. Nous sommes par ailleurs capables de déduire les conditions de rayonnement la caractérisant et fermant le système d'équations donné en début de chapitre. Ainsi, la condition obtenue par l'intermédiaire du potentiel acoustique φ_a porte sur le champ $\text{div } \mathbf{u}$, c'est-à-dire sur la perturbation de pression, pour laquelle nous retrouvons une décomposition sur les modes guidés du conduit. Le problème pour le potentiel hydrodynamique φ_h fournit une condition sur $\text{rot } \mathbf{u}$ indiquant qu'il n'y a pas de perturbation hydrodynamique en amont de la source \mathbf{f} , la technique d'absorption limite réintroduisant dans le problème la notion de causalité perdue lors du passage en régime harmonique. Il devient alors possible de montrer l'unicité de la solution du problème, ceci n'étant cependant pas ici notre propos.

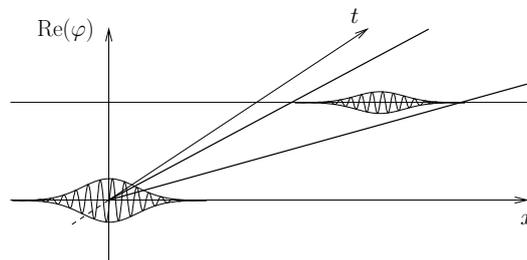
Nous supposons désormais que $k \neq k_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

²Le lecteur est renvoyé à l'annexe D pour les détails du calcul de la fonction de Green G_ϵ .

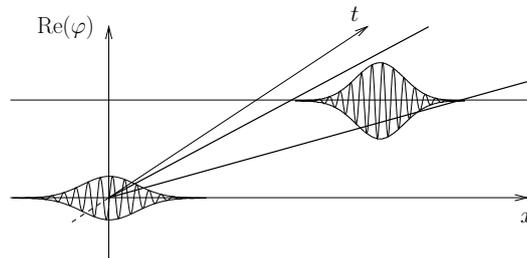
5.2.4 Extension du principe à d'autres écoulements

Sans pour l'instant envisager d'appliquer la méthode de couches absorbantes parfaitement adaptées à des écoulements porteurs autres qu'uniformes, nous ne manquons pas d'évoquer la question du sens d'un problème posé en régime harmonique et dans un domaine infini pour des écoulements porteurs plus complexes, comme les écoulements cisailés étudiés dans le chapitre 3.

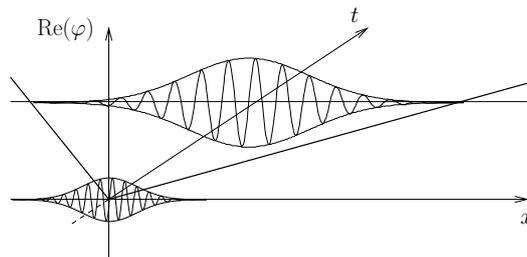
Comme nous l'avons déjà indiqué, les hypothèses de linéarité des phénomènes et d'absence de dissipation dans le modèle de fluide nécessaires à l'obtention de l'équation de Galbrun peuvent conduire à l'existence de solutions exponentiellement croissantes en temps, qualifiées d'instabilités linéaires, pour les problèmes posés. Ces instabilités contribuent notamment à la création de la turbulence et sont naturellement atténuées par les effets non linéaires et visqueux. Leur présence rend cependant délicate la position d'un problème linéarisé en régime périodique établi, ce dernier étant par définition la limite asymptotique en temps d'un problème linéarisé transitoire entretenu. Trois types distincts de réponse à une condition initiale impulsionnelle existent, qui permettent une classification des écoulements en fonction de leur stabilité.



(a) écoulement stable.



(b) écoulement convectivement instable.



(c) écoulement absolument instable.

FIG. 5.1 – Réponse linéarisée $\varphi(x, t)$ dans l'espace libre à un état initial localisé en espace $\varphi(x, 0)$ pour différents types d'écoulement (d'après Huerre et Rossi [96]).

Écoulement linéairement stable. Il n'y a aucune instabilité et l'écoulement porteur est dit *stable*. Le problème harmonique a alors un sens en tant que limite asymptotique du régime transitoire. Ce résultat mathématique est obtenu par des techniques classiques, comme l'amplitude limite ou l'absorption limite. C'est le cas pour l'écoulement porteur uniforme que nous avons traité.

Écoulement convectivement instable. L'écoulement présente des instabilités linéaires dites "*convectives*", qui n'interdisent pas à l'énergie de décroître localement. Il y a bien une croissance exponentielle de l'énergie, mais celle-ci est confinée à l'intérieur d'un cône espace-temps (cf. figure 5.1(b)).

Écoulement absolument instable. Enfin, l'écoulement peut être dit *absolument instable*. Dans ce cas, la condition initiale produit une instabilité dont la propagation dans un diagramme espace-temps contient l'axe du temps (cf. figure 5.1(c)). Il n'y a alors pas *a priori* de décroissance au sens L^2_{loc} de la solution transitoire et le problème harmonique n'a aucun sens.

Nous renvoyons le lecteur intéressé à la référence [96] pour une excellente et très complète, bien qu'uniquement réservée aux écoulements incompressibles, introduction aux concepts d'instabilités linéaires et non linéaires en hydrodynamique.

L'étude des instabilités pour un écoulement cisailé comporte plusieurs difficultés. Les constantes de propagation des modes ne sont en effet plus forcément connues de manière analytique, mais évaluées numériquement. Le caractère stable (ou instable) des modes doit ensuite être étudié en utilisant, par exemple, le critère de Briggs [38].

5.3 Problème avec couches absorbantes parfaitement adaptées

Notre but est à présent de calculer, dans le domaine borné Ω_b , une approximation de la solution \mathbf{u} de l'équation de Galbrun obtenue par la technique d'absorption limite. Celle-ci sera solution d'un problème avec couches absorbantes parfaitement adaptées de longueur finie.

Le plan de cette section est le suivant. La description de la construction formelle du problème avec couches absorbantes est faite ci-dessous. Elle est suivie de l'établissement d'un problème variationnel équivalent étudié dans le paragraphe 5.3.2. Une démonstration théorique rigoureuse de la convergence de la méthode est enfin effectuée au paragraphe 5.3.3.

5.3.1 Position du problème

La construction du problème approché est faite en trois étapes. Tout d'abord, une formulation du problème avec des couches absorbantes parfaitement adaptées de longueur infinie est proposée. Celle-ci est ensuite régularisée et les couches sont enfin tronquées.

De manière similaire à l'étude proposée dans la section 4.4 du chapitre précédent, nous considérons le problème suivant :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \mathbf{u}^\infty - \nabla_{\alpha,\lambda}(\text{div}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^\infty) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (5.15)$$

où α et λ désignent des fonctions respectivement complexe et réelle de la coordonnée x_1 telles que³ :

$$\alpha(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_b, \\ \alpha & \text{dans } \Omega_- \cup \Omega_+, \end{cases} \quad \text{et } \lambda(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_b, \\ \lambda & \text{dans } \Omega_- \cup \Omega_+, \end{cases}$$

avec le choix suivant :

$$\lambda = -\frac{kM}{1 - M^2}, \quad (5.16)$$

les opérateurs apparaissant dans la formulation étant respectivement définis par :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}}{Dt} \mathbf{v} = i(M\lambda - k) \mathbf{v} + M\alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1},$$

$$\nabla_{\alpha,\lambda} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + i\lambda v_1 & \alpha \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + i\lambda v_2 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

³On relèvera ici un abus de notation, déjà effectué dans le chapitre 4, qui consiste à désigner par α et λ les valeurs constantes des fonctions $x_1 \rightarrow \alpha(x_1)$ et $x_1 \rightarrow \lambda(x_1)$ dans les couches parfaitement adaptées.

et

$$\operatorname{div}_{\alpha,\lambda} \mathbf{v} = \alpha \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + i\lambda v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}.$$

La notation \mathbf{u}^∞ fait ici référence à la longueur (infinie) des couches parfaitement adaptées. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, si le nombre complexe α vérifie les hypothèses :

$$\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Im}(\alpha) < 0, \quad (5.17)$$

une solution \mathbf{u}^∞ du problème (5.14)-(5.15), coïncidant avec le champ \mathbf{u} dans le domaine Ω_b , peut être cherchée dans l'espace $H^1(\Omega)^2$.

Régularisation

Ayant pour objectif la régularisation du problème constitué des équations (5.14) et (5.15), nous cherchons à déterminer $\psi_{\alpha,\lambda} = \operatorname{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^\infty$, le rotationnel d'un champ de vecteurs \mathbf{v} ayant la définition suivante dans le milieu avec couches absorbantes :

$$\operatorname{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{v} = \alpha \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + i\lambda v_2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}.$$

Le champ $\psi_{\alpha,\lambda}$ vérifie alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \psi_{\alpha,\lambda} = \operatorname{rot} \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (5.18)$$

et nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Théorème 5.11 *Si le nombre complexe α vérifie les conditions (5.17) dans les couches absorbantes, l'équation (5.18) a une unique solution appartenant à $L^2(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Nous commençons par déterminer une solution, appartenant à $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$, de l'équation obtenue en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (5.1) et en posant $\psi = \operatorname{rot} \mathbf{u}$, soit :

$$-k^2 \psi - 2ikM \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = \operatorname{rot} \mathbf{f} \text{ dans } \Omega.$$

Cette solution nous est donnée par substitution de k_ϵ par k et de g par $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ dans la solution (D.14), calculée dans l'annexe D. Nous trouvons ainsi :

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{M^2} \int_{-\infty}^{x_1} (x_1 - z) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} \operatorname{rot} \mathbf{f}(z, x_2) dz, \forall (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Notons qu'en vertu de la causalité la fonction ψ est nulle en amont de la source.

La fonction $\psi_{\alpha,\lambda}$ est alors simplement obtenue en procédant au prolongement analytique de ψ induit par la transformation :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \longrightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + i\lambda.$$

Dans le domaine Ω_b , les fonctions $\psi_{\alpha,\lambda}$ et ψ coïncident donc ; dans la couche absorbante en aval de la source, nous avons $\operatorname{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{f} \equiv 0$, et $\psi_{\alpha,\lambda}$ s'exprime sous forme d'une fonction à variables séparées :

$$\psi_{\alpha,\lambda}(x_1, x_2) = (a(x_2) + x_1 b(x_2)) e^{i\frac{k}{M}\left(x_+ + \frac{(x_1 - x_+)}{\alpha}\right) - i\lambda(x_1 - x_+)}, \forall (x_1, x_2) \in \Omega_+. \quad (5.19)$$

Le module de cette fonction est exponentiellement décroissant avec la distance dans la couche, en vertu des hypothèses (5.17) sur α . Nous en déduisons finalement que $\psi_{\alpha,\lambda}$ appartient à $L^2(\Omega)$. L'unicité de cette solution provient simplement du fait qu'aucune solution, autre que la fonction nulle, de l'équation homogène associée à (5.18) n'appartient à $L^2(\Omega)$. □

Remarques 5.12 Nous constatons, au vu de l'expression (5.19), que le sillage hydrodynamique créé par la source \mathbf{f} devient très oscillant lorsque le rapport entre le nombre d'onde k et le nombre de Mach M est grand, et donc en particulier pour un écoulement à faible vitesse. Ce phénomène est d'autant plus accentué dans la couche parfaitement adaptée que l'absorption, liée à l'inverse du module de α , est importante. Lors de la résolution numérique du problème, ceci se traduira par le besoin d'employer un maillage très fin du domaine de calcul, afin d'éviter de trop grandes erreurs de discrétisation.

Nous observons par ailleurs que le support de $\psi_{\alpha,\lambda}$ n'est pas compact et s'étend jusqu'à l'infini en aval de la source. Le module de cette fonction décroît néanmoins exponentiellement avec la distance dans la couche absorbante. Ceci est fondamental d'un point de vue pratique, puisque les couches absorbantes sont de longueur finie.

Nous pouvons à présent introduire le problème régularisé suivant : trouver \mathbf{u}^∞ appartenant à $H^1(\Omega)^2$ vérifiant :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \mathbf{u}^\infty - \nabla_{\alpha,\lambda}(\operatorname{div}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^\infty) + \operatorname{rot}_{\alpha,\lambda}(\operatorname{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^\infty - \psi_{\alpha,\lambda}) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega,$$

$$\mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$\operatorname{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^\infty = \psi_{\alpha,\lambda} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Troncature des couches

Le domaine de calcul devant par nécessité être borné, une troncature des couches absorbantes parfaitement adaptées est effectuée. Dans la suite, celles-ci sont supposées être chacune de même longueur finie, notée L , et le domaine borné obtenu, représenté sur la figure 4.7, est noté Ω^L . Toute solution du problème de rayonnement posé sur Ω^L est désignée par le vecteur \mathbf{u}^L .

Les conditions aux limites imposées sur les frontières artificielles Σ_\pm^L des couches doivent maintenant être données. Un premier choix nous est dicté par la nécessité d'avoir une formule d'intégration par parties⁴, pour les opérateurs modifiés par la formulation dans les couches absorbantes parfaitement adaptées, du même type que celle établie dans [48]. Nous avons alors :

$$\mathbf{u}^L \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega^L.$$

Un second choix, portant sur le rotationnel du déplacement, nous est indiqué par la condition aux limites amenée naturellement par la régularisation de l'équation. Finalement, le problème posé en domaine borné est le suivant : trouver $\mathbf{u}^L \in H^1(\Omega^L)^2$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \mathbf{u}^L - \nabla_{\alpha,\lambda}(\operatorname{div}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L) + \operatorname{rot}_{\alpha,\lambda}(\operatorname{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L - \psi_{\alpha,\lambda}) &= \mathbf{f} \text{ dans } \Omega^L, \\ \mathbf{u}^L \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^L, \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\operatorname{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L = \psi_{\alpha,\lambda} \text{ sur } \partial\Omega^L.$$

5.3.2 Étude du problème variationnel

Nous établissons une formulation variationnelle du problème (5.20), posé sur le domaine borné Ω^L . Après des intégrations par parties et l'utilisation des conditions aux limites ainsi que des conditions de saut suivantes :

$$[\mathbf{u}^L(x_1, x_2)]_{\Sigma_\pm} = \mathbf{0} \text{ et } \left[\alpha(x_1) \frac{\partial \mathbf{u}^L}{\partial x_1}(x_1, x_2) + i\lambda(x_1) \mathbf{u}^L(x_1, x_2) \right]_{\Sigma_\pm} = \mathbf{0},$$

nous aboutissons au problème variationnel : trouver $\mathbf{u}^L \in H^1(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L)$ tel que, $\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L)$,

$$a_{\Omega^L}(\mathbf{u}^L, \mathbf{v}) + b_{\Omega^L}(\mathbf{u}^L, \mathbf{v}) = l_{\Omega^L}(\mathbf{v}), \tag{5.21}$$

⁴Celle-ci sera l'objet du lemme 5.14.

avec

$$\begin{aligned} a_{\Omega^L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^L} \left(\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\alpha} (\operatorname{div}_{\alpha, \lambda} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha, -\lambda} \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{rot}_{\alpha, \lambda} \mathbf{u} \operatorname{rot}_{\alpha, -\lambda} \bar{\mathbf{v}}) - \alpha M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} \right) d\mathbf{x}, \\ b_{\Omega^L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^L} \left(\frac{1}{\alpha} (-k^2 + 2kM\lambda - M^2\lambda^2 - \alpha) \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} + (iM^2\lambda - 2ikM) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - iM^2\lambda \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} \right) d\mathbf{x}, \\ l_{\Omega^L}(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \psi_{\alpha, \lambda} \operatorname{rot}_{\alpha, -\lambda} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \int_{\Sigma_-^L \cup \Sigma_+^L} M^2 \psi_{\alpha, \lambda} \bar{v}_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) d\sigma. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que ce problème variationnel est associé à une perturbation compacte d'un isomorphisme.

Théorème 5.13 *Si le nombre complexe α satisfait aux conditions (5.17) dans les couches absorbantes, le problème variationnel (5.21) relève de l'alternative de Fredholm.*

DÉMONSTRATION. De manière classique, nous commençons par montrer que la forme sesquilinéaire $a_{\Omega^L}(\cdot, \cdot)$ définit, pour les valeurs de α envisagées, un opérateur qui est la somme d'un isomorphisme et d'un opérateur compact sur $H^1(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L)$. Nous écrivons pour cela cette forme de la manière suivante :

$$a_{\Omega^L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{\Omega^L}^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda a_{\Omega^L}^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda^2 a_{\Omega^L}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

où :

$$\begin{aligned} a_{\Omega^L}^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^L} \left(\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\alpha} (\operatorname{div}_{\alpha, 0} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha, 0} \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{rot}_{\alpha, 0} \mathbf{u} \operatorname{rot}_{\alpha, 0} \bar{\mathbf{v}}) - \alpha M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} \right) d\mathbf{x}, \\ a_{\Omega^L}^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^L} \frac{i}{\alpha} (u_1 \operatorname{div}_{\alpha, 0} \bar{\mathbf{v}} - \bar{v}_1 \operatorname{div}_{\alpha, 0} \mathbf{u} + u_2 \operatorname{rot}_{\alpha, 0} \bar{\mathbf{v}} - \bar{v}_2 \operatorname{rot}_{\alpha, 0} \mathbf{u}) d\mathbf{x}, \\ \text{et } a_{\Omega^L}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

La forme sesquilinéaire $a_{\Omega^L}^0(\cdot, \cdot)$ est alors coercive sur $H^1(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L)$. En effet, en vertu du

Lemme 5.14 *Pour tous \mathbf{u}, \mathbf{v} appartenant à $H^1(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L)$, nous avons :*

$$\int_{\Omega^L} (\operatorname{rot}_{\alpha, 0} \mathbf{u} \operatorname{rot}_{\alpha, 0} \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div}_{\alpha, 0} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha, 0} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega^L} \nabla_{\alpha, 0} \mathbf{u} : \nabla_{\alpha, 0} \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x}.$$

et des hypothèses (5.17) formulées sur α , nous avons :

$$\operatorname{Re} (a_{\Omega^L}^0(\mathbf{u}, \mathbf{u})) = \int_{\Omega^L} \left(|\mathbf{u}|^2 + \operatorname{Re}(\alpha)(1 - M^2) \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right|^2 + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \right|^2 \right) d\mathbf{x} \geq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega^L)^2},$$

pour tout \mathbf{u} de $H^1(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L)$, avec $C = \min(1, \operatorname{Re}(\alpha)(1 - M^2), \operatorname{Re}(\frac{1}{\alpha}))$.

D'autre part, les formes $a_{\Omega^L}^1(\cdot, \cdot)$ et $a_{\Omega^L}^2(\cdot, \cdot)$ définissent toutes deux, au moyen du théorème de représentation de Riesz, un opérateur compact sur $H^1(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L)$, par injection compacte de $H^1(\Omega^L)$ dans $L^2(\Omega^L)$. Ce même argument est ensuite utilisé pour montrer que l'opérateur borné sur $H^1(\Omega^L)^2$, défini par la forme sesquilinéaire $b_{\Omega^L}(\cdot, \cdot)$ est compact.

Il est enfin clair que les formes $a_{\Omega^L}(\cdot, \cdot)$ et $b_{\Omega^L}(\cdot, \cdot)$, ainsi que la forme antilinéaire $l_{\Omega^L}(\cdot)$, sont continues sur l'espace $H^1(\Omega^L)^2$, ce qui achève la preuve. \square

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.14. Le résultat est tout d'abord prouvé pour des champs appartenant à $H^2(\Omega^L)^2$, son extension à des champs de régularité H^1 se justifiant par un argument de densité.

Supposons que \mathbf{u} et \mathbf{v} appartiennent à $H^2(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L)$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} (\operatorname{rot}_{\alpha, 0} \mathbf{u} \operatorname{rot}_{\alpha, 0} \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div}_{\alpha, 0} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha, 0} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} (\mathbf{rot}_{\alpha, 0} (\operatorname{rot}_{\alpha, 0} \mathbf{u}) - \nabla_{\alpha, 0} (\operatorname{div}_{\alpha, 0} \mathbf{u})) \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega^L} (\operatorname{rot}_{\alpha, 0} \mathbf{u}) \left(\bar{v}_2 n_1 - \frac{1}{\alpha} \bar{v}_1 n_2 \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Nous vérifions ensuite aisément l'égalité :

$$\mathbf{rot}_{\alpha,0}(\mathbf{rot}_{\alpha,0}\mathbf{u}) - \nabla_{\alpha,0}(\operatorname{div}_{\alpha,0}\mathbf{u}) = -\Delta_{\alpha,0}\mathbf{u},$$

ainsi que :

$$\int_{\Omega^L} (-\Delta_{\alpha,0}\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega^L} \nabla_{\alpha,0}\mathbf{u} : \nabla_{\alpha,0}\bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega^L} \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} n_1 + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_2} \cdot \bar{\mathbf{v}} n_2 \right) d\sigma.$$

En remarquant que pour des fonctions vectorielles \mathbf{u} et \mathbf{v} dont les composantes normales au bord s'annulent, nous avons :

$$\int_{\partial\Omega^L} (\mathbf{rot}_{\alpha,0}\mathbf{u}) \left(\bar{v}_2 n_1 - \frac{1}{\alpha} \bar{v}_1 n_2 \right) d\sigma - \int_{\partial\Omega^L} \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} n_1 + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_2} \cdot \bar{\mathbf{v}} n_2 \right) d\sigma = 0,$$

nous trouvons finalement :

$$\int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} (\mathbf{rot}_{\alpha,0}\mathbf{u} \operatorname{rot}_{\alpha,0}\bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div}_{\alpha,0}\mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha,0}\bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} \nabla_{\alpha,0}\mathbf{u} : \nabla_{\alpha,0}\bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^2(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L).$$

Cette dernière identité s'étend ensuite à des champs \mathbf{u} et \mathbf{v} dans $H^1(\Omega^L)^2$ grâce à la densité de $H^2(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L)$ dans $H^1(\Omega^L)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega^L)$ (nous renvoyons à [52] pour une démonstration de ce résultat). \square

Les paramètres α et λ étant fixés, nous prouvons ensuite l'équivalence entre le problème variationnel (5.21) et le problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \mathbf{u}^L - \nabla_{\alpha,\lambda}(\operatorname{div}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L) &= \mathbf{f} \text{ dans } \Omega^L, \\ \operatorname{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L &= \psi_{\alpha,\lambda} \text{ sur } \Omega^L, \\ \mathbf{u}^L \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^L. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Théorème 5.15 *Si la longueur des couches est assez grande, la solution du problème (5.21) vérifie le problème (5.22).*

DÉMONSTRATION. Nous considérons dans le problème variationnel (5.21) des champs test de la forme $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{rot}_{\alpha,-\lambda}\bar{\phi}$, avec $\phi \in H^3(\Omega^L) \cap H_0^1(\Omega^L)$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} \left((-k^2 + 2kM\lambda - M^2\lambda^2) \mathbf{u}^L + \alpha (iM^2\lambda - 2ikM) \frac{\partial\mathbf{u}^L}{\partial x_1} \right) \cdot \mathbf{rot}_{\alpha,-\lambda}\bar{\phi} \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega^L} \left(M^2 \left(i\lambda \mathbf{u}^L + \alpha \frac{\partial\mathbf{u}^L}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathbf{rot}_{\alpha,-\lambda}\bar{\phi}) + (\operatorname{rot}_{\alpha,\lambda}\mathbf{u}^L) \Delta_{\alpha,-\lambda}\bar{\phi} \right) \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{rot}_{\alpha,-\lambda}\bar{\phi} - \psi_{\alpha,\lambda} \Delta_{\alpha,-\lambda}\bar{\phi}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_-^L \cup \Sigma_+^L} \alpha M^2 \psi_{\alpha,\lambda} \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma, \end{aligned}$$

soit, après des intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} (\operatorname{rot}_{\alpha,\lambda}\mathbf{u}^L) \left(\frac{D_{\alpha,-\lambda}^2}{Dt^2} \bar{\phi} - \Delta_{\alpha,-\lambda}\bar{\phi} \right) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} ((\operatorname{rot}_{\alpha,\lambda}\mathbf{f}) \bar{\phi} - \psi_{\alpha,\lambda} \Delta_{\alpha,-\lambda}\bar{\phi}) \, d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Sigma_-^L \cup \Sigma_+^L} \alpha M^2 \psi_{\alpha,\lambda} \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Sachant que $\psi_{\alpha,\lambda}$ vérifie l'équation :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}^2 \psi_{\alpha,\lambda}}{Dt^2} = \operatorname{rot}_{\alpha,\lambda}\mathbf{f} \text{ dans } \Omega^L,$$

nous arrivons finalement à :

$$\int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} (\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L - \psi_{\alpha,\lambda}) \left(\frac{D_{\alpha,-\lambda}^2}{Dt^2} \bar{\phi} - \Delta_{\alpha,-\lambda} \bar{\phi} \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Par un résultat de densité, ce résultat est également vrai pour toute fonction ϕ de $H^2(\Omega^L) \cap H_0^1(\Omega^L)$.

En vertu du théorème 4.4, l'opérateur $\frac{D_{\alpha,-\lambda}^2}{Dt^2} - \Delta_{\alpha,-\lambda}$ est surjectif si la longueur L de la couche est assez grande. Dans ce cas, nous en déduisons que $\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{u}^L = \psi_{\alpha,\lambda}$ dans Ω^L et la remontée vers le problème (5.22) est ensuite triviale. \square

Nous déduisons de ce dernier théorème qu'une solution \mathbf{u}^L du problème (5.21) vérifie le problème régularisé (5.20). Nous achevons notre étude de ce problème variationnel par le résultat d'unicité suivant.

Théorème 5.16 *Supposons que les hypothèses (5.17) soient vérifiées et que le choix (5.16) soit fait pour le coefficient λ . Il existe alors une constante L_1 strictement positive telle que le problème (5.21) admet une solution unique si $L \geq L_1$.*

DÉMONSTRATION. Ce problème relevant de l'alternative de Fredholm, il suffit de prouver l'unicité de sa solution pour en déduire l'existence. Ainsi, considérons deux solutions du problème (5.21) et notons \mathbf{w} la différence entre ces dernières. Le problème vérifié par \mathbf{w} est constitué de l'équation suivante :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \mathbf{w} - \nabla_{\alpha,\lambda}(\text{div}_{\alpha,\lambda} \mathbf{w}) + \text{rot}_{\alpha,\lambda}(\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{w}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega^L, \quad (5.23)$$

et des conditions aux limites :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega^L,$$

$$\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{w} = 0 \text{ sur } \partial\Omega^L,$$

cette dernière condition aux limites étant entendue en un sens faible (*i.e.* dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$). Nous adoptons une démarche classique, qui diffère ici uniquement par la présence des opérateurs modifiés par le changement de variable dans les couches absorbantes parfaitement adaptées. En prenant formellement le rotationnel de l'équation (5.23), nous obtenons :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} (\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{w}) - \Delta_{\alpha,\lambda} (\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{w}) = 0 \text{ dans } \Omega^L,$$

$$\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{w} = 0 \text{ sur } \partial\Omega^L.$$

Le domaine Ω^L étant convexe, nous déduisons que $\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{w}$ appartient à $H^1(\Omega^L)$. Or, nous avons vu au chapitre précédent que le problème ci-dessus admet une unique solution si la longueur de couche L est assez grande et si le nombre d'onde k n'est pas relié à une fréquence de coupure. Nous en déduisons que $\text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{w} = 0$ dans Ω^L .

Nous effectuons ensuite le changement de fonction $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} e^{i\lambda x_1}$, d'où

$$\text{rot}_{\alpha,0} \tilde{\mathbf{w}} = e^{i\lambda x_1} \text{rot}_{\alpha,\lambda} \mathbf{w}$$

et utilisons le

Théorème 5.17 *Une fonction \mathbf{v} de $L^2(\Omega^L)^2$ satisfait :*

$$\text{rot}_{\alpha,0} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega^L$$

si et seulement si il existe une fonction ϕ , définie de manière unique dans l'espace quotient $H^1(\Omega^L)/\mathbb{R}$, telle que :

$$\mathbf{v} = \nabla_{\alpha,0} \phi$$

Ceci nous permet de déduire que le champ $\tilde{\mathbf{w}}$ dérive d'un potentiel ϕ qui est solution de :

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha,\lambda} \left(\frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \phi - \Delta_{\alpha,\lambda} \phi \right) &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega^L, \\ \nabla_{\alpha,\lambda} \phi \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^L. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \phi - \Delta_{\alpha,\lambda} \phi &= \text{cte dans } \Omega^L, \\ \nabla_{\alpha,\lambda} \phi \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^L. \end{aligned}$$

Par unicité de la solution de ce dernier problème pour L assez grand, nous en déduisons que ϕ est constante sur Ω^L , d'où $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.17. Cette preuve suit en tout point celle du théorème 2.9 de [71].

Nous commençons par montrer que $\mathbf{v} = \nabla_{\alpha,0} \phi$ pour une fonction ϕ appartenant à l'espace $L_{\text{loc}}^2(\Omega^L)$. Le domaine Ω^L étant un ouvert borné, simplement connexe et à frontière lipschitzienne, il existe une suite croissante $(\Omega_m)_{m \geq 1}$ d'ouverts tels que :

$$\overline{\Omega_m} \subset \Omega^L \text{ et } \Omega^L = \bigcup_{m \geq 1} \Omega_m.$$

Nous régularisons ensuite \mathbf{v} de sorte que sa restriction à Ω_m reste irrotationnelle. Ceci nous permettra d'appliquer le théorème de Stokes, dans une version adaptée aux opérateurs différentiels modifiés par la transformation $\frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x_1}$, à cette fonction régulière. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ la suite régularisante nulle pour $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^2} > \varepsilon$ et satisfaisant :

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1 \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon = \delta \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

où δ est la masse de Dirac.

Soit $\tilde{\mathbf{v}}$ le prolongement de \mathbf{v} par 0 en dehors de Ω^L . Nous avons :

$$\rho_\varepsilon * \tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^2, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon * \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2)^2 \text{ et } \text{rot}_{\alpha,\lambda}(\rho_\varepsilon * \tilde{\mathbf{v}}) = \rho_\varepsilon * \text{rot}_{\alpha,\lambda} \tilde{\mathbf{v}}. \quad (5.24)$$

Par ailleurs, si ε est suffisamment petit,

$$\bigcup_{\mathbf{x} \in \Omega_m} B(\mathbf{x}; \varepsilon) \subset \Omega^L,$$

où $B(\mathbf{x}; \varepsilon)$ désigne la boule de centre \mathbf{x} et de rayon ε . Alors $\text{rot}_{\alpha,0}(\rho_\varepsilon * \tilde{\mathbf{v}}) = 0$ dans Ω_m et le théorème de Stokes nous indique qu'il existe une fonction régulière ϕ_ε (au moins dans $H^1(\Omega_m)$) telle que :

$$\rho_\varepsilon * \tilde{\mathbf{v}} = \nabla_{\alpha,0} \phi_\varepsilon \text{ dans } \Omega_m.$$

De plus, (5.24) implique qu'il existe $\phi_m \in H^1(\Omega_m)$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon = \phi_m \text{ dans } H^1(\Omega_m)/\mathbb{R}$$

et

$$\mathbf{v} = \nabla_{\alpha,0} \phi_m \text{ dans } \Omega_m.$$

Puisque $\nabla_{\alpha,0} \phi_m = \nabla_{\alpha,0} \phi_{m+1}$ dans Ω_m , $\phi_m - \phi_{m+1}$ est constante dans Ω_m . Ainsi, ϕ_m est unique à une constante additive près, cette constante pouvant être choisie de manière à ce que :

$$\phi_m = \phi_{m+1} \text{ dans } \Omega_m, \quad \forall m \geq 1.$$

Il existe alors $\phi \in L_{\text{loc}}^2(\Omega^L)$ telle que :

$$\mathbf{v} = \nabla_{\alpha,0} \phi \text{ dans } \Omega^L.$$

Nous utilisons ensuite le corollaire 2.2 de [71] pour montrer que ϕ appartient à $L^2(\Omega^L)$. De manière évidente, ϕ est une fonction de $H^1(\Omega^L)$, définie de manière unique dans $H^1(\Omega^L)/\mathbb{R}$. □

5.3.3 Convergence et estimations d'erreurs

L'objectif de cette section est d'obtenir une estimation de l'erreur $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^L\|_{H^1(\Omega_b)^2}$, puis de montrer la convergence de la méthode de couches absorbantes. L'idée est de profiter encore une fois du découplage entre les perturbations acoustiques et hydrodynamiques en ramenant le problème vectoriel posé à deux problèmes scalaires auxquels nous adaptons la théorie développée pour l'équation de Helmholtz convectée dans le chapitre précédent.

Nous allons ainsi construire des approximations des potentiels acoustique φ_a et hydrodynamique φ_h par le biais de problèmes scalaires de la forme du problème (4.29). Il se présente néanmoins deux difficultés. D'une part, les résultats du chapitre précédent entraînent dans le cadre de problèmes pour lesquels les termes sources étaient à supports compacts, ce qui n'est plus le cas ici dès que l'on cherche à résoudre un problème régularisé. D'autre part, nous allons devoir modifier la démarche suivie auparavant, afin de tenir compte de conditions aux limites en bout de couches différentes des conditions de Dirichlet homogènes déjà envisagées.

Approximation du potentiel acoustique

Nous définissons, pour une longueur des couches L assez grande, l'approximation φ_a^L , vérifiant :

$$\begin{aligned} \frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \varphi_a^L - \Delta_{\alpha,\lambda} \varphi_a^L &= g_a \text{ dans } \Omega^L, \\ \nabla_{\alpha,\lambda} \varphi_a^L \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^L. \end{aligned}$$

Le terme source g_a étant à support compact, nous appliquons la démarche décrite au chapitre 4 et ramenons le problème sur le domaine borné Ω_b par application d'opérateurs Dirichlet-Neumann sur les frontières Σ_{\pm} . Nous introduisons ainsi les opérateurs $T_{a\pm}^L$:

$$\begin{aligned} T_{a\pm}^L : H^{1/2}(\Sigma_{\pm}) &\rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_{\pm}) \\ \phi &\mapsto \mp \sum_{n=0}^{+\infty} i\nu_n^{\pm}(L) (\phi, C_n)_{L^2(\Sigma_{\pm})} C_n(x_2), \end{aligned}$$

avec :

$$\nu_n^{\pm}(L) = \beta_n^{\pm} + \frac{\beta_n^{\mp} - \beta_n^{\pm}}{1 - \frac{\beta_n^{\mp}}{\beta_n^{\pm}} e^{\pm i(\beta_n^{\mp} - \beta_n^{\pm})L/\alpha}},$$

les fonctions C_n , $n \in \mathbb{N}$, étant données par (5.11). Ces définitions impliquant la non nullité des nombres d'ondes axiaux β_n^{\pm} , nous supposons à présent que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \neq \frac{n\pi}{l}$ (c'est-à-dire $\beta_n^+ \neq 0$ puisque, en vertu de l'hypothèse $0 < M < 1$, nous avons toujours $\beta_n^- \neq 0$). Nous obtenons alors, conformément aux estimations précédentes et en utilisant un résultat de régularité de la solution dans le domaine Ω_b :

$$\|\varphi_a - \varphi_a^L\|_{H^2(\Omega_b)} \leq C_a e^{-\eta \frac{L}{|\alpha|}} \|\varphi_a\|_{H^2(\Omega_b)}, \quad (5.25)$$

où C_a est une constante positive, dépendant de k et M , et où η est définie par (4.40).

Approximation du potentiel hydrodynamique

Le potentiel hydrodynamique φ_h vérifie l'équation (5.13), dont nous déduisons :

$$\frac{D^2 \varphi_h}{Dt^2} - \Delta \varphi_h = g_h - \Delta \varphi_h = g_h + \text{rot}(\mathbf{rot} \varphi_h) = g_h + \text{rot} \mathbf{u} \equiv g_h + \psi \text{ dans } \Omega.$$

Cependant, si la source g_h est bien à support compact, il n'en va pas de même pour le sillage ψ et nous ne pouvons définir directement une approximation de φ_h comme nous l'avons fait pour le potentiel φ_a . Il est néanmoins possible d'écrire le second membre de cette dernière équation comme la somme d'un terme à support compact et d'un terme à support non borné, dont la forme permet un traitement analytique explicite du problème de propagation. Nous sommes alors en mesure de procéder à une élimination du sillage hydrodynamique, en s'inspirant notamment de la référence [33].

Rappelons en effet que le champ ψ résulte de la régularisation de l'équation de Galbrun (5.1) et apparaît comme une conséquence de la présence d'une source à l'origine de perturbations hydrodynamiques. L'écoulement porteur étant uniforme, il est possible d'obtenir une expression analytique du sillage faisant intervenir certaines des données du problème.

Nous allons considérer la fonction ψ en aval la source. En posant :

$$d_- = \min_{x_2 \in [0, l]} \{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2) \in \text{supp}(\text{rot } \mathbf{f})\} \text{ et } d_+ = \max_{x_2 \in [0, l]} \{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2) \in \text{supp}(\text{rot } \mathbf{f})\},$$

nous pouvons définir (cf. démonstration du théorème D.2 de l'annexe D) une fonction ψ^∞ , consistant en la somme de deux fonctions à variables séparées :

$$\psi^\infty(x_1, x_2) = (a(x_2) + x_1 b(x_2)) e^{i \frac{k}{M} x_1}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times [0, l]$$

et coïncidant avec ψ en aval du support de \mathbf{f} :

$$\psi^\infty(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in]d_+, +\infty[\times [0, l].$$

Tirant parti de la forme de ψ^∞ , nous sommes capables de déterminer explicitement une fonction ζ , solution du problème :

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \zeta}{Dt^2} - \Delta \zeta &= \psi^\infty \text{ dans } \Omega, \\ \zeta &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

et que nous cherchons également sous la forme particulière :

$$\zeta(x_1, x_2) = e^{i \frac{k}{M} x_1} (A(x_2) + x_1 B(x_2)).$$

Nous sommes alors conduits à la résolution des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} -B''(x_2) + \frac{k^2}{M^2} B(x_2) = b(x_2), \\ B(0) = B(l) = 0, \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\begin{cases} -A''(x_2) + \frac{k^2}{M^2} A(x_2) = 2i \frac{k}{M} B(x_2) + a(x_2), \\ A(0) = A(l) = 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

Nous pouvons montrer que le problème (5.26) est bien posé dans l'espace $H_0^1([0, l])$ et par conséquent calculer la fonction B , qui permet alors de trouver A (par le même argument) et de déterminer ainsi la fonction ζ . Nous introduisons ensuite une fonction régulière de troncature $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\chi(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > d_+ \\ 0 & \text{si } x_1 < d_- \end{cases},$$

et considérons le problème :

$$\frac{D^2 \tilde{\varphi}_h}{Dt^2} - \Delta \tilde{\varphi}_h = \tilde{g}_h \text{ dans } \Omega, \quad (5.28)$$

$$\tilde{\varphi}_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (5.29)$$

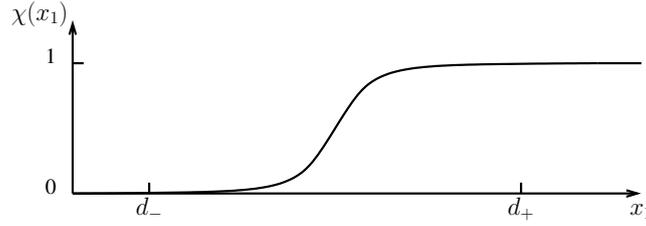
avec :

$$\tilde{g}_h = g_h + \psi - \left(\frac{D^2}{Dt^2} (\chi \zeta) - \Delta (\chi \zeta) \right).$$

Le second membre de l'équation (5.28) est alors à support compact et contenu dans Ω_b . Ce problème est bien posé, en vertu de l'hypothèse faite sur le nombre d'onde k faite dans la sous-section 5.2.3.

De manière analogue, nous définissons la fonction $\psi_{\alpha, \lambda}^\infty$, d'antécédent noté $\zeta_{\alpha, \lambda}$, telle que :

$$\psi_{\alpha, \lambda}^\infty(x_1, x_2) = \psi_{\alpha, \lambda}(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in]d_+, +\infty[\times [0, l].$$

FIG. 5.2 – La fonction de troncature χ .

Les expressions analytiques de $\psi_{\alpha,\lambda}^\infty$ et $\zeta_{\alpha,\lambda}$ sont simplement obtenues en appliquant le changement de variable ayant lieu en présence de couches absorbantes dans les expressions respectives des fonctions ψ^∞ et ζ . Le problème d'équation :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2} \tilde{\varphi}_h^L - \Delta_{\alpha,\lambda} \tilde{\varphi}_h^L = \tilde{g}_h \text{ dans } \Omega^L, \quad (5.30)$$

et de condition aux limites :

$$\tilde{\varphi}_h^L = 0 \text{ sur } \partial\Omega^L, \quad (5.31)$$

dont le second membre coïncide avec celui de (5.28) sur Ω_b , admet alors une unique solution $\tilde{\varphi}_h^L$, pour une longueur de couche assez grande.

Nous définissons ensuite l'approximation du potentiel φ_h comme étant :

$$\varphi_h^L = \tilde{\varphi}_h^L + \chi \zeta_{\alpha,\lambda}.$$

et appliquons la démarche suivie dans le chapitre précédent, qui consiste à ramener les deux problèmes (5.28)-(5.29) et (5.30)-(5.31) à des problèmes équivalents, posés sur le domaine Ω_b . Nous obtenons ainsi respectivement le problème :

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \tilde{\varphi}_h}{Dt^2} - \Delta \tilde{\varphi}_h &= \tilde{g}_h \text{ dans } \Omega_b, \\ \tilde{\varphi}_h &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_b, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}_h}{\partial \mathbf{n}} &= -T_{h\pm} \tilde{\varphi}_h \text{ sur } \Sigma_\pm, \end{aligned}$$

où les opérateurs Dirichlet-Neumann $T_{h\pm}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} T_{h\pm} : H^{1/2}(\Sigma_\pm) &\rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_\pm) \\ \phi &\mapsto \mp \sum_{n=1}^{+\infty} i\beta_n^\pm(\phi, S_n)_{L^2(\Sigma_\pm)} S_n(x_2), \end{aligned}$$

avec :

$$S_n(x_2) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin\left(\frac{n\pi x_2}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (5.32)$$

pour le champ $\tilde{\varphi}_h$, tandis que $\tilde{\varphi}_h^L$ vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \tilde{\varphi}_h^L}{Dt^2} - \Delta \tilde{\varphi}_h^L &= \tilde{g}_h \text{ dans } \Omega_b, \\ \tilde{\varphi}_h^L &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_b, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}_h^L}{\partial \mathbf{n}} &= -T_{h\pm}^L \tilde{\varphi}_h^L \text{ sur } \Sigma_\pm, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} T_{h\pm}^L : H^{1/2}(\Sigma_\pm) &\rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_\pm) \\ \phi &\mapsto \mp \sum_{n=1}^{+\infty} i\nu_n^\pm(L) (\phi, S_n)_{L^2(\Sigma_\pm)} S_n(x_2), \end{aligned}$$

les coefficients $\nu_n^\pm(L)$, $n \in \mathbb{N}^*$, étant cette fois-ci définis par (4.33).

Les résultats du chapitre 4, ainsi que l'argument de régularité utilisé dans la preuve du théorème 5.7, nous amènent alors l'estimation suivante :

$$\|\tilde{\varphi}_h - \tilde{\varphi}_h^L\|_{H^2(\Omega_b)} \leq C_h e^{-\eta \frac{L}{|\alpha|}} \|\tilde{\varphi}_h\|_{H^2(\Omega_b)}, \quad (5.33)$$

où C_h est une constante positive, dépendant de k et M , et η est donnée par (4.40). Étant donné que ζ et $\zeta_{\alpha,\lambda}$ coïncident sur Ω_b , nous avons finalement montré la convergence de φ_h^L vers φ_h dans Ω_b .

Estimation d'erreur

Nous posons $\tilde{\mathbf{u}}^L = \nabla \varphi_a^L + \mathbf{rot} \varphi_h^L$ et remarquons que $\tilde{\mathbf{u}}^L$ n'est pas égal à \mathbf{u}^L . En effet, ces champs sont les solutions respectives de deux problèmes qui font intervenir la même équation aux dérivées partielles sur le domaine Ω^L , mais diffèrent par leurs conditions aux limites. Ainsi, le champ $\tilde{\mathbf{u}}^L$ vérifie :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^L \cdot \mathbf{n} &= -\mathbf{rot}_{\alpha,\lambda}(\chi \zeta_{\alpha,\lambda}) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega^L, \\ \mathbf{rot}_{\alpha,\lambda} \tilde{\mathbf{u}}^L &= -\Delta_{\alpha,\lambda}(\tilde{\varphi}_h^L - \chi \zeta_{\alpha,\lambda}) = -\Delta_{\alpha,\lambda} \tilde{\varphi}_h^L + \psi_{\alpha,\lambda} \text{ sur } \partial\Omega^L, \end{aligned}$$

qui ne sont clairement pas les conditions aux limites du problème (5.20).

L'estimation de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^L\|_{H^1(\Omega_b)^2}$ va donc se faire en deux temps, le champ $\tilde{\mathbf{u}}^L$ jouant le rôle d'“intermédiaire” dans la démonstration de convergence de la méthode. En vertu de l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^L\|_{H^1(\Omega_b)^2}^2 \leq \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}^L\|_{H^1(\Omega_b)^2}^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}^L - \mathbf{u}^L\|_{H^1(\Omega_b)^2}^2.$$

Admettons⁵ par ailleurs que le champ φ_h peut s'écrire $\varphi_h = \tilde{\varphi}_h + \chi \zeta$, et donc que $\mathbf{u} = \nabla \varphi_a + \mathbf{rot}(\tilde{\varphi}_h + \chi \zeta)$. Nous pouvons alors déduire de (5.25) et de (5.33) l'estimation :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}^L\|_{H^1(\Omega_b)^2} &= \|\nabla(\varphi_a - \varphi_a^L) + \mathbf{rot}(\tilde{\varphi}_h - \tilde{\varphi}_h^L)\|_{H^1(\Omega_b)^2} \\ &\leq \left(\|\varphi_a - \varphi_a^L\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{\varphi}_h - \tilde{\varphi}_h^L\|_{H^2(\Omega_b)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C e^{-\eta \frac{L}{|\alpha|}} \left(\|\varphi_a\|_{H^2(\Omega_b)}^2 + \|\tilde{\varphi}_h\|_{H^2(\Omega_b)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à estimer la différence $\tilde{\mathbf{u}}^L - \mathbf{u}^L$ pour prouver la convergence de la méthode. Comme nous l'avons remarqué plus haut, celle-ci vérifie l'équation aux dérivées partielles homogène suivante :

$$\frac{D_{\alpha,\lambda}^2}{Dt^2}(\tilde{\mathbf{u}}^L - \mathbf{u}^L) - \nabla_{\alpha,\lambda}(\operatorname{div}_{\alpha,\lambda}(\tilde{\mathbf{u}}^L - \mathbf{u}^L)) + \mathbf{rot}_{\alpha,\lambda}(\mathbf{rot}_{\alpha,\lambda}(\tilde{\mathbf{u}}^L - \mathbf{u}^L)) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega^L, \quad (5.34)$$

ainsi que les conditions aux limites :

$$(\tilde{\mathbf{u}}^L - \mathbf{u}^L) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{rot}_{\alpha,\lambda}(\chi \zeta_{\alpha,\lambda}) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega^L, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{rot}_{\alpha,\lambda}(\tilde{\mathbf{u}}^L - \mathbf{u}^L) = -\Delta_{\alpha,\lambda} \tilde{\varphi}_h^L \text{ sur } \partial\Omega^L. \quad (5.36)$$

Pour une longueur de couches assez grande, nous savons que ce problème est bien posé et nous avons par conséquent (cf. remarques 5.21) :

$$\|\tilde{\mathbf{u}}^L - \mathbf{u}^L\|_{H^1(\Omega_b)^2} \leq C \left(\|\mathbf{rot}_{\alpha,\lambda} \zeta_{\alpha,\lambda} \cdot \mathbf{n}\|_{H^{1/2}(\Sigma_\pm^L)} + \|\Delta_{\alpha,\lambda} \tilde{\varphi}_h^L\|_{H^{-1/2}(\Sigma_\pm^L)} \right). \quad (5.37)$$

⁵Ce résultat n'est pas immédiat. En effet, si les champs φ_h et $(\tilde{\varphi}_h + \chi \zeta)$ vérifient la même équation, leurs caractérisations diffèrent *a priori* : nous avons en effet montré dans le théorème 5.8 que φ_h était nul en amont de la source, alors que $(\tilde{\varphi}_h + \chi \zeta)$ est la somme de la solution sortante d'un problème de propagation et d'une fonction nulle en amont de la source. La validité de la décomposition se prouve au moyen du principe d'absorption limite, en raisonnant sur le problème en potentiel hydrodynamique φ_h^ε provenant du problème (5.4)-(5.5) mis sous forme régularisée. Dans la première partie de ce chapitre, nous avons délibérément choisi de ne pas introduire de relèvement du sillage afin de ne pas alourdir la démarche sans nécessité apparente (cf. remarque 5.9).

Estimations des termes en bout de couche

L'estimation du terme dans lequel $\zeta_{\alpha,\lambda}$ apparaît est explicite et utilise l'expression analytique de cette fonction. Nous obtenons ainsi dans la couche Ω_+^L :

$$\zeta_{\alpha,\lambda}(x_1, x_2) = e^{i\left(\frac{k}{M}x_+ + \left(\frac{k}{M} - \lambda\right)\frac{x_1 - x_+}{\alpha}\right)} \left(A(x_2) + \left(x_+ + \frac{(x_1 - x_+)}{\alpha} \right) B(x_2) \right),$$

d'où :

$$\left(\mathbf{rot}_{\alpha,\lambda} \zeta_{\alpha,\lambda} \cdot \mathbf{n} \right)_{|\Sigma_+^L} = e^{i\left(\frac{k}{M}x_+ + \frac{k}{M(1-M^2)}\frac{L}{\alpha}\right)} \left(A'(x_2) + \left(x_+ + \frac{L}{\alpha} \right) B'(x_2) \right).$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{rot}_{\alpha,\lambda} \zeta_{\alpha,\lambda} \cdot \mathbf{n}\|_{H^{1/2}(\Sigma_+^L)} &\leq \|\mathbf{rot}_{\alpha,\lambda} \zeta_{\alpha,\lambda} \cdot \mathbf{n}\|_{H^1(\Sigma_+^L)} \\ &\leq e^{\frac{k \sin(\theta)}{M(1-M^2)} \frac{L}{|\alpha|}} \left(\|A'\|_{H^1(\Sigma_+^L)} + \left| x_+ + \frac{L}{\alpha} \right| \|B'\|_{H^1(\Sigma_+^L)} \right) \end{aligned}$$

avec $\theta = \arg(\alpha)$. Les fonctions $A(x_2)$ et $B(x_2)$ étant solutions de deux problèmes bien posés, celles-ci dépendent continûment des données de ces problèmes :

$$\|A'\|_{H^1(\Sigma_+^L)} = \|A\|_{H^2([0,l])} \leq C_A (\|a\|_{L^2([0,l])} + \|b\|_{L^2([0,l])}),$$

et

$$\|B'\|_{H^1(\Sigma_+^L)} = \|B\|_{H^2([0,l])} \leq C_B \|b\|_{L^2([0,l])}.$$

En rappelant ensuite les définitions :

$$a(x_2) = \int_{d_-}^{d_+} z e^{-i\frac{k}{M}z} \Delta g_h(z, x_2) dz,$$

$$b(x_2) = \int_{d_-}^{d_+} e^{-i\frac{k}{M}z} \Delta g_h(z, x_2) dz,$$

et en s'inspirant de la démonstration du théorème D.2, nous obtenons les majorations suivantes :

$$\|a\|_{L^2([0,l])} \leq C_a \|g_h\|_{H^2(\Omega_b)},$$

$$\|b\|_{L^2([0,l])} \leq C_b \|g_h\|_{H^2(\Omega_b)}.$$

Nous en déduisons :

$$\|\mathbf{rot}_{\alpha,\lambda} \zeta_{\alpha,\lambda} \cdot \mathbf{n}\|_{H^{1/2}(\Sigma_+^L)} \leq C e^{\frac{k \sin(\theta)}{M(1-M^2)} \frac{L}{|\alpha|}} \|g_h\|_{H^2(\Omega_b)}.$$

Une majoration du second terme nous est ensuite donnée par le

Lemme 5.18 *Supposons que les hypothèses (5.16) et (5.17) soient vérifiées. Il existe alors des constantes positives C et η telles que, si la longueur L des couches est assez grande, nous avons :*

$$\|\Delta_{\alpha,\lambda} \tilde{\varphi}_h^L\|_{H^{-1/2}(\Sigma_{\pm}^L)} \leq C e^{-\frac{\eta}{2} \frac{L}{|\alpha|}} \|\tilde{\varphi}_h\|_{H^1(\Omega_b)}.$$

DÉMONSTRATION. Nous allons exprimer le champ $\tilde{\varphi}_h^L$ au moyen d'un développement en série sur les frontières Σ_{\pm} , conformément à l'approche suivie dans le chapitre 4. Ainsi, pour tout $x_1 \geq x_+$, nous écrivons :

$$\tilde{\varphi}_h^L(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\tilde{\varphi}_h^L(x_+, \cdot), S_n)_{L^2(\Sigma_+)} \left(A_n^+ e^{i\gamma_n^+(x_1 - x_+)} + A_n^- e^{i\gamma_n^-(x_1 - x_+)} \right) S_n(x_2), \quad \forall x_2 \in [0, l],$$

où nous avons posé :

$$\gamma_n^{\pm} = \frac{\beta_n^{\pm} - \lambda}{\alpha}, \tag{5.38}$$

et

$$A_n^\pm = \mp \frac{e^{i\gamma_n^\mp L}}{e^{i\gamma_n^+ L} - e^{i\gamma_n^- L}}, \quad (5.39)$$

les fonctions S_n , $n \in \mathbb{N}^*$, étant définies par (5.32). Par ailleurs, l'opérateur laplacien s'écrit dans les couches absorbantes :

$$\Delta_{\alpha,\lambda} \tilde{\varphi}_h^L = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_h^L}{\partial x_1^2} + 2i\alpha\lambda \frac{\partial \tilde{\varphi}_h^L}{\partial x_1} - \lambda^2 \tilde{\varphi}_h^L + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_h^L}{\partial x_2^2}.$$

En utilisant la condition aux limites (5.31), qui se traduit ici par $A_n^+ e^{i\gamma_n^+ L} + A_n^- e^{i\gamma_n^- L} = 0$, et (5.38), nous obtenons alors, en $x_1 = x_+ + L$ et pour tout x_2 dans $[0, l]$:

$$\Delta_{\alpha,\lambda} \tilde{\varphi}_h^L(x_+ + L, x_2) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n^+ \beta_n^{+2} e^{i\gamma_n^+ L} + A_n^- \beta_n^{-2} e^{i\gamma_n^- L} \right) (\tilde{\varphi}_h^L(x_+, \cdot), S_n)_{L^2(\Sigma_+)} S_n(x_2),$$

Soit encore, en introduisant la relation (5.39) dans cette dernière égalité :

$$\Delta_{\alpha,\lambda} \tilde{\varphi}_h^L(x_+ + L, x_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\beta_n^{+2} - \beta_n^{-2} \right) \frac{e^{i\gamma_n^+ L}}{e^{i(\gamma_n^+ - \gamma_n^-)L} - 1} (\tilde{\varphi}_h^L(x_+, \cdot), S_n)_{L^2(\Sigma_+)} S_n(x_2),$$

soit encore :

$$\Delta_{\alpha,\lambda} \tilde{\varphi}_h^L(x_+ + L, x_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-4kM}{1-M^2} \sqrt{k^2 - (1-M^2) \frac{n^2 \pi^2}{l^2}} \right) \frac{e^{i\gamma_n^+ L}}{e^{i(\gamma_n^+ - \gamma_n^-)L} - 1} (\tilde{\varphi}_h^L(x_+, \cdot), S_n)_{L^2(\Sigma_+)} S_n(x_2).$$

Sachant que :

$$\|\Delta \tilde{\varphi}_h^L\|_{H^{-1/2}(\Sigma_+^L)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \left| (\Delta \tilde{\varphi}_h^L(x_+, \cdot), S_n)_{L^2(\Sigma_+)} \right|^2,$$

nous arrivons à :

$$\|\Delta \tilde{\varphi}_h^L\|_{H^{-1/2}(\Sigma_+^L)}^2 \leq C_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left| k^2 - (1-M^2) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right|}{\sqrt{1+n^2}} \left| \frac{e^{i\gamma_n^+ L}}{e^{i(\gamma_n^+ - \gamma_n^-)L} - 1} \right|^2 \left| (\tilde{\varphi}_h^L(x_+, \cdot), S_n)_{L^2(\Sigma_+)} \right|^2,$$

en posant $C_0 = \frac{16k^2 M^2}{(1-M^2)^2}$.

Afin de pouvoir majorer cette quantité en faisant apparaître la norme de $\tilde{\varphi}_h^L$ dans $L^2(\Sigma_+^L)$, il nous faut à présent distinguer le cas pour lequel l'entier n est l'indice d'un mode propagatif du cas où il désigne l'indice d'un mode évanescent. Nous rappelons à cette occasion quelques notations utilisées dans le chapitre précédent. Nous désignons par K_0 le réel positif :

$$K_0 = \frac{kl}{\pi \sqrt{1-M^2}},$$

et par N_0 sa partie entière. Si $1 \leq n \leq N_0$, le mode est propagatif et nous avons :

$$\left| e^{i\gamma_n^+ L} \right| \leq e^{-\text{Im}(\gamma_{N_0}^+) L},$$

ainsi que :

$$\frac{2k}{1-M^2} \sqrt{1 - \frac{N_0^2}{K_0^2}} \leq \sqrt{k^2 - (1-M^2) \frac{n^2 \pi^2}{l^2}} \leq \frac{2k}{1-M^2} \sqrt{1 - \frac{n^2}{K_0^2}} \leq \frac{2k}{1-M^2}.$$

Pour une longueur de couche assez grande, nous en déduisons que :

$$\left| e^{i(\gamma_n^+ - \gamma_n^-)L} - 1 \right| \geq 1 - e^{\frac{2k}{1-M^2} \sqrt{1 - \frac{N_0^2}{K_0^2}} \sin(\theta) \frac{L}{|\alpha|}} \geq \frac{1}{2}.$$

Si $n > N_0$, le mode est évanescant. Il vient alors :

$$\left| e^{i\gamma_n^+ L} \right| \leq e^{-\operatorname{Im}(\gamma_{N_0+1}^+)L} e^{-\operatorname{Im}(\gamma_n^+ - \gamma_{N_0+1}^+)L}$$

et

$$\frac{2k}{1-M^2} \sqrt{\frac{(N_0+1)^2}{K_0^2} - 1} \leq \sqrt{(1-M^2) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - k^2} \leq \frac{2k}{1-M^2} \sqrt{\frac{n^2}{K_0^2} - 1} \leq \frac{2k}{1-M^2} \frac{n}{K_0},$$

d'où :

$$\left| e^{i(\gamma_n^+ - \gamma_n^-)L} - 1 \right| \geq 1 - e^{-\frac{2k}{1-M^2} \sqrt{\frac{(N_0+1)^2}{K_0^2} - 1} \cos(\theta) \frac{L}{|\alpha|}} \geq \frac{1}{2},$$

pour une longueur de couche L assez grande. Enfin, si $|\alpha| \leq 1$, nous avons, compte tenu de (5.17) :

$$e^{-\operatorname{Im}(\gamma_n^+ - \gamma_{N_0+1}^+)L} \leq e^{-\operatorname{Im}(\beta_n^+ - \beta_{N_0+1}^+)L}.$$

En posant comme dans le chapitre 4 :

$$\eta = \frac{2k}{1-M^2} \min \left(-\sin(\theta) \sqrt{1 - \frac{N_0^2}{K_0^2}}, \cos(\theta) \sqrt{\frac{(N_0+1)^2}{K_0^2} - 1} \right), \quad (5.40)$$

nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\alpha, \lambda} \tilde{\varphi}_h^L\|_{H^{-1/2}(\Sigma_+^L)}^2 &\leq C_1 e^{-\eta \frac{L}{|\alpha|}} \left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \left| (\tilde{\varphi}_h^L(x_+, \cdot), S_n)_{L^2(\Sigma_+)} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{1+n^2}} e^{-\operatorname{Im}(\beta_n^+ - \beta_{N_0+1}^+)L} \left| (\tilde{\varphi}_h^L(x_+, \cdot), S_n)_{L^2(\Sigma_+)} \right|^2 \right), \end{aligned}$$

avec $C_1 = 4 \max \left(C_0 k^2, \frac{C_0 \pi^2}{l^2} \right)$, d'où, pour une longueur de couche assez grande :

$$\|\Delta_{\alpha, \lambda} \tilde{\varphi}_h^L\|_{H^{-1/2}(\Sigma_+^L)} \leq C_2 e^{-\frac{\eta}{2} \frac{L}{|\alpha|}} \|\tilde{\varphi}_h^L\|_{L^2(\Sigma_+)}.$$

Cette dernière estimation conduit, par utilisation d'un théorème de trace, à :

$$\|\Delta_{\alpha, \lambda} \tilde{\varphi}_h^L\|_{H^{-1/2}(\Sigma_+^L)} \leq C_3 e^{-\frac{\eta}{2} \frac{L}{|\alpha|}} \|\tilde{\varphi}_h^L\|_{H^1(\Omega_b)}.$$

et nous nous servons alors de la convergence de $\tilde{\varphi}_h^L$ vers $\tilde{\varphi}_h$ dans $H^1(\Omega_b)$, déduite de (5.33). Il reste à procéder de manière identique dans la couche Ω_-^L pour obtenir le résultat annoncé. \square

Remarque 5.19 Comme l'indique l'énoncé du lemme 5.18, ce dernier résultat dépend de la valeur du coefficient λ . À la différence du théorème 4.4, il faut en effet s'assurer ici que tous les modes propagatifs sont décroissants dans les couches absorbantes, d'où la nécessité de l'hypothèse (5.16) lorsque des modes amont inverses sont présents.

Conclusion

Nous terminons cette section consacrée à la convergence de la méthode en énonçant le

Théorème 5.20 *Supposons que les hypothèses (5.16) et (5.17) soient vérifiées. Il existe une constante $L_1 > 0$ telle que, pour tout $L \geq L_1$, la restriction au domaine Ω_b de la solution \mathbf{u}^L du problème (5.20) converge vers la restriction à Ω_b de la solution \mathbf{u} du problème (5.1)-(5.2) définie par absorption limite. De plus, il existe une constante C , dépendante de k , M et h , telle que :*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^L\|_{H^1(\Omega_b)^2} \leq C \left(e^{-\eta \frac{L}{|\alpha|}} \left(\|\varphi_a\|_{H^2(\Omega_b)}^2 + \|\tilde{\varphi}_h\|_{H^2(\Omega_b)}^2 \right)^{1/2} + e^{-\frac{k \sin(\theta)}{M(1-M^2)} \frac{L}{|\alpha|}} \|g_h\|_{H^2(\Omega_b)} \right),$$

où la constante η est définie par (5.40).

Remarques 5.21 *Il manque un élément dans l'esquisse de la preuve de ce dernier théorème que nous avons fourni, puisque nous n'avons pas montré que la constante C (en toute rigueur, que la constante C dans l'inéquation (5.37)) ne dépend pas de la longueur de la couche. Nous renvoyons le lecteur à la référence [14] pour une démonstration rigoureuse de ce résultat.*

Par ailleurs, on voit que l'erreur se compose de deux termes, qui sont pour l'un lié à la décroissance exponentielle des modes guidés pour les problèmes scalaires avec sources à supports compacts, pour l'autre lié à l'erreur causée par la troncature de la couche pour le terme de régularisation de l'équation.

5.4 Résultats numériques

Les simulations numériques que nous présentons dans cette section sont très similaires à celles du chapitre 2, la différence majeure étant que la condition de déplacement normal imposé en aval du domaine de calcul est ici remplacée par l'adjonction d'une couche absorbante parfaitement adaptée. Il n'est donc plus nécessaire de connaître *a priori* le déplacement sur l'une des frontières qui bornent artificiellement le domaine⁶.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la simulation du rayonnement d'une source à support compact, placée dans le conduit rigide, cas pour lequel nous ne disposons pas d'une solution analytique de référence.

5.4.1 Propagation de modes dans un conduit

Nous considérons la propagation de modes acoustiques ou hydrodynamiques dans un conduit bidimensionnel à parois rigides (cf. annexe C). Ceux-ci sont imposés sur la frontière Σ_- par une condition de Dirichlet non homogène portant sur le déplacement normal au bord du domaine. Le premier cas testé correspond à un nombre d'onde valant $k = 8$ et le nombre de Mach $M = 0,4$. Les résultats obtenus sont comparés avec la solution analytique sur le domaine Ω_b . Le maillage utilisé est non structuré et les éléments finis sont des éléments de Lagrange de type P_2 . La longueur de la couche correspond à 10% de la longueur du domaine Ω_b . Toutes les simulations sont effectuées avec des valeurs des coefficients α et λ uniformes dans la couche, la valeur de λ étant définie par (5.16).

Concernant les modes acoustiques, six d'entre eux, trois modes amont et trois modes aval, sont propagatifs pour cette configuration. Les courbes représentant l'erreur relative en norme $H^1(\Omega_b)$ pour le déplacement calculé⁷ en fonction du module du coefficient complexe⁸ α sont tracées pour chacun des modes propagatifs aval sur la figure 5.3. Les figures 5.4 à 5.6 présentent quant à elles les lignes de niveau des composantes de la partie réelle du déplacement calculé pour une valeur de α correspondant à une erreur inférieure à 1%.

Nous observons sur les courbes de la figure 5.3 la convergence de la méthode, tout au moins tant que la discrétisation utilisée le permet. Nous constatons également que, conformément aux estimations données par la théorie, la convergence est d'autant plus lente que le mode est proche de la coupure. Des résultats identiques sont obtenus pour les modes propagatifs amont.

Pour l'étude de la méthode sur les modes rotationnels, nous choisissons comme "profil" la fonction $\sin\left(\frac{m\pi x_2}{l}\right)$, où m désigne un entier naturel non nul. La figure 5.7 présente les courbes d'erreur de la méthode en fonction du module du coefficient α pour des valeurs de m égales à 1, 2 et 3.

Si la figure 5.7 apporte la preuve que la méthode de couches absorbantes converge bien pour le type de modes hydrodynamiques que nous avons testé, elle illustre également une des difficultés auxquelles nous nous trouvons confrontés lors de sa mise en œuvre pratique et numérique en présence de perturbations acoustiques et hydrodynamiques. En effet, la constante de propagation des modes hydrodynamiques, égale à $\frac{k}{M}$, conduit certes à un amortissement dans la couche beaucoup plus important pour ces modes que pour les modes propagatifs acoustiques, mais mène aussi à des problèmes de discrétisation lorsque le module de α diminue⁹. De fait, les valeurs de α permettant un bon accord entre les solutions calculée et exacte sont relativement

⁶Dans toutes les simulations, le domaine Ω_b utilisé est identique au domaine Ω de la section 2.6 du chapitre 2. La taille des couches Ω_{\pm}^L est précisée selon le cas traité.

⁷C'est-à-dire la quantité $\frac{\|\mathbf{u}^L - \mathbf{u}_{\text{ex}}\|_{H^1(\Omega_b)}^2}{\|\mathbf{u}_{\text{ex}}\|_{H^1(\Omega_b)}^2}$, où \mathbf{u}_{ex} représente la solution exacte du problème.

⁸Comme dans le chapitre précédent, la valeur de l'argument du nombre complexe α est ici fixée à $-\frac{\pi}{4}$. Ce choix, apparemment arbitraire, est lié aux facteurs $-\sin(\arg(\alpha))$ et $\cos(\arg(\alpha))$ apparaissant dans la définition (4.40) du coefficient η , relatif à la vitesse de convergence exponentielle de la méthode. Pour cette valeur de l'argument, ces deux quantités sont égales.

⁹Ces problèmes, déjà évoqués, apparaissent également en l'absence de couches absorbantes, dans un écoulement à faible vitesse (lorsque M est proche de 0) ou à haute fréquence (lorsque k est grand).

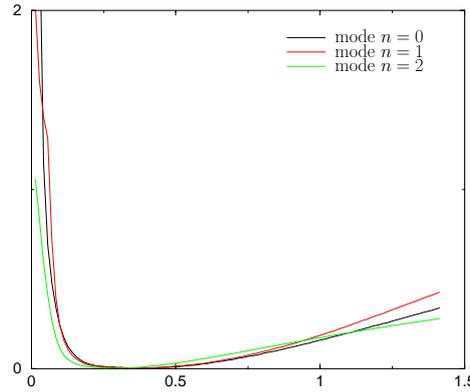


FIG. 5.3 – Erreur relative en norme $H^1(\Omega_b)^2$ en fonction de $|\alpha|$ pour les modes acoustiques aval propagatifs, $k = 8$ and $M = 0, 4$.

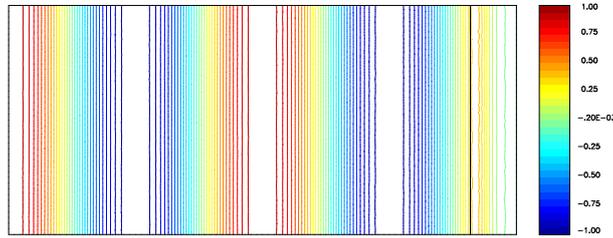


FIG. 5.4 – Lignes de niveau de la composante u_1 (la seconde composante est nulle) de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} calculé pour un mode aval d'indice $n = 0$, $k = 8$, $M = 0, 4$, $\alpha = 0, 25(1 - i)$.

différentes selon que le mode considéré est acoustique (figure 5.3) ou hydrodynamique (figure 5.7).

Une façon simple de traiter un cas “général” de manière assez satisfaisante est d’envisager d’utiliser des couches de taille beaucoup plus importante qu’il n’est d’usage. La largeur de la plage des valeurs de $|\alpha|$ pour lesquelles l’erreur est admissible s’en trouve ainsi augmentée. Nous avons reproduit les simulations précédentes pour une couche de longueur égale à 25% de la taille du domaine Ω_b . Les résultats obtenus sont regroupés sur la figure 5.11. Nous observons cette fois un “recouvrement” des ensembles de valeurs de $|\alpha|$ pour lesquels l’erreur pour les modes acoustiques et hydrodynamiques calculés est inférieure à quelques pour-cent.

5.4.2 Rayonnement d’une source acoustique

Nous simulons ici le rayonnement d’une source \mathbf{f} irrotationnelle à support compact, localisée au centre de la portion de conduit considérée. Ce cas s’avère plus complexe que le problème précédent, principalement en raison de l’absence d’une solution de référence, analytique ou numérique, qui permettrait de mesurer la précision de la méthode et de choisir une valeur adéquate du coefficient α .

La partie réelle des composantes du champ de déplacement calculé est représentée sur la figure 5.12. On observe que le mode acoustique principalement rayonné par cette source est celui d’indice $n = 2$. L’effet de convection de l’écoulement uniforme est aussi aisément visible, la longueur d’onde de la solution calculée étant plus courte en amont de la source qu’en aval de celle-ci.

5.4.3 Rayonnement d’une source tourbillonnaire

Nous présentons sur la figure 5.13 la simulation du rayonnement dans le conduit rigide d’une source \mathbf{f} dont le rotationnel est non nul. Celle-ci est à support compact et située légèrement en amont du centre de la portion de conduit considérée. Nous observons la propagation du sillage hydrodynamique produit par la source, les perturbations acoustiques, bien que présentes, étant d’amplitude négligeable.

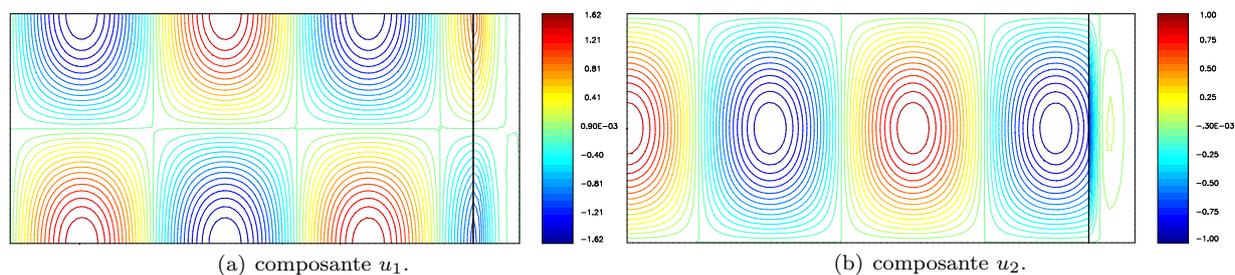


FIG. 5.5 – Lignes de niveau des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} calculé pour un mode aval d'indice $n = 1$, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,25(1 - i)$.

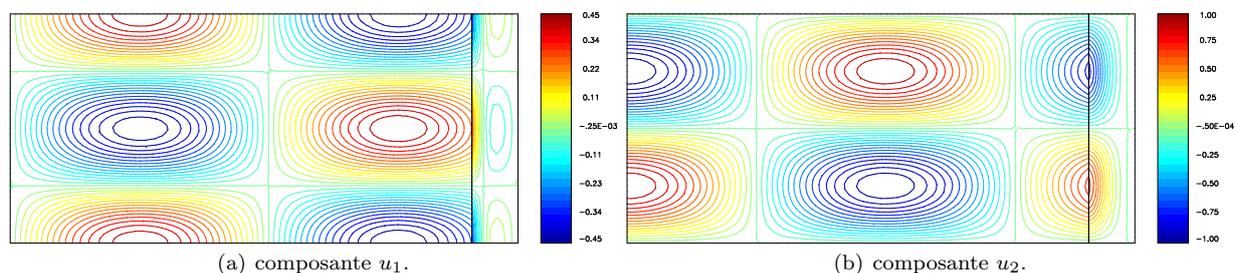


FIG. 5.6 – Lignes de niveau des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} calculé pour un mode aval d'indice $n = 2$, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,25(1 - i)$.

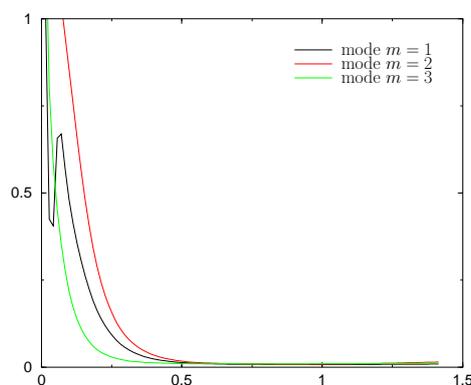


FIG. 5.7 – Erreur relative en norme $H^1(\Omega_b)^2$ en fonction de $|\alpha|$ pour les modes hydrodynamiques, $k = 8$ et $M = 0,4$.

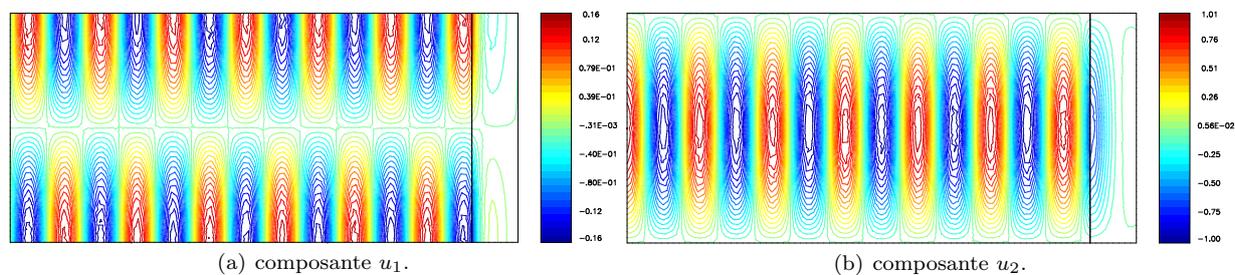


FIG. 5.8 – Lignes de niveau des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} calculé pour le mode hydrodynamique $m = 1$, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,65(1 - i)$.

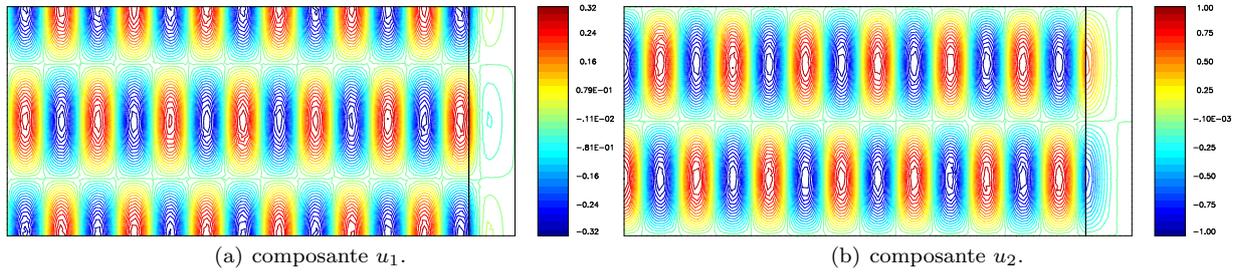


FIG. 5.9 – Lignes de niveau des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} calculé pour le mode hydrodynamique $m = 2$, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,65(1 - i)$.

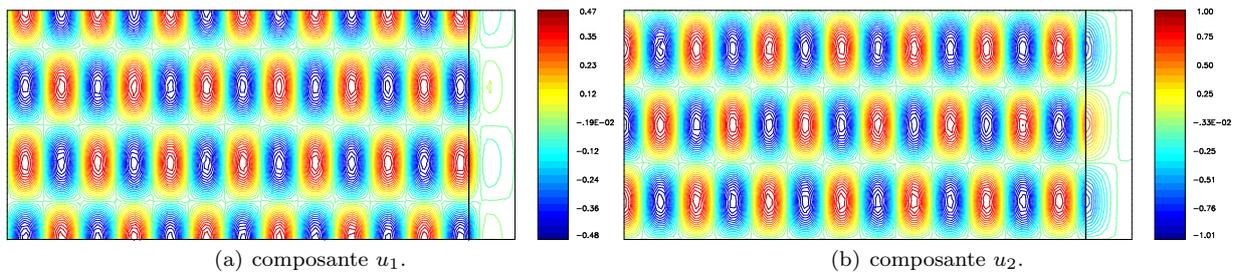


FIG. 5.10 – Lignes de niveau des composantes de la partie réelle du champ de déplacement \mathbf{u} calculé pour le mode hydrodynamique $m = 3$, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,65(1 - i)$.

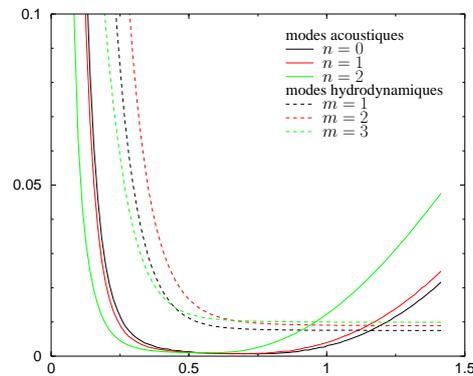


FIG. 5.11 – Erreur relative en norme $H^1(\Omega_b)^2$ en fonction de $|\alpha|$ pour les différents modes, $k = 8$ et $M = 0,4$.

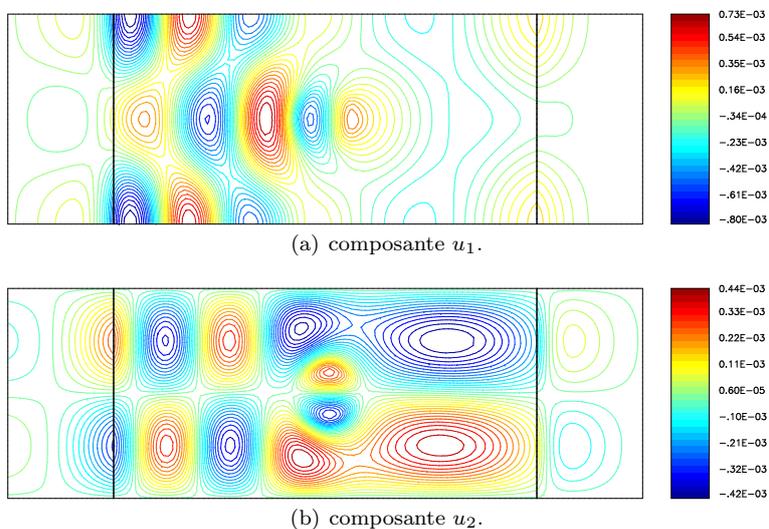


FIG. 5.12 – Lignes de niveau des composantes de la partie réelle du champ de déplacement calculé (rayonnement d'une source acoustique, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,5(1 - i)$).

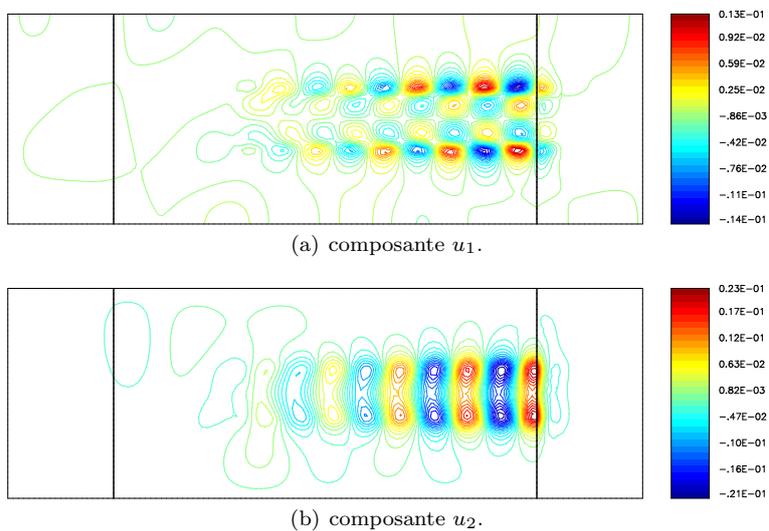


FIG. 5.13 – Lignes de niveau des composantes de la partie réelle du champ de déplacement calculé (rayonnement d'une source tourbillonnaire, $k = 8$, $M = 0,4$, $\alpha = 0,5(1 - i)$).

Conclusion et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à la propagation linéaire d'ondes au sein d'un fluide parfait en présence d'un écoulement, dans un conduit rigide et en régime périodique établi. Notre approche de ce problème a consisté en l'utilisation d'un modèle vectoriel reposant sur l'équation de Galbrun, pour laquelle nous avons proposé une régularisation permettant sa résolution numérique par une méthode d'éléments finis nodaux. Pour des écoulements porteurs uniforme et cisailé, des résultats d'existence et d'unicité ont été obtenus. Il s'agit, à notre connaissance, de la seule méthode numérique dont la convergence soit démontrée pour des problèmes d'aéroacoustique linéarisée en régime périodique établi. Des simulations numériques illustrant le bien fondé de la régularisation de l'équation sur le plan pratique ont ensuite été présentées.

À l'issue de cette étude, plusieurs voies d'investigation sont envisageables. Le cadre théorique introduit dans ce mémoire constitue une base solide en vue du traitement d'écoulements porteurs, mais également de géométries, plus complexes. Ainsi, une méthode de résolution du problème de la propagation acoustique au sein d'un écoulement cisailé semble réalisable. Il ne faut cependant pas oublier que la question du sens d'un problème linéarisé harmonique, vu comme limite asymptotique en temps d'un problème transitoire avec source entretenue¹, peut être rendue délicate par la présence d'instabilités pour des écoulements autres qu'uniformes. Une étude théorique visant à déterminer le type d'instabilité (convective ou absolue) mise en jeu pour un écoulement porteur donné est alors nécessaire.

D'autre part, si certaines limites du procédé de régularisation ont été relevées, cette direction de recherche reste encore "neuve". Diverses réponses ont été aujourd'hui apportées pour la résolution des équations aux dérivées partielles d'ordre deux provenant de reformulations du système des équations de Maxwell en électromagnétisme, mais les problèmes traités dans ce mémoire, basés sur l'équation de Galbrun, présentent de sévères complications par rapport à ce cadre néanmoins éclairant. Il convient donc d'étudier plusieurs de ces "points faibles", notamment dans l'optique du traitement d'applications moins académiques. Indiquons par ailleurs qu'une autre approche, faisant appel à la théorie des problèmes mixtes et reposant sur une formulation en champs de déplacement et de pression, a récemment été introduite par Treyssède *et al.* [157]. Les résultats présentés sont prometteurs, mais le cadre mathématique et théorique de cette méthode n'a pas été exploré et la validité d'une telle démarche reste encore sujette à caution.

La seconde partie du document a été consacrée à l'élaboration d'une condition aux limites transparente compatible avec des problèmes d'aéroacoustique en régime harmonique d'une part et le procédé de régularisation de l'équation de Galbrun d'autre part. Dans ce but, la méthode des couches absorbantes parfaitement adaptées a été explorée. Un modèle de couches a été introduit et étudié dans un guide en présence d'un écoulement uniforme. Plusieurs résultats théoriques ont été établis. Nous avons en particulier montré que la présence de modes dits inverses, observés comme étant instables (au sens où ils sont exponentiellement croissants dans les couches absorbantes) pour des problèmes posés en régime transitoire, n'avait pas d'incidence sur la convergence de la méthode dans le cadre d'un problème scalaire en régime harmonique. L'application du même modèle à l'équation de Galbrun régularisée a prouvé que la prise en compte d'un terme source à support non compact était possible. La décroissance de tous les modes dans les couches étant dans ce cas nécessaire à l'obtention d'un résultat de convergence de la méthode, le modèle de couches absorbantes employé a été modifié en conséquence pour éliminer d'éventuelles instabilités. Nous avons enfin implémenté la méthode dans un code d'éléments finis et présenté plusieurs applications numériques pour les équations de Helmholtz convectée et de Galbrun à l'intérieur d'un guide.

Le travail réalisé laisse à présent entrevoir des utilisations des couches absorbantes parfaitement adaptées

¹C'est le principe d'amplitude limite qui permet d'établir mathématiquement le lien entre le problème transitoire, et donc "physique", et le problème harmonique.

pour des problèmes faisant intervenir des équations aux dérivées partielles semblables, comme l'équation de Navier en élasticité linéaire. Une étude numérique approfondie du comportement et des propriétés de ces couches pour le problème discrétisé s'avère cependant être une étape indispensable avant l'application de cette méthode à des cas plus complexes.

Annexe A

Vérifications

Dans cette annexe, nous souhaitons vérifier que, dans un écoulement de fluide parfait en évolution adiabatique, les perturbations eulériennes d'ordre un de masse volumique, de vitesse, de pression et d'entropie exprimées en fonction de la perturbation du déplacement lagrangien, notée $\boldsymbol{\xi}$, sont bien solutions d'un système d'équations de conservation et d'état linéarisées en représentation eulérienne. Pour un écoulement porteur "régulier" et en l'absence de force extérieure, ce système se présente de la manière suivante :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \rho_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_0 + \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1 \right) + \rho_1 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \right) + \nabla p_1 = \mathbf{0}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla s_0 = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$p_1 = c_0^2 \rho_1 + \alpha_0 s_1 - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathcal{P}, \quad (\text{A.4})$$

où ρ_0 , \mathbf{v}_0 , p_0 et s_0 désignent respectivement la masse volumique, la vitesse, la pression et l'entropie dans l'écoulement moyen, où, en coordonnées lagrangiennes,

$$\tilde{p}_0(\mathbf{a}, t) = \mathcal{P}(\tilde{\rho}_0, \tilde{s}_0; \mathbf{a}), \quad \tilde{c}_0^2(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \tilde{\rho}}(\tilde{\rho}_0, \tilde{s}_0; \mathbf{a}) \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_0(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \tilde{s}}(\tilde{\rho}_0, \tilde{s}_0; \mathbf{a})$$

avec \mathcal{P} la fonction d'état du fluide¹ et où ρ_1 , \mathbf{v}_1 , p_1 et s_1 sont les perturbations eulériennes d'ordre un de masse volumique, de vitesse, de pression et d'entropie. Les expressions en question ont été établies au chapitre 1 et sont ici rappelées :

$$\rho_1 = -\rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} - \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad (\text{A.6})$$

$$p_1 = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0, \quad (\text{A.7})$$

$$s_1 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla s_0, \quad (\text{A.8})$$

avec :

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_0.$$

Nous savons par ailleurs que l'écoulement porteur vérifie le système ci-dessous :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0, \quad (\text{A.9})$$

¹Comme on a pu le constater dans la relation (A.4), nous conservons la notation \mathcal{P} lorsque cette fonction d'état est exprimée en fonction du système de coordonnées eulériennes. Le lecteur est par ailleurs invité à consulter le chapitre 1, et plus particulièrement la section 1.4, pour quelques détails supplémentaires sur ces relations.

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \right) + \nabla p_0 = \mathbf{0}, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial s_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s_0 = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla p_0 = c_0^2 \nabla \rho_0 + \alpha_0 \nabla s_0 + \nabla \mathcal{P}, \quad (\text{A.12})$$

et que la perturbation du déplacement lagrangien est solution de l'équation de Galbrun :

$$\rho_0 \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \nabla (\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \nabla p_0 - {}^t \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 = \mathbf{0}. \quad (\text{A.13})$$

Équation de conservation de la masse linéarisée. Posons

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \rho_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_0,$$

et injectons les relations (A.5) et (A.6) dans le membre de droite. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & -\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0) - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla (\rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_0 - \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi} \right) \cdot \nabla \rho_0 \\ & + \rho_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_0 - \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi} \right) - (\rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0) \operatorname{div} \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Nous développons ensuite les dérivées de produits de fonctions en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla (\rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) &= \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}), \\ \nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0) &= {}^t \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0 + \nabla (\nabla \rho_0) \cdot \boldsymbol{\xi}, \\ \operatorname{div} (\nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_0) &= \nabla \boldsymbol{\xi} : \nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}), \\ \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}) &= \nabla \mathbf{v}_0 : \nabla \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}_0). \end{aligned}$$

Après simplification et réorganisation des termes, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & -\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \right) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right) - \mathbf{v}_0 \cdot (\nabla (\nabla \rho_0) \cdot \boldsymbol{\xi}) \\ & - (\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}_0) - \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0. \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0) = {}^t \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 + \nabla (\nabla \rho_0) \cdot \mathbf{v}_0,$$

et que :

$$\nabla (\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0) = \rho_0 \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}_0) + \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \nabla \rho_0,$$

nous trouvons finalement :

$$\mathcal{A} = -\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \right) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} - \nabla \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \right) \cdot \boldsymbol{\xi},$$

soit encore :

$$\mathcal{A} = -\nabla \left(\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \right) \boldsymbol{\xi} \right).$$

La quantité \mathcal{A} est donc identiquement nulle, en vertu de l'équation (A.9).

Équation de conservation de la quantité de mouvement linéarisée. Posons :

$$\mathcal{B} = \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_0 + \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1 \right) + \rho_1 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \right) + \nabla p_1.$$

Nous introduisons les expressions (A.5) à (A.7) dans cette équation. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \rho_0 \left(\frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \frac{D}{Dt} (\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}) + \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \frac{D \boldsymbol{\xi}}{Dt} - \nabla \mathbf{v}_0 \cdot (\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}) \right) - \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \right) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \\ & - \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \right) \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0 - \nabla (\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) - \nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0). \end{aligned}$$

Nous développons les dérivées de produits de fonctions en nous servant des relations suivantes :

$$\nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) = {}^t \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 + \nabla (\nabla p_0) \cdot \boldsymbol{\xi},$$

$$\nabla (\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}) = \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} + \nabla (\nabla \mathbf{v}_0) \cdot \boldsymbol{\xi}.$$

En simplifiant et en regroupant les termes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \rho_0 \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \nabla (\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \nabla p_0 - {}^t \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 \\ & - \rho_0 \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} \right) \cdot \boldsymbol{\xi} - \nabla (\nabla p_0) \cdot \boldsymbol{\xi} - \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \right) \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0 \\ & - \rho_0 \nabla \mathbf{v}_0 \cdot (\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}) - \rho_0 (\nabla (\nabla \mathbf{v}_0) \cdot \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Nous reconnaissons dans la première ligne le membre de gauche de l'équation de Galbrun (A.13). Par ailleurs, les relations ci-dessous :

$$\nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} \right) = \rho_0 \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} \otimes \nabla \rho_0,$$

$$\nabla (\rho_0 \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0) = (\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0) \otimes \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \rho_0 \nabla (\nabla \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{v}_0,$$

nous conduisent finalement à :

$$\mathcal{B} = -\nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 \right) \cdot \boldsymbol{\xi},$$

qui est identiquement égal au vecteur nul, si l'on tient compte de l'équation (A.10).

Équation de conservation de l'entropie linéarisée. Posons :

$$\mathcal{C} = \frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla s_0,$$

Nous nous servons des relations (A.6) et (A.8), puis développons en utilisant :

$$\nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla s_0) = {}^t \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla s_0 + \nabla (\nabla s_0) \cdot \boldsymbol{\xi},$$

pour arriver à :

$$\mathcal{C} = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \left(\frac{\partial s_0}{\partial t} \right) - \mathbf{v}_0 \cdot (\nabla (\nabla s_0) \cdot \boldsymbol{\xi}) - (\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla s_0.$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla s_0) = {}^t \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s_0 + \nabla (\nabla s_0) \cdot \mathbf{v}_0,$$

d'où :

$$\mathcal{C} = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \left(\frac{\partial s_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s_0 \right),$$

et cette quantité est identiquement nulle en vertu de l'équation (A.11).

Équation d'état linearisée. La vérification est immédiate. En effet, en injectant les relations (A.5) et (A.8) dans l'équation (A.4), il vient :

$$p_1 = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot (c_0^2 \nabla \rho_0 + \alpha_0 \nabla s_0 + \nabla \mathcal{P}).$$

En utilisant ensuite l'équation d'état (A.12) pour l'écoulement porteur, nous retrouvons la relation (A.7).

Annexe B

Rappels mathématiques

Cette annexe présente quelques définitions et résultats classiques d'analyse fonctionnelle, ainsi que des notions de théorie spectrale des opérateurs dans les espaces de Hilbert, qui sont utilisés dans nos études ou nécessaires à une bonne compréhension de celles-ci. Pour les démonstrations et plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à Brézis [37] et Dautray et Lions [55, 56] pour les définitions et résultats généraux, à Kato [99], Schechter [141] ou encore Edmunds et Evans [60] pour la théorie spectrale en particulier.

B.1 Espaces de Hilbert

B.1.1 Définitions

Définition B.1 Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{C} . Un **produit scalaire hermitien** $(\cdot, \cdot)_E$ est une forme sesquilinéaire¹ sur E , symétrique et définie positive (i.e., $(u, u)_E \geq 0 \forall u \in E$ et $(u, u)_E > 0$ si $u \neq 0$).

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)_E| \leq (u, u)_E^{1/2} (v, v)_E^{1/2}, \forall (u, v) \in E^2,$$

et que $\|u\|_E = (u, u)_E^{1/2}$ définit une norme sur l'espace E .

Définition B.2 Un espace vectoriel complexe E muni d'un produit scalaire hermitien est appelé **espace de Hilbert** s'il est complet (i.e., toute suite de Cauchy de E converge) pour la norme associée à ce produit scalaire.

Définition B.3 Soit G est un sous-ensemble d'un espace vectoriel complexe E . On appelle **orthogonal de G** , et l'on note G^\perp , l'ensemble des éléments de E orthogonaux à tout élément de G .

Proposition B.4 (complémentaire orthogonal) Si M est un sous-espace fermé de E , alors $E = M \oplus M^\perp$, c'est-à-dire que M et M^\perp sont des sous-espaces fermés dont l'intersection est réduite à $\{0\}$ et qui ont pour somme E .

B.1.2 Dual topologique d'un espace de Hilbert

Nous nous intéressons maintenant à la caractérisation de l'espace des formes linéaires continues sur un espace de Hilbert.

Définition B.5 Soit E un espace de Hilbert. On appelle **dual topologique de E** , et l'on note E' , l'ensemble des formes linéaires continues sur E . Il est canoniquement muni de la norme duale suivante :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{\langle f, u \rangle_{E', E}}{\|u\|_E}, \forall f \in E',$$

¹On dit que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme sesquilinéaire sur E si c'est une application de $E \times E$ dans \mathbb{C} telle que, pour tout v de E , la forme $u \mapsto a(u, v)$ est linéaire et, pour tout u de E , la forme $v \mapsto a(u, v)$ est antilinéaire.

qui fait de lui un espace complet, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$ désignant le produit de dualité entre E' et E .

Théorème B.6 (théorème de représentation de Riesz-Fréchet) Soient E' le dual topologique d'un espace de Hilbert E et f un élément de E' . Il existe un unique élément u_f de E tel que :

$$\langle f, v \rangle_{E', E} = (v, u_f)_E, \quad \forall v \in E.$$

De plus, on a $\|u_f\|_E = \|f\|_{E'}$.

B.2 Formulations faibles

B.2.1 Généralités sur les espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment continûment dérivables à support compact dans Ω . Son dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω .

Pour toute distribution u de $\mathcal{D}'(\Omega)$, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est définie de la manière suivante :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition B.7 Une fonction u définie sur Ω à valeurs complexes est dite de carré intégrable si u est mesurable et $|u|^2 \in L^1(\Omega)$. On note $L^2(\Omega)$ l'ensemble des (classes de) fonctions de carré intégrable sur Ω et l'on pose :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

L'espace $L^2(\Omega)$, muni du produit scalaire associé à la norme définie ci-dessus, est un espace de Hilbert.

Définition B.8 On appelle *espace de Sobolev d'ordre m* , où m est un entier naturel, et l'on note $H^m(\Omega)$ l'espace vectoriel suivant :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial^\alpha u}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \in L^2(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \right\},$$

où $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ et $\frac{\partial^\alpha u}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

On note $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Nous énonçons à présent, sans démonstration, une série de propriétés des espaces de Sobolev.

Proposition B.9 Soit $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ un espace de Sobolev. L'application

$$(u, v) \mapsto \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} \int_{\Omega} \frac{\partial^\alpha u}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \frac{\partial^\alpha \bar{v}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \, d\mathbf{x}$$

est un produit scalaire sur $H^m(\Omega)$ que l'on note $(\cdot, \cdot)_{H^m(\Omega)}$. La norme associée est notée $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$.

Lemme B.10 L'espace $H^m(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$, est complet.

On en déduit que, pour tout entier naturel m , l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition B.11 L'espace $H^m(\Omega)$ est séparable (i.e., il existe un ensemble dénombrable dense dans l'espace $H^m(\Omega)$).

Proposition B.12 On a $H^m(\Omega) \subset H^{m'}(\Omega)$ dès que $m' \leq m$ et cette injection est continue.

On suppose désormais que l'ouvert Ω est borné, de frontière $\partial\Omega$.

Définition B.13 On désigne par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}.$$

Proposition B.14 L'espace $H_0^m(\Omega)$, muni de la norme de $H^m(\Omega)$, est un espace de Hilbert.

Définition B.15 Pour tout entier naturel m , on note $H^{-m}(\Omega)$ le dual topologique de $H_0^m(\Omega)$.

Théorème B.16 (théorème de compacité de Rellich) Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , alors l'injection de $H_0^{m+1}(\Omega)$ dans $H_0^m(\Omega)$ est compacte, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

En particulier, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. En pratique, cela signifie que de toute suite bornée de $H_0^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$. Si la frontière $\partial\Omega$ est régulière, on a de plus que l'injection de $H^{m+1}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ est compacte.

Définition B.17 Soit $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, où Ω est un ouvert "assez régulier" de \mathbb{R}^n . On appelle **trace d'ordre j** ($j \in \mathbb{N}$) de u sur le bord $\partial\Omega$ l'application linéaire γ_j définie par :

$$\begin{aligned} \gamma_j : u &\rightarrow \gamma_j u, \quad j \in \mathbb{N}^* \\ \gamma_j u &= \frac{\partial^j u}{\partial \mathbf{n}^j}, \quad (\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}), \end{aligned}$$

où $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ est la dérivée suivant la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

Théorème B.18 (existence de traces) Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n "très régulier" et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors, l'application $\gamma_m : u \rightarrow \gamma_m u = (\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u)$ définie sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et à valeurs dans $\mathcal{D}(\partial\Omega)^m$ se prolonge par densité en une application linéaire continue surjective de $H^m(\Omega)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$.

De plus, il existe un relèvement continu de $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ et l'on a :

$$\mathcal{N}(\gamma_m) = H_0^m(\Omega).$$

Théorème B.19 (inégalité de Poincaré dans $H_0^1(\Omega)$) Il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

L'inégalité précédente est valable dès que l'ouvert est borné dans une direction d'espace.

Corollaire B.20 Si Ω est borné, la semi-norme

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $H^1(\Omega)$ usuelle.

B.2.2 Lemme de Lax-Milgram

Définition B.21 La forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, définie sur l'espace de Hilbert complexe V , est dite **coercive** sur V s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\operatorname{Re}(a(v, v)) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Théorème B.22 (lemme de Lax-Milgram) Soient V un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ et l respectivement une forme sesquilinéaire coercive et une forme antilinéaire continues sur V , alors il existe une unique solution u dans V de l'équation

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle_{V', V}, \quad \forall v \in V.$$

En outre, cette solution dépend continûment de la forme linéaire l . Plus précisément, elle vérifie :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{V'},$$

où α est la constante de coercivité de $a(\cdot, \cdot)$.

B.3 Théorie des opérateurs

Dans cette section, E et F désignent deux espaces de Hilbert, dont les normes sont respectivement notées $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Définitions B.23 *Un opérateur linéaire T de E dans F est une application linéaire $T : D(T) \subset E \rightarrow F$, définie sur un sous-espace vectoriel $D(T)$, appelé le **domaine de T** , et à valeurs dans F .*

Définition B.24 *Si T est un opérateur linéaire de E dans F , on définit son **transposé** tT par la formule :*

$$\langle {}^tTf, u \rangle_{E',E} = \langle f, Tu \rangle_{E',E}, \quad \forall f \in E', \forall u \in E.$$

B.3.1 Opérateurs bornés

Définition B.25 *Soit T est un opérateur linéaire de E dans F . On dit que T est **borné** s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que :*

$$\|Tu\|_F \leq c \|u\|_E, \quad \forall u \in D(T).$$

On pose alors :

$$\|T\| = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E}.$$

Lemme B.26 *Un opérateur linéaire est continu si et seulement si il est borné.*

Définitions B.27 *Soit T un opérateur linéaire borné de E dans F . On appelle **noyau de T** , et l'on note $\mathcal{N}(T)$, le sous-espace de E suivant :*

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in E \mid Tu = 0\}.$$

On appelle **image de T** (en fait image de E par T), et l'on note $\mathcal{R}(T)$, le sous-espace de F suivant :

$$\mathcal{R}(T) = \{v \in F \mid \exists u \in E, v = Tu\}.$$

Remarque. Le sous-espace $\mathcal{N}(T)$ est fermé en tant qu'image réciproque de $\{0\}$ par un opérateur continu.

Définitions B.28 *Soit T un opérateur linéaire borné de E dans E . L'**ensemble résolvant de T** est l'ensemble :*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda I) \text{ est bijectif de } E \text{ dans } E\}.$$

Le **spectre de T** , noté $\sigma(T)$, est le complémentaire de l'ensemble résolvant dans \mathbb{C} , i.e., $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. On dit que λ est une **valeur propre de T** si et seulement si :

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{u \in E \mid Tu = \lambda u\} \neq \{0\}.$$

L'ensemble $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ est alors appelé le **sous-espace propre associé à la valeur propre λ** .

B.3.2 Opérateurs compacts

Définition B.29 *Un opérateur linéaire T de E dans E est **compact** si l'image par T de la boule unité $B = \{u \in E \mid \|u\| \leq 1\}$ est relativement compacte.*

En vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut dire que T est compact si de l'image de toute suite bornée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E on peut extraire une sous-suite convergente dans E .

Notons que l'adjoint d'un opérateur compact, la somme de deux opérateurs compacts, le produit d'un opérateur compact par un scalaire non nul, le produit de deux opérateurs bornés dont l'un est compact, sont compacts.

Théorème B.30 *Si T est un opérateur compact et λ est un complexe non nul, alors*

- (i) l'espace $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ est de dimension finie,
(ii) l'espace $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ est fermé.

Théorème B.31 Si T est un opérateur compact, les seuls éléments non nuls de son spectre sont ses valeurs propres non nulles.

Corollaire B.32 (alternative de Fredholm) Si l'opérateur T est compact sur E et si λ est un complexe non nul, alors une et une seule des deux propositions suivantes est vérifiée :

- (i) Pour tout f de E , l'équation $(T - \lambda I)u = f$ admet une unique solution. Celle-ci dépend alors continûment de f .
(ii) L'équation homogène $(T - \lambda I)u = 0$ admet une solution non nulle. Dans ce cas, l'équation non homogène $(T - \lambda I)u = f$ admet une solution si et seulement si f vérifie la condition d'orthogonalité :

$$f \in \mathcal{N}({}^tT - \lambda I)^\perp.$$

B.3.3 Opérateurs auto-adjoints

Considérons un espace de Hilbert E , dont le produit scalaire hermitien et la norme sont respectivement notés $(\cdot, \cdot)_E$ et $\|\cdot\|_E$. Nous introduisons la notion d'opérateur adjoint avec la

Définition B.33 Soit $T : D(T) \subset E \rightarrow E$ un opérateur borné dont le domaine $D(T)$ est dense dans E . On appelle **adjoint de l'opérateur** T l'opérateur $T^* : D(T^*) \subset E \rightarrow E$ défini par :

$$D(T^*) = \{u \in E \mid \exists c > 0, |(u, Tv)_E| = c \|v\|_E \ \forall v \in D(T)\},$$

$$(T^*u, v)_E = (u, Tv)_E, \ \forall u \in D(T^*), \ \forall v \in D(T).$$

L'opérateur T^* ainsi défini est continu et l'on a $\|T^*\| = \|T\|$.

Lemme B.34 La fermeture de l'image de T est l'orthogonal du noyau de son adjoint :

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)^\perp.$$

Définition B.35 On dit que l'opérateur T est **auto-adjoint** si $T^* = T$.

Un critère particulièrement utile pour caractériser un opérateur auto-adjoint est donné par la

Proposition B.36 Soit T un opérateur symétrique de domaine $D(T)$ défini sur E . S'il existe un nombre réel λ tel que $T + \lambda I$ est surjectif, alors $D(T)$ est dense dans E et T est auto-adjoint.

DÉMONSTRATION. Nous prouvons tout d'abord que le domaine $D(T)$ est dense dans E . Considérons un élément w de $D(T)^\perp$. Le fait que l'opérateur $T + \lambda I$ est surjectif implique que w peut s'écrire sous la forme : $w = Tz + \lambda z$, avec $z \in D(T)$. Nous avons alors :

$$(w, v) = (Tz + \lambda z, v) = (z, Tv + \lambda v) = 0, \ \forall v \in D(T),$$

car T est symétrique. Nous en déduisons que $z \in (\mathcal{R}(T + \lambda I))^\perp$ et donc que $z = w = 0$.

L'opérateur T étant symétrique, $D(T) \subset D(T^*)$. Pour montrer que T est auto-adjoint, il suffit donc de montrer que $D(T^*) \subset D(T)$.

Soit un élément v de $D(T^*)$. Par hypothèse, il existe $z \in D(T)$ tel que $Tz + \lambda z = T^*v + \lambda v$ et, $\forall u \in D(T)$, nous avons :

$$(v, Tu + \lambda u) = (T^*v + \lambda v, u) = (Tz + \lambda z, u) = (z, Tu + \lambda u).$$

Il en résulte que $(v - z)$ appartient à $(\mathcal{R}(T + \lambda I))^\perp$, donc que $z = v$.

□

B.3.4 Théorème de Steinberg

Le résultat suivant, dû à Steinberg [144], montre quelles sont les propriétés de l'inverse d'une famille analytique d'opérateurs de Fredholm (c'est-à-dire de perturbations compactes de l'identité). Il généralise une propriété bien connue pour une fonction analytique dans un ouvert du plan complexe : si cette fonction n'est pas identiquement nulle, son inverse est méromorphe, ses pôles étant les zéros de la fonction.

Théorème B.37 *Si $T(z)$ est une famille d'opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert E , dépendant analytiquement de $z \in \mathcal{D}$, où \mathcal{D} est un ouvert connexe de \mathbb{C} , alors on a l'alternative suivante :*

- (i) *L'opérateur $I - T(z)$ n'est inversible pour aucune valeur de $z \in \mathcal{D}$.*
- (ii) *L'opérateur $(I - T(z))^{-1}$ est une fonction méromorphe dans \mathcal{D} , ses pôles étant les valeurs de $z \in \mathcal{D}$ pour lesquelles 1 est valeur propre de $T(z)$.*

Annexe C

Calcul de modes guidés

Cette annexe est consacrée au calcul analytique ou semi-analytique de modes de l'équation de Galbrun dans un conduit rigide bidimensionnel et en présence d'un écoulement porteur uniforme ou uniforme par morceaux.

C.1 Modes guidés en écoulement uniforme

Nous considérons un conduit bidimensionnel infini (*i.e.*, un guide plan) de hauteur constante l et dont les parois sont rigides. Celui-ci est représenté sur la figure C.1. À l'intérieur de ce guide est présent un écoulement porteur de fluide parfait, de direction l'axe du guide et de vitesse v_0 supposée uniforme et subsonique.

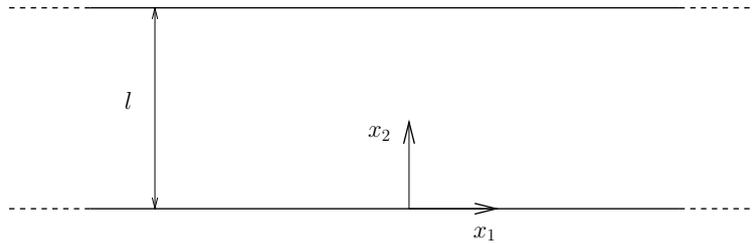


FIG. C.1 – Le guide plan.

Cette géométrie étant séparable, l'étude des modes guidés consiste à chercher, pour une pulsation ω donnée¹, des solutions non nulles de l'équation de Galbrun homogène, de la forme :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(x_2) e^{i(\beta x_1 - \omega t)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R} \times [0, l], \quad t \geq 0. \quad (\text{C.1})$$

avec $\beta \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{w} \in L^2([0, l])^2$, et vérifiant les conditions aux limites de parois rigides :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = l, \quad (\text{C.2})$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur normal unitaire extérieur aux parois du conduit. En introduisant la relation (C.1) dans l'équation de Galbrun pour un écoulement porteur uniforme :

$$\rho_0 \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \rho_0 c_0^2 \nabla(\text{div } \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0},$$

nous obtenons le système d'équations différentielles suivant pour le champ \mathbf{w} :

$$-(k - M\beta)^2 w_1 - i\beta \left(i\beta w_1 + \frac{dw_2}{dx_2} \right) = 0, \quad (\text{C.3})$$

¹La pulsation ω est ici un réel strictement positif.

$$-(k - M\beta)^2 w_2 - \left(i\beta \frac{dw_1}{dx_2} + \frac{d^2 w_2}{dx_2^2} \right) = 0, \quad (\text{C.4})$$

dans lequel nous avons introduit le nombre d'onde $k = \frac{\omega}{c_0}$ et le nombre de Mach $M = \frac{v_0}{c_0}$, $0 \leq M < 1$. Par ailleurs, les conditions aux limites (C.2) se traduisent par :

$$w_2(0) = w_2(l) = 0. \quad (\text{C.5})$$

Si $(k - M\beta)^2 - \beta^2 = 0$, la composante w_2 d'une solution vérifiant le système (C.3)-(C.4) et les conditions aux limites (C.5) est identiquement nulle. Il s'ensuit que la composante w_1 est une fonction constante. Cette solution est appelée un *mode plan*.

Supposons à présent que $(k - M\beta)^2 - \beta^2 \neq 0$. En dérivant l'équation (C.3) par rapport à la variable x_2 , nous obtenons :

$$\frac{dw_1}{dx_2} = - \frac{i\beta}{(k - M\beta)^2 - \beta^2} \frac{d^2 w_2}{dx_2^2}.$$

Nous utilisons cette dernière relation dans (C.4) pour trouver l'équation différentielle vérifiée par la fonction w_2 :

$$(k - M\beta)^2 \left(\frac{d^2 w_2}{dx_2^2} + ((k - M\beta)^2 - \beta^2) w_2 \right) = 0. \quad (\text{C.6})$$

Il faut alors distinguer deux cas de figure pour la résolution de l'équation (C.6).

Premier cas : les modes acoustiques. Nous avons :

$$\frac{d^2 w_2}{dx_2^2} + ((k - M\beta)^2 - \beta^2) w_2 = 0, \quad (\text{C.7})$$

d'où est tirée la relation de dispersion :

$$(k - M\beta)^2 - \beta^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{C.8})$$

Nous trouvons deux "familles" de nombres d'onde axiaux, respectivement notées β_n^+ et β_n^- , dépendant chacune de l'entier n , qui sont solutions de (C.8) :

$$\beta_n^\pm = \frac{-kM \pm \sqrt{k^2 - (1 - M^2) \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}}{1 - M^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (\text{C.9})$$

la détermination pour la racine carrée complexe étant choisie de la manière suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2}}, \quad 0 \leq \arg(z) < 2\pi. \quad (\text{C.10})$$

Nous introduisons à présent quelques définitions et notions utiles pour l'étude de ces solutions.

La *vitesse de phase* $\frac{\omega}{\beta}$ représente la vitesse avec laquelle les plans de phase constante ($\beta x_1 - \omega t$) se déplacent. La *vitesse de groupe* $\frac{\partial \omega}{\partial \beta}$ s'identifie à la vitesse de transport de l'énergie dans le conduit à parois rigides.

Par abus de langage, le nombre d'onde k pour lequel la quantité $k^2 - (1 - M^2) \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ s'annule est appelé la "*fréquence de coupure*". Si β est réel, c'est à dire si $k^2 - (1 - M^2) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \geq 0$, les modes sont dits *propagatifs*. Si, par contre, $k^2 - (1 - M^2) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} < 0$, β est complexe et l'onde est exponentiellement amortie (la solution à croissance exponentielle n'étant pas retenue). Ces modes sont appelés les modes *évanescents*.

Par ailleurs, les nombres d'onde axiaux β_n^+ réels pour lesquels les vitesses de groupe et de phase sont positives correspondent aux modes dont les plans de phase et l'énergie se propagent dans le sens de l'écoulement. Ils sont pour cette raison qualifiés de modes *aval*. Un mode dont la vitesse de groupe est positive et la vitesse de phase négative est appelé *mode amont inverse* car, bien que l'énergie de l'onde soit transportée dans le sens de l'écoulement, les plans de phase se déplacent à contre-courant. Enfin, les modes associés aux nombres d'onde axiaux β_n^- sont qualifiés de modes *amont*.

Il reste à présent à calculer explicitement les modes guidés. Une solution de l'équation différentielle (C.7) est :

$$w_2(x_2) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} x_2\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La première composante du vecteur \mathbf{w} associé s'obtient alors en utilisant l'équation (C.3) :

$$w_1(x_2) = -\frac{i\beta l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x_2\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Remarquons que la valeur $n = 0$ peut être ajoutée aux valeurs non nulles de l'entier n déjà considérées, puisque nous avons bien $(k - M\beta)^2 - \beta^2 = 0$ dans ce cas et que nous retrouvons le mode plan. On peut enfin vérifier que ces modes, en nombre discret, sont à rotationnel nul. Ils sont appelés les modes acoustiques, ou parfois encore les modes de pression.

Deuxième cas : les modes hydrodynamiques. Nous considérons cette fois que :

$$(k - M\beta)^2 = 0 \text{ d'où } \beta = \frac{k}{M}.$$

Il faut résoudre l'équation (C.3), qui s'écrit alors :

$$i\beta w_1 = -\frac{dw_2}{dx_2}. \quad (\text{C.11})$$

Pour toute fonction φ appartenant à $H_0^1([0, l])$, il existe une solution de (C.11) de la forme :

$$\mathbf{w} = i\frac{M}{k} \frac{d\varphi}{dx_2} \mathbf{e}_1 + \varphi \mathbf{e}_2.$$

Ces modes sont à divergence nulle et forment un continuum. Ils portent le nom de modes hydrodynamiques, par analogie avec les solutions obtenues dans les écoulements incompressibles.

C.2 Modes en écoulement uniforme par morceaux

Nous considérons un conduit bidimensionnel infini de hauteur constante, à parois rigides respectivement situées en $x_2 = y_-$ et $x_2 = y_+$, représenté sur la figure C.2.

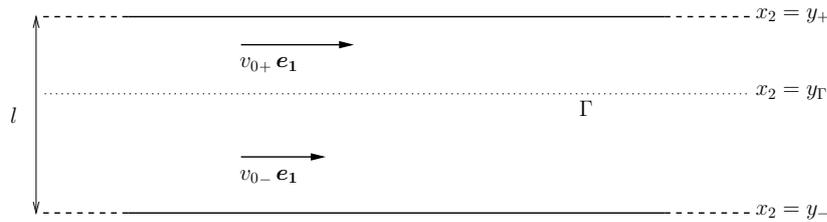


FIG. C.2 – La nappe de vorticité.

Ce guide est occupé par un fluide parfait et homogène en écoulement uniforme de vitesse $v_{0-} = M_- c_0$ dirigée suivant le vecteur \mathbf{e}_1 dans sa partie inférieure, c'est-à-dire pour $y_- < x_2 < y_\Gamma$, et de vitesse $v_{0+} = M_+ c_0$ dans sa partie supérieure, c'est-à-dire pour $y_\Gamma < x_2 < y_+$. Une couche de cisaillement d'épaisseur nulle, dite encore nappe de vorticité ou dioptré, notée Γ et située en $x_2 = y_\Gamma$, sépare les deux écoulements, qui sont supposés subsoniques (*i.e.*, $-1 < M_- < 1$ et $-1 < M_+ < 1$). Le fluide contenu dans le conduit étant par hypothèse homogène, la masse volumique ρ_0 et la vitesse du son dans le fluide non perturbé c_0 sont supposées uniformes et constantes dans l'écoulement. Cette configuration constitue par conséquent une simplification du problème traité théoriquement et numériquement dans le chapitre 3.

Comme précédemment, le déplacement lagrangien $\boldsymbol{\xi}$, solution de l'équation de Galbrun, est recherché sous la forme d'une fonction à variables séparées :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(x_2) e^{i(\beta x_1 - \omega t)},$$

où ω désigne la pulsation. Le champ \mathbf{w} , supposé appartenir à $L^2([y_-, y_+])^2$ vérifie alors l'équation suivante :

$$\frac{D^2 \mathbf{w}}{Dt^2} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{w}) = \mathbf{0},$$

avec $\frac{D}{Dt} = i(M_- \beta - k)$ si $y_- < x_2 < y_\Gamma$ et $\frac{D}{Dt} = i(M_+ \beta - k)$ si $y_\Gamma < x_2 < y_+$.

Nous supposons de plus que le déplacement lagrangien est irrotationnel hors de la nappe de vorticité. Il dérive donc d'un potentiel de la forme :

$$\phi(x_1, x_2, t) = \varphi(x_2) e^{i(\beta x_1 - \omega t)},$$

et par suite :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} i\beta \varphi(x_2) \\ \varphi'(x_2) \end{pmatrix} e^{i(\beta x_1 - \omega t)}.$$

Le problème posé est complété par des conditions aux limites de parois rigides, qui s'écrivent :

$$\varphi'(y_+) = 0 \text{ et } \varphi'(y_-) = 0. \quad (\text{C.12})$$

et des conditions de transmission sur l'interface Γ , qui sont d'une part la continuité du déplacement normal, ce qui se traduit par :

$$[\varphi']_\Gamma = 0, \quad (\text{C.13})$$

où $[\varphi']_\Gamma$ désigne le saut de la fonction φ' au travers de Γ , et d'autre part la continuité de la pression, c'est-à-dire de la divergence du déplacement, soit encore :

$$[\Delta \phi]_\Gamma = 0.$$

Le potentiel ϕ vérifiant dans l'écoulement l'équation :

$$\frac{D^2 \phi}{Dt^2} - \Delta \phi = 0, \quad (\text{C.14})$$

nous avons $[\Delta \phi]_\Gamma = \left[\frac{D^2 \phi}{Dt^2} \right]_\Gamma = 0$ et finalement :

$$[(M\beta - k)^2 \varphi]_\Gamma = 0. \quad (\text{C.15})$$

Posant ensuite ν_+ (respectivement ν_-) comme étant la racine carrée de la quantité complexe $(M_+ \beta - k)^2 - \beta^2$ (resp. $(M_- \beta - k)^2 - \beta^2$) selon la détermination (C.10), nous nous servons des conditions (C.12) pour résoudre l'équation (C.14). Nous trouvons :

$$\varphi_\pm(x_2) = A_\pm \cos(\nu_\pm(x_2 - y_\pm)),$$

où A_+ et A_- sont des coefficients complexes constants, déterminés au moyen des relations de dispersion tirées des conditions de transmissions (C.13) et (C.15) :

$$\begin{aligned} A_+ \nu_+ \sin(\nu_+(y_\Gamma - y_+)) &= A_- \nu_- \sin(\nu_-(y_\Gamma - y_-)) \\ A_+(\beta^2 + \nu_+^2) \cos(\nu_+(y_\Gamma - y_+)) &= A_-(\beta^2 + \nu_-^2) \cos(\nu_-(y_\Gamma - y_-)) \end{aligned}$$

Les valeurs de β correspondant à des modes sont ensuite obtenues en trouvant dans le plan complexe les zéros du déterminant de ce système d'équations, via la méthode de Newton-Raphson par exemple.

Annexe D

Étude de solutions particulières d'une équation de transport

Cette annexe est consacrée à l'étude de solutions de l'équation de transport du second ordre vérifiée par le rotationnel du déplacement lagrangien dans un écoulement porteur uniforme subsonique, établie notamment dans les chapitres 2 et 5. Le domaine considéré, désigné par Ω , est un guide droit dirigé selon le vecteur \mathbf{e}_1 , bi- ou tridimensionnel et de section bornée notée $\tilde{\Omega}$. Nous traiterons deux cas distincts, l'un pour lequel le domaine est borné dans la direction x_1 , ce qui correspond aux problèmes étudiés en dimension trois dans le chapitre 2 et en dimension deux dans l'annexe E, l'autre en domaine non borné, cas traité dans le chapitre 5 et pour lequel le principe d'absorption limite est utilisé. Nous souhaitons en particulier obtenir des estimations de la norme de ces solutions en fonction de celles des données du problème.

Rappelons qu'en dimension deux, le rotationnel du champ de déplacement est un scalaire noté ψ et l'équation de transport s'écrit :

$$-k^2 \psi - 2ikM \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = g, \quad \forall x_2 \in \tilde{\Omega}, \quad (\text{D.1})$$

avec k le nombre d'onde ($k > 0$), M est le nombre de Mach ($0 < M < 1$) et où g , la source de perturbation hydrodynamique¹, est une fonction de l'espace $L^2(\Omega)$ à support compact. En dimension trois, le rotationnel du déplacement est un vecteur noté $\boldsymbol{\psi}$ vérifiant l'équation vectorielle :

$$-k^2 \boldsymbol{\psi} - 2ikM \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial x_1^2} = \mathbf{g}, \quad \forall (x_2, x_3) \in \tilde{\Omega},$$

où $\mathbf{g} (= \text{rot } \mathbf{f})$ est à support compact et appartient à $L^2(\Omega)^3$. Nous ne traiterons ici que le problème bidimensionnel, l'extension au cas tridimensionnel des résultats établis ne présentant aucune difficulté supplémentaire mais davantage de calculs. Par conséquent, dans la suite de l'annexe, nous avons $\tilde{\Omega} = [0, l]$, où l est la hauteur du guide.

D.1 Quelques préliminaires

D.1.1 Solution de l'équation homogène

Nous déterminons tout d'abord la solution générale de l'équation différentielle homogène :

$$-k^2 \psi - 2ikM \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Cette dernière a la forme suivante :

$$\psi_h(x_1, x_2) = (a(x_2) + b(x_2)x_1) e^{i\frac{k}{M}x_1}, \quad (\text{D.2})$$

¹Le terme source de l'équation (D.1) est ainsi qualifié car il provient de la partie rotationnelle, *i.e.*, $g = \text{rot } \mathbf{f}$, de la source de perturbation \mathbf{f} dans l'équation de Galbrun.

les fonctions a et b de la variable x_2 étant déterminées au moyen de conditions supplémentaires² imposées au champ ψ pour fermer le problème.

D.1.2 Fonctions de Green

L'obtention d'une solution particulière de (D.1) passe par le calcul d'une fonction de Green de l'équation. Nous renvoyons à Stakgold [143] pour un exposé du formalisme de résolution. Nous déterminons ci-dessous deux fonctions de Green, correspondant chacune à un jeu de conditions aux limites envisagé pour l'équation.

Fonction de Green causale

Cette fonction, notée G , dépend uniquement de la variable x_1 et vérifie :

$$-k^2 G - 2ikM \frac{\partial G}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} = \delta \text{ dans } \Omega,$$

avec δ la masse de Dirac, ainsi que, en vertu de la causalité³ :

$$G(x_1) = 0 \text{ si } x_1 < 0.$$

Elle est aussi continue en 0 et sa dérivée présente un saut en ce point :

$$\frac{1}{M^2} [G'(0)] = 1.$$

Nous obtenons alors aisément que :

$$G(x_1) = \frac{x_1}{M^2} H(x_1) e^{i\frac{k}{M}x_1}, \quad (\text{D.3})$$

où H désigne la fonction de Heaviside⁴.

Fonction de Green pour le problème de Dirichlet

Pour le traitement d'un problème posé dans un domaine borné $\Omega = [x_-, x_+] \times [0, l]$, nous pouvons calculer la fonction de Green vérifiant des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur les frontières artificielles du domaine. Notons que la fonction n'est alors plus définie intrinsèquement, mais relativement au domaine considéré, d'où une forme analytique plus compliquée.

Soit z appartenant à $[x_-, x_+]$. Pour tout point x_1 de cet intervalle, nous notons $G(x_1, z)$ la fonction de Green vérifiant l'équation :

$$-k^2 G(x_1, z) - 2ikM \frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, z) + M^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}(x_1, z) = \delta(x_1 - z),$$

où $\delta(x_1 - z)$ désigne la masse de Dirac au point z , avec les conditions aux limites homogènes suivantes :

$$G(x_-, z) = 0 \text{ et } G(x_+, z) = 0. \quad (\text{D.4})$$

De plus, cette fonction est continue en $x_1 = z$:

$$[G(z, z)] = 0, \quad \forall z \in [x_-, x_+], \quad (\text{D.5})$$

et sa dérivée $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, z)$ est discontinue en $x_1 = z$:

$$M^2 \left[\frac{\partial G}{\partial x_1}(z, z) \right] = 1, \quad \forall z \in [x_-, x_+]. \quad (\text{D.6})$$

²C'est-à-dire des conditions aux limites si le domaine Ω est borné, des conditions à l'infini sinon.

³La causalité est ici exprimée par rapport à la variable d'espace x_1 . Le problème étant posé en régime harmonique, il est naturel de la relier à la causalité en temps du problème transitoire.

⁴Nous rappelons que la fonction de Heaviside est la fonction indicatrice des réels positifs.

Comme précédemment, la fonction G est cherchée sous la forme :

$$G(x_1, z) = \begin{cases} (a^- + b^-(x_1 - z)) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} & \text{si } x_1 \leq z, \\ (a^+ + b^+(x_1 - z)) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} & \text{si } x_1 > z, \end{cases}$$

où a^- , a^+ , b^- et b^+ sont des constantes à déterminer. En utilisant la condition de saut (D.5), nous avons $a^- = a^+ = a$. La condition (D.6) donne quant à elle :

$$b^+ = b^- + \frac{1}{M^2}.$$

Posons $b^- = b$, $b^+ = b + M^{-2}$, la fonction de Green s'écrit :

$$G(x_1, z) = \begin{cases} (a + b(x_1 - z)) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} & \text{si } x_1 \leq z, \\ (a + (b + M^{-2})(x_1 - z)) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} & \text{si } x_1 > z. \end{cases}$$

Nous utilisons à présent les conditions aux limites (D.4) :

En $x_1 = x_-$: nous avons $G(x_-, z) = 0$ avec $z \geq x_-$, soit :

$$(a + b(x_- - z)) e^{i\frac{k}{M}(x_- - z)} = 0,$$

d'où $a = -b(x_- - z)$.

En $x_1 = x_+$: nous avons $G(x_+, z) = 0$ avec $z \leq x_+$, soit :

$$(a + (b + M^{-2})(x_+ - z)) e^{i\frac{k}{M}(x_+ - z)} = 0,$$

d'où $b(x_2) = -\frac{(x_+ - z)}{M^2(x_+ - x_-)}$.

Nous trouvons finalement :

$$G(x_1, z) = \begin{cases} \frac{(x_+ - z)}{M^2(x_+ - x_-)} (x_- - x_1) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} & \text{si } x_1 \leq z, \\ \frac{(x_+ - x_1)}{M^2(x_+ - x_-)} (x_- - z) e^{i\frac{k}{M}(x_1 - z)} & \text{si } x_1 > z. \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

D.1.3 Solution générale de l'équation différentielle

La solution générale de l'équation différentielle (D.1) est donnée par la somme d'une solution particulière de l'équation, obtenue par convolution de la fonction de Green causale G , obtenue en (D.3), avec la fonction $z \mapsto g(z, x_2)$ issue du second membre, *i.e.*,

$$G * g(\cdot, x_2)(x_1) = \int_{\mathbb{R}} G(x_1 - z) g(z, x_2) dz,$$

et de la solution générale de l'équation homogène. Notons que le produit de convolution ci-dessus est défini presque partout. La solution générale de (D.1) s'écrit alors :

$$\psi(x_1, x_2) = \left(\int_{-\infty}^{x_1} \frac{x_1 - z}{M^2} e^{-i\frac{k}{M}z} g(z, x_2) dz + a(x_2) + b(x_2) x_1 \right) e^{i\frac{k}{M}x_1}, \forall (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (\text{D.8})$$

D.2 Résolution en domaine borné

Nous considérons dans cette section un domaine borné $\Omega = [x_-, x_+] \times [0, l]$. Le problème à résoudre est constitué de l'équation différentielle :

$$-k^2 \psi - 2ikM \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = g \text{ dans } \Omega, \quad (\text{D.9})$$

et des conditions aux limites, imposées aux extrémités du guide, suivantes :

$$\psi(x_-, x_2) = \psi_{\Sigma_-}(x_2) \text{ et } \psi(x_+, x_2) = \psi_{\Sigma_+}(x_2), \quad \forall x_2 \in [0, l]. \quad (\text{D.10})$$

Nous formulons par ailleurs l'hypothèse que les fonctions ψ_{Σ_-} et ψ_{Σ_+} appartiennent à l'espace $L^2([0, l])$, conformément à ce que nous avons supposé dans les chapitres 2 et 3. Nous avons le

Théorème D.1 *La solution du problème (D.9)-(D.10) est donnée par :*

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{\Omega} G(x_1, z) g(z, x_2) dz + (a(x_2) + b(x_2) x_1) e^{i \frac{k}{M} x_1}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (\text{D.11})$$

où G est la fonction de Green définie en (D.7) et où les fonctions a et b sont respectivement :

$$a(x_2) = \frac{\psi_{\Sigma_-}(x_2) x_+ e^{-i \frac{k}{M} x_-} - \psi_{\Sigma_+}(x_2) x_- e^{-i \frac{k}{M} x_+}}{x_+ - x_-} \text{ et } b(x_2) = \frac{\psi_{\Sigma_+}(x_2) e^{-i \frac{k}{M} x_+} - \psi_{\Sigma_-}(x_2) e^{-i \frac{k}{M} x_-}}{x_+ - x_-}.$$

De plus, cette fonction appartient à l'espace $L^2(\Omega)$ et nous avons :

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_{\Sigma_-}\|_{L^2([0, l])}^2 + \|\psi_{\Sigma_+}\|_{L^2([0, l])}^2 \right), \quad (\text{D.12})$$

où C est une constante strictement positive.

DÉMONSTRATION. La solution (D.11) du problème est obtenue par utilisation du principe de superposition. Celle-ci est alors la somme de la solution du problème sans second membre (*i.e.*, pour $g = 0$) avec conditions aux limites imposées (D.10) et de la solution du problème avec second membre et conditions aux limites homogènes, donnée par :

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{\Omega} G(x_1, z) g(z, x_2) dz,$$

où G est la fonction de Green définie en (D.7). Il reste à obtenir l'estimation (D.12). Nous déterminons tout d'abord les fonctions a et b et trouvons :

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= \frac{1}{M^2(x_+ - x_-)} \int_{x_-}^{x_1} (x_+ - z)(x_- - x_1) e^{i \frac{k}{M}(x_1 - z)} g(z, x_2) dz \\ &+ \frac{1}{M^2(x_+ - x_-)} \int_{x_1}^{x_+} (x_+ - x_1)(x_- - z) e^{i \frac{k}{M}(x_1 - z)} g(z, x_2) dz \\ &+ \frac{\psi_{\Sigma_-}(x_2) x_+ e^{-i \frac{k}{M} x_-} - \psi_{\Sigma_+}(x_2) x_- e^{-i \frac{k}{M} x_+}}{x_+ - x_-} e^{i \frac{k}{M} x_1} \\ &+ \frac{\psi_{\Sigma_+}(x_2) e^{-i \frac{k}{M} x_+} - \psi_{\Sigma_-}(x_2) e^{-i \frac{k}{M} x_-}}{x_+ - x_-} x_1 e^{i \frac{k}{M} x_1}. \end{aligned}$$

Des majorations grossières permettent alors de déduire que :

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 \leq 3 \left(\frac{(x_+ - x_-)^3}{M^4} \int_{x_-}^{x_+} |g(z, x_2)|^2 dz + \frac{4x_+^2}{(x_+ - x_-)^2} |\psi_{\Sigma_-}(x_2)|^2 + \frac{(x_- + x_+)^2}{(x_+ - x_-)^2} |\psi_{\Sigma_+}(x_2)|^2 \right).$$

L'estimation est enfin trivialement obtenue en intégrant cette inégalité sur le domaine Ω et en posant :

$$C = 3 \max \left(\frac{(x_+ - x_-)^4}{M^4}, \frac{4x_+^2}{x_+ - x_-}, \frac{(x_+ - x_-)^2}{x_+ - x_-} \right).$$

□

D.3 Résolution en domaine non borné

Dans cette section, nous nous plaçons dans la configuration étudiée au chapitre 5. Le domaine est non borné, *i.e.*, $\Omega = \mathbb{R} \times [0, l]$, et, en vue d'appliquer le principe d'absorption limite, le nombre d'onde réel k est remplacé par le complexe $k_\epsilon = k + i\epsilon$, où ϵ désigne un réel strictement positif. L'équation à résoudre est dans ce cas :

$$-k_\epsilon^2 \psi^\epsilon - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \psi^\epsilon}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \psi^\epsilon}{\partial x_1^2} = g \text{ dans } \Omega. \quad (\text{D.13})$$

Le terme source g de l'équation étant supposé appartenir à l'espace $L^2(\Omega)$, nous pouvons énoncer le résultat de régularité suivant :

Théorème D.2 *L'équation (D.13) admet une unique solution ψ^ϵ dans $L^2(\Omega)$ vérifiant l'inégalité :*

$$\|\psi^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\epsilon \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

où C_ϵ est une constante positive dépendant du paramètre réel ϵ .

DÉMONSTRATION. Par utilisation de la formule (D.8) pour la résolution de l'équation (D.13), il vient :

$$\psi^\epsilon(x_1, x_2) = \frac{1}{M^2} \int_{-\infty}^{x_1} (x_1 - z) e^{i \frac{k_\epsilon}{M}(x_1 - z)} g(z, x_2) dz, \quad (\text{D.14})$$

le fait que ψ^ϵ appartient à $L^2(\Omega)$ annulant effectivement la partie de la solution provenant de la résolution de l'équation homogène associée au problème. Nous posons ensuite :

$$d_- = \min_{x_2 \in [0, l]} \{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2) \in \text{supp } g\} \text{ et } d_+ = \max_{x_2 \in [0, l]} \{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2) \in \text{supp } g\},$$

et considérons les trois cas de figure suivants.

Cas $x_1 < d_-$. Nous avons $] -\infty, x_1] \cap [d_-, d_+] = \emptyset$, d'où $\psi^\epsilon(x_1, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in [0, l]$. Les perturbations sont donc irrotationnelles en amont de la source.

Cas $d_- \leq x_1 \leq d_+$. Nous avons :

$$\psi^\epsilon(x_1, x_2) = \frac{1}{M^2} \int_{d_-}^{x_1} (x_1 - z) e^{i \frac{k_\epsilon}{M}(x_1 - z)} g(z, x_2) dz.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|\psi^\epsilon(x_1, x_2)|^2 \leq \frac{1}{M^4} \left(\int_{d_-}^{x_1} (x_1 - z)^2 e^{-\frac{2\epsilon}{M}(x_1 - z)} dz \right) \left(\int_{d_-}^{x_1} |g(z, x_2)|^2 dz \right).$$

Après majoration, nous aboutissons à :

$$|\psi^\epsilon(x_1, x_2)|^2 \leq \frac{(d_+ - d_-)^3}{M^4} e^{-\frac{2\epsilon}{M}(d_+ - d_-)} \int_{d_-}^{d_+} |g(z, x_2)|^2 dz,$$

soit finalement :

$$\int_{d_-}^{d_+} \int_0^l |\psi^\epsilon(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq C_1 \|g\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où $C_{1\epsilon} = \frac{(d_+ - d_-)^4}{M^4} e^{-\frac{2\epsilon}{M}(d_+ - d_-)}$.

Cas $x_1 > d_+$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\psi^\epsilon(x_1, x_2) &= \frac{1}{M^2} \int_{d_-}^{d_+} (x_1 - z) e^{i\frac{k_\epsilon}{M}(x_1 - z)} g(z, x_2) dz \\ &= \left(-\frac{1}{M^2} \int_{d_-}^{d_+} z e^{-i\frac{k_\epsilon}{M}z} g(z, x_2) dz + \frac{x_1}{M^2} \int_{d_-}^{d_+} e^{-i\frac{k_\epsilon}{M}z} g(z, x_2) dz \right) e^{i\frac{k_\epsilon}{M}x_1}.\end{aligned}$$

En posant ensuite

$$\psi^\epsilon(x_1, x_2) = (a_\epsilon(x_2) + x_1 b_\epsilon(x_2)) e^{i\frac{k_\epsilon}{M}x_1},$$

nous arrivons à :

$$\int_{d_+}^{+\infty} \int_0^l |\psi^\epsilon(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq \|a_\epsilon\|_{L^2([0, l])} \int_{d_+}^{+\infty} e^{-\frac{2\epsilon}{M}x_1} dx_1 + \|b_\epsilon\|_{L^2([0, l])} \int_{d_+}^{+\infty} |x_1| e^{-\frac{2\epsilon}{M}x_1} dx_1.$$

Or, nous avons :

$$|a_\epsilon(x_2)|^2 \leq \frac{1}{M^4} \int_{d_-}^{d_+} z^2 e^{-\frac{2\epsilon}{M}z} dz \int_{d_-}^{d_+} |g(z, x_2)|^2 dz \text{ et } |b_\epsilon(x_2)|^2 \leq \frac{1}{M^4} \int_{d_-}^{d_+} e^{-\frac{2\epsilon}{M}z} dz \int_{d_-}^{d_+} |g(z, x_2)|^2 dz,$$

d'où :

$$\int_{d_+}^{+\infty} \int_0^l |\psi^\epsilon(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq C_{2\epsilon} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$\text{avec } C_{2\epsilon} = \frac{1}{M^4} \max \left(\int_{d_-}^{d_+} z^2 e^{-\frac{2\epsilon}{M}z} dz \int_{d_+}^{+\infty} e^{-\frac{2\epsilon}{M}x_1} dx_1, \int_{d_-}^{d_+} e^{-\frac{2\epsilon}{M}z} dz \int_{d_+}^{+\infty} |x_1| e^{-\frac{2\epsilon}{M}x_1} dx_1 \right).$$

Nous déduisons finalement l'inégalité annoncée en posant :

$$C_\epsilon = \sqrt{\max(C_{1\epsilon}, C_{2\epsilon})}.$$

□

Remarque D.3 En utilisant une des propriétés de la convolution de fonctions, et pour peu que la source g soit de régularité suffisante, nous pouvons aisément obtenir de la même façon les estimations :

$$\|\psi^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\epsilon \|g\|_{H^1(\Omega)},$$

$$\|\psi^\epsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C_\epsilon \|g\|_{H^2(\Omega)},$$

et ainsi de suite.

Annexe E

Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme

Cette annexe reproduit la note parue aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris constituant la référence [35].

Signalons que la valeur de s^* , le majorant des valeurs exceptionnelles du paramètre de régularisation s dont il est question dans l'énoncé du théorème 2.3. de cette note, est inexacte. Nous allons ici la déterminer effectivement en détaillant, dans une situation légèrement plus générale (le cas rotationnel), la preuve d'équivalence esquissée dans la note.

Nous nous plaçons dans le domaine convexe $\Omega = [x_-, x_+] \times [0, l]$. Le problème variationnel étudié est le suivant : trouver \mathbf{u} appartenant à l'espace $V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ tel que, pour tout \mathbf{v} de V ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) + s (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} - s \psi \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} M^2 \psi \bar{v}_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) d\sigma. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Théorème E.1 *Toute solution \mathbf{u} de (E.1) est telle que $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \psi$ dans Ω , sauf pour des valeurs exceptionnelles du paramètre de régularisation s .*

DÉMONSTRATION. Considérons dans ce problème variationnel des fonctions test \mathbf{v} de la forme $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \phi$, $\forall \phi \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Il est alors facile de vérifier que $\mathbf{v} \in V$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-k^2 \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{\phi} - 2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \operatorname{rot} \bar{\phi} - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial (\operatorname{rot} \bar{\phi})}{\partial x_1} - s (\operatorname{rot} \mathbf{u})(\Delta \bar{\phi}) \right) d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \bar{\phi} - s \psi \Delta \bar{\phi}) d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} M^2 \psi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) d\sigma. \end{aligned}$$

Nous intégrons ensuite par parties pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} \left(-k^2 \bar{\phi} + 2ikM \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_1^2} - s \Delta \bar{\phi} \right) d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{f} \bar{\phi} - s \psi \Delta \bar{\phi}) d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} M^2 \psi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) d\sigma. \end{aligned}$$

Par utilisation de l'équation différentielle :

$$-k^2 \psi - 2ikM \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = \operatorname{rot} \mathbf{f},$$

nous remplaçons le terme $\text{rot } \mathbf{f}$ dans le second membre de l'équation précédente et trouvons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{u} \left(-k^2 \bar{\phi} + 2ikM \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_1^2} - s \Delta \bar{\phi} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left(\left(-k^2 \psi - 2ikM \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right) \bar{\phi} - s \psi \Delta \bar{\phi} \right) d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} M^2 \psi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) d\sigma. \end{aligned}$$

Nous effectuons de nouveau des intégrations par parties pour finalement arriver à :

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{u} - \psi) \left(-k^2 \bar{\phi} + 2ikM \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_1^2} - s \Delta \bar{\phi} \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (\text{E.2})$$

En vertu du résultat de densité donné par le théorème 1.6.2 de [80], l'égalité (E.2) est vraie pour toute fonction ϕ de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. En posant

$$\mathcal{H}_{k,M,s} = -k^2 I - 2ikM \frac{\partial}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - s \Delta,$$

où I désigne l'opérateur identité, il vient :

$$(\text{rot } \mathbf{u} - \psi, \mathcal{H}_{k,M,s} \phi)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Le champ $(\text{rot } \mathbf{u} - \psi)$ appartient donc à l'orthogonal dans $L^2(\Omega)$ de l'image de l'opérateur $\mathcal{H}_{k,M,s}$ de domaine $D = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Nous énonçons ensuite le

Lemme E.2 *L'opérateur $\mathcal{H}_{k,M,s}$ est auto-adjoint, de domaine D dense dans $L^2(\Omega)$.*

Une conséquence de ce lemme est que $(\text{rot } \mathbf{u} - \psi)$ appartient au noyau de l'opérateur $\mathcal{H}_{k,M,s}$. La géométrie du conduit le permettant, nous utilisons la séparation de variables pour déterminer les éléments de ce noyau. Posons :

$$\varphi(x_1, x_2) = g_n(x_1) h_n(x_2), \quad \forall \varphi \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_{k,M,s}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

où, pour tout entier non nul n , la fonction h_n vérifie :

$$-\frac{d^2 h_n}{dx_2^2} = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} h_n$$

dans la section transverse $[0, l]$. Nous avons alors :

$$\mathcal{H}_{k,M,s} \varphi = \left(\left(s \frac{\pi^2 n^2}{l^2} - k^2 \right) g_n - 2ikM \frac{dg_n}{dx_1} + (M^2 - s) \frac{d^2 g_n}{dx_1^2} \right) h_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

d'où :

$$\left(s \frac{\pi^2 n^2}{l^2} - k^2 \right) g_n - 2ikM \frac{dg_n}{dx_1} + (M^2 - s) \frac{d^2 g_n}{dx_1^2} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

avec les conditions aux limites $g_n(x_-) = g_n(x_+) = 0$. Cherchant la solution de cette équation différentielle sous la forme d'une exponentielle e^{rx_1} , nous obtenons, pour chaque valeur non nulle de l'entier naturel n , l'équation caractéristique suivante :

$$(M^2 - s) r^2 - 2ikM r + \left(s \frac{\pi^2 n^2}{l^2} - k^2 \right) = 0.$$

Cette équation possède *a priori* deux racines distinctes, notées r_1 et r_2 , et les fonctions g_n sont toutes identiquement nulles si :

$$r_2 \neq r_1 + \frac{2\pi m}{L}, \quad m \in \mathbb{Z}^*,$$

avec $L = x_+ - x_-$, ce qui réduit à zéro le noyau de l'opérateur $\mathcal{H}_{k,M,s}$. Les valeurs exceptionnelles du paramètre s sont alors celles pour lesquelles la relation ci-dessus est une égalité. En utilisant que $r_1 + r_2 = \frac{2kM}{s-M^2}$ et que $r_1 r_2 = \frac{s\pi^2 n^2 - k^2 l^2}{(s-M^2)l^2}$, l'identité $(r_2 - r_1)^2 = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2$ s'écrit :

$$\left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 = \left(\frac{2kM}{s-M^2}\right)^2 - 4\left(\frac{s\pi^2 n^2 - k^2 l^2}{(s-M^2)l^2}\right),$$

et nous trouvons une équation du second degré pour le paramètre s :

$$\left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 - \left(\frac{2kM}{s-M^2}\right)^2 + 4\left(\frac{s\pi^2 n^2 - k^2 l^2}{(s-M^2)l^2}\right) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^*,$$

soit encore :

$$\left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right) s^2 - \left(k^2 + M^2 \left(2\left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2}\right) + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)\right) + M^4 \left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2}\right) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Seule l'une des deux racines de cette dernière équation est plus grande que M^2 et donc susceptible d'être compatible avec la condition du théorème 2.1 du chapitre 2 voulant que $s \geq 1$. Les valeurs de s incriminées dans l'énoncé sont alors :

$$s = \frac{k^2 + M^2 \pi^2 \left(2\left(\frac{m^2}{L^2}\right) + \frac{n^2}{l^2}\right) + \sqrt{\left(k^2 + M^2 \left(\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)\right)^2 + 4M^2 k^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2}\right)}{2\pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{l^2}\right)}, \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et nous pouvons vérifier qu'elles sont toutes majorées (par exemple) par :

$$s^* = 2M^2 + \frac{k^2}{\pi^2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{l^2}\right)}.$$

□

Nous établissons maintenant la

DÉMONSTRATION DU LEMME E.2. Nous montrons tout d'abord que cet opérateur est symétrique. En effet, nous avons, pour tous ϕ, φ appartenant au domaine D de l'opérateur :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{k,M,s}\phi, \varphi)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \left(-k^2 \phi - 2ikM \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - s \Delta \phi \right) \bar{\varphi} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \phi \left(-k^2 \bar{\varphi} + 2ikM \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_1} + M^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_1^2} - s \Delta \bar{\varphi} \right) \, d\mathbf{x} \\ &= (\phi, \mathcal{H}_{k,M,s}\varphi)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous prouvons à présent qu'il existe une constante positive c telle que l'opérateur $\mathcal{H}_{k,M,s} + cI$ est inversible, I désignant l'opérateur identité. Pour tout ϕ de $H_0^1(\Omega)$, nous avons :

$$\begin{aligned} ((\mathcal{H}_{k,M,s} + cI)\phi, \phi)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \left((c - k^2) |\phi|^2 - 2ikM \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \bar{\phi} + M^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \bar{\phi} - s (\Delta \phi) \bar{\phi} \right) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left((c - k^2) |\phi|^2 + (s - M^2) \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right|^2 + s \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|^2 \right) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

dont nous déduisons que $((\mathcal{H}_{k,M,s} + cI) \cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ est une forme sesquilinéaire continue, coercive sur $H_0^1(\Omega)$ si $c > k^2$, puisque, par hypothèse, $s > M^2$. Soit $g \in L^2(\Omega)$; si $c > k^2$, le problème variationnel : *trouver* $\phi \in H_0^1(\Omega)$ *tel que*

$$\int_{\Omega} \left((c - k^2) \phi \bar{\varphi} - M^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_1} + s \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\varphi} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g \bar{\varphi} d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

admet donc une solution unique ϕ appartenant à $H_0^1(\Omega)$, par application du lemme de Lax-Milgram (théorème B.22). D'après les théorèmes classiques de régularité, nous avons de plus $\phi \in H^2(\Omega)$. Nous concluons que l'opérateur est auto-adjoint de domaine dense en utilisant la proposition B.36.

□

Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA ^a, Guillaume LEGENDRE ^b, Éric LUNÉVILLE ^a

^a Laboratoire de Simulation et de Modélisation des phénomènes de Propagation, URA 853 du CNRS, ENSTA, 32, boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15, France

^b Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, BP 72, 29 avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon cedex, France

Courriel : bonnet@ensta.fr; guillaume.legendre@onera.fr; lunevill@ensta.fr

(Reçu le 26 mars 2001, accepté après révision le 19 juin 2001)

Résumé.

Nous considérons l'équation de Galbrun, utilisée en acoustique linéaire dans les écoulements. Dans un cas simple (conduit rigide avec écoulement uniforme) et en régime harmonique établi, nous montrons qu'une approche basée sur une formulation variationnelle régularisée du problème permet d'assurer la convergence d'une méthode d'éléments finis nodaux. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

acoustique / acoustique en écoulement / méthode variationnelle / régularisation

Mathematical analysis of Galbrun's equation with uniform flow

Abstract.

We consider Galbrun's equation, used in linear aeroacoustics. For a simple case (rigid duct with uniform flow) in the time harmonic regime, we show that an approach based on a regularized variational formulation of the problem ensures the convergence of a nodal finite-element method. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

acoustics / aeroacoustics / variational method / regularization

Abridged English version

Galbrun's equation (1) is a linear vector wave equation based on the Lagrangian displacement variable ξ [1,2].

The problem is a two-dimensional one, set in the xy plane. A rigid duct of width l and infinite length, which walls are parallel to the x axis, is considered. We suppose that the flow is subsonic and uniform, in the direction x , the static pressure p_0 is uniform, the time regime is harmonic ($e^{-i\omega t}$ with pulsation $\omega > 0$) and an acoustic source \mathbf{f} (such that $\text{rot } \mathbf{f} = 0$) is present. The displacement ξ is then a solution to (2).

As solving a problem set in an unbounded domain requires to model the asymptotic behavior of the solution at infinity (by means of a radiation condition for instance) that would be beyond the scope of this note, we consider the domain $\Omega =]0, L[\times]0, l[$. Galbrun's equation (2) then resumes to (5), where $\frac{D}{Dt} = -ik + M \frac{\partial}{\partial x}$, with k the wave number ($k = \omega/c_0$, where c_0 denotes the sound celerity in the undisturbed medium, $c_0 = 1$) and M the Mach number ($M = v_0/c_0$, $-1 < M < 1$).

In the non-flow case (equation (3)), the solution is irrotational (i.e. $\text{curl } \xi = 0$) and hence satisfies the vector Helmholtz equation (4). This leads to the introduction of a so-called 'regularized' formulation for Galbrun's equation with uniform flow.

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

In the irrotational case, the ‘classical’ problem (5)–(7) is replaced by an equivalent ‘regularized’ one, composed of equation (8) and additional boundary conditions (9). We prove this new formulation leads to a well-posed variational problem (of the Fredholm type) in a closed subspace V of $(H^1(\Omega))^2$. As a consequence, the use of standard Lagrange nodal elements to compute a numerical solution by means of a finite element method is allowed.

For the rotational case, we first notice the rotational of the displacement verifies a second-order differential equation, which can be solved if $\text{curl } \xi$ is given on the artificial boundaries of the domain Ω . The ‘regularized’ formulation introduced before is then used to impose, in a weak sense, the value of $\text{curl } \xi$ in the variational formulation of the problem. Once again, we prove the problem is well-posed in V .

We conclude this paper with some limitations of the method in the case of a nonconvex domain (while the regularized problem is still well-posed, it is no longer equivalent to the initial one) or with nonuniform flow (in which a coupling between acoustic, i.e. irrotational, and hydrodynamic, i.e. rotational, modes occurs and therefore prevents us from determining $\text{curl } \xi$ a priori in Ω).

1. L'équation de Galbrun

L'équation de Galbrun [1,2] est une équation linéaire de propagation des ondes portant sur le vecteur déplacement Lagrangien ξ ; plus précisément, ξ représente le déplacement d'une particule fluide dans un écoulement perturbé par rapport à sa position dans le même écoulement non perturbé (dit écoulement d'entraînement) et s'exprime en fonction des coordonnées (x, t) (représentation mixte Euler–Lagrange).

En l'absence de source de volume ou de force extérieure, cette équation s'écrit :

$$\rho_0 \frac{D^2 \xi}{Dt^2} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \xi + \xi \cdot \nabla p_0) + (\nabla \cdot \xi + \xi \cdot \nabla) \nabla p_0 = 0 \quad (1)$$

où $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée convective par rapport à l'écoulement d'entraînement et ρ_0, c_0, p_0 désignent respectivement la masse volumique du fluide parfait, la célérité du son et la pression statique dans le milieu non perturbé.

Nous considérons un conduit rigide bidimensionnel, de largeur l et de longueur infinie. Le problème est posé dans le plan xy , où l'axe x (respectivement y) est parallèle (respectivement orthogonal) aux parois du conduit. L'écoulement est supposé subsonique, de vitesse uniforme v_0 dans la direction x . Nous supposons la pression statique uniforme. Le régime est harmonique, de pulsation ω ($\omega > 0$), et une source acoustique f (telle que $\text{rot } f = 0$) est présente.

Le champ de déplacement Lagrangien ξ vérifie alors :

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{D^2 \xi}{Dt^2} - \rho_0 c_0^2 \nabla(\nabla \cdot \xi) &= f \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, 0 < y < l \\ \xi \cdot n &= 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, y = 0 \text{ et } y = l \\ \text{avec } \frac{1}{c_0} \frac{D}{Dt} &= -ik + M \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (2)$$

où k , le nombre d'onde ($k = \omega/c_0$), et M , le nombre de Mach ($M = v_0/c_0, -1 < M < 1$), ainsi que le champ f sont des données du problème (nous supposons dans la suite que $\rho_0 = 1$ et $c_0 = 1$).

Dans le cas $M = 0$, l'équation (2) se réduit à :

$$-k^2 \xi - \nabla(\nabla \cdot \xi) = f \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, 0 < y < l \quad (3)$$

Le champ de déplacement solution de (2) est irrotationnel (il suffit de prendre le rotationnel de l'équation). Par conséquent, ξ est solution de l'équation de Helmholtz vectorielle :

$$-k^2 \xi - \Delta \xi = f \tag{4}$$

en vertu de la relation $\text{rot}(\text{rot } \xi) - \nabla(\nabla \cdot \xi) = -\Delta \xi$. Nous retrouvons alors un cadre classique pour l'analyse mathématique et la discrétisation du problème.

La prise en compte de cette propriété d'irrotationnalité de la solution dans le cas sans écoulement joue donc un rôle essentiel dans la résolution numérique de l'équation. Nous montrons comment généraliser cette approche au problème avec écoulement uniforme, en considérant successivement le cas pour lequel la solution est irrotationnelle puis le cas rotationnel.

La résolution en conduit non borné pose des questions liées au comportement de la solution à l'infini (condition de rayonnement notamment) qui n'entrent pas dans le cadre de cette note. C'est pourquoi nous posons à présent le problème sur une portion du guide. Le domaine correspondant au conduit tronqué est désigné par $\Omega =]0, L[\times]0, l[$.

Notre objectif est de montrer que l'on peut reconstituer la solution dans Ω à partir de données sur les frontières artificielles (notées $\Gamma_0 = \{x = 0, 0 < y < l\}$ et $\Gamma_L = \{x = L, 0 < y < l\}$) que nous préciserons dans la suite.

2. Le cas irrotationnel

Dans le cas où la solution recherchée est irrotationnelle, le problème que nous étudions devient :

$$\frac{D^2 \xi}{Dt^2} - \nabla(\nabla \cdot \xi) = f \quad \text{dans } \Omega \tag{5}$$

$$\text{rot } \xi = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{6}$$

$$\xi \cdot n \text{ donné sur } \partial\Omega$$

Pour $f = 0$, il est possible de déterminer la solution par décomposition modale. Par linéarité, nous nous ramenons alors au problème (5)–(6) avec la condition aux limites homogène :

$$\xi \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{7}$$

Nous introduisons l'équation de Galbrun 'régularisée' suivante :

$$\frac{D^2 \xi}{Dt^2} - \nabla(\nabla \cdot \xi) + s \text{rot}(\text{rot } \xi) = f \quad \text{dans } \Omega \tag{8}$$

où s est un réel positif. Nous complétons cette équation par la condition aux limites (7), ainsi qu'une condition supplémentaire, nécessaire à l'équivalence avec le problème (5)–(7) :

$$\xi \cdot n = 0, \quad \text{rot } \xi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{9}$$

L'idée à la base de la construction d'un problème «régularisé», initialement introduite et développée pour les équations de Maxwell (voir, par exemple, [3] ou, plus récemment, [4]), est de faire apparaître un opérateur elliptique dans l'équation. Dans le cadre d'une résolution numérique par éléments finis dans un domaine convexe et régulier, cette méthode constitue une alternative à l'utilisation des éléments finis d'arêtes [5] pour la discrétisation des champs électromagnétiques, puisqu'elle permet l'emploi d'éléments finis standards de type Lagrange.

Nous allons maintenant montrer que le problème régularisé est bien posé et équivalent au problème de départ.

Nous considérons une fonction test régulière η , telle que $\eta \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, et supposons que $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$. En multipliant (8) par η et en intégrant sur le domaine Ω , nous avons :

$$\int_{\Omega} \left(-k^2 \xi - 2ikM \frac{\partial \xi}{\partial x} + M^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \nabla(\nabla \cdot \xi) + s \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \xi) \right) \cdot \bar{\eta} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\eta} \, d\Omega$$

Après quelques intégrations par parties et l'utilisation des conditions aux limites, nous sommes conduits à introduire le problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \xi \in V = \{ \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2 \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \} \text{ tel que } \forall \eta \in V, \\ \int_{\Omega} \left(-k^2 \xi \cdot \bar{\eta} - 2ikM \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \bar{\eta} - M^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} + (\nabla \cdot \xi)(\nabla \cdot \bar{\eta}) + s(\operatorname{rot} \xi)(\operatorname{rot} \bar{\eta}) \right) \, d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\eta} \, d\Omega \quad (10) \\ \text{Posons } a(\xi, \eta) = \int_{\Omega} \left(\xi \cdot \bar{\eta} + (\nabla \cdot \xi)(\nabla \cdot \bar{\eta}) + s(\operatorname{rot} \xi)(\operatorname{rot} \bar{\eta}) - M^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \right) \, d\Omega \end{aligned}$$

THÉORÈME 2.1. – Si $s \geq 1$, la forme bilinéaire a est coercive sur V .

Démonstration. – D'après Costabel (cf. [6], theorem 4.1, p. 539), pour tout ξ de V , nous avons :

$$\int_{\Omega} (|\nabla \cdot \xi|^2 + s |\operatorname{rot} \xi|^2) \, d\Omega \geq \min(1, s) \int_{\Omega} (|\nabla \cdot \xi|^2 + |\operatorname{rot} \xi|^2) \, d\Omega = \min(1, s) \int_{\Omega} |\nabla \xi|^2 \, d\Omega$$

Le résultat s'en déduit car $M^2 < 1$. \square

THÉORÈME 2.2. – Si $s \geq 1$, le problème variationnel (10) relève de l'alternative de Fredholm.

Démonstration. – Le problème (10) peut s'écrire sous la forme :

$$a(\xi, \eta) - \int_{\Omega} \left((k^2 + 1)\xi + 2ikM \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \cdot \bar{\eta} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\eta} \, d\Omega$$

Ainsi, la forme bilinéaire est la somme d'un terme coercif (d'après le théorème précédent) et d'un terme compact (ce qui résulte de la compacité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$). \square

Nous montrons maintenant l'équivalence entre la formulation variationnelle du problème régularisé et le problème (5)–(7). Nous avons le

THÉORÈME 2.3. – Si $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$ et $s > s^* = M^2 + (k^2/\pi^2)(1/L^2 + 1/l^2)^{-1}$ alors toute solution ξ de (10) est à rotationnel nul.

Démonstration. – Soit $\varphi \in \{ \varphi \in H^3(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$ et $\eta = \operatorname{rot} \varphi$. On vérifie aisément que $\eta \in V$. En remplaçant dans la formulation variationnelle (10), nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \left(-k^2 \xi \cdot \operatorname{rot} \bar{\varphi} - 2ikM \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \operatorname{rot} \bar{\varphi} - M^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\operatorname{rot} \bar{\varphi})}{\partial x} - s(\operatorname{rot} \xi) \Delta \bar{\varphi} \right) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \bar{\varphi} \, d\Omega$$

Nous réalisons ensuite des intégrations par parties pour arriver à :

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \xi \left(-k^2 \bar{\varphi} + 2ikM \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + M^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - s \Delta \bar{\varphi} \right) \, d\Omega = 0$$

Par un résultat de densité (cf. [7], théorème 1.6.2, p. 30), ce résultat est vrai pour toute fonction φ de $D = \{\varphi \in H^2(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Le rotationnel de ξ appartient donc à l'orthogonal dans $L^2(\Omega)$ de l'image de l'opérateur :

$$\mathcal{H}_{k,M,s} = -k^2 I + 2ikM \frac{\partial}{\partial x} + M^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - s \Delta$$

de domaine D . Cet opérateur étant auto-adjoint, $\text{rot } \xi$ est dans le noyau de $\mathcal{H}_{k,M,s}$. Un calcul explicite par séparation de variables permet finalement de montrer que ce noyau est réduit à $\{0\}$, sauf pour des valeurs exceptionnelles de s comprises entre M^2 et s^* . \square

La régularisation de la formulation variationnelle du problème par prise en compte, en un sens faible, de la contrainte d'irrotationnalité permet de résoudre deux points sensibles. D'une part, le terme dépendant du nombre de Mach de la forme bilinéaire a est « contrôlé » et le problème est de type Fredholm si $s > s^*$. D'autre part, cette régularisation permet une approximation par éléments finis nodaux conformes à l'espace $H^1(\Omega)$ et nous avons les résultats classiques de convergence.

3. Le cas rotationnel

Nous nous intéressons maintenant aux solutions à rotationnel non nul de l'équation (5). En prenant le rotationnel de cette équation, on vérifie que :

$$-k^2 \text{rot } \xi - 2ikM \frac{\partial(\text{rot } \xi)}{\partial x} + M^2 \frac{\partial^2(\text{rot } \xi)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (11)$$

Il est donc possible de déterminer analytiquement $\psi = \text{rot } \xi$, solution de l'équation différentielle (11), à partir de sa donnée (supposée régulière) sur Γ_0 et Γ_L . Remarquons que la prise en compte d'une source \mathbf{f} à rotationnel non nul ne poserait pas de difficulté supplémentaire.

Nous introduisons le problème régularisé suivant :

$$\frac{D^2 \xi}{Dt^2} - \nabla(\nabla \cdot \xi) + s \text{rot}(\text{rot } \xi - \psi) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (12)$$

muni des conditions aux limites (7) et :

$$\text{rot } \xi = \psi|_{\partial\Omega} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (13)$$

La formulation variationnelle du problème est identique à (10), excepté pour le second membre, qui devient :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}} + s \psi(\text{rot } \bar{\boldsymbol{\eta}})) \, d\Omega - \int_{\{\Gamma_0 \cup \Gamma_L\}} M^2 \psi (\bar{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{e}_y) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) \, dS$$

À nouveau, ce problème variationnel relève de l'alternative de Fredholm. Nous montrons son équivalence avec le problème fort.

Soit $\varphi \in \{\varphi \in H^3(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et $\boldsymbol{\eta} = \text{rot } \varphi$. ψ étant solution de l'équation (11) pour le rotationnel de ξ , nous avons :

$$\int_{\Omega} \psi \left(-k^2 \bar{\varphi} + 2ikM \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + M^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} \right) \, d\Omega = \int_{\{\Gamma_0 \cup \Gamma_L\}} M^2 \psi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) \, dS \quad (14)$$

En procédant comme dans la preuve du théorème 2.3 et en utilisant (14), nous obtenons :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\psi})(\mathcal{H}_{k,M,s}\bar{\varphi}) \, d\Omega = 0$$

Le résultat de densité précédemment cité permet de conclure que le champ $\boldsymbol{\xi}$ solution du problème variationnel régularisé vérifie $\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\psi}$.

4. Conclusion

En conclusion, nous avons obtenu pour le problème considéré (écoulement uniforme et domaine rectangulaire) une formulation mathématique de l'équation de Galbrun qui se prête à une discrétisation par éléments finis nodaux.

Notons qu'en présence d'écoulement, la donnée du déplacement normal sur le bord du domaine ne suffit plus à la détermination de $\boldsymbol{\xi}$ et doit être complétée par la donnée du rotationnel de $\boldsymbol{\xi}$ sur les frontières transverses à l'écoulement.

La généralisation de cette approche (autre géométrie ou écoulement non uniforme) soulève de nouvelles difficultés :

- si le domaine Ω est à coins rentrants (en présence d'une plaque plane dans le conduit par exemple), la formulation régularisée reste mathématiquement bien posée. En revanche, elle n'est plus équivalente au problème initial car l'ensemble D n'est plus égal au domaine de $\mathcal{H}_{k,M,s}$;
- dans le cas d'un écoulement non uniforme, un couplage existe entre les modes acoustiques (irrotationnels) et hydrodynamiques (rotationnels) et il n'est plus possible de déterminer a priori $\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}$ dans le domaine.

Références bibliographiques

- [1] Galbrun H., Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [2] Poirée B., Les équations de l'acoustique linéaire et non linéaire dans un écoulement de fluide parfait, *Acustica* 57 (1985) 5–25.
- [3] Werner P., On the exterior boundary value problem of perfect reflection for stationary electromagnetic wave fields, *J. Math. Anal. Appl.* 7 (1963) 348–396.
- [4] Hazard C., Lenoir M., On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations, *SIAM J. Math. Anal.* 27 (1996) 1597–1630.
- [5] Nédélec J.-C., Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 , *Numer. Math.* 35 (1980) 315–341.
- [6] Costabel M., A coercive bilinear form for Maxwell's equations, *J. Math. Anal. Appl.* 157 (1991) 527–541.
- [7] Grisvard P., *Singularities in Boundary Value Problems*, Masson, Paris, 1992.

Bibliographie

- [1] S. ABARBANEL, D. GOTTLIEB, AND J. S. HESTHAVEN, *Well-posed perfectly matched layers for advective acoustics*, J. Comput. Phys., 154 (1999), pp. 266–283.
- [2] T. ABOUD AND J. C. NÉDÉLEC, *Electromagnetic waves in inhomogeneous medium*, J. Math. Anal. Appl., 164 (1992), pp. 40–58.
- [3] D. G. ANDREWS AND M. E. MCINTYRE, *On wave-action and its relatives*, J. Fluid. Mech., 89 (1978), pp. 647–664.
- [4] F. ASSOUS, P. CIARLET, JR. ET E. GARCIA, *Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charges dans un domaine singulier bidimensionnel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 330 (2000), pp. 391–396.
- [5] F. ASSOUS, P. CIARLET, JR., AND J. SEGRÉ, *Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains: the singular complement method*, J. Comput. Phys., 161 (2000), pp. 218–249.
- [6] R. J. ASTLEY AND W. EVERSMAN, *A finite element formulation of the eigenvalue problem in lined ducts with flow*, J. Sound Vibration, 65 (1979), pp. 61–74.
- [7] ———, *Acoustic transmission in non-uniform ducts with mean flow, part II: the finite element method*, J. Sound Vibration, 74 (1981), pp. 103–121.
- [8] H. L. ATKINS AND C.-W. SHU, *Quadrature-free implementation of discontinuous Galerkin method for hyperbolic equations*, AIAA J., 36 (1998), pp. 775–782.
- [9] J.-P. AUBIN, *Approximation of elliptic boundary-value problems*, vol. XXVI of Pure and applied mathematics, Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1972.
- [10] C. BAILLY AND D. JUVÉ, *Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler equations*, AIAA J., 38 (2000), pp. 22–29.
- [11] A. BAMBERGER AND A.-S. BONNET, *Mathematical analysis of the guided modes of an optical fiber*, SIAM J. Appl. Math., 21 (1990), pp. 1487–1510.
- [12] K. J. BATHE, C. NITIKITPAIBOON, AND X. WANG, *A mixed displacement-based finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction*, Comput. & Structures, 56 (1995), pp. 225–237.
- [13] A. BAYLISS AND E. TURKEL, *Far-field boundary conditions for compressible flows*, J. Comput. Phys., 48 (1982), pp. 182–199.
- [14] E. BÉCACHE, A.-S. BONNET-BEN DHIA, AND G. LEGENDRE, *Perfectly matched layers for acoustics in presence of a uniform flow*. In preparation.
- [15] ———, *Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation*. To appear in SIAM J. Numer. Anal.
- [16] E. BÉCACHE, S. FAUQUEUX, AND P. JOLY, *Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves*, J. Comput. Phys., 188 (2003), pp. 399–433.
- [17] M. BEN TAHAR ET J. P. DIAS, *Propagation et rayonnement acoustique en présence d’un écoulement non uniforme par une méthode de couplage FEM/BEM*, Rev. Européenne Élém. Finis, 8 (1999), pp. 497–524.
- [18] A. BENDALI AND P. GUILLAUME, *Non-reflecting boundary conditions for waveguides*, Math. Comp., 68 (1999), pp. 123–144.

- [19] J.-P. BÉRENGER, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys., 114 (1994), pp. 185–200.
- [20] ———, *Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys., 127 (1996), pp. 363–379.
- [21] ———, *Improved PML for the FDTD solution of wave-structure interaction problems*, IEEE Trans. Antennas and Propagation, 45 (1997), pp. 466–473.
- [22] A. BERMÚDEZ, R. DURÁN, M. A. MUSCHIETTI, R. RODRÍGUEZ, AND J. SOLOMIN, *Finite element vibration analysis of fluid-solid systems without spurious modes*, SIAM J. Numer. Anal., 32 (1995), pp. 1280–1295.
- [23] A. BERMÚDEZ, L. HERVELLA-NIETO, AND R. RODRÍGUEZ, *Finite element computation of three-dimensional elastoacoustic vibrations*, J. Sound Vibration, 219 (1999), pp. 279–306.
- [24] A. BERMÚDEZ AND D. G. PEDREIRA, *Mathematical analysis of a finite element method without spurious solutions for computation of dielectric waveguides*, Numer. Math., 61 (1992), pp. 39–57.
- [25] A. BERMÚDEZ AND R. RODRÍGUEZ, *Finite element computation of the vibration modes of a fluid-solid system*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 119 (1994), pp. 335–370.
- [26] A. BERMÚDEZ DE CASTRO, *Obtaining the linearized equations for small perturbations of a flow*. Preprint número 54, Departamento de Matemática Aplicada, universidad de Santiago de Compostela, España, 2003.
- [27] I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL, AND R. M. KULSRUD, *An energy principle for hydromagnetic stability problems*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 244 (1958), pp. 17–40.
- [28] M. S. BIRMAN AND M. Z. SOLOMYAK, *L^2 -theory of the Maxwell operator in arbitrary domains*, Russian Math. Surveys, 42 (1987), pp. 75–96.
- [29] D. BOFFI, C. CHINOSI, AND L. GASTALDI, *Approximation of the grad div operator in non-convex domains*, CMES, 1 (2000), pp. 31–44.
- [30] D. BOFFI, P. FERNANDES, L. GASTALDI, AND I. PERUGIA, *Computational models of electromagnetic resonators: analysis of edge element approximation*, SIAM J. Numer. Anal., 36 (1999), pp. 1264–1290.
- [31] D. BOFFI AND L. GASTALDI, *On the “ $-\text{grad div} + s \text{ curl rot}$ ” operator*, in Proc. of MIT first conference on “Computational fluid and solid mechanics”, Cambridge, MA, USA, June 12-15 2001, vol. 2, K.-J. Bathe, ed., Elsevier, 2001, pp. 1526–1529.
- [32] C. BOGEY, C. BAILLY, AND D. JUVÉ, *Computation of flow noise using source terms in linearized Euler’s equations*, AIAA J., 40 (2002), pp. 235–243.
- [33] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. DAHI, E. LUNÉVILLE, AND V. PAGNEUX, *Acoustic diffraction by a plate in a uniform flow*, Math. Models Methods Appl. Sci., 12 (2002), pp. 625–647.
- [34] A.-S. BONNET-BEN DHIA, C. HAZARD, AND S. LOHRENGEL, *A singular field method for the solution of Maxwell’s equations in polyhedral domains*, SIAM J. Appl. Math., 59 (1999), pp. 2028–2044.
- [35] A.-S. BONNET-BEN DHIA, G. LEGENDRE ET E. LUNÉVILLE, *Analyse mathématique de l’équation de Galbrun en écoulement uniforme*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib Méc., 329 (2001), pp. 601–606.
- [36] A. BOSSAVIT, *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*, Mathématiques & applications, vol. 14, Springer-Verlag, Paris, France, 1993.
- [37] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, France, 1983.
- [38] R. J. BRIGGS, *Electron-stream interaction with plasmas*, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1964.
- [39] M. BRUNEAU, *Manuel d’acoustique fondamentale*, Hermès, Paris, France, 1998.
- [40] S. CANDEL, *Analytical studies of some acoustic problems of jet engines*, PhD thesis, California Institute of Technology, 1976.
- [41] H. C. CHEN AND R. L. TAYLOR, *Vibration analysis of fluid-solid systems using a finite element displacement formulation*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., 29 (1990), pp. 683–698.
- [42] W. C. CHEW AND W. H. WEEDON, *A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell’s equations with stretched coordinates*, IEEE Microwave Opt. Technol. Lett., 7 (1994), pp. 599–604.

- [43] P. CIARLET, JR., C. HAZARD ET S. LOHRENGEL, *Les équations de Maxwell dans un polyèdre : un résultat de densité*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 326 (1998), pp. 1305–1310.
- [44] B. COCKBURN, G. E. KARNIADAKIS, AND C.-W. SHU, eds., *Discontinuous Galerkin methods, theory, computation and applications*, vol. 11 of Lecture notes in computational science and engineering, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2000.
- [45] F. COLLINO AND P. MONK, *The perfectly matched layer in curvilinear coordinates*, SIAM J. Sci. Comput., 19 (1998), pp. 2061–2090.
- [46] F. COLLINO AND P. B. MONK, *Optimizing the perfectly matched layer*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 164 (1998), pp. 157–171.
- [47] T. COLONIUS, S. K. LELE, AND P. MOIN, *Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation*, AIAA J., 31 (1993), pp. 1574–1582.
- [48] M. COSTABEL, *A coercive bilinear form for Maxwell's equations*, J. Math. Anal. Appl., 157 (1991), pp. 527–541.
- [49] M. COSTABEL ET M. DAUGE, *Un résultat de densité pour les équations de Maxwell régularisées dans un domaine lipschitzien*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 327 (1998), pp. 849–854.
- [50] ———, *Maxwell and Lamé eigenvalues in polyhedra*, Math. Methods Appl. Sci., 22 (1999), pp. 243–258.
- [51] ———, *Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains*, Numer. Math., 93 (2002), pp. 239–277.
- [52] M. COSTABEL, M. DAUGE, AND S. NICAISE, *Singularities of Maxwell interface problems*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 33 (1999), pp. 627–649.
- [53] A. CUMMINGS, *Sound generation and transmission in flow ducts with axial temperature gradients*, J. Sound Vibration, 57 (1978), pp. 261–279.
- [54] I. DANDA ROY AND W. EVERSMA, *Improved finite element modeling of the turbofan engine inlet radiation problem*, J. Vib. Acoust., 117 (1995), pp. 109–115.
- [55] R. DAUTRAY ET J. L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, tome 1*, Collection du Commissariat à l'Énergie Atomique, Masson, Paris, France, 1984.
- [56] ———, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, tome 2*, Collection du Commissariat à l'Énergie Atomique, Masson, Paris, France, 1985.
- [57] A. DE LA BOURDONNAYE, *Some formulations coupling finite element and integral equation methods for Helmholtz equation and electromagnetism*, Numer. Math., 69 (1995), pp. 257–268.
- [58] L. DEMKOWICZ, P. MONK, C. SCHWAB, AND L. VARDAPETYAN, *Maxwell eigenvalues and discrete compactness in two dimensions*, Comput. Math. Appl., 40 (2000), pp. 589–605.
- [59] J. DIAZ AND P. JOLY, *Stabilized perfectly matched layers for advective wave equations*. In preparation.
- [60] D. E. EDMUNDS AND W. D. EVANS, *Spectral theory and differential operators*, Oxford mathematical monographs, Oxford University Press, New York, NY, USA, 1987.
- [61] D. M. EIDUS, *The principle of limiting absorption*, Amer. Math. Soc. Transl., 47 (1965), pp. 157–191.
- [62] W. EVERSMA, *Effect of boundary layer on the transmission and attenuation of sound in an acoustically treated circular duct*, J. Acoust. Soc. Amer., 49 (1971), pp. 1372–1380.
- [63] W. EVERSMA AND R. J. BECKEMEYER, *Transmission of sound in ducts with thin shear layers—convergence to the uniform flow case*, J. Acoust. Soc. Amer., 52 (1972), pp. 216–220.
- [64] G. J. FIX AND S. P. MARIN, *Variational methods for underwater acoustics problems*, J. Comput. Phys., 28 (1978), pp. 253–270.
- [65] A. B. FRIEDLAND AND A. D. PIERCE, *Reflection of acoustic pulses from stable and unstable interfaces between moving fluids*, Phys. Fluids, 12 (1969), pp. 1148–1159.
- [66] E. A. FRIEMAN AND M. ROTENBERG, *On hydrodynamic stability of stationary equilibria*, Rev. Modern Phys., 32 (1960), pp. 898–902.
- [67] H. GALBRUN, *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence*, Gauthier-Villars, Paris, France, 1931.

- [68] L. GASTALDI, *Mixed finite element methods in fluid structure systems*, Numer. Math., 74 (1996), pp. 153–176.
- [69] P. GERMAIN, *Cours de mécanique des milieux continus, tome I - théorie générale.*, Masson, Paris, France, 1973.
- [70] M. B. GILES, *Non-reflecting boundary conditions for Euler equation calculations*, AIAA J., 28 (1990), pp. 2050–2058.
- [71] V. GIRAULT AND P.-A. RAVIART, *Finite element methods for Navier-Stokes equations, theory and algorithms*, vol. 5 of Springer series in computational mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1986.
- [72] D. GIVOLI, *Non-reflecting boundary conditions*, J. Comput. Phys., 94 (1991), pp. 1–29.
- [73] D. GIVOLI AND J. B. KELLER, *A finite element method for large domains*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 76 (1989), pp. 41–66.
- [74] ———, *Non-reflecting boundary conditions for elastic waves*, Wave Motion, 12 (1990), pp. 261–279.
- [75] O. A. GODIN, *Reciprocity and energy theorems for waves in a compressible inhomogeneous moving fluid*, Wave Motion, 25 (1997), pp. 143–167.
- [76] C. I. GOLDSTEIN, *A finite element method for solving Helmholtz type equations in waveguides and other unbounded domains*, Math. Comp., 39 (1982), pp. 309–324.
- [77] D. GÓMEZ PEDREIRA AND P. JOLY, *A method for computing guided waves in integrated optics. Part II: numerical approximation and error analysis*, SIAM J. Numer. Anal., 39 (2002), pp. 1684–1711.
- [78] J. W. GOODRICH AND T. HAGSTROM, *A comparison of two accurate boundary treatments for computational aeroacoustics*, AIAA paper, 97-1585 (1997).
- [79] P. GRISVARD, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, vol. 24 of Monographs and studies in mathematics, Pitman, London, Great Britain, 1985.
- [80] ———, *Singularities in boundary value problems*, vol. 22 of Research notes in applied mathematics, Masson, Paris, France, 1992.
- [81] R. GRUBER AND J. RAPPAZ, *Finite element methods in linear ideal magnetohydrodynamics*, Springer series in computational physics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 1985.
- [82] T. HAGSTROM AND I. NAZAROV, *Absorbing layers and radiation boundary conditions for jet flow simulations*, in Proc. of the 8th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, 17-19 june 2002, Breckenridge, CO, USA, 2002. AIAA paper 2002-2606.
- [83] M. A. HAMDI, Y. OUSSET, AND G. VERCHERY, *A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., 13 (1978), pp. 139–150.
- [84] I. HARARI, M. SLAVUTIN, AND E. TURKEL, *Analytical and numerical studies of a finite element PML for the Helmholtz equation*, J. Comput. Acoust., 8 (2000), pp. 121–137.
- [85] W. D. HAYES, *Conservation of action and modal wave action*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 320 (1970), pp. 187–208.
- [86] C. HAZARD, *Numerical simulation of corner singularities: a paradox in Maxwell-like problems*, C. R. Mecanique, 330 (2002), pp. 57–68.
- [87] C. HAZARD AND M. LENOIR, *On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations*, SIAM J. Math. Anal., 27 (1996), pp. 1597–1630.
- [88] C. HAZARD AND S. LOHRENGEL, *A singular field method for Maxwell's equations: numerical aspects for 2d magnetostatics*, SIAM J. Numer. Anal., 40 (2002), pp. 1021–1040.
- [89] J. S. HESTHAVEN, *On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations*, J. Comput. Phys., 142 (1998), pp. 129–147.
- [90] P. D. HISLOP AND I. M. SIGAL, *Introduction to spectral theory with applications to Schrödinger operators*, vol. 113 of Applied mathematical sciences, Springer-Verlag, New-York, NY, USA, 1996.
- [91] R. HIXON, S.-H. SHIH, AND R. R. MANKBADI, *Evaluation of boundary conditions for computational aeroacoustics*, AIAA J., 33 (1995), pp. 2006–2012.

- [92] T. HOHAGE, F. SCHMIDT, AND L. ZSCHIEDRICH, *Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition: convergence of the PML method*, Tech. Report 01-23, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, Berlin, Deutschland, 2001.
- [93] M. S. HOWE, *The influence of vortex shedding on the generation of sound by convected turbulence*, J. Fluid Mech., 76 (1976), pp. 711–740.
- [94] F. Q. HU, *On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer*, J. Comput. Phys., 129 (1996), pp. 201–219.
- [95] ———, *A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables*, J. Comput. Phys., 173 (2001), pp. 455–480.
- [96] P. HUERRE AND M. ROSSI, *Hydrodynamics instabilities in open flows*, in Hydrodynamics and nonlinear instabilities, C. Godrèche and P. Manneville, eds., Cambridge University Press, Cambridge, MA, USA, 1998, pp. 81–294.
- [97] C. JOHNSON AND J. C. NÉDÉLEC, *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, Math. Comp., 35 (1980), pp. 1063–1079.
- [98] D. S. JONES AND J. D. MORGAN, *The instability of a vortex sheet on a subsonic stream under acoustic radiation*, Proc. Camb. Phil. Soc., 72 (1972), pp. 465–488.
- [99] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, New York, NY, USA, second ed., 1976.
- [100] F. KIKUCHI, *Mixed and penalty formulations for finite element analysis of an eigenvalue problem in electromagnetism*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 64 (1987), pp. 509–521.
- [101] ———, *On a discrete compactness property for the Nedelec finite elements*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 36 (1989), pp. 479–490.
- [102] S.-H. KO, *Sound attenuation in acoustically lined rectangular ducts with flow and its application to the reduction of aircraft engine noise*, J. Acoust. Soc. Amer., 50 (1971), pp. 1418–1432.
- [103] ———, *Sound attenuation in acoustically lined circular ducts in the presence of uniform flow and shear flow*, J. Sound Vibration, 22 (1972), pp. 193–210.
- [104] M. LASSAS AND E. SOMERSALO, *On the existence and convergence of the solution of PML equations*, Computing, 60 (1998), pp. 229–241.
- [105] R. LEIS, *Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien*, Math. Z., 106 (1968), pp. 213–224.
- [106] A. LENOIR AND A. TOUNSI, *The localized finite element method and its application to the two dimensional sea-keeping problem*, SIAM J. Numer. Anal., 25 (1988), pp. 729–752.
- [107] G. M. LILLEY, *The generation and radiation of supersonic jet noise, vol. IV - theory of turbulence generated noise, noise radiation from upstream sources and combustion noise, part II: generation of sound in a mixing region*, Tech. Report AFAPL-TR-72-53, Air Force Aero Propulsion Laboratory, 1972.
- [108] D. MARTIN, *On line documentation of MÉLINA*. <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/www/homepage.html>.
- [109] M. MINKEVITCH, V. SADTCHIKOV ET M. DJEDDI, *Sur la propagation des ondes acoustiques dans les fluides au repos soumis à la pesanteur*, J. Acoustique, 5 (1992), pp. 455–462.
- [110] W. MÖHRING, E.-A. MÜLLER, AND F. OBERMEIER, *Problems in flow acoustics*, Rev. Modern Phys., 55 (1983), pp. 707–724.
- [111] H. J.-P. MORAND ET R. OHAYON, *Interactions fluides-structures*, Recherches en mathématiques appliquées, vol. 23, Masson, Paris, France, 1992.
- [112] P. M. MORSE AND K. U. INGARD, *Theoretical acoustics*, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1968.
- [113] P. MUNGUR AND G. M. L. GLADWELL, *Acoustic wave propagation in a sheared fluid contained in a duct*, J. Sound Vibration, 9 (1969), pp. 28–48.
- [114] M. K. MYERS, *On the acoustic boundary condition in the presence of flow*, J. Sound Vibration, 71 (1980), pp. 429–434.

- [115] A. H. NAYFEH, J. E. KAISER, AND D. P. TELIONIS, *Acoustics of aircraft engine-duct systems*, AIAA J., 13 (1975), pp. 130–153.
- [116] A. H. NAYFEH AND J. SUN, *Effect of transverse velocity and temperature gradients on sound attenuation in two-dimensional ducts*, J. Sound Vibration, 34 (1974), pp. 505–517.
- [117] J. C. NÉDÉLEC, *Mixed finite elements in \mathbb{R}^3* , Numer. Math., 35 (1980), pp. 315–341.
- [118] ———, *A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3* , Numer. Math., 50 (1986), pp. 57–81.
- [119] W. A. NEWCOMB, *Lagrangian and Hamiltonian methods in magnetohydrodynamics*, Nuclear Fusion: Supplement, part 2, (1962), pp. 451–463.
- [120] B. NILSSON, *Scattering of stable and unstable waves in a flow duct*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 51 (1998), pp. 599–632.
- [121] B. NILSSON AND O. BRANDER, *The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining I. Modes in an infinite duct*, IMA J. Appl. Math., 26 (1980), pp. 269–298.
- [122] ———, *The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining II. Bifurcated ducts*, IMA J. Appl. Math., 26 (1980), pp. 381–410.
- [123] ———, *The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining III. Step discontinuities*, IMA J. Appl. Math., 27 (1981), pp. 105–131.
- [124] ———, *The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining VI. Several interacting discontinuities*, IMA J. Appl. Math., 27 (1981), pp. 263–289.
- [125] V. PAGNEUX, *Propagation acoustique dans les guides à section variable et effets d'écoulement*, thèse de doctorat, Université du Maine, 1996.
- [126] V. PAGNEUX AND B. FROELICH, *Influence of low Mach number shear flow on acoustic propagation in ducts*, J. Sound Vibration, 246 (2001), pp. 137–155.
- [127] P. G. PETROPOULOS, *Reflectionless sponge layers as absorbing boundary condition for the numerical solution of Maxwell's equations in rectangular, cylindrical, and spherical coordinates*, SIAM J. Appl. Math., 60 (2000), pp. 1037–1058.
- [128] J. L. PEUBE ET M. F. JALLET, *Propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement en conduite cylindrique*, Acustica, 29 (1973), pp. 85–92.
- [129] C. PEYRET AND G. ÉLIAS, *Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems*, J. Acoust. Soc. Amer., 110 (2001), pp. 661–668.
- [130] T. J. POINSOT AND S. K. LELE, *Boundary conditions for direct simulations of compressible reacting flows*, J. Comput. Phys., 101 (1992), pp. 104–129.
- [131] B. POIRÉE, *Équations de perturbations et équations de passage associées. Application au dioptré acoustique.*, Rev. CETHEDDEC, 69 (1981), pp. 1–49.
- [132] ———, *L'équation de conservation de l'énergie en acoustique non linéaire dans un fluide parfait hétérogène en mouvement*, Rev. CETHEDDEC, 66 (1981), pp. 1–39.
- [133] ———, *Les équations de l'acoustique linéaire et non linéaire dans un écoulement de fluide parfait*, Acustica, 57 (1985), pp. 5–25.
- [134] ———, *Petites perturbations d'un écoulement tournant*, Acustica, 59 (1985), pp. 85–94.
- [135] D. C. PRIDMORE-BROWN, *Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct*, J. Fluid Mech., 4 (1958), pp. 393–406.
- [136] C. M. RAPPAPORT, *Perfectly matched absorbing conditions based on anisotropic lossy mapping of space*, IEEE Microwave Guided Wave Lett., 5 (1995), pp. 90–92.
- [137] P.-A. RAVIART AND J.-M. THOMAS, *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, in Mathematical aspects of finite element methods, Roma, 1975, I. Galligani and E. Magenes, eds., Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1977, pp. 292–315.
- [138] J. RAZAFIARIVELO, *Optimisation de formes en électromagnétisme*, thèse de doctorat, Université de Paris VI, Paris, France, 1996.
- [139] S. W. RIENSTRA, *Sound transmission in slowly varying circular and annular lined ducts with flow*, J. Fluid Mech., 380 (1999), pp. 279–296.

- [140] S. W. RIENSTRA AND W. EVERSMAAN, *A multiple comparison between the multiple scales and finite-element solution for sound propagation in lined flow ducts*, J. Fluid Mech., 437 (2001), pp. 367–384.
- [141] M. SCHECHTER, *Operator methods in quantum mechanics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Netherlands, 1981.
- [142] R. K. SIGMAN, R. K. MAJJIGI, AND B. T. ZINN, *Determination of turbofan inlet acoustics using finite elements*, AIAA J., 16 (1978), pp. 1139–1145.
- [143] I. STAKGOLD, *Green's functions and boundary value problems*, Pure and applied mathematics, Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1979.
- [144] S. STEINBERG, *Meromorphic families of compact operators*, Arch. Rational Mech. Anal., 31 (1968), pp. 372–379.
- [145] G. STRANG AND G. J. FIX, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall series in automatic computation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1973.
- [146] S. TA'ASAN AND D. NARK, *An absorbing buffer zone technique for acoustic wave propagation*, in Proc. of the 33rd aerospace sciences meeting and exhibit, Reno, NV, USA, 1995. AIAA paper 95-0164.
- [147] D. H. TACK AND R. F. LAMBERT, *Influence of shear flow on sound attenuation in a lined duct*, J. Acoust. Soc. Amer., 38 (1965), pp. 655–666.
- [148] C. K. W. TAM, *Computational aeroacoustics: issues and methods*, AIAA J., 33 (1995), pp. 1788–1796.
- [149] ———, *Advances in numerical boundary conditions for computational aeroacoustics*, J. Comput. Acoust., 6 (1998), pp. 377–402.
- [150] C. K. W. TAM, L. AURIAULT, AND F. CAMBULI, *Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains*, J. Comput. Phys., 144 (1998), pp. 213–234.
- [151] C. K. W. TAM AND Z. DONG, *Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow*, J. Comput. Acoust., 4 (1996), pp. 175–201.
- [152] C. K. W. TAM AND J. C. WEBB, *Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics*, J. Comput. Phys., 107 (1993), pp. 262–281.
- [153] B. J. TESTER, *The propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform or “plug” flow*, J. Sound Vibration, 28 (1973), pp. 151–203.
- [154] K. W. THOMPSON, *Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, I*, J. Comput. Phys., 68 (1987), pp. 1–24.
- [155] ———, *Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II*, J. Comput. Phys., 89 (1990), pp. 439–461.
- [156] I. TOLSTOY, *Wave propagation*, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1973.
- [157] F. TREYSSÈDE, G. GABARD, AND M. BEN TAHAR, *A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian-Lagrangian description*, J. Acoust. Soc. Amer., 113 (2003), pp. 705–716.
- [158] E. TURKEL AND A. YEFET, *Absorbing PML boundary layers for wave-like equations*, Appl. Numer. Math., 27 (1998), pp. 533–557.
- [159] X. WANG AND K.-J. BATHE, *On mixed elements for acoustic fluid-structure interactions*, Math. Models Methods Appl. Sci., 7 (1997), pp. 329–343.
- [160] P. WERNER, *On the exterior boundary value problem of perfect reflection for stationary electromagnetic wave fields*, J. Math. Anal. Appl., 7 (1963), pp. 348–396.
- [161] S. H. WONG AND Z. J. CENDES, *Combined finite element-modal solution in three-dimensional eddy current problems*, IEEE Trans. Magnetics, 24 (1988), pp. 2685–2687.
- [162] L. ZHAO AND A. C. CANGELLARIS, *GT-PML: Generalized theory of perfectly matched layers and its application to the reflectionless truncation of finite-difference time-domain grids*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 44 (1996), pp. 2555–2563.

RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DANS UN FLUIDE EN ÉCOULEMENT : ANALYSE MATHÉMATIQUE ET
NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE GALBRUN

Résumé : Les travaux de cette thèse concernent la simulation numérique de la propagation acoustique dans un fluide en écoulement, en régime périodique établi.

Le modèle retenu pour ces études est l'équation de Galbrun, qui décrit la propagation linéaire d'ondes en présence d'un écoulement de fluide parfait en évolution adiabatique et porte sur le déplacement lagrangien. L'analyse mathématique montre qu'une méthode d'éléments finis nodaux ne permet pas, en général, d'approcher la solution de l'équation, les résultats étant alors fortement pollués par des modes numériques parasites. Dans la première partie de la thèse, nous proposons une méthode de régularisation de l'équation pour laquelle nous prouvons la convergence d'une approximation par éléments finis nodaux pour des problèmes de diffraction dans un conduit en présence d'écoulements subsoniques uniforme ou cisailé.

La deuxième partie du document est consacrée à la construction et l'étude de couches absorbantes parfaitement adaptées, dites PML, pour le rayonnement d'une source à support compact, placée dans un conduit et en présence d'un écoulement uniforme. Nous traitons successivement le cas d'une source acoustique, qui conduit à un problème scalaire, et celui d'une source de perturbations quelconque. Un principe d'absorption limite est établi dans le cas général et nous démontrons un résultat de convergence exponentielle de la méthode de PML en fonction de la longueur des couches.

Des résultats numériques illustrant ces approches sont présentés.

Mots clés : acoustique en écoulement, équation de Galbrun, guide d'ondes, régime harmonique, régularisation, méthode des éléments finis, couches absorbantes parfaitement adaptées.

ACOUSTIC RADIATION IN A MOVING FLUID: MATHEMATICAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF THE
GALBRUN'S EQUATION

Abstract: The works presented in this document are concerned with the numerical simulation of acoustic propagation in a moving fluid, in the frequency domain.

The model retained for these studies is the Galbrun's equation which describes the linear wave propagation in presence of a perfect fluid flow in adiabatic motion and uses the lagrangian displacement as a variable. Mathematical analysis shows that a nodal finite element method is not, in general, suited to approximate the solution of the equation, the computed results being strongly polluted by spurious numerical modes. In the first part of the thesis, we propose a regularization method for which we prove the convergence of a nodal finite element method for diffraction problems in a duct and in presence of uniform or sheared subsonic flows. The second part of the document is devoted to the construction and analysis of perfectly matched absorbing layers for the radiation of a compactly supported source, placed in a duct in a uniform flow. We successively treat the case of an acoustic source, which leads to a scalar problem, and of a more general source of perturbations. A limiting absorption principle is established in the general case and we prove that the convergence of the PML method is exponential with respect to the size of the layers.

Numerical results that illustrate these two approaches are presented.

Keywords: aeroacoustics, Galbrun's equation, waveguide, time-harmonic dependence, regularization, finite element method, perfectly matched layers.