

# Simulation numérique d'un réverbérateur à plaque

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 30 Avril 2009

pour l'obtention du

**Doctorat de l'École Polytechnique**

par

Kevin Arcas Castillo

### Composition du jury

*Directeur de thèse :* Antoine Chaigne

*Président :* Xavier Boutillon

*Rapporteurs :* François Gautier  
Denis Matignon

*Examineurs :* Laurent Daudet  
Stefan Bilbao



## Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Antoine Chaigne, qui m'a encadré dans des conditions plus que favorables pendant mon stage de master Atiam puis tout au long de ma thèse. Je lui suis reconnaissant du savoir et de la rigueur scientifique qu'il a su me transmettre. Ses conseils et ses remarques judicieuses m'ont guidé tout au long de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à François Gautier et Denis Matignon qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse, en dépit du travail important que cela représente. Les critiques et les conseils constructifs qu'ils ont pu émettre ont contribué à l'état définitif de cette thèse.

Je tiens également à remercier particulièrement Xavier Boutillon qui a assuré brillamment la tâche de président du jury. Je remercie également les examinateurs, Stefan Bilbao et Laurent Daudet, dont les questions pertinentes m'ont ouvert de nouvelles perspectives.

Je remercie mes confrères thésards avec lesquels j'ai partagé beaucoup de moments, rires, émotions autour d'un café ou d'un ballon de basket. Merci à Nico Q pour sa gentillesse et pour avoir partagé son sens de l'humour, sa musique et son bureau avec moi. Cédric, son enthousiasme et ses compositions musicales resteront gravés dans ma mémoire. Samuel, toujours de bonne humeur. Kerem et ses routines magiques. Francisco, Virginie, Lionel, Vladimir et Romain.

Et puis un grand merci à tous ceux qui ont su m'accueillir pendant ces années à l'Unité de Mécanique de l'ENSTA. Je remercie particulièrement Cyril pour sa disponibilité et ses remarques lors de mes répétitions et Thierry pour son soutien technique de toute sorte. Je remercie Karine B, Nico B, Olivier C, Olivier D, Regine T, Lahcene C.

Je remercie Jean-Michel Manguy et Louis-Cyrille Trebuchet de Radio France pour le prêt des deux réverbérateurs, EMT140 et EMT 240. Grâce à ce prêt j'ai pu décortiquer ces deux unités et en faire le lien avec la théorie et le calcul numérique. Enfin, merci à W. Khul de les avoir conçu pour le bonheur des amateurs de la musique enregistrée.

Je tiens à remercier Arkamys, qui m'a permis de découvrir le monde de l'audio et de la réverbération, l'équipe enseignante du Master M2 parcours Atiam. Merci aussi à la "Fundació La Caixa".

Je remercie mes parents pour leur support tout au long de mes études et pour les efforts qu'ils ont fait pour que je puisse avoir une bonne éducation depuis mon enfance. Je n'oublie pas mes amis barcelonais qui ont su être si proches même dans la distance, ainsi que les nouvelles amitiés forgées pendant ce passage à Paris.

Le dernier de mes mercis, je l'adresse à Françoise, qui en plus d'accomplir la lourde tâche de se plonger dans ma thèse à la recherche des fautes d'orthographe et de grammaire, a su partager avec moi les moments de doute tout en me faisant cadeau de son soutien inconditionnel.



# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	La réverbération à plaque . . . . .	5
1.1.1	Le phénomène de la réverbération . . . . .	5
1.1.2	Petite histoire de la réverbération artificielle . . . . .	6
1.1.3	Le réverbérateur EMT140 . . . . .	9
1.2	Cadre et objectifs de cette thèse . . . . .	10
1.3	Organisation du manuscrit . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Modélisation</b>	<b>13</b>
2.1	Introduction . . . . .	13
2.2	Équation de propagation des ondes de flexion . . . . .	14
2.2.1	Modèle des vibrations de flexion . . . . .	14
2.2.2	Vérification des hypothèses du modèle . . . . .	15
2.2.3	Quelques résultats de référence . . . . .	17
2.2.4	Adimensionnement du modèle et temps caractéristique . . . . .	23
2.3	Mécanismes dissipatifs dans les plaques . . . . .	23
2.3.1	Amortissement thermoélastique . . . . .	23
2.3.2	Amortissement par rayonnement . . . . .	26
2.3.3	Influence du matériau poreux à proximité . . . . .	32
2.3.4	Transmission d'énergie aux supports . . . . .	34
2.4	Modèle d'actionneur électrodynamique . . . . .	34
2.5	Conclusion . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Mesures</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	37
3.2	Vérification de l'hypothèse de linéarité des vibrations . . . . .	38
3.3	Réponse impulsionnelle (RI) . . . . .	39
3.3.1	Méthode de mesure . . . . .	39
3.3.2	Dispositif expérimental . . . . .	42
3.3.3	Un exemple de mesure . . . . .	43
3.4	Identification des paramètres vibratoires . . . . .	44
3.4.1	Amortissement moyen par bande de fréquence . . . . .	44
3.4.2	Amortissement du réverbérateur EMT140 . . . . .	47
3.4.3	Constante de propagation des ondes de flexion . . . . .	54
3.5	Mesure de la densité modale . . . . .	59

3.5.1	Admittance mécanique de la plaque . . . . .	59
3.5.2	Estimation de la densité modale à partir de l'admittance . . . . .	61
3.6	Couplage actionneur-plaque . . . . .	63
3.6.1	Mesures électriques . . . . .	63
3.6.2	Mesures électromécaniques : $M_m$ et $Bl$ . . . . .	65
3.7	Conclusion . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Simulation</b> . . . . .	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	Simulation par décomposition modale . . . . .	70
4.3	Différences finies d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace . . . . .	71
4.3.1	Présentation du schéma utilisé . . . . .	71
4.3.2	Stabilité . . . . .	72
4.3.3	Dispersion numérique . . . . .	73
4.3.4	Conditions aux limites numériques . . . . .	76
4.3.5	Densité modale numérique . . . . .	77
4.3.6	Admittance mécanique du modèle numérique . . . . .	79
4.3.7	Prise en compte de l'amortissement . . . . .	85
4.3.8	Temps de calcul . . . . .	89
4.4	Stratégie de synthèse . . . . .	90
4.4.1	Ajustement de l'amortissement . . . . .	92
4.4.2	Ajustement de l'énergie totale (égalisation) . . . . .	99
4.5	Conclusion . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Comparaison avec l'acoustique des salles</b> . . . . .	<b>105</b>
5.1	Introduction . . . . .	105
5.2	Domaine temporel . . . . .	106
5.2.1	Propagation des ondes . . . . .	106
5.2.2	Densité d'échos et temps de mélange . . . . .	108
5.2.3	Distribution d'amplitudes de la réponse impulsionnelle . . . . .	111
5.3	Domaine fréquentiel . . . . .	114
5.3.1	Densité modale . . . . .	114
5.3.2	Champ diffus et fréquence de Schroeder . . . . .	114
5.4	Conclusion . . . . .	115
<b>6</b>	<b>Exploitation du modèle</b> . . . . .	<b>117</b>
6.1	Introduction . . . . .	117
6.2	Paramètres de la plaque . . . . .	118
6.2.1	Vibrations des plaques métalliques . . . . .	118
6.2.2	Changement de la densité modale . . . . .	120
6.2.3	Amortissement des plaques métalliques . . . . .	122
6.3	Influence des conditions aux limites . . . . .	126
6.3.1	Domaine temporel . . . . .	126
6.3.2	Domaine fréquentiel . . . . .	128
6.4	Deux exemples de synthèse de RI . . . . .	129
6.4.1	Feuille d'or . . . . .	129
6.4.2	Plaque en aluminium . . . . .	130
6.5	Conclusion . . . . .	132

<b>7</b>	<b>Différences finies pour une plaque circulaire</b>	<b>135</b>
7.1	Introduction . . . . .	135
7.2	Système continu . . . . .	136
7.2.1	Conditions aux limites . . . . .	137
7.2.2	Énergie du système continu . . . . .	137
7.2.3	Modes propres d'une plaque circulaire encastree . . . . .	140
7.3	Différences finies en coordonnées polaires . . . . .	141
7.3.1	Opérateurs aux DF en coordonnées polaires . . . . .	141
7.3.2	Bornes des opérateurs . . . . .	143
7.3.3	Singularité au centre . . . . .	143
7.4	Schéma explicite pour les plaques polaires . . . . .	144
7.4.1	Analyse de la stabilité en milieu infini . . . . .	145
7.4.2	Analyse de la stabilité en milieu fini . . . . .	146
7.4.3	Méthodologie d'analyse de la précision des simulations . . . . .	148
7.4.4	Exemple de simulation . . . . .	149
7.5	Schéma implicite pour les plaques polaires . . . . .	151
7.5.1	Analyse de la stabilité en milieu infini . . . . .	152
7.5.2	Exemple de simulation . . . . .	155
7.6	Remarques sur le choix de $h_r$ et $h_\theta$ . . . . .	158
7.7	Conclusions . . . . .	160
<b>8</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>163</b>
8.1	Principaux apports de cette thèse . . . . .	164
8.1.1	Particularités liées à l'amortissement des vibrations . . . . .	164
8.1.2	Conséquences de la densité modale élevée . . . . .	165
8.1.3	Influence de l'excitateur électrodynamique . . . . .	166
8.1.4	Réverbération à plaque et réverbération acoustique . . . . .	166
8.1.5	Application du modèle . . . . .	167
8.1.6	Simulation de plaques circulaires . . . . .	167
8.2	Perspectives . . . . .	168
	<b>Bibliographie</b>	<b>169</b>
<b>A</b>	<b>Simulation numérique des vibrations de flexion des barres</b>	<b>179</b>
A.1	Barre d'Euler-Bernoulli . . . . .	179
A.1.1	Modèle continu et énergie . . . . .	179
A.1.2	Conditions aux limites continues . . . . .	180
A.2	Fonctions discrètes et opérateurs aux différences en une dimension . . . . .	181
A.2.1	Définition d'un produit scalaire . . . . .	182
A.2.2	Opérateurs formellement adjoints et formellement auto-adjoints . . . . .	182
A.2.3	Bornes supérieures des opérateurs discrets . . . . .	184
A.3	Schéma explicite pour les barres . . . . .	184
A.3.1	Analyse de la stabilité en milieu infini . . . . .	184
A.3.2	Analyse de la stabilité en milieu fini . . . . .	186
A.4	Schéma implicite pour les barres . . . . .	187
A.4.1	Analyse de la stabilité en milieu infini . . . . .	187

<b>B</b>	<b>Le feuille d'or EMT240</b>	<b>191</b>
B.1	Description de l'EMT240 . . . . .	191
B.2	Mesures . . . . .	194
B.2.1	Amortissement . . . . .	194
B.2.2	Relief de décroissance . . . . .	195
<b>C</b>	<b>La transformation bilinéaire</b>	<b>199</b>
<b>D</b>	<b>Approximations numériques de <math>\partial_{tt}</math></b>	<b>203</b>

# Introduction

---

## 1.1 La réverbération à plaque

### 1.1.1 Le phénomène de la réverbération

La réverbération acoustique, appelée aussi effet de salle, correspond à la rémanence d'un son dans un espace acoustique après avoir arrêté la source sonore. Lors de la propagation d'un signal acoustique, dit signal source, émis dans un espace complètement ou partiellement fermé, les ondes de pression acoustique sont réfléchies par les obstacles qu'elles rencontrent, comme les murs, les plafonds ou les colonnes. A cause de ces multiples réflexions, le signal qui arrive à l'auditeur, dit signal réverbéré, est différent du signal source.

La réverbération fait partie de la vie de tous les jours et donne des informations au cerveau qui permettent d'identifier l'environnement dans lequel on se trouve, surtout quand la source acoustique est éteinte et que les multiples réflexions continuent d'arriver à l'auditeur, décroissant en volume jusqu'à ce qu'elles ne soient plus perçues. En outre, l'information fournie à l'auditeur par les premières réflexions lui permet souvent de localiser la source sonore dans l'espace. Le phénomène de réverbération est particulièrement présent dans les grands espaces tels qu'une cathédrale ou une piscine fermée, où la durée de la réverbération atteint plusieurs secondes. A l'inverse, dans une petite chambre absorbante, la réverbération est si courte qu'elle n'est pas consciemment discernée de la source.

La notion de réverbération acoustique est historiquement très liée aux espaces dédiés aux représentations musicales. Dès la Grèce antique, l'homme a porté une attention particulière à la conception de ces espaces afin que leur acoustique permette une écoute aisée de la musique. Cette étroite relation entre musique et réverbération disparaît souvent lors d'une prise de son en studio d'enregistrement. En effet, de nos jours, ces enregistrements sont pour la plupart effectués dans des environnements acoustiquement isolés de l'extérieur et peu réfléchissants à l'intérieur. De plus, les microphones sont placés à proximité des sources afin d'éviter l'enregistrement du bruit environnant. Cette pratique conduit à l'obtention de signaux dépourvus de réverbération, dits secs ou anechoïques, qui sont perçus comme étant peu naturels car on a l'habitude d'entendre de la musique réverbérée [9]. Une solution à cette problématique consiste à ajouter artificiellement l'effet de réverbération aux signaux enregistrés. On parle alors d'effet audio de réverbération artificielle. Aujourd'hui, la majorité de la musique enregistrée que l'on peut écouter a été traitée par un système de réverbération artificielle.

### 1.1.2 Petite histoire de la réverbération artificielle

La première méthode de réverbération artificielle dont on a connaissance est la chambre réverbérante (*echo chamber* en anglais), inventée en 1926 par la société RCA [68]. Le principe consiste à reproduire le signal à traiter à l'aide d'un haut parleur à l'intérieur d'une chambre réverbérante et à enregistrer avec un microphone la pression acoustique en un endroit de la salle. Le signal enregistré contient ainsi la réverbération de la salle et le signal final est obtenu par un dosage convenable des niveaux du signal enregistré et du signal d'origine à travers une console de mixage. La chambre ne doit pas impérativement être très grande mais elle doit être suffisamment réfléchissante. Cette méthode présente néanmoins quelques inconvénients :

- l'ouvrage civil nécessaire à la construction d'un tel dispositif et la nécessité de disposer d'une salle dédiée à ce traitement,
- la difficulté à faire varier le temps de réverbération d'une salle donnée,
- les changements brusques de niveau qu'on peut constater en basses fréquences à cause de l'écart fréquentiel important entre les premiers modes des salles de petites dimensions.

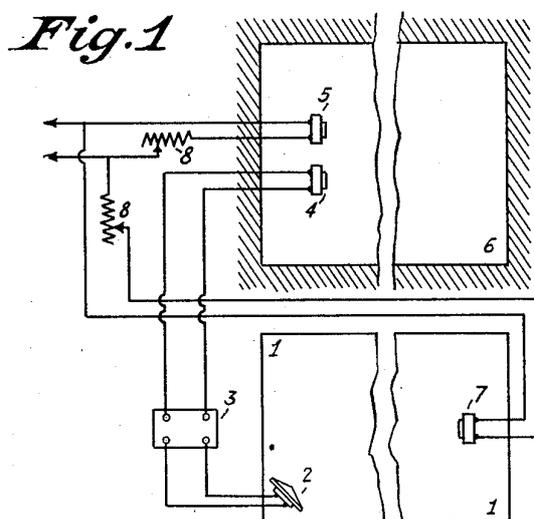


FIG. 1.1: Figure explicative de la chambre réverbérante issue du brevet de RCA de 1927 [68].

Pour pallier ces inconvénients, une multitude de dispositifs acoustiques ou électromécaniques, simulant plus ou moins bien l'effet de réverbération, ont été développés entre les années 1930 et 1980. Les plus populaires, qui sont encore utilisés aujourd'hui, sont la réverbération à ressorts (*spring reverb* en anglais) et la réverbération à plaque (*plate reverb* en anglais).

La réverbération à ressorts fut inventée aux Bell Labs en 1928 [90]. Ce type de dispositif est basé sur l'utilisation d'un ressort ou d'un réseau de ressorts pour simuler l'effet de réverbération. Dans sa forme la plus simple, l'extrémité d'un ressort est mise en mouvement par un actionneur alimenté par le signal sec à traiter. Le signal réverbéré correspond au signal électrique délivré par un transducteur situé à l'autre extrémité du ressort. Souvent, l'actionneur et le capteur sont constitués d'une bobine fixée au bâti et d'un petit aimant mobile solidaire à l'extrémité du ressort. Les principaux avantages de ce type de système sont son faible coût, sa robustesse et son faible encombrement. La réverbération à ressorts est devenue très populaire grâce à son introduction par Laurens Hammond dans son orgue en 1935 [69] et grâce à son introduction dans les amplificateurs de guitare électrique, dont le pionnier fut Leo Fender en 1964 avec le Fender Twin Reverb. La réverbération à ressorts possède une identité sonore caractéristique (appelée

twanging dans le jargon anglophone), provoquée par les fréquences propres des ressorts. Ceci est un inconvénient pour le traitement des sons percussifs, pour lesquels la sonorité des ressorts s'entend très clairement et rend le son peu naturel [91].

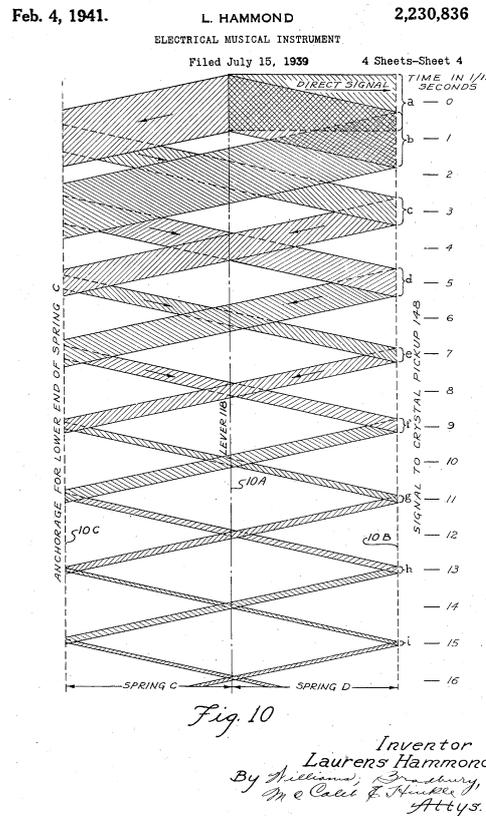
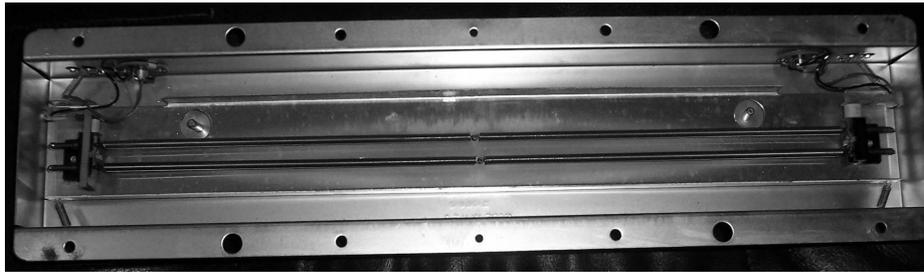


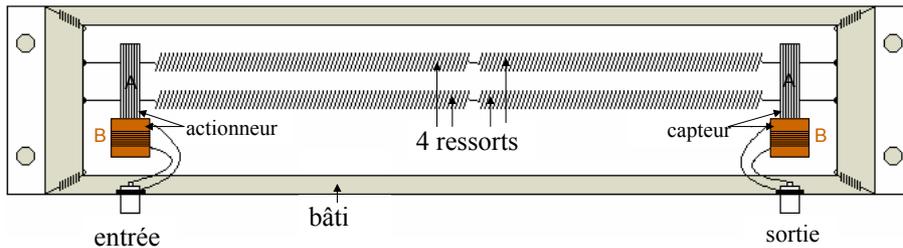
FIG. 1.2: Schéma du brevet de Hammond de 1941 sur la réverbération à ressorts.

Le premier réverbérateur à plaque, l'EMT140, est issu des recherches de W. Kuhl pour la société allemande EMT (Elektromesstechnik) et est apparu autour de 1957 [45]. Dans ce dispositif, un actionneur électrodynamique, alimenté par le signal sec à traiter, excite ponctuellement une plaque mince en acier. Le signal réverbéré est donné par un ou deux accéléromètres mesurant les vibrations en une ou deux positions distinctes de la plaque. La qualité de la réverbération atteinte par l'EMT140 était très supérieure à celle des autres dispositifs existants à l'époque, ce qui lui a permis de s'imposer comme le standard dans les studios d'enregistrement pendant les années 60 et 70. La grande majorité des enregistrements de la musique populaire de l'époque, comme par exemple The Beatles, Led Zeppelin ou Pink Floyd ont utilisé ce dispositif. Un même studio d'enregistrement pouvait disposer de plusieurs unités de réverbération qui pouvaient fonctionner en même temps sans interférer entre elles. Suivant le même principe que l'EMT140, Kuhl a conçu la feuille d'or EMT240 [29], qui permet d'obtenir un effet similaire à l'EMT140 mais avec un dispositif bien plus léger et moins encombrant.

La réverbération artificielle numérique est née au début des années 60 avec les travaux de Schroeder [76], [74]. Ces travaux, portant sur des techniques de traitement du signal, proposent l'utilisation de structures composées de filtres passe-tout et de filtres en peigne pour obtenir un filtre réverbérant. Les travaux de Schroeder ont inspiré les recherches postérieures et un grand nombre de réalisations commerciales [37]. En 1991, Jot propose une méthode générale



(a)



(b)

FIG. 1.3: (a) Réverbération à ressorts de la société Accutronics modèle *Type 4 Reverb* et (b) schéma de ses composants où A repère les aimants mobiles et B repère les bobines fixes. Ce système de réverbération est commercialisé depuis 1964 et se trouve, par exemple, dans les amplificateurs de guitare Fender Twin Reverb.

d'élaboration de ce filtre réverbérant fondée sur l'étude de ses pôles et qui permet de contrôler de manière indépendante le niveau réverbéré et le temps de réverbération en fonction de la fréquence [40]. L'objectif de ces algorithmes est de reproduire perceptivement les caractéristiques de la réverbération des salles, en tenant compte des réflexions et de la réverbération tardive. Dans les réalisations commerciales basées sur ces méthodes, qu'on appelle ici modèles de signaux, on retrouve souvent des configurations dont l'objectif est de reproduire l'effet obtenu avec un réverbérateur à plaque (plate reverb preset). Un exemple en est l'unité de réverbération Lexicon 224<sup>©</sup>. Pour simuler la sonorité d'une réverbération à plaque avec ces méthodes, il faut construire un filtre réverbérant dont la réponse impulsionnelle a une densité d'impulsions qui devient rapidement très élevée [37].

Une deuxième technique numérique de réverbération artificielle est la réverbération par convolution. L'utilisation de cette technique en temps réel est devenue possible au cours de la dernière décennie grâce à l'accroissement des possibilités de calcul des ordinateurs. Elle permet de reproduire fidèlement la réverbération d'un espace acoustique à partir de la mesure de sa réponse impulsionnelle. Le signal réverbéré est obtenu par convolution du signal à traiter avec la réponse impulsionnelle [65], [31]. Les réalisations commerciales les plus populaires de cette méthode, Altiverb<sup>©</sup>, Waves IR1<sup>©</sup>, incluent des réponses impulsionnelles du réverbérateur à plaque EMT140, permettant ainsi l'application de cet effet par convolution. En outre, un logiciel basé sur ces méthodes de convolution et dédié à la simulation du réverbérateur EMT140, le Plate 140<sup>©</sup> de la société UAudio<sup>©</sup>, a vu le jour ces dernières années.

### 1.1.3 Le réverbérateur EMT140

L'objectif de ce paragraphe est de décrire le réverbérateur EMT140, dont la mesure a permis de valider les modèles et les simulations de la réverbération à plaque.

L'élément principal du réverbérateur EMT140 est une plaque plane et rectangulaire, de dimensions 2 m x 1 m et d'épaisseur 0.5 mm. La plaque est suspendue par ses 4 coins à un cadre tubulaire soudé rectangulaire. Chaque point d'attache entre la plaque et le cadre est formé de 2 câbles épais d'acier, un vertical et un horizontal. Grâce à un système de vis de serrage sur chacun des huit câbles, il est possible de faire varier la tension appliquée à la plaque et ainsi de la maintenir plate et droite. La plaque est excitée transversalement et ponctuellement par un actionneur électrodynamique, qui est alimenté par le signal monophonique sec à traiter. Le signal réverbéré est lu en deux positions de la plaque par deux accéléromètres, qui délivrent un signal proportionnel à l'accélération dans le domaine audible. La configuration d'origine du réverbérateur EMT140 qui a été utilisé dans cette thèse est montrée sur la Figure 1.4.

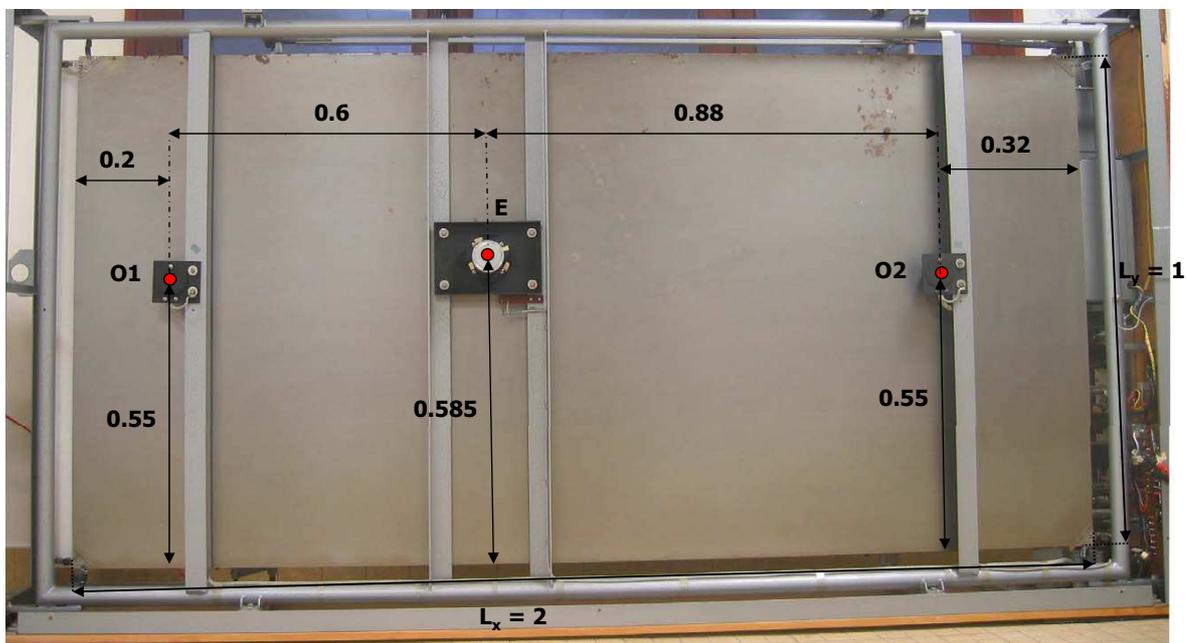


FIG. 1.4: Réverbérateur EMT140 avec la disposition de ses éléments : actionneur (E) et accéléromètres (O). Les distances sont indiquées en mètres.

Pour le contrôle du temps de réverbération de l'effet produit, l'EMT140 possède une plaque poreuse proche et parallèle à la plaque vibrante. La distance entre les deux plaques du réverbérateur utilisé pour les mesures peut varier dans l'intervalle [11 ; 66] mm ([5 ; 120] mm d'après [45]). La plaque poreuse produit un changement d'impédance à proximité de la plaque vibrante, ce qui augmente le rayonnement de la surface de la plaque [18]. L'amortissement des vibrations, en basses et moyennes fréquences, augmente quand la plaque poreuse est approchée de la plaque vibrante. Ce système permet de changer le temps de réverbération  $T_{60}$ , en particulier en très basses fréquences où on peut le faire varier entre 1 et 11 secondes. En pratique, la plaque poreuse peut se déplacer grâce à un moteur, ce qui permet de modifier le temps de réverbération à l'aide d'un potentiomètre. L'EMT140 a ainsi été la première réverbération artificielle permettant un contrôle simple du temps de réverbération.

Au début de sa commercialisation, l’EMT140 avait un seul accéléromètre, mais une version biphonique avec deux accéléromètres fut rapidement adoptée. La partie électrique de l’EMT140 est composée de l’amplificateur d’excitation, qui amplifie le signal d’alimentation de l’excitateur, et de l’amplificateur de reproduction qui conditionne le signal délivré par les accéléromètres. Chacun de ces amplificateurs incorpore une égalisation fréquentielle différente [45]. Celui d’excitation augmente les hautes fréquences par rapport aux basses fréquences afin de réduire la source principale de distorsion qui est l’excitation excessive des basses fréquences. Pour rééquilibrer la distribution d’énergie en sortie, l’amplificateur de reproduction augmente les basses fréquences. Lors des mesures faites pendant cette thèse, ces amplificateurs ont été remplacés par des amplificateurs plats en fréquence afin d’éviter leur influence dans les mesures.

D’un point de vue utilisateur, le fabricant recommande de mélanger le signal sec avec les signaux délivrés par l’EMT140 à  $-6$  dB afin d’obtenir un “effet de réverbération équilibré” [33]. Une interprétation possible de cette manipulation est que le signal sec correspond au son direct reçu par l’auditeur et que le signal délivré par l’EMT140 correspond à la salle virtuelle qu’il est censé simuler.

## 1.2 Cadre et objectifs de cette thèse

Le réverbérateur à plaque, qui à son origine cherchait à simuler la réverbération acoustique, est devenu en lui-même un effet avec une identité propre. Ceci est probablement dû au fait qu’il a été utilisé dans les enregistrements qui ont créé l’histoire récente de la musique populaire occidentale.

Une version numérique de la réverbération à plaque permet de profiter de cet effet audio devenu classique tout en évitant ses inconvénients. En effet, le prix de ces équipements, leur encombrement et l’entretien régulier nécessaire des parties mécaniques et électroniques ont conduit à ce que ces unités soient de moins en moins employées dans les studios d’enregistrement. On comprend alors pourquoi la réverbération à plaque a fait l’objet de nombreuses réalisations numériques commerciales basées sur les modèles de signaux, qui en font une simulation très grossière, ou plus dernièrement basées sur la réverbération par convolution, dont les résultats sont de bonne qualité. Néanmoins, la réverbération par convolution nécessite la mesure d’un réverbérateur à plaque réel. Ces logiciels sont donc limités à la simulation du réverbérateur EMT140.

Dans ce contexte, la proposition d’une synthèse sonore de cet effet à partir de son modèle physique élargit considérablement les possibilités actuelles de simulation de cet effet. Les avantages de cette approche sont multiples :

- synthèse sonore de très haute qualité capable de reproduire les plus petites nuances et subtilités des transitoires temporels et du timbre,
- large palette de sonorités possibles sans avoir recours aux mesures de dispositifs réels,
- contrôle intuitif de la synthèse, car les paramètres de l’algorithme sont les paramètres physiques de l’objet réel.

L’objectif final de cette thèse est donc la **réalisation d’un logiciel de simulation de la réverbération à plaque par modèles physiques**. Il s’agit de construire un modèle numérique suffisamment général permettant de reproduire l’effet de réverbération à plaque pour n’importe quel jeu de paramètres : matériau, dimensions et épaisseur de la plaque, position du point d’excitation, position des points d’observation, conditions aux limites de la plaque et présence d’une plaque poreuse à proximité.

Cette approche permettra d'**obtenir des réverbérateurs à plaque avec des dimensions données et un matériau métallique quelconque sans avoir à en réaliser sa construction physique**. La configuration des éléments du réverbérateur peut être simulée sans difficulté, comme par exemple les positions de l'excitateur et des capteurs sur la plaque, ou la possibilité d'avoir 10 points d'écoute simultanés au lieu de 2.

Dans cette démarche, la **modélisation fine de l'amortissement des vibrations**, qui joue un rôle prépondérant dans leur perception, est nécessaire. Il a été montré que l'amortissement est corrélé perceptivement à l'identification du matériel [92]. De plus, l'amortissement des vibrations d'un réverbérateur à plaque est directement lié au temps de réverbération  $T_{60}(\omega)$  de l'effet de réverbération.  **$T_{60}(\omega)$  est le principal critère objectif utilisé pour la description de la réverbération** et correspond au temps nécessaire pour que l'amplitude de vibration en régime libre diminue de 60 dB. Si on suppose que la décroissance temporelle à la pulsation  $\omega$  est exponentielle et gouvernée par  $e^{-\alpha(\omega)t}$ , le temps de réverbération est donné par :

$$T_{60}(\omega) = \frac{3 \ln(10)}{\alpha(\omega)} \quad [s] \quad . \quad (1.1)$$

En général, l'amortissement résulte de la contribution de différents phénomènes physiques. La connaissance et la modélisation de ces phénomènes pour les plaques métalliques permettent alors une simulation réaliste du réverbérateur en fonction du matériau et des dimensions de la plaque. De plus, le fait de mettre en évidence les modèles décrivant le comportement physique du réverbérateur aide à **identifier les conditions sur les paramètres physiques permettant d'obtenir une réverbération à plaque de bonne qualité**. On peut ainsi justifier les choix de matériau et de dimensions faits lors de la conception des réverbérateurs à plaque réels, comme par exemple l'EMT140 ou la feuille d'or EMT240. Il est aussi possible de proposer d'autres jeux de paramètres selon la réverbération souhaitée.

Une autre application intéressante de la synthèse par modèles physiques est la simulation de réverbérateurs fictifs difficilement réalisables dans le monde réel, indépendamment des contraintes d'usinage mécanique et des matériaux réels disponibles.

En termes de coût de calcul, la simulation numérique d'un réverbérateur à plaque est envisageable avec les possibilités des ordinateurs de bureau actuels. Ce n'est pas le cas pour la simulation complète par modèles physiques de la réverbération dans les espaces acoustiques. Dans le domaine audible [20Hz, 20kHz], cette simulation est très en dehors des possibilités des ordinateurs actuels et de ceux des prochaines années. Ces simulations doivent se limiter aux basses fréquences. Si on prend l'exemple d'un espace de volume  $V \text{ m}^3$ , avec une vitesse du son  $c_a$ , pour la fréquence d'échantillonnage  $F_s \text{ Hz}$ , le schéma aux différences finies le plus simple nécessite le stockage de  $2VF_s^3/(3^{3/2}c_a^3)$  nombres réels et la réalisation de  $7VF_s^4/(3^{3/2}c_a^3)$  opérations réelles par seconde. Pour une salle de concert de taille  $40 \text{ m} \times 40 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ , avec  $c_a = 340 \text{ m/s}$ ,  $F_s = 44100 \text{ Hz}$  et des réels de 32 bits, les besoins en mémoire sont de 53 Go et le nombre d'opérations de  $1.2 \cdot 10^{15}$  par seconde [3]. En outre, ces estimations ne tiennent compte ni des phénomènes complexes qui peuvent se produire aux bords du domaine ni de la difficulté à spécifier correctement un tel domaine. Il semble alors difficile d'envisager la réverbération artificielle à partir de la résolution temporelle de l'équation des ondes.

### 1.3 Organisation du manuscrit

Au vu de l'objectif énoncé de réaliser la synthèse sonore de la réverbération à plaque à partir de son modèle physique en s'appuyant sur les mesures du réverbérateur EMT140, il semble na-

turel d'articuler la thèse autour de trois parties principales : modélisation, mesures et simulation.

Le chapitre 2 présente la **modélisation des vibrations de la plaque et son couplage avec l'actionneur**. Une attention particulière est portée aux phénomènes d'amortissement des vibrations de flexion des plaques métalliques, à savoir l'amortissement thermoélastique, par rayonnement et l'influence d'une plaque poreuse à proximité.

La mise à notre disposition par Radio France d'une unité de réverbération EMT140 a permis de consacrer une part importante des efforts à la **partie expérimentale**, présentée au chapitre 3. La mesure de ce réverbérateur permet de confronter les modèles proposés à la réalité, d'en identifier les limites, et d'estimer les paramètres physiques du modèle pour ce réverbérateur.

Les outils nécessaires à la **simulation des modèles physiques** présentés font l'objet du chapitre 4. La simulation numérique est faite par la méthode des différences finies, ce qui permet de profiter du savoir faire acquis lors des travaux de thèse de Lambourg [48]. Comme la modélisation physique ne tient compte ni de l'ensemble des mécanismes dissipatifs entrant en jeu dans les réverbérateurs à plaque réels ni du comportement de l'excitateur dans tout le domaine audible, des méthodes d'ajustement des simulations et des mesures ont été développées afin de permettre de comparer les simulations aux mesures. Ces méthodes sont :

- un algorithme de modification de la décroissance temporelle de l'énergie par bandes de fréquences de la réponse impulsionnelle,
- une méthodologie d'égalisation fréquentielle de l'énergie totale des simulations par rapport aux mesures.

Avec les paramètres expérimentaux déterminés au chapitre 3, la comparaison globale des résultats des simulations avec les mesures devient possible.

Dans cette démarche, il est naturel de s'interroger sur la relation entre la réverbération à plaque et la réverbération acoustique naturelle, ce qui fait l'objet du chapitre 5 **Comparaison avec l'acoustique des salles**. Ainsi, à partir de l'étude d'un modèle simple de réverbérateur à plaque, on peut confronter son comportement à celui de l'acoustique des salles. Cette comparaison permet d'identifier les points communs et les différences entre les deux phénomènes. En outre, on s'aperçoit que des critères bien établis pour la conception d'algorithmes de réverbération artificielle doivent être aussi respectés dans le choix des paramètres du réverbérateur.

Pour profiter de ce qui a été développé aux chapitres antérieurs, le chapitre 6 se concentre sur l'**exploitation du modèle présenté** à partir de l'exploration systématique de différents jeux de paramètres. Ceci permet de tirer des conclusions sur les valeurs des paramètres souhaitables et de justifier le choix de paramètres faits dans les réverbérateurs à plaque existants. Le modèle est aussi exploité pour étudier l'influence des conditions aux limites sur le réverbérateur. Pour finir, deux exemples de synthèse, une plaque en aluminium et la feuille d'or EMT240, sont détaillés.

Une partie des travaux de thèse s'écarte un peu de la problématique du réverbérateur à plaque et concerne la **simulation de plaques de géométrie circulaire par la méthode des différences finies**. L'idée à l'origine était la simulation d'un réverbérateur à plaque circulaire. L'absence de travaux, à notre connaissance, concernant la résolution dans le domaine temporel des équations des membranes ou des plaques à géométrie circulaires par des différences finies est surprenant compte tenu du fait que les instruments de percussion ont souvent cette géométrie. Cette problématique, dont une première approche est exposée au chapitre 7, s'inscrit bien dans les recherches actuelles pour la synthèse sonore d'instruments de musique par modèles physiques.

# Modélisation

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre sont présentés les modèles qui décrivent physiquement le comportement d'un réverbérateur à plaque générique, c'est à dire un dispositif constitué d'une plaque mince métallique, de géométrie rectangulaire et d'épaisseur constante, excitée transversalement par un actionneur électrodynamique. Cette modélisation est le point de départ du développement d'un réverbérateur à plaque virtuel. L'obtention d'un modèle reproduisant correctement le comportement d'un tel réverbérateur dépend du niveau de détail de la modélisation, en particulier celle concernant les mécanismes d'amortissement des vibrations.

La modélisation est le premier pas vers la synthèse sonore par modèles physiques. Un autre intérêt de la modélisation est la bonne compréhension des phénomènes physiques sur lesquels repose le fonctionnement d'un tel système afin d'établir le lien entre paramètres physiques et qualité du réverbérateur à plaque obtenu.

Dans un premier temps, on rappelle l'**équation de propagation des ondes de flexion dans les plaques minces** en négligeant les phénomènes dissipatifs. Les principales conditions aux limites conservatives permettant de décrire le comportement d'une plaque finie sont explicitées pour les plaques rectangulaires. Cette présentation est complétée par une discussion sur les hypothèses du modèle et leur vérification pour le réverbérateur EMT140. On montre quelques résultats analytiques de référence sur la réponse à une force impulsionnelle en temps et ponctuelle en espace d'une plaque infinie et d'une plaque finie. Ces résultats permettront de valider les outils numériques de simulation présentés au chapitre 4. Une dernière analyse est faite par adimensionnement du modèle pour une plaque isotrope, permettant de définir le temps caractéristique des vibrations de flexion de la plaque finie.

Un enjeu important est la **modélisation fine de l'amortissement des vibrations des plaques métalliques**. Ce travail est primordial pour la simulation d'un réverbérateur à plaque, car la durée de la réverbération est directement dépendante de l'amortissement des vibrations. Les deux mécanismes dissipatifs principaux dans les plaques métalliques sont l'amortissement thermoélastique et l'amortissement par rayonnement. Des modèles permettant de prédire la contribution de ces phénomènes à l'amortissement sont présentés. Une particularité du réverbérateur EMT140 est de pouvoir contrôler le temps de réverbération à partir de la distance de séparation entre la plaque vibrante et une plaque poreuse. La modélisation de l'influence de la plaque poreuse sur l'amortissement des vibrations est donc aussi présentée.

Enfin, pour tenir compte du système d'excitation de la plaque, on propose un **modèle simple de l'actionneur électrodynamique** qui excite le réverbérateur et de son couplage avec les vibrations de flexion de la plaque.

## 2.2 Équation de propagation des ondes de flexion

### 2.2.1 Modèle des vibrations de flexion

Le réverbérateur à plaque est composé d'une plaque excitée transversalement par un actionneur électrodynamique. Puisque l'excitation se fait dans le sens de l'épaisseur, les ondes vibratoires se propageant dans la plaque sont principalement des ondes de flexion. L'équation gouvernant les **vibrations de flexion linéaires d'une plaque mince** est donnée par le modèle de Kirchhoff-Love. On se limite ici à rappeler l'écriture de cette équation en coordonnées cartésiennes. Sa démonstration peut être trouvée dans de nombreuses références, comme [36] ou [50].

Les hypothèses principales de ce modèle sont les suivantes :

- de faibles déformations permettant de rester dans le cadre de l'élasticité linéaire, où la relation entre contrainte et déformation est linéaire,
- le déplacement est suffisamment faible pour pouvoir approcher les déformations par des fonctions linéaires du déplacement, évitant ainsi l'apparition de non-linéarités géométriques,
- les sections droites, perpendiculaires à la fibre neutre au repos, restent perpendiculaires à la fibre neutre pendant la déformation,
- l'inertie de rotation des sections droites est négligée.

Alors, pour une plaque orthotrope d'épaisseur constante, les moments fléchissants  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  s'écrivent en fonction du déplacement transversal  $w(x, y, t)$  comme :

$$\begin{cases} M_x &= -h^3 \left[ D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \\ M_y &= -h^3 \left[ D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{D_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ M_{xy} &= -h^3 \frac{D_4}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $h$  est l'épaisseur de la plaque et  $D_i$  les constantes de rigidité. L'application sur une portion de plaque de la Loi Fondamentale de la Dynamique reliant les forces d'inertie avec les moments fléchissants produits par les forces élastiques donne :

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + f_z(x, y, t), \quad (2.2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de la plaque en  $\text{kg/m}^3$  et  $f_z$  est la composante verticale de la pression exercée sur la surface de la plaque. A partir des relations (2.1) et (2.2), on retrouve l'équation classique des plaques minces faisant intervenir uniquement le déplacement transversal  $w(x, y, t)$  :

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -h^3 \left( D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_2 + D_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + f_z. \quad (2.3)$$

Pour les matériaux élastiques isotropes, le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  sont constants dans toute la plaque. Les constantes de rigidité  $D_i$  qui apparaissent dans (2.1) s'écrivent

alors en fonction de  $E$  et  $\nu$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = D_3 = \frac{E}{12(1-\nu^2)}, \\ D_2 = 2D_1 - D_4 = \frac{E\nu}{6(1-\nu^2)}, \\ D_4 = \frac{E}{6(1+\nu)}, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

et dans ce cas l'équation des plaques isotropes se simplifie alors à :

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \Delta^2 w = f_z, \quad \text{où : } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) permet de décrire la propagation des ondes de flexion dans un milieu idéal continu infini. Pour caractériser le comportement dans un milieu fini, des conditions supplémentaires aux bords du domaine doivent être spécifiées. Ces conditions sont appelées conditions aux limites (CL). Les principales conditions aux limites conservatives associées à l'équation des ondes de flexion de la plaque sont définies par :

- bord encastré : déplacement  $w$  et rotation  $\frac{\partial w}{\partial n}$  nuls,
- bord simplement appuyé : déplacement  $w$  et moment de flexion  $M_n$  nuls,
- bord libre : moment de flexion  $M_n$  et effort tranchant  $F_n$  nuls,

où l'index  $n$  représente la direction normale au bord du domaine.

Pour les plaques rectangulaires, les conditions aux limites sont formulées pour des bords droits. En supposant une plaque située dans le demi plan  $x > 0$ , les conditions aux limites sur le bord suivant l'axe  $y$  tel que  $x = 0$  s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bord encastré : } w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0. \\ \text{Bord appuyé : } w = 0 \quad \text{et} \quad M_x = 0 \quad \text{en } x = 0. \\ \text{Bord libre : } M_x = 0 \quad \text{et} \quad F_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{en } x = 0. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

## 2.2.2 Vérification des hypothèses du modèle

L'approximation des vibrations d'un réverbérateur à plaque par le modèle de Kirchhoff-Love repose sur les hypothèses de plaque mince et de comportement linéaire des vibrations. Une approximation additionnelle consiste à négliger la précontrainte induite par la tension appliquée aux bords de la plaque par rapport aux forces élastiques. Par la suite, on présente la démarche de validation de ces hypothèses, avec comme application numérique la plaque en acier d'épaisseur  $h = 0.5$  mm du réverbérateur EMT140.

### 2.2.2.1 Hypothèse de plaque mince

Le modèle de Kirchhoff-Love est une simplification du modèle plus général de Mindlin-Reissner décrivant les vibrations des plaques épaisses. Quand la plaque est suffisamment mince, l'inertie de rotation des sections ainsi que les déformations transverses de cisaillement peuvent être négligées dans Mindlin-Reissner et on obtient alors l'équation de Kirchhoff-Love. La validité de l'hypothèse de plaque mince peut être étudiée par comparaison de la vitesse de phase  $c_{ph(KL)}$  obtenue avec

le modèle de Kirchhoff-Love à celle de Mindlin-Reissner  $c_{ph(MR)}$ . Comme l'hypothèse de plaque mince dépend de la fréquence, cette comparaison est faite dans le domaine des fréquences audibles.

Les vitesses de phase des deux modèles s'obtiennent à partir de la relation de dispersion de chacun des modèles comme le rapport entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ . Pour une onde élastique se propageant selon l'axe des  $x$ , elles s'écrivent [48] :

$$c_{ph_{KL}} = \sqrt{c_{px} \frac{\omega h}{\sqrt{12}}},$$

$$c_{ph_{MR}} = \left( \frac{2c_{px}}{\frac{1}{c_{px}} \left(1 + \frac{a^2}{K_x^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{c_{px}^2} \left(\frac{a^2}{K_x^2} - 1\right)^2 r + 4 \frac{12}{h^2 \omega^2}}} \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Ces expressions font apparaître les paramètres suivants :

$$a = \frac{c_{px}}{c_{sx}},$$

$$c_{sx} = \sqrt{\frac{G_{xz}}{\rho}} \quad \text{célérité des ondes de cisaillement pur dans le plan } x0z,$$

$$c_{px} = \sqrt{\frac{12D_1}{\rho}} \quad \text{célérité des ondes de compression suivant l'axe } 0x,$$

$$K_x \quad \text{paramètre de l'approximation du cisaillement de Timoshenko,}$$

où  $G_{xz}$  est le module de cisaillement. Pour un matériau isotrope ces paramètres sont donnés par :

$$a = \frac{2(1 + \nu)}{1 - \nu^2}, \quad c_{px} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}}, \quad K_x = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

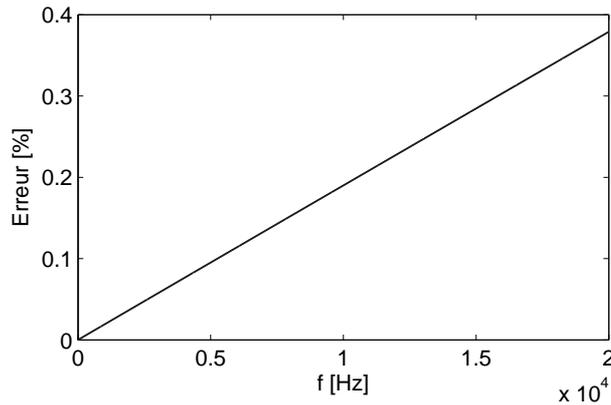


FIG. 2.1: Erreur  $\varepsilon$  sur la vitesse de phase du EMT140 produite par l'approximation de Kirchhoff-Love par rapport au modèle de Mindlin-Reissner :  $\varepsilon[\%] = 100(c_{ph_{KL}} - c_{ph_{MR}})/c_{ph_{KL}}$ .

La Figure 2.1 montre l'erreur commise sur la vitesse de phase pour la plaque du réverbérateur EMT140. L'erreur est strictement croissante par rapport à la fréquence. A 20 kHz, limite du domaine audible, l'erreur est inférieure à 1% et confirme donc la **validité de l'hypothèse de plaque mince pour le réverbérateur EMT140**.

### 2.2.2.2 Régime des vibrations linéaires

Il est souhaitable que le comportement d'un réverbérateur à plaque soit linéaire, car telle est la nature de la réverbération acoustique naturelle. Lors des vibrations de flexion des plaques élastiques, l'approximation linéaire est satisfaisante pour des amplitudes de vibration petites par rapport à l'épaisseur de la plaque. Dans le cas contraire, des non-linéarités géométriques apparaissent. Ce comportement linéaire dépend alors de l'amplitude d'excitation de la plaque et donc de l'amplitude du signal d'excitation délivrée à l'actionneur électrodynamique. Le régime des vibrations linéaires est alors vérifié expérimentalement pour les excitations prévues par le constructeur lors de l'utilisation du réverbérateur à plaque. Ces mesures sont décrites dans la partie expérimentale, au chapitre 3.

### 2.2.2.3 Effet de la précontrainte

En pratique, la plaque métallique du réverbérateur est soumise à une précontrainte produite par la tension appliquée à ses points d'attache. Cette tension permet à la plaque de rester en position verticale et la plus plate possible.

Avec l'hypothèse d'une tension constante sur toute la plaque, la prise en compte de cette précontrainte dans la modèle de vibrations de flexion des plaques (2.5) s'écrit :

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \Delta w + D \Delta^2 w = f_z, \quad (2.8)$$

où  $T$  est la tension en  $N/m$ . On étudie l'influence de la tension sur la propagation des ondes de flexion à partir de l'équation de dispersion. L'équation de dispersion suivant l'axe  $Ox$  s'obtient en supposant une solution de type onde plane. La substitution de  $w = Ae^{j(\omega t - kx)}$  dans l'équation (2.8) sans forçage donne :

$$\omega^2 = k^4 \kappa^2 \left( 1 + \frac{T}{\rho h \kappa^2 k^2} \right) \simeq k^4 \kappa^2, \quad \text{avec :} \quad \kappa^2 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}, \quad (2.9)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire,  $k$  le nombre d'onde et  $\kappa^2$  le paramètre de propagation de la plaque. D'après (2.9) la tension peut s'interpréter comme une perturbation de l'équation de dispersion des plaques sans précontrainte. L'influence de  $T$  peut alors être négligée quand le nombre d'onde  $k$  est suffisamment grand. La concurrence entre les forces de tension et les forces élastiques est exprimée par le rapport  $T/(k^2 \rho h \kappa^2) = T/(k^2 D)$ , où  $D$  est la constante de rigidité (2.5).

Dans le cas qui nous occupe ici, i.e. le réverbérateur EMT140, **la tension est suffisamment petite par rapport aux forces élastiques pour pouvoir en négliger sa contribution dans la majorité du domaine audible**. L'influence de la tension est quantifiée ici à partir de la vitesse de phase, définie par  $c_{ph} = \omega/k$ . La tension appliqué à la plaque du EMT140 est de l'ordre de  $T = 400$  N. Pour cette valeur, négliger  $T$  produit une erreur sur la vitesse de phase de 5% à 100 Hz. La Figure 2.2 montre la décroissance de l'erreur avec la fréquence.

## 2.2.3 Quelques résultats de référence

### 2.2.3.1 Noyau de Green d'une plaque infinie

Le noyau de Green d'une plaque infinie est défini comme sa réponse à une force ponctuelle. Dans le domaine fréquentiel, le noyau de Green d'une plaque isotrope, noté  $g(r, \theta)$ , est la solution de l'équation en coordonnées polaires suivante [56] :

$$\Delta^2 g(r, \theta) - \frac{\rho h \omega^2}{D} g(r, \theta) = \frac{1}{r} \delta(r) \delta(\theta). \quad (2.10)$$

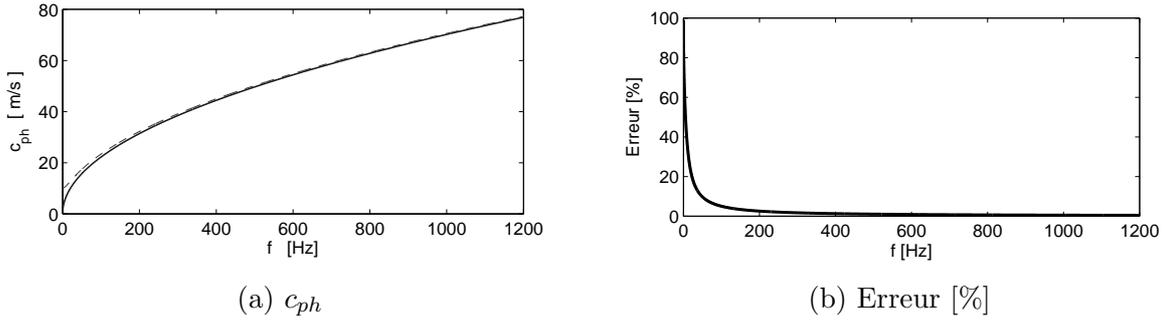


FIG. 2.2: (a) : vitesse de phase  $c_{ph}$  de la plaque EMT140 calculée à partir de (2.9) en tenant compte de la tension  $T = 100$  N (---) et en négligeant  $T$  (—). (b) : erreur sur la vitesse de phase en % quand on néglige  $T$ . Les effets de la tension sont significatifs pour des fréquences inférieures à environ 50 Hz.

La solution de cette équation est obtenue en imposant que la fonction  $g$  soit finie en  $r = 0$  et en  $r = \infty$ , que la solution soit propagative et que la force à l'origine ait une valeur totale égale à 1. On obtient alors la solution [56] :

$$g(r) = \frac{-j}{8\omega} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left( H_o^{(2)}(kr) + H_o^{(1)}(jkr) \right), \quad \text{où : } k = \left( \frac{\rho h \omega^2}{D} \right)^{1/4}, \quad (2.11)$$

où  $H_o^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0. En raison de la symétrie du problème, la solution est indépendante de l'angle  $\theta$ .

D'après (2.11) le déplacement de la plaque infinie sous forçage harmonique continu  $F = F_\omega e^{j\omega t}$  à  $r = 0$  est :

$$w(r) = g(r) \frac{1}{D} F_\omega e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad w(0) = \frac{-j}{8\omega} \sqrt{\frac{1}{\rho h D}} F_\omega e^{j\omega t}. \quad (2.12)$$

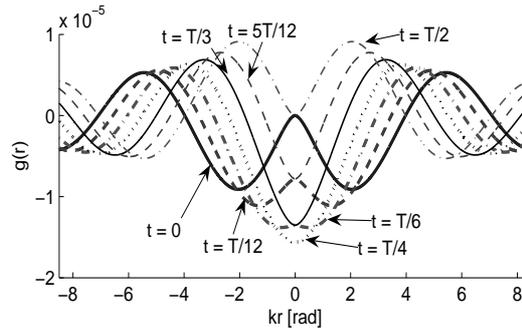
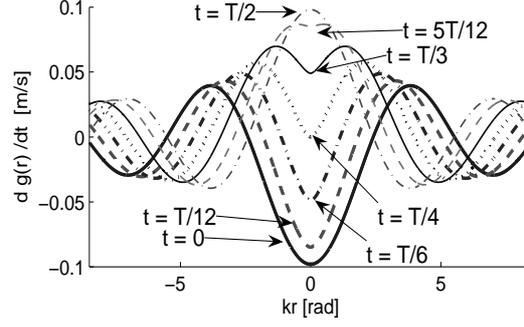


FIG. 2.3: Fonction de Green  $g(r)$  pour la fréquence  $f_0 = 1000$  Hz pour une plaque en acier de paramètres :  $\kappa = 0.7846$  m<sup>2</sup>/s,  $\rho = 7860$  kg/m<sup>3</sup> et  $h = 0.5 \cdot 10^{-4}$  m.

Pour un forçage harmonique à  $f_0 = 1000$  Hz, la Figure 2.3 montre le déplacement en fonction de la distance. Chaque courbe de la figure représente le profil spatial à un temps différent. Les instants représentés correspondent à des fractions différentes de période du forçage  $T = 1/f_0$ .

La vitesse pour cette même excitation est montrée par la Figure 2.4. La vitesse est déphasée de  $\pi/2$  par rapport au déplacement et son amplitude est  $2\pi f_0$  fois plus grande.

FIG. 2.4: Fonction de Green en vitesse à  $f_0 = 1000 \text{ Hz}$ .

L'admittance au point d'excitation  $Y_{dp}$  est définie comme le rapport entre la vitesse et la force au point d'excitation. Pour la plaque infinie en régime harmonique  $Y_{dp}$  s'obtient à partir de l'expression (2.12) :

$$Y_{dp} = \frac{\dot{w}(0)}{F} = \frac{j\omega w(0)}{F} = \frac{1}{8\rho h} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = \frac{1}{8\rho h \kappa}. \quad (2.13)$$

$Y_{dp}$  est une propriété de la plaque indépendante du système d'excitation utilisé. Elle est souvent obtenue par mesure simultanée de la force et de l'accélération au même point.

### 2.2.3.2 Noyau de Green d'une plaque finie

La solution analytique des vibrations d'une plaque finie pour un cas simple permet de vérifier par la suite le comportement des solutions des algorithmes numériques. Le cas de la plaque rectangulaire sur des appuis simples se prête facilement à l'étude en raison de la forme simple de ses déformées et de ses pulsations modales.

On s'intéresse donc à la solution analytique de la plaque isotrope sur des appuis simples initialement au repos,  $\dot{w}(x, y, t = 0) = 0$ ,  $w(x, y, t = 0) = 0$ , et soumise à une impulsion en temps et en espace  $f_z = F\delta(x - x_e)\delta(y - y_e)\delta(t)$ .

Le problème homogène associé s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho h \ddot{w}(x, y, t) + D \Delta^2 w(x, y, t) = 0 & x \in ]0, L_x[ \text{ et } y \in ]0, L_y[, \\ w(x, 0, t) = w(x, L_y, t) = 0 & x \in [0, L_x], \\ w(0, y, t) = w(L_x, y, t) = 0 & y \in [0, L_y], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, L_y, t) = 0 & x \in [0, L_x], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(0, y, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(L_x, y, t) = 0 & y \in [0, L_y]. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

La décomposition modale de la variable déplacement est :

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}(t) \phi_{mn}(x, y). \quad (2.15)$$

La base modale du système, formée par les modes propres  $\phi_{i,j}$  et les pulsations propres  $\omega_{i,j}$ ,

s'obtient par la substitution de (2.15) dans (2.14) :

$$\begin{aligned} \forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad k_m &= m\pi/L_x, \quad k_n = n\pi/L_y, \\ \phi_{mn}(x, y) &= \frac{2}{\sqrt{\rho h L_x L_y}} \sin(k_m x) \sin(k_n y), \\ \omega_{mn} &= \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (k_m^2 + k_n^2), \end{aligned} \quad (2.16)$$

où les modes propres sont orthogonaux entre eux et ont une norme unitaire par rapport à la masse :

$$\rho h \int_S \phi_{mn} \phi_{m'n'} dS = \delta_{mn} \delta_{m'n'}. \quad (2.17)$$

La résolution du problème non homogène se fait par projection sur les modes propres. Cette projection est définie par l'opérateur  $\Upsilon_{\phi_{mn}}(g) = \int_S \phi_{mn} g dS$ . Pour les trois termes de l'équation non homogène on a :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\phi_{mn}}(\rho h \ddot{w}) &= \rho h \int_S \ddot{q}(t) \phi_{m'n'}(x, y) \phi_{mn}(x, y) dS = \ddot{q} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \\ \Upsilon_{\phi_{mn}}(Dw) &= D \int_S q(t) (k_m^2 + k_n^2)^2 \phi_{m'n'}(x, y) \phi_{mn}(x, y) dS = \frac{D}{\rho h} (k_m^2 + k_n^2)^2 \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \\ \Upsilon_{\phi_{mn}}(fz) &= \int_S \phi_{mn}(x, y) F \delta(x - x_e) \delta(y - y_e) \delta(t) dS = F \phi_{mn}(x_e, y_e) \delta(t), \end{aligned} \quad (2.18)$$

où on a utilisé la propriété d'orthogonalité (2.17) pour les deux premiers termes. Le système d'équations modales obtenues est alors :

$$\ddot{q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 q_{mn}(t) = F \phi_{mn}(x_e, y_e) \delta(t) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}. \quad (2.19)$$

La solution dans le domaine temporel de chacune de ces équations modales peut s'obtenir par transformée de Laplace de (2.19),  $\sim$ , puis par transformée inverse :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{mn}(s) &= \frac{F \phi_{mn}(x_e, y_e)}{s^2 + \omega_{mn}^2}, \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + \omega_{mn}^2} \right] &= \frac{1}{\omega_{mn}} \sin(\omega_{mn} t), \\ q_{mn}(t) &= \frac{F \phi_{mn}(x_e, y_e)}{\omega_{mn}} \sin(\omega_{mn} t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

La solution dans le domaine temporel s'obtient alors par insertion des  $q_{mn}(t)$  dans (2.15) :

$$w(x, y, t) = \frac{4F}{M} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_m x_e) \sin(k_n y_e) \sin(k_m x) \sin(k_n y)}{\omega_{mn}} \sin(\omega_{mn} t), \quad (2.21)$$

où  $M = \rho h L_x L_y$  est la masse totale de la plaque. Les dérivées première et seconde par rapport au temps de (2.21) sont immédiates et permettent respectivement d'obtenir la vitesse et l'accélération.

Si, au lieu d'une excitation ponctuelle impulsionnelle dans le temps, on suppose un forçage continu ponctuel et harmonique de la forme  $f_{z_w} = F\delta(x - x_e)\delta(y - y_e)\sin(\omega t)$ , les équations modales obtenues sont les mêmes que (2.19) à l'exception du terme de forçage :

$$\ddot{q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 q_{mn}(t) = F\phi_{mn}(x_e, y_e)\sin(\omega t) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}. \quad (2.22)$$

Par transformée de Fourier de (2.22), notée  $\widehat{\cdot}$ , on obtient :

$$-\omega^2 \widehat{Q}_{mn}(\omega) + \omega_{mn}^2 \widehat{Q}_{mn}(\omega) = F\phi_{mn}(x_e, y_e), \quad (2.23)$$

soit :

$$\widehat{Q}_{mn}(\omega) = \frac{F\phi_{mn}(x_e, y_e)}{-\omega^2 + \omega_{mn}^2}. \quad (2.24)$$

Et le champ de déplacement (2.15), dans le domaine de Fourier, est :

$$\begin{aligned} \widehat{W}(x, y, \omega) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{Q}_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y) \\ &= \frac{4F}{M} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_m x_e) \sin(k_n y_e) \sin(k_m x) \sin(k_n y)}{-\omega^2 + \omega_{mn}^2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

### 2.2.3.3 Noyau de Green d'une plaque finie amortie

Comme pour le cas non amorti, pour la plaque finie sur des appuis simples amortie on présente le calcul de la réponse à une impulsion temporelle ponctuelle et à un forçage harmonique ponctuel. Il est nécessaire de faire quelques remarques sur l'effet de l'amortissement dans la recherche de solutions. Dans le formalisme modal, l'amortissement est souvent défini par une fonction de dissipation de type visqueux, qui correspond à un opérateur d'amortissement qui agit sur la vitesse  $\mathcal{C}(\dot{w})$ . Le traitement de l'amortissement est souvent réalisé par projection sur la base des modes propres du système conservatif, ce qui dans le cas général conduit à un système d'oscillateurs couplés par des coefficients d'amortissement intermodaux [35]. Néanmoins, pour des systèmes faiblement dissipatifs, l'hypothèse de Basile, qui consiste à négliger le couplage entre les modes introduit par l'amortissement, permet de découpler les modes entre eux. La propriété d'orthogonalité entre les modes du système conservatif associé simplifie alors les calculs.

On calcule alors la solution analytique de la plaque isotrope sur des appuis simples initialement au repos,  $\dot{w}(x, y, t = 0) = 0$ ,  $w(x, y, t = 0) = 0$ , et soumise à une impulsion en temps et en espace  $f_z = F\delta(x - x_e)\delta(y - y_e)\delta(t)$ . Dans l'étude du cas non amorti on a déjà obtenu la projection des termes de masse et de raideur (2.18). En présence d'un amortissement faible, l'hypothèse de Basile permet d'écrire la projection sur les modes propres de l'opérateur d'amortissement comme :

$$\Upsilon_{\phi_{mn}}(\mathcal{C}(\dot{w})) = \int_S \dot{q}(t) \phi_{m'n'}(x, y) \mathcal{C}(\phi_{mn}(x, y)) dS = \delta_{mm'} \delta_{nn'} 2\zeta_{mn} \omega_{mn}, \quad (2.26)$$

où  $\zeta_{mn}$  est appelé coefficient d'amortissement modal. Dans une formulation matricielle, l'hypothèse de Basile suppose que la matrice d'amortissement est diagonalisable dans la base des modes propres du système conservatif. Les termes diagonaux sont les amortissements modaux  $\zeta_{mn}$ . Les équations modales s'écrivent alors :

$$\ddot{q}_{mn}(t) + 2\zeta_{mn} \omega_{mn} \dot{q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 q_{mn}(t) = F\phi_{mn}(x_e, y_e)\delta(t) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}. \quad (2.27)$$

Par transformée de Laplace de (2.27) on obtient :

$$\tilde{Q}_{mn}(s) = \frac{F\phi_{mn}(x_e, y_e)}{s^2 + 2\zeta_{mn}\omega_{mn}s + \omega_{mn}^2}. \quad (2.28)$$

Et la solution dans le domaine temporel  $q_{mn}(t)$  s'obtient par transformée de Laplace inverse de (2.28), ce qui donne :

$$q_{mn}(t) = \frac{F\phi_{mn}(x_e, y_e)}{\omega'_{mn}} e^{-\alpha t} \sin(\omega'_{mn}t), \quad \text{avec :} \quad (2.29)$$

$$\alpha_{mn} = \zeta_{mn}\omega_{mn}, \quad \omega'_{mn} = \omega_{mn}\sqrt{1 - \zeta_{mn}^2}.$$

La solution est donc une sinusoïde exponentiellement amortie dont la pulsation est légèrement décalée par rapport à celle du système conservatif. En pratique, pour l'ordre de grandeur de l'amortissement des plaques métalliques,  $\sqrt{1 - \zeta_{mn}^2} \simeq 1$ , et le décalage de  $\omega_{mn}$  est négligeable. Finalement le déplacement s'écrit :

$$w(x, y, t) = \frac{4F}{M} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_m x_e) \sin(k_n y_e) \sin(k_m x) \sin(k_n y)}{\omega'_{mn}} \sin(\omega'_{mn}t) e^{-\alpha_{mn}t}. \quad (2.30)$$

L'étude du forçage ponctuel harmonique continu de la forme  $f_{z_w} = F\delta(x - x_e)\delta(y - y_e)\sin(\omega t)$  est similaire à celui de la plaque non-amortie. La solution s'obtient par transformée de Fourier, en tenant compte de la contribution de l'amortissement  $2j\zeta_{mn}\omega_{mn}\omega$ . On obtient alors le déplacement dans l'espace de Fourier :

$$\widehat{W}(x, y, \omega) = \frac{4F}{M} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_m x_e) \sin(k_n y_e) \sin(k_m x) \sin(k_n y)}{-\omega^2 + 2j\zeta_{mn}\omega_{mn}\omega + \omega_{mn}^2}. \quad (2.31)$$

En conclusion, le déplacement de la plaque simplement supportée et faiblement amortie qui subit une impulsion ponctuelle de force est donnée par la somme (2.30), dont le calcul nécessite la connaissance des paramètres physiques du problème et de l'amortissement de chaque mode.

Le calcul numérique de la solution nécessite la définition d'un vecteur des temps discrets  $[0, dt, 2dt, \dots]$ , où le pas de temps est  $dt = 1/Fs$ , avec  $Fs$  la fréquence d'échantillonnage. En raison du théorème de Shannon, on conserve uniquement dans la somme (2.30) les modes dont la fréquence propre est inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage  $0.5Fs$ . D'autre part, les modes dont la fréquence propre est en dehors du domaine audible  $f'_{mn} > 2 \cdot 10^4$  Hz peuvent être négligés.

L'annexe C propose une implémentation plus efficace pour le calcul de (2.30) consistant à trouver les filtres numériques équivalents du système. Cette approche permet de remplacer le calcul des fonctions  $\sin(\omega'_{mn}t)$  et  $e^{-\alpha_{mn}t}$  à chaque pas de temps par un calcul récursif qui nécessite uniquement le calcul d'opérations élémentaires (sommations et multiplications) à chaque pas de temps.

### 2.2.4 Adimensionnement du modèle et temps caractéristique

L'adimensionnement de l'équation de Kirchhoff-Love permet d'identifier les paramètres caractéristiques du problème. Les variables adimensionnées, notées avec  $\bar{\cdot}$ , sont définies par :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{\sqrt{L_x L_y}}, & \bar{y} &= \frac{y}{\sqrt{L_x L_y}}, & \bar{t} &= \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{t}{L_x L_y} = \frac{\kappa}{L_x L_y} t, \\ \bar{u} &= \frac{u}{h}, & \bar{f} &= \frac{(L_x L_y)^2}{D h} f, & \text{où : } D &= \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

L'équation obtenue par substitution de ces variables dans (2.5) est :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} = -\bar{\nabla}^4 \bar{u} + \bar{f}, \quad \text{où : } \bar{\nabla}^4 = \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4}{\partial \bar{y}^4}.\quad (2.33)$$

Cette équation est définie dans le domaine  $\bar{x} \in [0, \Gamma^{1/2}]$ ,  $\bar{y} \in [0, \Gamma^{1/2}]$ , où  $\Gamma = L_x/L_y$  est le rapport des dimensions de la plaque. On définit alors un temps caractéristique  $t_0$  de la plaque comme le temps qui relie le temps adimensionné de (2.33) au temps en secondes :

$$t = t_0 \bar{t} \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \frac{L_x L_y}{\kappa}.\quad (2.34)$$

L'interprétation physique de ce temps n'est pas immédiate en raison de la dépendance fréquentielle des vitesses de propagation. Des interprétations dans les domaines temporel et fréquentiel sont données au chapitre 5.

## 2.3 Mécanismes dissipatifs dans les plaques

Les deux principaux mécanismes dissipatifs intervenant dans les vibrations des plaques métalliques sont l'amortissement thermoélastique et l'amortissement par rayonnement acoustique. L'amortissement thermoélastique est dû au couplage entre les ondes élastiques et les ondes thermiques, et sa contribution à l'amortissement total est souvent important en basses fréquences. L'amortissement par rayonnement acoustique est dû au couplage de la plaque avec l'air. En effet, une partie de l'énergie vibratoire de la plaque est transférée au milieu dans lequel elle baigne sous forme de pression acoustique.

Dans le cas particulier du réverbérateur EMT140, la présence d'une plaque poreuse à proximité de la plaque métallique permet de changer quantitativement l'amortissement par rayonnement. L'amortissement dépend alors de la distance de séparation entre les plaques.

Enfin, les pertes par transmission mécanique sont produites par un transfert d'énergie vibratoire vers l'extérieur à travers les conditions aux limites de la plaque.

Par la suite on présente les choix sur la modélisation physique de chacun de ces mécanismes. La validation expérimentale des modèles est présentée au chapitre 3.

### 2.3.1 Amortissement thermoélastique

A une dimension, l'amortissement thermoélastique des vibrations de flexion des poutres est un phénomène bien expliqué par la théorie de Zener [95] datant de 1938. D'après Zener, la raideur instantanée de la poutre relaxe à une valeur isotherme en raison de la diffusion de la chaleur

produite par les compressions et extensions successives des faces opposées de la poutre. Son modèle suppose que la diffusion de la chaleur est prédominante dans l'épaisseur de la poutre et négligeable dans les directions du plan neutre de la poutre.

La modélisation des pertes thermoélastiques dans les plaques minces est plus compliquée en raison des deux dimensions. Ce sujet a été traité différemment dans la littérature [11; 47; 77; 60; 48]. Le point de départ de toutes ces théories est l'équation de Kirchhoff-Love couplée aux effets thermiques suivante :

$$\rho h \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t^2} = -D (\nabla^4 w(x, y, t) - \alpha_{TH} (1 + \nu) \nabla^2 \Theta(x, y, t)), \quad (2.35)$$

où  $\alpha_{TH}$  est le coefficient de dilatation thermique et  $\Theta(x, y, t)$  est le moment de température selon l'épaisseur de la plaque donné par :

$$\Theta(x, y, t) = \frac{1}{I} \int_{h/2}^{h/2} z \theta(x, y, z, t) dz. \quad (2.36)$$

$I = h^3/12$  et  $\theta(x, y, z, t)$  est la déviation de température par rapport à la température ambiante  $T_0$ . La différence entre ces travaux est l'approche retenue pour le calcul du moment de température  $\Theta(x, y, t)$ . Une étude comparée de ces théories est disponible dans la littérature [59].

Dans un souci de simplicité, on reprend la formulation de Lambourg [48]. Cette formulation a déjà fait ses preuves pour la synthèse sonore de plaques d'aluminium. Cette formulation présente l'avantage de s'écrire dans le domaine temporel et se prête à une simulation numérique aisée. Pour une plaque mince isotrope, ce modèle décrit les vibrations d'une plaque avec dissipation thermoélastique par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$s^2 \rho h \tilde{W}(x, y, s) = -\tilde{D} \nabla^4 \tilde{w}(x, y, s), \quad \text{où :} \quad (2.37)$$

$$\tilde{D} = D \left( 1 + \frac{R_1 s}{s + C_1/h^2} \right), \quad R_1 = \frac{8}{\pi^4} \frac{\varphi^2 T_0}{\rho C_e D_1} \quad [ \quad ], \quad C_1 = \frac{K_z \pi^2}{\rho C_e} \quad [ \text{rad m}^2 \text{ s}^{-1} ].$$

Ces équations sont écrites dans le domaine de Laplace, où une multiplication par  $s$  équivaut à une dérivation par rapport au temps.  $\tilde{D}$  est la rigidité complexe prenant en compte les effets thermoélastiques.  $\varphi = \alpha_{TH} \frac{E}{1-\nu}$  est le coefficient thermique.  $\alpha_{TH}$  est le coefficient de dilatation thermique linéaire,  $C_e$  est la chaleur spécifique à déformation constante et  $K_z$  est la conductivité thermique. Suivant l'analyse de ce type de modèles proposée dans [55] et [54], et sous l'hypothèse de faible amortissement, l'amortissement modal du mode  $p$  de fréquence propre  $\omega_p$  est :

$$\alpha_p(\omega_p) = \frac{\omega_p}{2} (\eta_1(\omega_p) I_{1,p} + \eta_4(\omega_p) I_{2,p}), \quad (2.38)$$

où les angles de pertes s'écrivent :

$$\eta_1 \approx \frac{\omega R_1 C_1}{\omega^2 h^2 + C_1^2/h^2}, \quad \eta_4 = 0, \quad (2.39)$$

et les quantités sans dimensions  $I_{1,p}$  et  $I_{2,p}$  du mode  $p$  sont définies par :

$$I_{1,p} = \frac{\int_S h^3 D_1 (\nabla^2 u_p)^2 dS}{\omega^2 \int_S \rho h u_p^2 dS}, \quad I_{2,p} = -\frac{\int_S h^3 D_4 \mathcal{G}(u_p) dS}{\omega^2 \int_S \rho h u_p^2 dS}. \quad (2.40)$$

$u_p$  est la déformée modale du mode  $p$  pour la plaque non amortie et  $S$  est la surface de la plaque.  $D_1$  et  $D_4$  sont les constantes de rigidité de (2.4).  $\nabla^2$  est l'opérateur laplacien et  $\mathcal{G}(u_p)$  est la courbure gaussienne de la déformée modale  $u_p$ , définie par :

$$\mathcal{G}(u_p) = \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u_p}{\partial x \partial y} \right)^2. \quad (2.41)$$

$I_{1,p}$  et  $I_{2,p}$  dépendent de la géométrie de la plaque et de ses conditions aux limites. Par définition,  $I_1$  est toujours positive et  $I_{1,p} + I_{2,p} = 1$ . Pour des plaques rectangulaires encastrées aux 4 bords ou sur des appuis simples aux 4 bords,  $I_{1,p} = 1$  [55]. L'amortissement thermoélastique est alors indépendant des déformées modales. Pour des plaques aux bords libres, la valeur des coefficients  $I_{1,p}$  dépend de la déformée modale, et en particulier de la distribution de l'énergie de flexion et de l'énergie de torsion du mode  $p$ . Pour les modes de flexion pure,  $I_{1,p}$  est proche de 1 tandis que pour les modes de torsion pure  $I_{1,p}$  est proche de 0. Ce phénomène est à l'origine d'une disparité importante des amortissements des premiers modes d'une plaque aux bords libres de fréquences propres proches. Cette disparité a été montrée numériquement et expérimentalement par Lambourg [48]. Il est raisonnable de penser que, pour des modes d'ordre élevé, un comportement asymptotique peut être trouvé.

La Figure 2.5 montre les valeurs de  $I_{1,p}$  pour les premiers 800 modes de la plaque du EMT140 aux bords libres. Ces résultats ont été obtenus par la méthode des éléments finis avec une grille de 200 x 100 éléments rectangulaires de plaque. La variabilité de la valeur numérique de  $I_{1,p}$  est

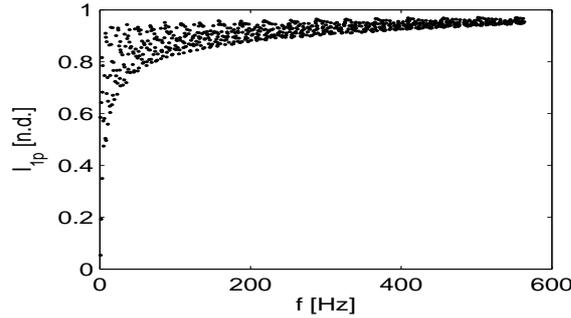


FIG. 2.5: Valeurs de  $I_{1,p}$  obtenus par éléments finis pour les premiers 800 modes de la plaque EMT140.

importante seulement pour les premiers modes. L'écart type de  $I_{1,p}$ , noté  $S_{I_{1,p}}$ , décroît avec la fréquence : à 20 Hz,  $S_{I_{1,p}} \simeq 15\%$ , et à 100 Hz,  $S_{I_{1,p}} \simeq 5\%$ .

Pour les modes d'ordre élevé la valeur du coefficient tend vers  $I_{1,p} = 1$ , et l'amortissement thermoélastique est indépendant de la déformée modale. Alors, pour les plaques de grande densité modale, l'amortissement thermoélastique peut alors être approché par :

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{2} \eta(\omega) \approx \frac{\omega^2 R_1 C_1}{2(\omega^2 h^2 + C_1^2/h^2)} \implies \alpha_\infty = \frac{R_1 C_1}{2h^2}, \quad (2.42)$$

où  $\alpha_\infty$  est sa valeur asymptotique en hautes fréquences.  $\alpha_\infty$  est inversement proportionnel au carré de l'épaisseur. Alors, pour un matériau donné, défini par  $R_1$  et  $C_1$ ,  $\alpha_\infty$  est d'autant plus important que la plaque est mince. La fréquence  $f_x$  pour laquelle  $\alpha(\omega)$  atteint  $X\%$  de  $\alpha_\infty$  est donnée par :

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{X}{1-X}} \frac{C_1}{h^2} \quad [\text{Hz}]. \quad (2.43)$$

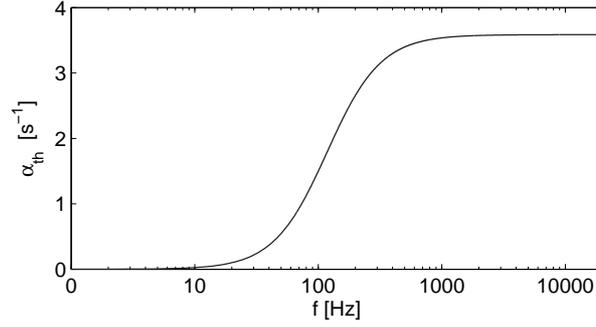


FIG. 2.6: Amortissement thermoélastique pour une plaque en tôle d'acier SAE 1010 (propriétés données au Tableau 2.1) et épaisseur 0.5 mm.

Le paramètre  $C_1/h^2$  gouverne l'augmentation fréquentielle de l'amortissement thermoélastique. Les paramètres thermoélastiques de quelques métaux sont donnés par le Tableau 2.1. Pour l'acier,

Matériau	$R_1 \times 10^3$ [ ]	$C_1 \times 10^3$ [rad m <sup>2</sup> /s]	$\alpha_\infty$ [rad/s]	$f_{0.5}$ [Hz]	$f_{0.95}$ [Hz]
Acier	9.664	0.1855	3.55	118	514
Or	4.727	1.270	11.95	808	3525
Argent	8.403	1.679	27.97	1068	4657
Cuivre	5.691	1.148	13.00	731	3187
Aluminium	9.975	0.9760	19.28	621	2708

TAB. 2.1: Paramètres thermoélastiques pour quelques matériaux métalliques calculés d'après les constantes physiques de [89], [71].  $\alpha_\infty$ ,  $f_{0.5}$  et  $f_{0.95}$  ont été calculés pour une plaque d'épaisseur 0.5 mm.

les paramètres présentés sont ceux de la tôle SAE 1010, un acier avec une faible proportion de carbone et normalisé par la *Society of Automotive Engineers*. L'amortissement thermoélastique asymptotique  $\alpha_\infty$  de l'acier est plus petit que pour les autres métaux en raison de la faible valeur de  $C_1$ , qui est due à une conductivité thermique de l'acier plus petite que pour les autres métaux.

En conclusion, **le modèle d'amortissement thermoélastique présenté dépend des propriétés du matériau et de l'épaisseur de la plaque, et sa dépendance avec la déformée modale est négligeable pour les plaques de densité modale élevée.** Ainsi, la combinaison du matériau et de l'épaisseur ont une influence importante sur le temps de réverbération de la plaque. Par exemple, une plaque en aluminium d'épaisseur  $h = 0.5$  mm a un amortissement thermoélastique très important qui ne permet pas la simulation d'espaces très réverbérants.

### 2.3.2 Amortissement par rayonnement

Lors de la mise en vibration d'une structure, une partie de l'énergie vibratoire est transférée au fluide environnant par rayonnement acoustique. Ce transfert d'énergie produit un amortissement des vibrations. La modélisation fine de cet amortissement doit être basée sur les modèles de rayonnement acoustique des plaques.

Le rayonnement acoustique des plaques est un sujet de recherche qui est toujours d'actualité et dont les premières références datent des années 60. Ce rayonnement est souvent caractérisé par la puissance rayonnée par la structure  $\mathcal{P}_r$ . La capacité à rayonner de la structure est alors

quantifiée par sa résistance de rayonnement  $R_{rad}$  (en anglais *radiation resistance*), définie par :

$$R_{rad} = \frac{\mathcal{P}_r}{\langle v^2 \rangle}, \quad (2.44)$$

où  $\mathcal{P}_r$  est normalisé avec la moyenne spatiale du carré de la vitesse de la structure  $\langle v^2 \rangle$ . Une autre mesure du rayonnement est le facteur de rayonnement  $\sigma_{rad}$  (en anglais *radiation efficiency*), défini par :

$$\sigma_{rad} = \frac{R_{rad}}{\rho_a c_a S} = \frac{\mathcal{P}_r}{\rho_a c_a S \langle v^2 \rangle}. \quad (2.45)$$

$\sigma_{rad}$  a l'avantage de mesurer la capacité à rayonner d'une plaque indépendamment de sa surface  $S$  et de l'impédance caractéristique du fluide  $\rho_a c_a$  dans lequel elle baigne.  $S$  est la surface de rayonnement. Si la plaque rayonne de deux cotés la surface de rayonnement  $S$  est deux fois la surface de la plaque qui rayonne d'un côté. Cette précision est nécessaire pour que la valeur asymptotique en hautes fréquences de  $\sigma_{rad}$  soit égale à 1, indépendamment du nombre de cotés qui rayonnent.

Ces indicateurs du rayonnement sont directement liés au facteur d'amortissement par rayonnement de la plaque par [83] :

$$\alpha_{rad} = \frac{c_a \rho_a}{\rho h} \sigma_{rad} = \frac{1}{2L_x L_y \rho h} R_{rad}, \quad (2.46)$$

où on suppose une plaque rectangulaire qui rayonne des deux côtés, et pour laquelle la surface qui rayonne est  $S = 2L_x L_y$ .

On se limite ici à citer les résultats concernant les plaques minces en flexion placées dans un écran infini et simplement supportées sur leur pourtour. Ce cas se prête facilement à des calculs analytiques. Du fait de la grande densité modale des plaques prises en considération, on peut négliger l'influence des conditions aux limites sur le rayonnement. L'hypothèse d'écran infini est plus difficilement justifiable pour une plaque sans écran, mais :

- des travaux récents [63] montrent que l'influence de l'écran au-delà de  $f_c/2$  est négligeable pour des plaques de grande densité modale.
- en dessous de  $f_c/2$  l'absence d'écran diminue le rayonnement par rapport au cas avec écran. L'ordre de grandeur de l'amortissement par rayonnement de la plaque avec écran y est cependant très faible par rapport aux autres mécanismes dissipatifs. La surestimation due à l'écran n'a alors pas une influence significative sur les prédictions d'amortissement.

Pour ce problème, deux types d'approche ont été trouvés dans la littérature selon que l'on considère le rayonnement mode par mode ou le rayonnement global de la structure. Dans le premier cas, Wallace [87; 86; 88] propose sous forme intégrale l'expression du facteur de rayonnement modal pour chacun des modes de vibration. Pour la deuxième approche, Maidanik [53] donne l'expression du facteur de rayonnement moyen obtenu avec l'hypothèse que tous les modes de la plaque sont excités avec la même énergie.

Ces deux approches font l'hypothèse d'un fluide léger, qui consiste à négliger la charge du fluide dans le calcul de l'impédance de rayonnement de la plaque en régime forcé. Alors, les modes propres de la plaque qui baigne dans le fluide sont les mêmes que ceux de la plaque *in vacuo*. Cette hypothèse est justifiée lorsque on a [70] :

$$\mu = \omega \frac{\rho h}{\rho_a c_a} \gg 1, \quad (2.47)$$

condition normalement remplie pour le rayonnement des plaques dans l'air. Une deuxième hypothèse consiste à négliger la contribution du couplage intermodal dans le rayonnement acoustique de la plaque.

La fréquence critique  $f_c$  est un paramètre important gouvernant le rayonnement acoustique des plaques.  $f_c$  est définie comme la fréquence à laquelle la longueur d'onde acoustique du fluide coïncide avec celle des vibrations de flexion (cf. Figure 2.7). Pour une plaque mince isotrope,  $f_c$

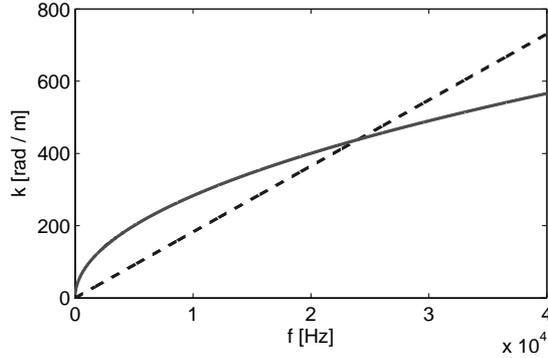


FIG. 2.7: Relation de dispersion pour une plaque en acier d'épaisseur  $h = 0.5$  mm (—) et pour l'air (- -). Pour  $f > f_c$  le rayonnement acoustique est efficace, et l'amortissement par rayonnement important.

est donnée par :

$$f_c = \frac{c_a^2}{2\pi\kappa}, \quad \text{avec : } \kappa = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}. \quad (2.48)$$

Pour une plaque infinie, ce paramètre sépare deux domaines fréquentiels :

- pour  $f < f_c$ , la plaque génère des ondes de pression évanescentes et il n'y a pas de transmission d'énergie de la plaque vers le fluide. Les effets sont uniquement réactifs et le fluide se comporte comme une masse ajoutée. Il n'y a pas d'amortissement par rayonnement.
- pour  $f > f_c$ , la plaque génère des ondes de pression propagatives, et une partie de l'énergie vibratoire est transmise au fluide environnant sous forme de rayonnement. Il y a de l'amortissement par rayonnement.

Pour  $f > f_c$  le rayonnement d'une plaque finie est similaire à celui d'une plaque infinie. Pour  $f < f_c$  le rayonnement d'une plaque finie est faible, mais non nul [21], et les phénomènes de diffraction sur les bords et les coins de la plaque sont responsables du rayonnement. Le rayonnement de chaque mode dépend alors de sa déformée modale [93].

En règle générale, il est souhaitable que la fréquence critique d'un réverbérateur à plaque soit en dehors du domaine audible, afin d'éviter un amortissement par rayonnement excessif. Par la suite, nous présentons les prédictions de rayonnement modal de Wallace [87] et de rayonnement moyen de Maidanik [53]. La comparaison de ces deux modèles permet de juger de la pertinence d'une description en termes de rayonnement moyen.

### 2.3.2.1 Facteur de rayonnement modal

Wallace estime le rayonnement modal d'une plaque sur des appuis simples avec un écran infini à partir de l'intégrale de Rayleigh. L'avantage des conditions aux limites du type appui simple réside dans l'écriture analytique des déformées modales (2.16), et donc dans la simplicité d'expression du champ de vitesses pour chaque mode. A partir de ce champ, l'intégrale de

Rayleigh permet de déduire la pression rayonnée et l'intensité acoustique. Du fait du caractère conservatif de la propagation acoustique dans l'air, la somme de cette intensité acoustique dans le demi-espace permet d'obtenir la puissance totale rayonnée par la structure. En se plaçant suffisamment loin de la source, l'expression obtenue pour cette somme devient plus simple. Le facteur de rayonnement obtenu par cette méthode se présente donc sous forme d'une intégrale double dans le demi-espace [87] :

$$\sigma_{mn} = \frac{64k^2 L_x L_y}{\pi^6 m^2 n^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{F1(\frac{\alpha}{2}) F2(\frac{\beta}{2})}{[(\alpha/m\pi)^2 - 1][(\beta/n\pi)^2 - 1]} \right)^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (2.49)$$

où  $k$  est le nombre d'onde acoustique et  $\theta$  et  $\varphi$  sont les variables angulaires d'intégration spatiale du champ rayonné par la plaque. Les variables  $\alpha$  et  $\beta$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \alpha &= kL_x \sin\theta \cos\varphi, \\ \beta &= kL_y \sin\theta \sin\varphi, \end{aligned} \quad (2.50)$$

et les fonctions  $F1$  et  $F2$ , qui dépendent de la parité des index  $n$  et  $m$ , sont :

$$\begin{aligned} F1(\alpha/2) &= \begin{cases} \sin(\alpha/2) & \text{pour } n \text{ pair,} \\ \cos(\alpha/2) & \text{pour } n \text{ impair,} \end{cases} \\ F2(\beta/2) &= \begin{cases} \sin(\beta/2) & \text{pour } m \text{ pair,} \\ \cos(\beta/2) & \text{pour } m \text{ impair,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.51)$$

### 2.3.2.2 Facteur de rayonnement moyen

Maidanik [53] a été le premier à proposer une expression pour la résistance de rayonnement moyenne des plaques minces en flexion, placées dans un écran infini et simplement supportées, rayonnant d'un seul côté. Cette expression est obtenue par des méthodes basées sur des calculs de flux de puissance et d'analyse statistique d'énergie (en anglais *Statistical Energy Analysis*, SEA). En pratique, ces résultats sont valables pour des plaques avec une densité modale élevée. Alors, pour  $f < f_c$  et  $kL_x, kL_y > 2\pi$ , on a :

$$\begin{aligned} R_{rad} &= S\rho_a c_a \left( 2 \frac{f}{f_c} \frac{\lambda_c \lambda_a}{S} g_1 + \frac{P\lambda_c}{S} g_2 \right), \quad \text{avec :} \\ g_1 &= \frac{4}{\pi^4} \left( \frac{1 - 2\psi^2}{\psi(1 - \psi^2)^{1/2}} \right) \quad \text{pour } f/f_c < 0.5, \\ g_1 &= 0 \quad \text{pour } f/f_c > 0.5, \\ g_2 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{(1 - \psi^2)}{(1 - \psi^2)^{3/2}} \ln \left[ \frac{(1 + \psi)}{(1 - \psi)} + 2\psi \right], \\ \text{avec : } \psi &= (f/f_c)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

$S = L_x L_y$  est la surface de la plaque,  $P = 2(L_x + L_y)$  est le périmètre de la plaque,  $f_c$  est la fréquence critique,  $\lambda_a$  est la longueur d'onde du son dans l'air et  $\lambda_c$  la longueur d'onde à la fréquence critique. Dans cette expression le terme  $g_1$  correspond aux modes de coin et le terme  $g_2$  aux modes de bord. Pour  $f < f_c$  et  $kL_x, kL_y < 2\pi$ , ce qui est rarement le cas pour le réverbérateur, on a :

$$R_{rad} = S\rho_a c_a \left( \frac{4}{\pi^4} \frac{P\lambda_c}{A} \psi \right), \quad (2.53)$$

à la fréquence critique  $f = f_c$ , on a :

$$R_{rad} = S\rho_a c_a \left[ (L_x/\lambda_c)^{1/2} + (L_y/\lambda_c)^{1/2} \right], \quad (2.54)$$

et au delà de la fréquence critique,  $f > f_c$ , on a :

$$R_{rad} = S\rho_a c_a [1 - (f_c/f)]^{-1/2}. \quad (2.55)$$

Pour une plaque rayonnant par ses deux cotés, le rayonnement total est obtenu en multipliant par deux les résultats obtenus avec les  $R_{rad}$  données ici. La Figure 2.8 montre le facteur de

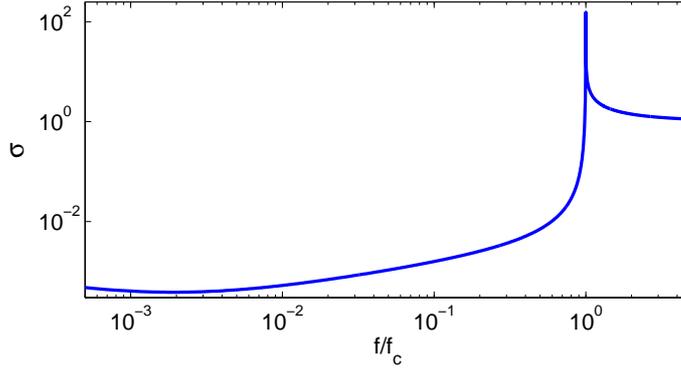


FIG. 2.8: Facteur de rayonnement pour le réverbérateur EMT140 en fonction de la fréquence adimensionnée  $f/f_c$ .

rayonnement du réverbérateur EMT140 calculé à partir des expressions proposées par Maidanik.

### 2.3.2.3 Relation entre rayonnement modal et moyen

Dans le cas général, le facteur de rayonnement global moyen  $\sigma_{rad}(\omega)$  de la structure dépend du point d'excitation. Si on néglige le couplage intermodal, son expression est [51] :

$$\sigma_{rad}(\omega) = \frac{\sum_{m,n} A_{m,n}(\omega)^2 N_{m,n} \sigma_{m,n}}{\sum_{p,q} A_{p,q}(\omega)^2 N_{p,q}}, \quad (2.56)$$

où  $A_{m,n}(\omega)$  est l'amplitude vibratoire du mode  $(m, n)$  à la pulsation  $\omega$  et  $N_{m,n}$  est la norme du mode  $(m, n)$ . Si les modes sont bien espacés, le facteur de rayonnement à la fréquence propre  $\omega_{m,n}$  du mode  $(m, n)$  peut être approché par  $\sigma_{rad}(\omega) \approx \sigma_{m,n}$ . En revanche, pour des structures présentant une densité modale élevée, le facteur de rayonnement moyen dans la bande de fréquences de largeur  $\Delta\omega$  centrée sur  $\omega$  est donné par [51] :

$$\overline{\sigma_{rad}}(\omega) = \frac{\sum_{m,n} \sigma_{m,n}}{N}, \quad (2.57)$$

où, dans la somme, sont seulement pris en compte les modes dont la fréquence propre appartient à  $\Delta\omega$ . L'expression (2.57) suppose que tous les modes dans  $\Delta\omega$  ont la même amplitude de réponse (hypothèse de champ vibratoire diffus [79]). L'expression (2.57) correspond à la moyenne du facteur de rayonnement des modes appartenant à la bande fréquentielle étudiée.

La Figure 2.9 montre les deux types de description du facteur de rayonnement, modal et moyen, pour le réverbérateur EMT140. La moyenne sur 50 modes de l'amortissement modal

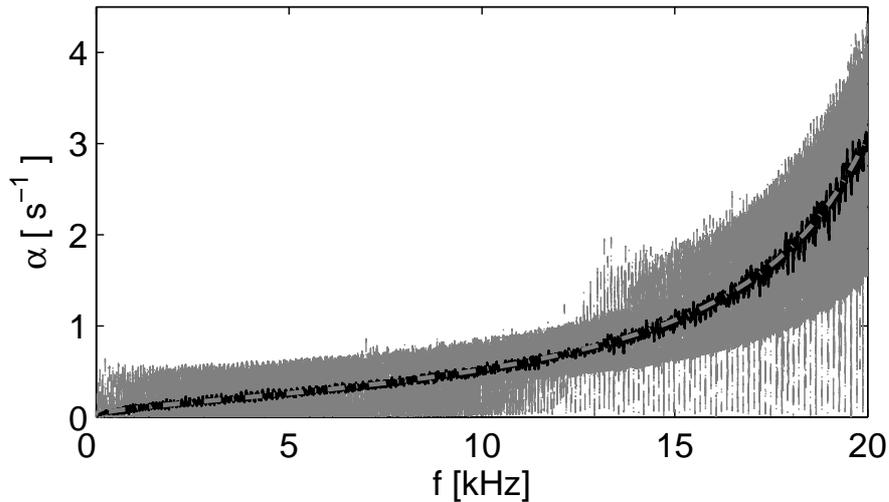


FIG. 2.9: Amortissement par rayonnement du réverbérateur EMT140 avec l'hypothèse de plaque avec des bords sur des appuis simples, dans un écran infini et rayonnant des deux cotés. Amortissements modaux de Wallace [87] (gris) et leur moyenne autour de 50 modes (noir). Amortissement moyen d'après Maidanik [53] (gris ---).

correspond bien à l'amortissement moyen donné par Maidanik.

Pour le réverbérateur EMT140, tout le domaine audible est dans la région  $f < f_c$  et l'amortissement par rayonnement est très faible. La contribution de l'amortissement par rayonnement est petite par rapport à celle de l'amortissement thermoélastique, particulièrement en basses fréquences. Pour des plaques plus épaisses, l'amortissement par rayonnement est plus important et le temps de réverbération maximal de la plaque devient plus petit. La simulation d'espaces avec une longue durée de réverbération n'est alors plus possible.

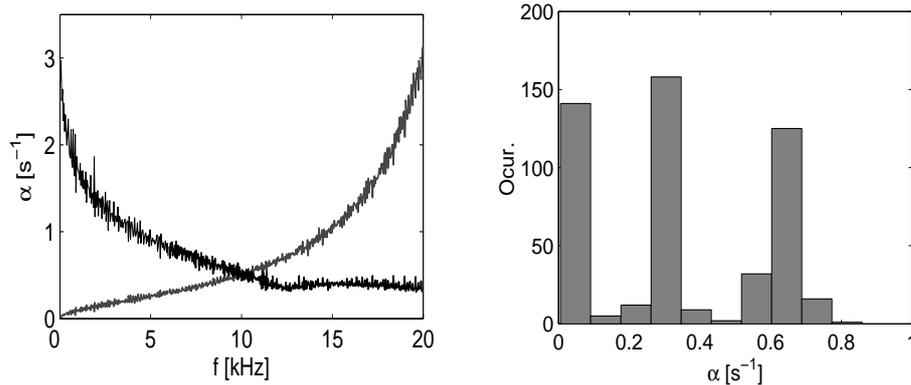


FIG. 2.10: Analyse de l'amortissement par rayonnement modal du réverbérateur EMT140 calculé avec l'intégrale de Wallace pour une plaque simplement supportée dans un écran infini [87] : (a) moyenne  $\bar{\alpha}$  (gris) et écart type relatif  $S_{n_\alpha}$  (noir) de l'amortissement modal par groupes de  $N = 50$  modes; (b) histogramme de l'amortissement par rayonnement modal entre 6760 and 7150 Hz (501 modes).

La Figure 2.10(a) montre l'analyse statistique des amortissements modaux calculés pour le

réverbérateur. L'amortissement moyen et l'écart type relatif sont définis par :

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \alpha_p, \\ S_{n_\alpha} &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (\alpha_p - \bar{\alpha})^2}.\end{aligned}\tag{2.58}$$

$S_{n_\alpha}$  donne une estimation de la variabilité de l'amortissement par rayonnement entre les modes. Il décroît avec la fréquence jusqu'à environ  $f_c/2$ , et ensuite il reste stable.

L'histogramme montre que les modes peuvent être classés en trois groupes selon leur amortissement  $\alpha_p$ , qui correspond à la classification du rayonnement d'une plaque finie en modes de bord et modes de coin [93]. Ces groupes sont :

- modes de coin avec  $\alpha_p$  petit,
- modes de bord du côté  $L_y = 1$  m avec  $\alpha_p$  moyen,
- modes de bord du côté  $L_x = 2$  m avec  $\alpha_p$  grand.

Alors, le comportement du rayonnement mode par mode prédit ici montre qu'il est possible d'avoir un amortissement total variable autour d'une fréquence. En pratique, ce phénomène n'est pas très important quand on minimise les pertes par rayonnement grâce à l'utilisation de plaques avec une fréquence critique en dehors du domaine audible. L'amortissement par rayonnement est alors faible par rapport aux autres mécanismes dissipatifs dans le domaine audible.

### 2.3.3 Influence du matériau poreux à proximité

Le contrôle du temps de réverbération du réverbérateur EMT140 est réalisé à travers la modification de la distance de séparation entre la plaque en acier et la plaque en matériau poreux. La présence du matériau poreux à proximité peut s'interpréter comme un changement d'impédance du fluide à proximité de la plaque vibrante, qui influence son rayonnement acoustique. Ce mécanisme permet alors de modifier l'amortissement des vibrations de la plaque.

L'influence d'une plaque poreuse à proximité d'une plaque vibrante a été étudiée, théoriquement et expérimentalement [19; 83; 18]. Dans tous ces travaux, le matériau poreux est modélisé par un fluide équivalent avec une masse volumique et une vitesse de propagation complexes obtenues à partir de son impédance acoustique.

Dans [19] deux modèles différents sont présentés pour une plaque vibrante simplement appuyée sur son pourtour et dans un écran fini. Le premier est basé sur une approche modale de résolution. La plaque est couplée à un espace d'air d'hauteur finie suivi d'une plaque de matériau poreux de dimensions finies. La deuxième approche est basée sur un modèle de rayonnement d'une plaque vibrante dans un milieu poreux. Dans ce cas le rayonnement ne peut pas être estimé à partir de la pression rayonnée en champ lointain parce que le matériau poreux est un milieu non conservatif. Le rayonnement est alors obtenu comme la somme des contributions de monopoles correspondant à des éléments différentiels de surface de la plaque. Les limitations de ce modèle sont qu'il ne prévoit pas la possibilité d'avoir une épaisseur d'air entre la plaque et le matériau poreux, et que l'épaisseur du matériau poreux ainsi que ses dimensions latérales sont considérées infinies.

Dans [83] deux modèles analytiques pour le rayonnement d'une plaque avec un milieu poreux à proximité sont proposés : un modèle de plaque finie coûteux en calcul et un modèle plus simple pour une plaque infinie. Ces modèles considèrent un matériau poreux d'épaisseur infinie

en contact avec la plaque vibrante, ce qui n'est pas le cas du réverbérateur étudié ici. Néanmoins, les auteurs montrent que le facteur de rayonnement de la plaque finie et celui de la plaque infinie sont très similaires. Ces résultats suggèrent qu'une approche du type plaque infinie peut suffire pour la modélisation de ce type de problèmes. En effet, en raison du matériau poreux, la contribution des bords au rayonnement d'une plaque finie est négligeable par rapport à la contribution de sa surface, même en dessous de la fréquence critique.

Dans [18], Cummings présente un modèle de plaque infinie qui tient compte d'une épaisseur finie du matériau poreux ainsi que d'une tranche d'air d'épaisseur finie entre la plaque vibrante et le matériau poreux. Ce modèle correspond bien à la configuration du réverbérateur EMT140 et a l'avantage d'avoir une formulation simple. C'est donc celui qui est retenu ici. Le modèle de

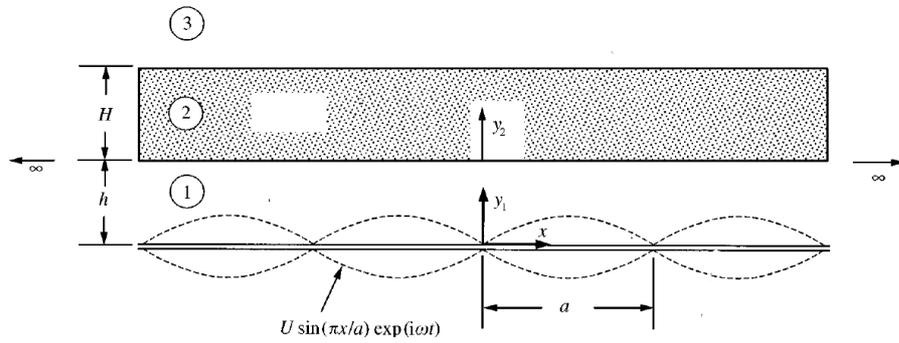


FIG. 2.11: Configuration du problème de la plaque vibrante infinie avec une plaque de matériau poreux à proximité, d'après [18].

Cummings suppose la présence d'un champ de vitesses sur une plaque infinie sous forme d'onde stationnaire  $u_p = U \sin(\pi x/a) e^{j\omega t}$  (cf. Figure 2.11).  $a$  est la demi-longueur d'onde du champ vibratoire de la plaque et  $\omega$  la pulsation de vibration. La prédiction du rayonnement passe par la résolution de l'équation des ondes dans les trois régions du problème : tranche d'air d'épaisseur  $h$  (1), plaque poreuse d'épaisseur  $H$  avec impédance complexe (2) et air (3). La continuité des vitesses acoustiques est imposée à chacune des trois interfaces : entre la plaque vibrante et l'air, entre l'air et la partie inférieure de la plaque poreuse et entre la face supérieure de la plaque poreuse et l'air. Avec cette méthode, on remonte à la pression rayonnée par la plaque vibrante et on en déduit le facteur de rayonnement  $\sigma$ . L'expression de  $\sigma$  obtenue est :

$$\sigma(\omega) = k \Re e \left[ \frac{1}{k_{y1}} \frac{1 + \Psi(\omega)}{1 - \Psi(\omega)} \right], \quad \text{où :}$$

$$\Psi(\omega) = -e^{-j2k_{y1}h} \frac{1 - e^{-j2k_{y2}H}}{F_{BC} - \frac{e^{-j2k_{y2}H}}{F_{BC}}}, \quad (2.59)$$

$$F_{BC} = \frac{k_{y2}\rho_a/k_{y1}\rho_{eq} + 1}{k_{y2}\rho_a/k_{y1}\rho_{eq} - 1},$$

où  $k_{y1}$  et  $k_{y2}$  sont les nombres d'ondes selon l'axe  $y$  dans les régions 1 et 2 :

$$\begin{aligned} k_{y1} &= \sqrt{k^2 - (\pi/a^2)}, & \text{avec : } & k = \omega/c_a \\ k_{y2} &= \sqrt{k_p^2 - (\pi/a^2)}, & \text{avec : } & k_p = \omega/c_{eq} \end{aligned} \quad (2.60)$$

$\rho_a$  est la masse volumique de l'air, et  $\rho_{eq}$  et  $c_{eq}$  sont la masse volumique et la vitesse de propagation complexes du matériau poreux.

L'application de ce modèle pour prédire l'amortissement du réverbérateur EMT140 et la comparaison avec les amortissement mesurés sont présentés au §3.4.2.3.

### 2.3.4 Transmission d'énergie aux supports

La contribution de ces pertes à l'amortissement total ne peut pas être généralisée car elle dépend de la construction du système. Une modélisation physique fine de ces pertes, comme celles des amortissements thermoélastique et par rayonnement acoustique, n'est pas possible. On se contente alors d'en estimer la contribution à partir des mesures totales d'amortissement et grâce à la connaissance de la contribution des autres mécanismes dissipatifs obtenue par leur modélisation.

En ce qui concerne le réverbérateur EMT140, la plaque vibrante est attachée par ses quatre coins à une structure de support massive et tubulaire. Ces liaisons ne sont pas idéales, dans le sens où de l'énergie vibratoire est transmise au cadre lors de la mise en vibration de la plaque. Cette transmission d'énergie due au couplage de la plaque avec ses supports produit un amortissement quantifiable par  $\alpha_{CL}$ . L'estimation expérimentale de  $\alpha_{CL}$  est présentée au §3.4.2.2.

## 2.4 Modèle d'actionneur électrodynamique

Un réverbérateur à plaque nécessite un transducteur capable de mettre en vibration la plaque à partir d'un signal électrique en entrée. Ce transducteur doit être capable d'appliquer une force sur la plaque dans le domaine audible [20; 20000] Hz. Le transducteur du réverbérateur EMT140 est du type électrodynamique dont le principe de fonctionnement est le même que pour les haut-parleurs électrodynamiques. Il est composé d'une bobine mobile et d'un aimant permanent fixe. Le support de la bobine est une surface cylindrique en laiton finissant en forme de cône, dont l'extrémité est soudée sur la surface de la plaque. Autour de cette bobine mobile, un aimant permanent génère un champ magnétique. Lors de la mise sous tension du circuit électrique, le passage d'un courant dans la bobine produit une force de Laplace sur son support proportionnelle au courant  $\mathcal{F}_L = Bl i(t)$ , permettant ainsi la mise en vibration de la plaque. Ce phénomène produit aussi une force contre-électromotrice dans le circuit électrique proportionnelle à la vitesse  $\varepsilon_{cem} = Bl \dot{x}(t)$ . En basses fréquences, le support de la bobine peut être approché par une masse  $M_m$  subissant la force de Laplace mais aussi la force de retour de la plaque  $\mathcal{F}_{pb}$ . Le système d'équations décrivant ce couplage électromécanique est :

$$\begin{cases} u(t) = R_e i(t) + L_e \frac{\partial i}{\partial t} + Bl \frac{\partial x}{\partial t}, \\ Bl i(t) = M_m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \mathcal{F}_{pb}, \end{cases} \quad (2.61)$$

où  $x(t)$  désigne le déplacement de la structure,  $i(t)$  le courant parcourant la bobine et  $u(t)$  la tension aux bornes de l'actionneur. Les paramètres purement électriques sont la résistance et

l'inductance de la bobine  $R_e$  et  $L_e$ . Le facteur de force de l'actionneur  $Bl$  traduit le couplage électromécanique. Il est le produit du champ magnétique  $B$  créé par l'aimant dans l'entrefer et de la longueur de la bobine  $l$ . La force de l'actionneur sur la plaque peut s'écrire comme  $F_{pb} = Z_p(\omega)\dot{X}(\omega)$  où  $Z_p(\omega)$  est l'impédance mécanique de la plaque au point d'excitation. Sous régime harmonique le système (2.61) s'écrit :

$$\begin{cases} U(\omega) = R_e I(\omega) + j\omega L_e I(\omega) + Bl \dot{X}(\omega), \\ Bl I(\omega) = [j\omega M_m + Z_p(\omega)] \dot{X}(\omega), \end{cases} \quad (2.62)$$

et la fonction de transfert entre la vitesse au point d'excitation et la tension aux bornes est :

$$H_{\dot{X},U}(\omega) = \frac{\dot{X}(\omega)}{U(\omega)} = \frac{Bl}{(R_e + j\omega L_e)(j\omega M_m + Z_p) + (Bl)^2}. \quad (2.63)$$

Une fonction de transfert utile pour l'identification des paramètres du modèle est :

$$H_{\ddot{X},I}(\omega) = \frac{\ddot{X}(\omega)}{I(\omega)} = \frac{Bl}{M_m + \frac{Z_p}{j\omega}}. \quad (2.64)$$

En hautes fréquences, l'impédance  $Z_p$  de la plaque tend vers une constante réelle.  $H_{\ddot{X},I}(\omega)$  a alors une asymptote en hautes fréquences de valeur  $Bl/M_m$ . La mesure simultanée de la vitesse au point d'excitation et de l'intensité parcourant l'excitateur permet d'obtenir  $Bl/M_m$ . Les ordres de grandeur de ces paramètres, pour le réverbérateur EMT140, sont  $Bl \sim 1$  N/A,  $M_m \sim 0.01$  kg et  $Z_p \sim 25\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$  (cf. §3.6.2).

Ce type d'actionneurs peut avoir un comportement non linéaire provoqué principalement par les grands excursions de la bobine [64; 81]. Ce phénomène n'a pas été approfondi au cours de cette thèse.

## 2.5 Conclusion

Les choix de modélisation pour la description des phénomènes physiques entrant en jeu dans le fonctionnement d'un réverbérateur à plaque ont été présentés et détaillés.

Le modèle de Kirchhoff-Love décrit les vibrations de flexion de faible amplitude d'une plaque mince non amortie. Une partie importante du travail réalisé ici concerne la vérification des hypothèses sous-jacentes à l'utilisation de ce modèle pour décrire le réverbérateur :

- la méthodologie de vérification de l'hypothèse de plaque mince pour une plaque isotrope a d'abord été présentée. Pour le réverbérateur EMT140, l'erreur commise sur la vitesse de phase par l'approximation de plaque mince est inférieure à 0.5% dans tout le domaine audible,
- la linéarité des vibrations, qui dépend de l'amplitude du déplacement transversal, est assurée par une excitation suffisamment faible,
- on a montré que l'influence de la tension mécanique appliquée à la plaque du réverbérateur à travers ses points d'attache diminue avec la fréquence. La Figure 2.2 montre que, pour l'ordre de grandeur des paramètres du réverbérateur, l'influence de la tension est négligeable au delà de 100 Hz.

Les résultats de référence issus de ce modèle sont présentés au §2.2.3. Ils permettront, d'une part, de confronter les expériences à la modélisation au chapitre 3 et, d'autre part, de vérifier

le comportement des algorithmes numériques par rapport aux solutions analytiques au chapitre 4. L'admittance au point d'excitation d'une plaque infinie  $Y_{dp} = 1/(8\rho h\kappa)$  a été obtenue à partir de son noyau de Green. On s'attend à retrouver expérimentalement cette valeur en hautes fréquences, où le comportement de la plaque s'approche de celui d'une plaque infinie, ce qui permettra d'estimer  $\rho h\kappa$ . Par ailleurs, le calcul analytique de la réponse à une impulsion ponctuelle d'une plaque finie sur des appuis simples permet la vérification des algorithmes de simulation du réverbérateur à plaque, mais aussi la simulation de la réponse d'une plaque faiblement amortie sur des appuis simples.

Finalement, l'adimensionnement du modèle vibratoire pour une plaque isotrope a permis d'identifier un temps caractéristique du problème  $t_0 = L_x L_y / \kappa$ , dont l'interprétation physique n'est pas immédiate, mais qui apparaîtra lors de l'étude de la densité de réflexions dans le domaine temporel et de la densité modale dans le domaine fréquentiel au chapitre 5.

La modélisation fine des principaux mécanismes dissipatifs entrant en jeu dans la vibration de la plaque métallique du réverbérateur ont été détaillés ainsi que leurs limites de validité. L'amortissement thermoélastique dépend uniquement de deux paramètres physiques du matériau,  $R_1$  et  $C_1$  (2.37), et de l'épaisseur de la plaque  $h$ . Pour des matériaux avec une bonne conductivité thermique, il s'agit de l'amortissement prépondérant en basses fréquences. La valeur asymptotique en hautes fréquences est proportionnel à  $1/h^2$  : plus la plaque est mince et plus l'amortissement thermoélastique est important. Par ailleurs, le modèle présenté ici, issu des travaux de Lambourg [48], se prête bien à une simulation numérique dans le domaine temporel.

L'étude des modèles décrivant l'amortissement par rayonnement montrent une faible contribution de ce phénomène à la dissipation totale des vibrations d'une plaque très mince, ici  $h = 0.5\text{mm}$ , dans le domaine audible. La quantification de ce rayonnement peut se faire mode par mode ou globalement. On a présenté les deux approches pour une plaque mince sur des appuis simples et dans un écran infini. L'approche mode par mode permet d'estimer la variabilité possible de cet amortissement selon la déformée modale, mais son implémentation numérique est difficile. L'approche globale fournit une courbe en fonction de la fréquence qui s'avère suffisante pour simuler le comportement des plaques de densité modale élevée et avec une faible contribution de ce mécanisme dissipatif.

La modélisation de l'amortissement produit par la présence d'un matériau poreux à proximité de la plaque vibrante a également été présentée. On suppose une plaque vibrante infinie avec une plaque poreuse d'épaisseur finie à une distance donnée. A partir des paramètres physiques de la plaque poreuse, de la plaque vibrante et de la distance de séparation, on peut estimer le rayonnement de la plaque vibrante en fonction de la fréquence. La présence de la plaque poreuse augmente l'amortissement par rayonnement en basses et moyennes fréquences.

Pour finir, on a proposé un modèle simplifié de l'actionneur électrodynamique et de son couplage avec les vibrations de la plaque. L'excitation de la plaque dépend de l'impédance électrique de l'actionneur, de sa constante de transduction  $Bl$ , de sa masse  $M_m$  et de l'impédance mécanique de la plaque au point d'excitation  $Z_p(\omega)$ . L'impédance, rapport de force sur vitesse, quantifie la résistance au mouvement opposée par la plaque.

Le chapitre expérimental qui suit présente les mesures dont les objectifs sont de vérifier la validité des modèles qui ont été proposés ici et de déterminer les paramètres intervenant dans les modèles et correspondant au réverbérateur EMT140.

### 3.1 Introduction

Afin d'estimer les paramètres nécessaires au modèle numérique du réverbérateur EMT140, décrit au chapitre 4, on recourt à l'expérimentation. Les mesures ainsi réalisées permettent de valider les modèles proposés au chapitre 2 et d'en identifier les limites.

#### Validation de l'hypothèse de linéarité des vibrations

L'hypothèse de linéarité est vérifiée à partir de la mesure de l'amplitude de vibration par rapport au niveau d'excitation de l'actionneur. Sous cette hypothèse, le réverbérateur se comporte comme un système linéaire et invariant dans le temps, qui peut être caractérisé par sa réponse impulsionnelle.

#### La réponse impulsionnelle du réverbérateur

Lors de son usage, l'entrée du réverbérateur est le signal d'alimentation électrique de l'actionneur et sa sortie est le signal électrique de l'accéléromètre. La mesure de la réponse impulsionnelle de ce système permet de caractériser le réverbérateur dans son ensemble, et ce pour différentes distances de séparation entre la plaque vibrante et la plaque poreuse.

#### Amortissement des vibrations

L'amortissement pour chaque distance de séparation entre plaque vibrante et plaque poreuse est obtenu par analyse temps fréquence des réponses impulsionnelles de la plaque. Les résultats obtenus permettent de :

- valider le modèle d'amortissement thermoélastique et déterminer ses paramètres  $R_1$  et  $C_1$ ,
- mettre en évidence le transfert d'énergie de la plaque vers son support et quantifier l'amortissement provenant de ce phénomène,
- valider le modèle de Cummings permettant de prédire l'amortissement provoqué par la présence d'une plaque poreuse à proximité de la plaque vibrante.

#### Constante de propagation $\kappa$

Pour une plaque isotrope non amortie le paramètre de propagation  $\kappa$ , exprimé en  $\text{m}^2/\text{s}$  et défini par (2.9) est le seul paramètre dépendant du matériau dans le modèle de Kirchhoff-Love pour une plaque isotrope. Pour des faibles amortissements,  $\kappa$  régit la propagation des vibrations de la plaque finie et amortie. Il peut alors être estimé à partir de la mesure de la vitesse de groupe des ondes de flexion dans la plaque.

### Densité modale du réverbérateur

Une haute densité modale est une caractéristique nécessaire pour une réverbération artificielle de qualité. On se propose d'avoir accès à cette grandeur directement par la mesure.

### Couplage de l'actionneur avec la plaque

Des mesures sur l'actionneur permettent d'obtenir les paramètres du modèle d'actionneur proposé au chapitre 2 et d'en déterminer les limites de validité.

On insiste sur le fait que la grande plaque du réverbérateur EMT140 est loin d'être un dispositif expérimental idéal. Les systèmes d'attache au bâti, la tension appliquée aux 4 points d'attache et la présence de l'actionneur et des deux capteurs soudés à la plaque sont des éléments qui l'éloignent d'un dispositif de laboratoire, mais qui sont indissociables du système. De plus, en raison de sa faible épaisseur et de sa position perpendiculaire au sol, la surface de la plaque n'est pas parfaitement plane et on y retrouve de petites courbures locales. Ainsi par exemple, il est difficile de comparer les déformées modales à des résultats connus de la théorie des plaques. Une autre difficulté concerne l'identification des mécanismes d'amortissement, car la mesure indépendante de la contribution de chacun des mécanismes dissipatifs n'est pas possible. En particulier, on constate une transmission importante d'énergie de la plaque vers son support à travers les points d'attache. La modélisation physique de cette transmission d'énergie est difficile, et il est nécessaire d'avoir recours à l'expérimentation pour en quantifier la contribution à l'amortissement des vibrations de la plaque. Toutes ces difficultés ne facilitent pas la démarche expérimentale.

## 3.2 Vérification de l'hypothèse de linéarité des vibrations

Une des hypothèses du modèle de Kirchhoff-Love présenté au chapitre 2 est la linéarité des vibrations de la plaque. Les phénomènes non linéaires ne sont pas souhaitables pour un dispositif visant à simuler la réverbération acoustique, qui est un processus linéaire. La linéarité est assurée lorsque l'amplitude du déplacement transversal de la plaque est suffisamment petite, évitant ainsi l'apparition de non-linéarités géométriques. Ceci est en accord avec la limitation, imposée par le constructeur, de 1.5 V en valeur de crête du signal électrique d'alimentation de l'actionneur du réverbérateur EMT140. La relation entre signal électrique de l'actionneur et amplitude de

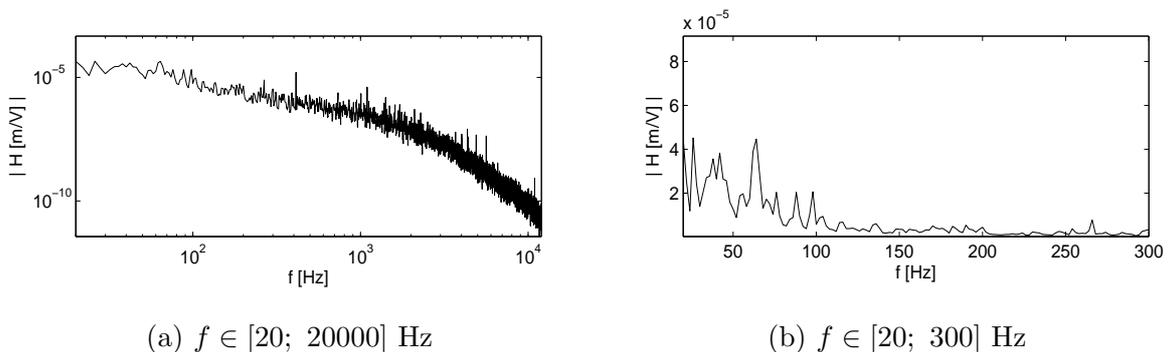


FIG. 3.1: Module de la fonction de transfert  $H(\omega) = u(\omega)/U(\omega)$  entre le potentiel aux bornes de l'actionneur  $U(\omega)$  en Volts et le déplacement au centre de la plaque  $u(\omega)$  en mètres.

vibrations d'un point de la plaque est donnée par une fonction de transfert mesurable. La Figure 3.1 montre le module de cette fonction de transfert pour le déplacement au point central de

la plaque. Le module de cette fonction décroît avec la fréquence et il est strictement inférieur à un dixième de l'épaisseur de la plaque dans tout le domaine audible. On peut supposer que, pour des excitations dont l'énergie est concentrée en très basses fréquences, soit dans la plage [20; 75] Hz, le déplacement de la structure peut approcher le dixième de son épaisseur et que des phénomènes non linéaires peuvent apparaître. Mais en général, l'énergie des signaux traités par la plaque s'étale sur tout le spectre audible, et le déplacement de la plaque est inférieur à 10  $\mu\text{m}$  pour le niveau d'excitation électrique maximal, ce qui est 50 fois plus petit que l'épaisseur de la plaque. Le régime de vibrations des plaques est supposé linéaire pour ce rapport entre déplacement et épaisseur [57], [82]. Une vérification a été faite en alimentant l'actionneur avec un bruit blanc de 1.5 V en valeur de crête et dont l'énergie est uniformément distribuée dans l'intervalle [0; 12] kHz. Un déplacement maximum de 1  $\mu\text{m}$  a été observé. Le comportement vibratoire du réverbérateur EMT140 peut donc être considéré comme étant linéaire et décrit par le modèle de Kirchhoff-Love.

### 3.3 Réponse impulsionnelle (RI)

On s'intéresse à la mesure du réverbérateur dans son ensemble, c'est à dire à la réponse du système qui reçoit un signal électrique alimentant l'actionneur et qui délivre un signal électrique proportionnel à l'accélération d'un point de la plaque.

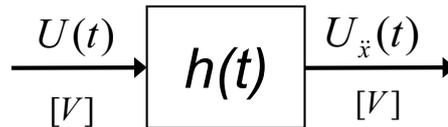


FIG. 3.2: Schéma de la réponse impulsionnelle mesurée, dont l'entrée est le signal électrique d'alimentation de l'excitateur et la grandeur de sortie est le signal électrique fourni par l'accéléromètre.

Dans le régime linéaire, la connaissance de la réponse impulsionnelle (RI) du système permet de prédire sa réponse à n'importe quel signal d'excitation. L'analyse de cette mesure permet d'établir certains paramètres d'entrée du modèle et de comparer la réponse expérimentale aux simulations issues du modèle physique. En particulier, l'analyse temps-fréquence de la décroissance de la réponse impulsionnelle fournit le comportement fréquentiel de l'amortissement des vibrations. L'accès à cette information nécessite une réponse impulsionnelle avec un rapport signal sur bruit (RSB) élevé. Une RSB d'au moins 30 dB est ainsi nécessaire dans chaque bande de fréquence. Un intérêt supplémentaire de la mesure de la RI est la caractérisation possible de l'effet de l'actionneur par comparaison de la RI avec l'admittance au point d'excitation de la plaque.

#### 3.3.1 Méthode de mesure

La mesure de la RI par excitation du système avec une source impulsionnelle n'est pas conseillée en raison du faible RSB obtenu. Pour augmenter le RSB, la source impulsionnelle devrait avoir plus d'énergie, ce qui est incompatible avec la contrainte de faible amplitude pour rester dans le domaine linéaire des vibrations. Les méthodes actuelles de mesure de la réponse impulsionnelle avec un meilleur RSB sont pour la plupart employées en acoustique des salles. Ces méthodes ont connu un grand essor depuis quelques années grâce à l'augmentation de la performance des ordinateurs, qui permet le calcul en temps réel de la réverbération par convolution du signal à traiter avec la RI. Dans ces méthodes, un signal d'excitation large bande, déterministe et périodique est appliqué au système. La réponse du système à ce signal est enregistrée puis

traitée par un processus de déconvolution afin d’obtenir la RI. Les trois principaux types de signal d’excitation utilisés sont les séquences de longueur maximale (MLS) [75], les codes de Golay [32] et le balayage fréquentiel [30], [31]. L’utilisation de ces méthodes suppose que le système mesuré soit linéaire et invariant dans le temps, et le non respect de ces hypothèses peut conduire à des mesures problématiques. La méthode choisie ici pour mesurer la RI du réverbérateur est le balayage fréquentiel en raison de sa simplicité d’implémentation, de sa souplesse d’utilisation et du rapport signal sur bruit obtenu satisfaisant.

On s’inspire des travaux de Farina [30], [31] concernant la mesure de la réponse impulsionnelle d’espaces acoustiques par des méthodes de balayage fréquentiel. La technique la plus simple consiste à utiliser comme signal d’excitation un sinus dont la fréquence varie de façon linéaire avec le temps. On emploie par la suite la terminologie “sinus glissant linéaire” par analogie avec la terminologie anglaise *linear sweep sinus*.

### 3.3.1.1 Sinus glissant linéaire

La pulsation instantanée d’une sinusoïde est la dérivée temporelle de sa phase  $\phi(t)$ . Pour un sinus glissant linéaire de durée  $T$  secondes, si on impose les pulsations initiale et finale  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , on trouve une condition sur la dérivée de sa phase :

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{T}t. \quad (3.1)$$

Pour une phase initiale nulle, l’intégration de (3.1) conduit à l’expression du sinus glissant linéaire :

$$x(t) = \sin(\phi(t)), \quad \text{avec :} \quad \phi(t) = \omega_1 t + \frac{\omega_2 - \omega_1}{T} \frac{t^2}{2}. \quad (3.2)$$

L’échantillonnage temporel de  $x(t)$  à  $F_s > \omega_2/(2\pi)$  donne l’expression du sinus glissant linéaire discret  $x(n)$ . On appelle  $y(n)$  le signal mesuré en réponse à l’excitation du système avec  $x(n)$ . La réponse impulsionnelle du système  $h(n)$  s’obtient alors par filtrage de  $y(n)$  avec le filtre inverse de  $x(n)$ . La réponse impulsionnelle du filtre inverse  $f_i(n)$  est telle que le signal résultant du filtrage de  $x(n)$  avec  $f_i(n)$  soit une impulsion de Dirac. L’avantage des sinus glissants est que leur filtre inverse est connu explicitement : le filtre inverse du sinus glissant linéaire  $x(n)$  de longueur  $N$  échantillons est le retournement temporel de lui même,  $f_i(n) = x(N - n)$ . La Figure 3.3 montre le sinus glissant linéaire de durée  $T = 2$  s échantillonné à  $F_s = 400$  Hz et avec  $f \in [0; F_s/2]$  Hz, et le signal obtenu par convolution avec son filtre inverse. On retrouve une impulsion retardée de  $T = 2$  s en raison du retard total constant introduit par l’opération d’émission du signal  $x(n)$  et le filtrage de  $x(n)$  avec  $f_i(n)$ . L’impulsion ne correspond pas complètement à une impulsion de Dirac discrète  $\delta(n)$  du fait de la troncature des signaux.

Le filtrage inverse du signal d’excitation est équivalent au filtrage de  $\delta(n)$  avec deux filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)  $x(n)$  et  $f_i(n)$ . Par construction, la phase résultant de l’addition des phases de  $x(n)$  et de  $f_i(n)$  est linéaire avec la fréquence. Le filtre  $x(n) * f_i(n)$  est alors équivalent à un filtre à phase linéaire dont l’amplitude est constante dans tout le spectre. Un résultat connu de ce type de filtres est que leur retard de phase et leur retard de groupe sont constants et de valeur égale à la moitié de la durée de sa réponse impulsionnelle. Ici le retard est  $t = T$  s puisque la durée de  $x(n) * f_i(n)$  est  $2T$ . Lorsqu’au lieu de convoluer directement  $x(n)$  avec  $f_i(n)$ , on insère entre les deux le système qu’on souhaite mesurer, c’est à dire  $x(n) * h(n) * f_i(n)$ , on obtient un signal avec la réponse impulsionnelle du système  $h(n)$  retardée de  $T$  s.

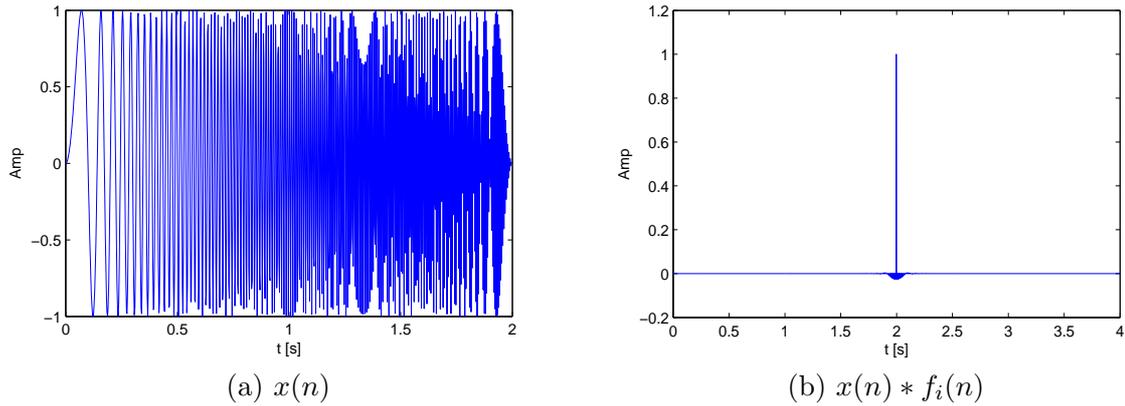


FIG. 3.3: (a) : forme d'onde d'un sinus glissant linéaire. (b) : convolution du sinus glissant avec son filtre inverse.

### 3.3.1.2 Sinus glissant logarithmique

Si le système mesuré a un comportement faiblement non linéaire, sa réponse au sinus glissant contient des harmoniques à des fréquences multiples de la fréquence d'excitation. On constate alors l'apparition d'un bruit déterministe dans la réponse impulsionnelle obtenue par filtrage inverse. Ce bruit est dû à la contribution des différents harmoniques et il est corrélé au signal d'excitation. A la différence du bruit aléatoire, ce bruit ne peut pas être éliminé en faisant la moyenne de plusieurs mesures. Farina montre que l'utilisation d'un sinus glissant dont la fréquence varie de manière exponentielle permet d'éviter ce phénomène [30]. On obtient alors la partie linéaire de la réponse du système séparément de la contribution de chacun des harmoniques issus de la distorsion non linéaire. Avec un raisonnement similaire à celui qui a permis d'obtenir (3.2), on obtient l'expression pour le sinus glissant logarithmique :

$$x_e(t) = \sin(\phi(t)), \quad \text{avec :} \quad \phi(t) = \frac{\omega_1 T}{\ln(\omega_2/\omega_1)} \left( e^{\frac{t}{T} \ln(\omega_2/\omega_1)} - 1 \right). \quad (3.3)$$

Son filtre inverse est le signal lui-même retourné en temps avec une enveloppe d'amplitude décroissante. Cette enveloppe compense la distribution inégale de l'énergie totale du signal, car le signal d'excitation "passe plus de temps" en basses fréquences qu'en hautes fréquences. L'enveloppe décroît de 6 dB/octave et sa valeur initiale est de 1. Le filtre inverse est alors :

$$f_i(t) = x_e(T - t)E(t), \quad \text{avec :} \quad E(t) = e^{\frac{t}{T} \ln(\omega_2/\omega_1)} \left( \frac{-6}{\log_{10}(2)} \right). \quad (3.4)$$

A la différence du sinus glissant linéaire, la fréquence initiale ne peut pas, ici, être nulle, ce qui ne pose pas de problème particulier. La Figure 3.4 montre les formes d'onde du sinus glissant logarithmique de durée  $T = 2$  s échantillonné à  $F_s = 400$  Hz avec  $\omega_1 = 4\pi$  et  $\omega_2 = \pi F_s$ , de son filtre inverse et du signal résultant de la convolution des deux signaux.

Pour la mesure du réverbérateur on a donc retenu l'utilisation d'un sinus glissant logarithmique en raison de cette immunité à de faibles non-linéarités.

Le choix de l'amplitude d'excitation résulte d'un compromis entre d'une part un RSB élevé et d'autre part un comportement le moins non linéaire possible. On rappelle qu'un comportement non linéaire apparaît en très basses fréquences pour des excitations importantes. Le niveau de bruit de l'accéléromètre est indépendant de l'amplitude du signal utile et de la fréquence. En

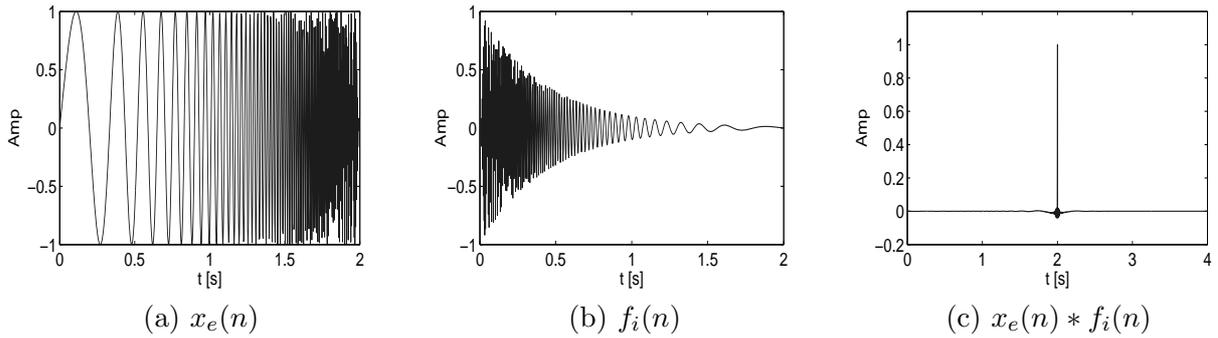


FIG. 3.4: (a) : forme d'onde d'un sinus glissant logarithmique. (b) : filtre inverse du sinus glissant logarithmique. (c) : résultat de la convolution du sinus glissant avec son filtre inverse.

pratique, à très basses fréquences, le niveau du signal d'accélération est plus petit et le RSB du signal de l'accéléromètre devient faible. Puisque le niveau de signal utile est proportionnel à l'amplitude d'excitation, on n'a pas intérêt à travailler avec des amplitudes d'excitation trop petites qui auraient comme conséquence un signal utile complètement noyé dans le bruit. C'est pourquoi les mesures sont faites avec un signal d'excitation d'amplitude 900 mV mesuré aux bornes de l'actionneur. Pour ce niveau les non-linéarités restent encore légères et l'utilisation d'un sinus glissant logarithmique conduit à des résultats de mesure satisfaisants.

### 3.3.2 Dispositif expérimental

Le dispositif de mesure consiste en un ordinateur équipé d'une carte audio externe M-Audio Audiophile USB permettant d'émettre et d'enregistrer des signaux échantillonnés jusqu'à une fréquence  $F_s = 192$  kHz et avec des échantillons représentés par 32 bits. Une sortie de la carte audio est branchée sur un amplificateur de puissance QSC audio RMX 2450, dont la réponse en fréquence est constante à  $\pm 1$  dB près dans le domaine [20 Hz ; 20 kHz]. La sortie de l'amplificateur alimente l'actionneur du réverbérateur EMT140. Le réglage du niveau est fait au niveau de l'amplificateur pour émettre un signal d'amplitude de crête 900 mV.

Pour la mesure des vibrations, un accéléromètre B&K 4374 est collé au point de mesure de la plaque avec de la cire d'abeille. L'accéléromètre est branché en sortie à un conditionneur Nexus qui convertit le signal de charge (pC) en tension (mV). La carte audio enregistre la sortie du conditionneur. Le logiciel libre Audacity est utilisé pour l'émission du signal d'excitation et pour l'enregistrement de la réponse du système à une fréquence d'échantillonnage  $F_s = 48$  kHz.

#### Remarques sur le choix de l'accéléromètre

Un matériau piézoélectrique est un matériau actif qui génère une charge électrique en fonction de la force qui lui est appliquée. Dans un accéléromètre piézoélectrique, ces matériaux agissent comme un ressort qui relie la base de l'accéléromètre à sa masse sismique. Lorsque l'accéléromètre subit des vibrations, une force égale au produit de la masse sismique par sa propre accélération agit sur l'élément piézoélectrique. Si on considère que la masse de la base (base + structure de montage) est beaucoup plus grande que la masse sismique, ce système équivaut à un système masse ressort avec une pulsation de résonance  $\omega_n = k/m_s$ , où  $k$  est une raideur équivalente et  $m_s$  est la masse sismique. En pratique, la gamme fréquentielle utile de l'accéléromètre est déterminée par cette pulsation de résonance : pour  $\omega < 0.3\omega_n$ , la réponse est linéaire à 10% près. Pour des pulsations plus grandes, on est trop près de  $\omega_n$  pour avoir une réponse en fréquence constante. En règle générale, plus la masse sismique de l'accéléromètre est petite et plus le

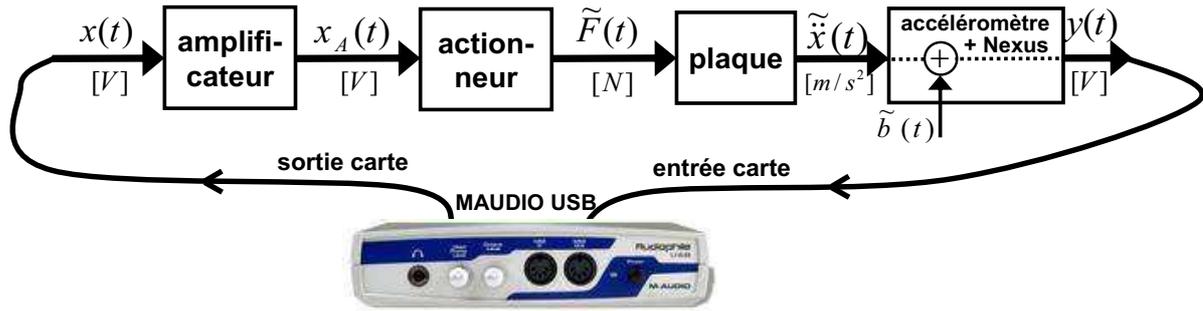


FIG. 3.5: Représentation schématique des dispositifs de mesure de la réponse impulsionnelle et des signaux intervenant dans la mesure. Les signaux auxquels on n'a pas accès sont notés avec  $\tilde{\phantom{x}}$ .

domaine fréquentiel utile est large, mais en revanche plus faible sa sensibilité. Puisque la mesure doit être valable jusqu'à 20 kHz, l'accéléromètre choisi est le B&K 4374, qui a une fréquence de résonance de 85 kHz et une fréquence maximale utile de 26 kHz. Sa faible masse sismique signifie une sensibilité faible, ce qui a pour effet un RSB faible en basses fréquences. Néanmoins, un accéléromètre léger perturbe peu la structure à mesurer (la masse totale du B&K 4374 est de 0.75 gr). La dynamique du point de mesure d'une plaque en acier de 0.5 mm est d'autant plus perturbée que la masse de l'accéléromètre est importante.

### 3.3.3 Un exemple de mesure

On montre ici la mesure de la réponse en accélération en un point de la plaque situé à la même position que le capteur de gauche d'origine du réverbérateur EMT140 (voir la Figure 1.4). L'accéléromètre de laboratoire est collé juste derrière le capteur d'origine, de l'autre côté de la plaque. L'accéléromètre utilisé est parfaitement calibré et on en connaît les limites d'utilisation en fréquence, à la différence de l'accéléromètre d'origine du réverbérateur. Pour cette mesure, la plaque poreuse est située dans la position la plus éloignée de la plaque réverbérante,  $d = 66$  mm. Le signal d'excitation est un sinus glissant logarithmique de durée  $T = 100$  s et de fréquences initiale et finale  $f_1 = 20$  Hz et  $f_2 = 20$  kHz couvrant le spectre audible. Un signal d'excitation long permet d'améliorer considérablement le rapport signal sur bruit de la réponse impulsionnelle obtenue par filtrage inverse. La Figure 3.6 montre le signal obtenu par filtrage inverse de la réponse du système au signal d'excitation. On observe que la RI du système est effectivement placée à  $T = 100$  s, et elle est précédée de petites réponses impulsionnelles correspondant aux énergies des harmoniques apparus pendant l'excitation. Dans le détail (b), on remarque que la valeur maximale de la contribution de ces harmoniques est environ 40 dB en dessous de la "partie linéaire" de la réponse.

Le RSB global de la réponse obtenue est d'environ 80 dB. A la fin de la réponse impulsionnelle, quand toute l'énergie vibratoire de la plaque a été amortie, on retrouve un bruit à  $-80$  dB. Cette réponse impulsionnelle doit être analysée par bandes de fréquences, dans lesquelles le RSB peut être très inférieur. Une façon d'augmenter le RSB est de réaliser un post-traitement de la réponse du système enregistrée. Pour cette opération, on utilise l'outil de réduction de bruit du logiciel Audacity. Dans la réponse au sinus glissant, l'énergie instantanée est concentrée dans un petit intervalle de fréquences et la réduction de bruit est très efficace. Il est important de souligner que cette étape de réduction de bruit est réalisée sur la réponse du système au signal  $x(n)$ , avant de réaliser le filtrage inverse. Appliquer la réduction de bruit directement sur la réponse impulsionnelle aurait modifié la réponse impulsionnelle utile. Avec ce post-traitement, après filtrage inverse du signal traité, on obtient un rapport signal sur bruit de 110 dB. La Figure 3.7

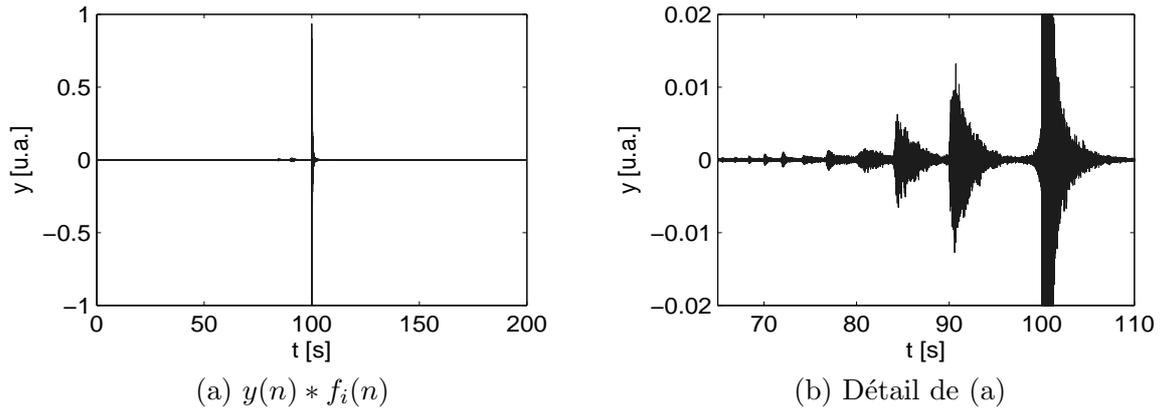


FIG. 3.6: (a) : signal résultant de la convolution de la réponse du système  $y(n)$  avec le filtre inverse du signal d'excitation. (b) : détail du signal autour de son temps central.

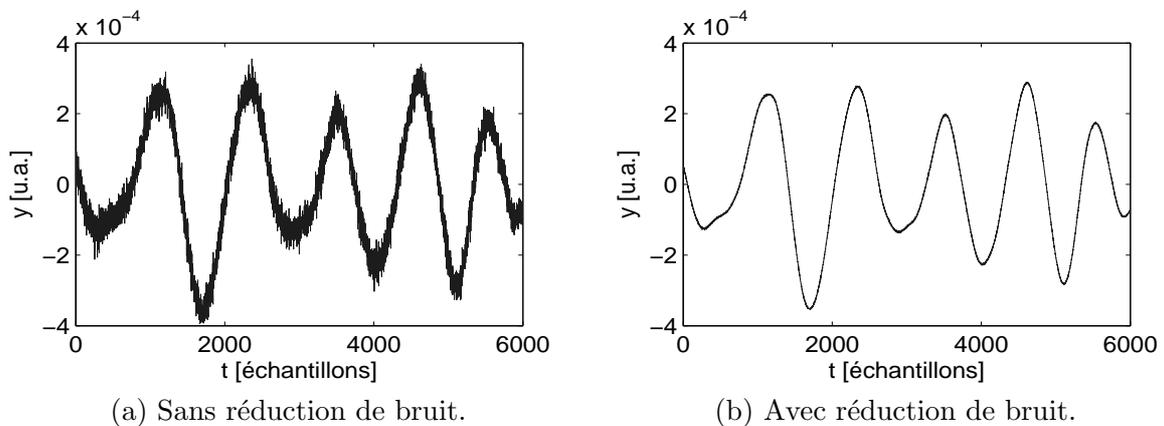


FIG. 3.7: Détail à  $t = 3$  s de la réponse impulsionnelle mesurée : sans application de la réduction de bruit (a) et avec (b).

montre l'amélioration obtenue dans la réponse impulsionnelle à  $t = 3$  s, où l'amplitude du signal utile est de l'ordre de  $-70$  dB. A cet instant, les vibrations restantes sont des basses fréquences en raison de l'amortissement croissant avec la fréquence. On observe sur la Figure 3.7 (a) un bruit perturbant le signal utile basses fréquences. Sur la Figure 3.7 (b) le bruit n'est plus présent et le signal utile ne se voit pas modifié par le traitement de réduction de bruit.

## 3.4 Identification des paramètres vibratoires

### 3.4.1 Amortissement moyen par bande de fréquence

Les mécanismes dissipatifs des vibrations du réverbérateur ont été présentés dans la modélisation. La description la plus détaillée de cet amortissement est donnée par l'amortissement modal, où une enveloppe de décroissance de la forme  $e^{-\alpha_p t}$  est associée au régime libre de chaque mode de vibration. Néanmoins, la mesure du paramètre  $\alpha_p$  pour chacun des près de 25000 modes du réverbérateur dans le domaine audible est une tâche fastidieuse et difficile à mettre en œuvre. Les analyses menées à très basses fréquences avec la méthode paramétrique Esprit ne sont pas concluantes, en raison de la très grande densité modale et de la difficulté à valider les résultats obtenus. Pour ces raisons, une description sous forme d'amortissement moyen par bande

fréquentielle a été choisie pour caractériser expérimentalement la décroissance des vibrations du réverbérateur.

### 3.4.1.1 Analyse temps fréquence de la réponse impulsionnelle

L'analyse temps-fréquence des réponses impulsionnelles mesurées est faite grâce à la transformée de Fourier à court terme (TFCT). Pour un signal  $x(n)$ , elle est définie par [61] :

$$X_{n,k} = X[n, 2\pi k/N_f] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{j(2\pi/N_f)km}. \quad (3.5)$$

$X_{n,k}$  est la Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'une portion du signal d'entrée pondéré par la fenêtre d'analyse  $x[n+m]w[m]$ . La fenêtre  $w(m)$  est non nulle pour  $m \in [0; L-1]$  et nulle ailleurs. Les pulsations discrètes sont  $\lambda_k = 2\pi k/N_f$  avec  $N_f \geq L$ . En pratique, pour  $N_f = L$ , cette représentation se calcule avec la commande Matlab<sup>®</sup> *specgram*. Les paramètres de la TFCT sont la taille des transformées successives  $N_f$ , le type de fenêtre  $w(m)$  et le pas  $\Delta n$  d'avancement dans le signal.  $\Delta n$  doit être dans l'intervalle  $[1; N_f]$  pour éviter la perte d'information. On le définit, à partir du recouvrement  $r \in ]0; 1[$  entre transformées successives, par  $\Delta n = \lceil (1-r)N_f \rceil$ , où  $\lceil \cdot \rceil$  est l'opérateur partie entière par excès. Par exemple, un recouvrement de 50%,  $r = 0.50$ , correspond à un avancement  $\Delta n = 0.5N_f$ , et chaque échantillon de  $x(n)$  participe dans le calcul de deux spectres locaux. L'analyse temps fréquence du signal temporel  $x(n)$  retourne la matrice  $X_{i\Delta n,k}$ .

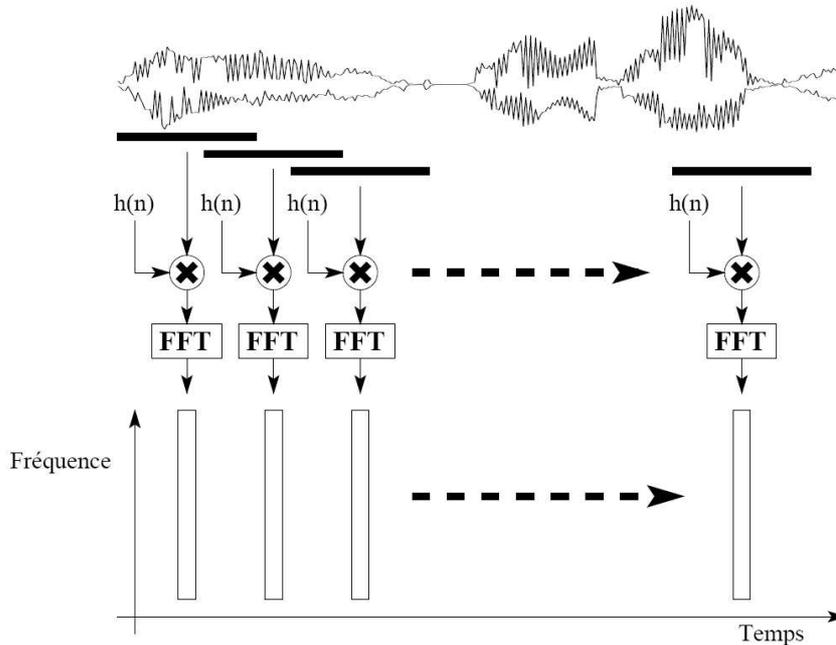


FIG. 3.8: Analyse temps fréquence d'un signal par TFCT.

Pour un instant donné, c'est à dire  $i = i_0$  fixe, le spectre  $X_{i_0\Delta n, \cdot}$  est la transformée de Fourier du segment de signal  $x(n)$  avec  $n \in [i_0\Delta n; i_0\Delta n + N_f]$  pondéré par la fenêtre d'analyse  $w$ . Cette représentation donne une estimation de la répartition spectrale de l'énergie tous les  $\Delta n$  échantillons. Il peut être interprété comme un échantillonnage à  $F_s/\Delta n$  Hz d'un "spectre instantané". Plus  $\Delta n$  est petit et plus le recouvrement entre portions successives est grand. La

résolution fréquentielle de chacun de ces spectres est donnée par  $\Delta f = Fs/N_f$  et la résolution temporelle est  $\Delta t = \Delta n/Fs$ . Cette opération peut être aussi interprétée comme le passage de  $x(n)$  dans un banc de  $N_f/2 + 1$  filtres passe bande centrés à la fréquence  $f_k = Fs(k/N_f)$  Hz. Pour plus de détails le lecteur peut s'adresser à [49].

Pour l'analyse du réverbérateur, le signal  $x(n)$  correspond à la réponse impulsionnelle mesurée échantillonnée à  $Fs = 48000$  Hz. Une fenêtre d'analyse de Hanning offre un bon compromis entre largeur des lobes secondaires et primaire. Le choix d'une taille de transformée  $N_f = 1024$  et d'un recouvrement  $r = 0.9$  fournit une représentation de résolution fréquentielle  $\Delta f = 46.875$  Hz et de résolution temporelle  $\Delta t = 2$  ms. Ces résolutions sont jugées suffisantes pour l'analyse de l'amortissement du réverbérateur. L'estimation de la décroissance temporelle de chaque bande fréquentielle  $X_{n,k}$  d'index  $k$  est décrite ci-après.

### 3.4.1.2 Analyse de la décroissance d'un canal

La décroissance de chaque bande  $X_{n,k}$  d'index  $k$  peut être estimée par régression linéaire, au sens des moindres carrés, de  $X_{n,k_i}$  en échelle logarithmique par rapport au temps. La relation entre l'amortissement  $\alpha$  et la pente de la droite  $K_{dB}$  exprimée en  $dB/s$  est donnée par :

$$\alpha = K_{dB} \ln(10)/20. \quad (3.6)$$

L'évolution temporelle de l'énergie présente des oscillations et n'est pas strictement décroissante. Ce phénomène introduit une incertitude lors de l'ajustement de la droite, qui dépend de l'intervalle d'ajustement utilisé. La Figure 3.9 montre deux cas typiques de ces incertitudes d'ajustement. La Figure 3.9 (a) montre les différentes droites obtenues pour 4 durées d'ajustement

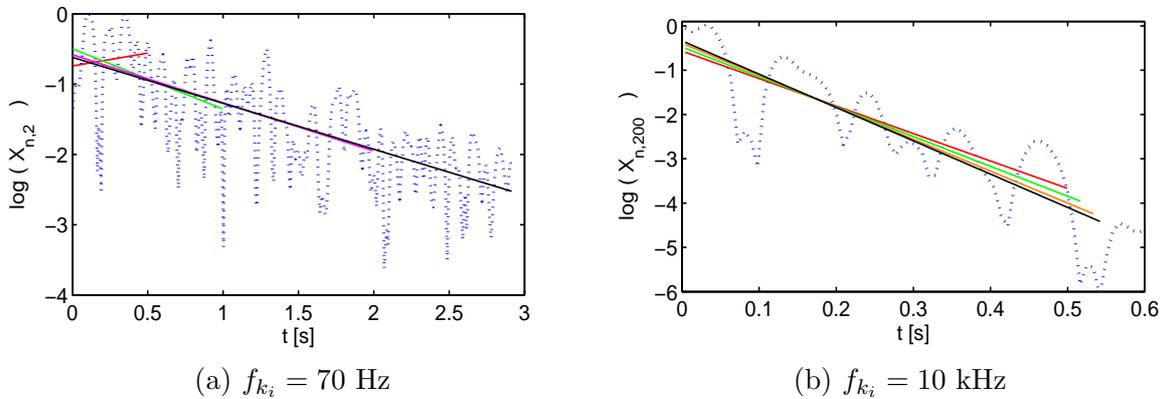


FIG. 3.9: Module de la bande fréquentielle de la TFCT centrée à  $f_{k_i}$   $|X_{\cdot,k_i}|$  ( $\dots$ ) et plusieurs droites de décroissance ajustées de longueurs différentes ( $—$ ). (a) :  $f_{k_i} = 70$  Hz. (b) :  $f_{k_i} = 10$  kHz.

différentes d'une bande faiblement amortie. La pente des droites, et donc l'estimation de  $\alpha$ , dépend de la durée de signal utilisée pour faire l'ajustement. Ceci est critique pour de faibles durées, où l'estimation de  $\alpha$  est fautive. Par exemple, l'ajustement sur l'intervalle  $t \in [0; 0.5]$  s conduit à une pente positive. Pour être précis dans l'estimation de  $\alpha$ , l'ajustement doit être fait sur une portion très grande de signal. Ceci est possible dans ce cas, puisque l'amortissement est faible, mais il n'en est pas de même pour des amortissements élevés, où la durée utile est limitée. La Figure 3.9 (b) montre la décroissance à  $f_i = 10$  kHz. L'amortissement est plus important que dans le cas précédent et l'ajustement de la droite doit se faire sur une durée plus courte. De très petites variations de la durée du signal analysé peuvent conduire à des écarts importants dans

l'estimation de l'amortissement. Par exemple, pour  $t \in [0; 0.5]$  s on obtient  $\alpha = 6.21$ , tandis que pour  $t \in [0; 0.54]$  s on obtient  $\alpha = 7.54$ . Ces différences sont dues à la présence d'un minimum relatif à  $t = 0.54$  s, dont l'effet est l'augmentation de l'inclinaison de la droite quand il est pris en compte. Il semble clair, d'après ces remarques, qu'il est nécessaire de recourir à un moyen plus robuste pour l'estimation de la décroissance.

### 3.4.1.3 Courbe de décroissance

L'estimation de la décroissance d'une réponse impulsionnelle est souvent traitée en acoustique des salles à l'aide de la courbe de décroissance, définie par Schroeder [72] :

$$EDC_h(t) = \int_t^{+\infty} h^2(\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Cette courbe s'obtient par intégration, dans le sens inverse du temps, de l'énergie de la réponse impulsionnelle  $h^2(t)$ . La valeur de  $EDC_h(t)$  correspond à l'énergie restante de la réponse impulsionnelle au temps  $t$ .  $EDC_h(t)$  est donc une fonction monotone décroissante. Cette propriété permet de contourner les difficultés liées aux oscillations et mises en évidence à la Figure 3.9. Dans le domaine discret, l'équation (3.7) n'est plus une intégrale mais une somme sur des échantillons discrets. L'application de cette courbe de décroissance à chaque bande  $k_i$  de la TFCT s'écrit :

$$EDC_{X_{n,k_i}}(m) = \sum_{n=m}^M |X_{n,k_i}|. \quad (3.8)$$

La borne supérieure n'est plus  $+\infty$  mais un instant  $M$  au-delà duquel la réponse impulsionnelle est négligeable par rapport au bruit [72]. La valeur de  $M$  doit être soigneusement choisie afin d'éviter une sous-estimation de la courbe par une troncature excessive de la réponse, ou une sur-estimation de la courbe à cause de la contribution du bruit. Il est ainsi nécessaire de connaître la durée utile de la réponse, qui dépendra de l'amortissement de la bande fréquentielle. La méthode pratique de calcul consiste à inclure dans la somme les échantillons de  $h^2(t)$  dont la valeur est supérieure au niveau de crête du bruit de mesure. Le niveau de crête est estimé à partir de l'énergie de la partie finale de chaque bande, où il ne reste que du bruit. Pour un bruit gaussien, le niveau de crête est à environ 10 dB au dessus de sa valeur moyenne. En pratique, un choix entre 6 et 8 dB au dessus du niveau moyen du bruit de mesure donne la dynamique maximale de mesure. Ce choix avait déjà été retenu par Jot lors de l'analyse de la réponse impulsionnelle d'espaces acoustiques [40].

La Figure 3.10 montre l'application de cette méthode pour deux bandes différentes de la RI du réverbérateur. Cette méthode est suffisamment robuste pour être appliquée au calcul automatique de l'amortissement de chaque bande de la réponse impulsionnelle.

### 3.4.2 Amortissement du réverbérateur EMT140

On rappelle que l'amortissement du réverbérateur EMT140 dépend de la distance de séparation entre la plaque poreuse et la plaque vibrante. La réponse impulsionnelle du réverbérateur a été mesurée pour différentes distances entre les plaques. Ces distances, données au Tableau 3.1, ont été prises dans l'intervalle  $d \in [10.72; 65.8]$  mm, correspondant aux configurations possibles du réverbérateur qui nous a été prêté. La mesure de  $d$  est faite toujours au même point de la plaque vibrante de coordonnées  $(x, y) = (1.68, 1)$  m (bord supérieur de la plaque et coordonnée horizontale de l'accéléromètre de droite). Ces valeurs sont à prendre avec précaution. En effet, la mesure de la distance entre les plaques est faite à l'aide d'un pied à coulisses et, pour des raisons d'accessibilité, elle est uniquement possible aux bords de la plaque. Or la plaque en acier

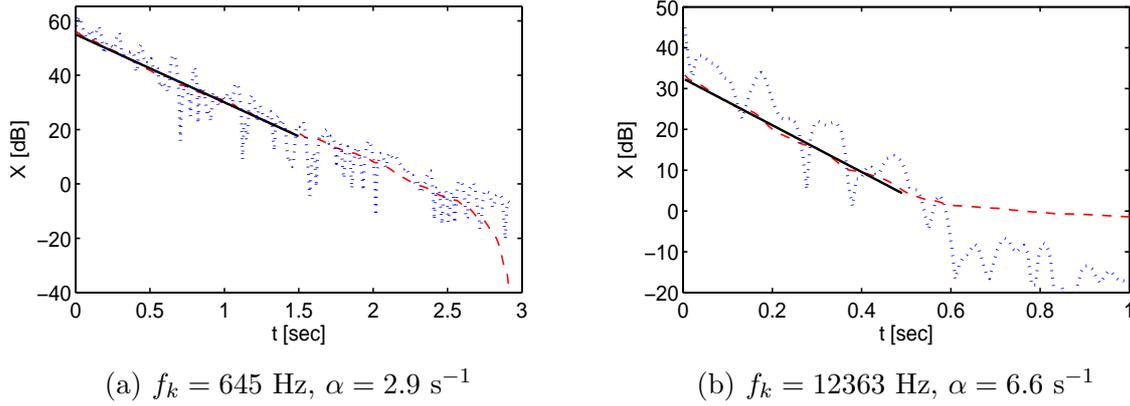


FIG. 3.10: Valeur absolue du canal fréquentiel de la TFCT  $|X_{.,k_i}|$  (...), sa courbe de décroissance  $EDC_{X_{.,k_i}}$  (- - -) et la droite ajustée par interpolation (—). (a) : canal  $f_k = 645 \text{ Hz}, \alpha = 2.9 \text{ s}^{-1}$ . (b) : canal  $f_k = 12363 \text{ Hz}, \alpha = 6.6 \text{ s}^{-1}$ .

$d \text{ [mm]}$				
65.8	62.3	58.2	54.5	51.6
47.8	44.5	40.9	37.7	34.5
31.5	28.7	25.7	22.96	20.1
17.3	15.6	13.2	12.1	10.9

TAB. 3.1: Distances entre la plaque poreuse et la plaque réverbérante pour les mesures de RI réalisées.

présente des courbures locales en raison de ses grandes dimensions, de sa faible épaisseur et du fait qu'elle est attachée au cadre uniquement à ses 4 coins. Les liaisons avec l'excitateur et les accéléromètres sont aussi sources de courbures. Les distances entre les plaques ne sont donc pas constantes, et peuvent varier jusqu'à 4 mm selon l'endroit de la mesure. Il est donc important de toujours faire la mesure de cette distance au même point de référence. Le point choisi ici est tel qu'il représente approximativement la distance moyenne de séparation entre les plaques.

Les amortissements obtenus par l'analyse des réponses impulsionnelles sont résumés dans les Figures 3.11 et 3.12. La Figure 3.11 montre l'évolution de l'amortissement pour la position la plus réverbérante. La Figure 3.12 montre l'amortissement pour 4 distances différentes, choisies pour obtenir des écarts de  $\alpha$  similaires entre les 4 courbes. L'effet de la plaque poreuse se fait sentir principalement en basses fréquences. Plus la fréquence est petite et plus l'effet de la distance sur  $\alpha$  semble important. Pour des fréquences supérieures à 5 kHz, la variation de l'amortissement  $\alpha$  en fonction de la distance entre les plaques n'est pas significative, et les résultats de la Figure 3.11 sont valables pour toutes les configurations.

La présentation de ces résultats sous forme de temps de réverbération  $T_{60}$  plutôt que de  $\alpha$  correspond mieux à la perception humaine de la réverbération. La Figure 3.13 montre ce temps de réverbération pour 7 distances différentes entre la plaque poreuse et la plaque métallique. Ces temps de réverbération sont longs en basses fréquences et peuvent atteindre 10 s. On remarque que l'utilisation de la plaque poreuse permet de moduler assez finement le temps de réverbération en basses et moyennes fréquences. Le temps de réverbération global dépend de la distribution fréquentielle de l'énergie initiale de la réponse impulsionnelle, qui en particulier n'amplifie guère les très basses fréquences. Ces résultats sur l'amortissement total du réverbérateur servent à

valider les modèles d'amortissement proposés au chapitre 2 et donnent accès aux paramètres de l'amortissement thermoélastique.

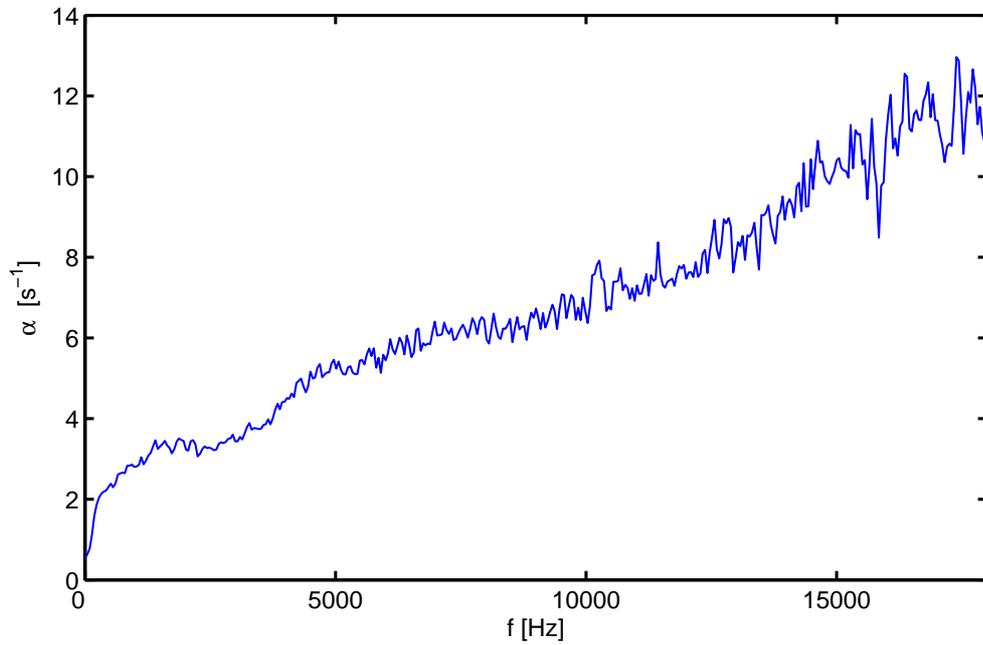


FIG. 3.11: Amortissement  $\alpha$  estimé pour la configuration de distance maximale entre les plaques :  $d = 65.8$  mm

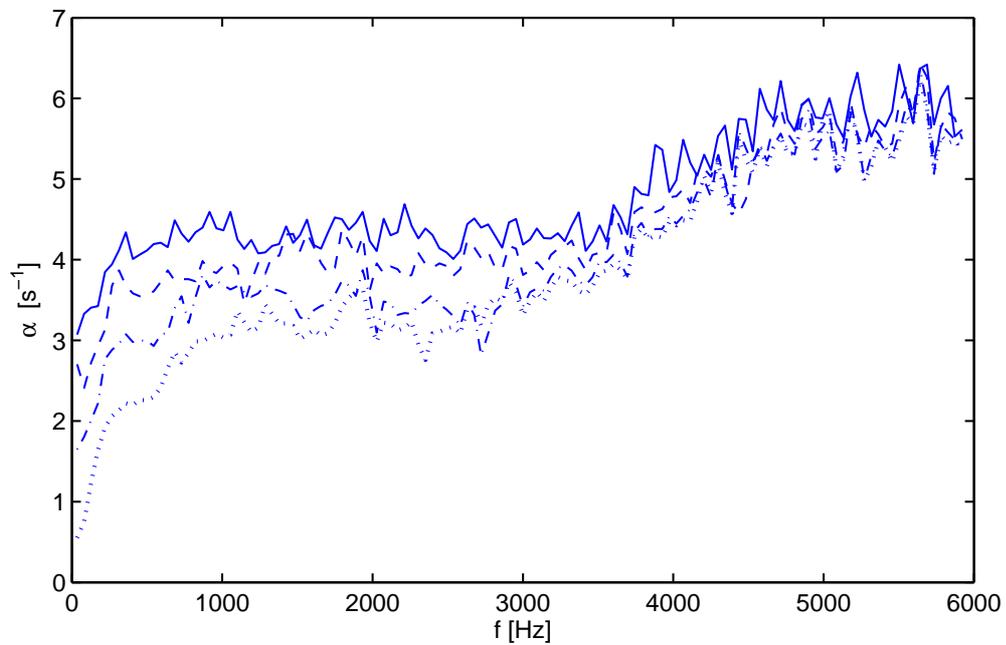


FIG. 3.12: Amortissement  $\alpha$  pour différentes distances entre les deux plaques  $d = 10.9$  mm (—)  $d = 13.2$  mm (- - -),  $d = 17.3$  mm (- · -),  $d = 65.8$  mm (···).

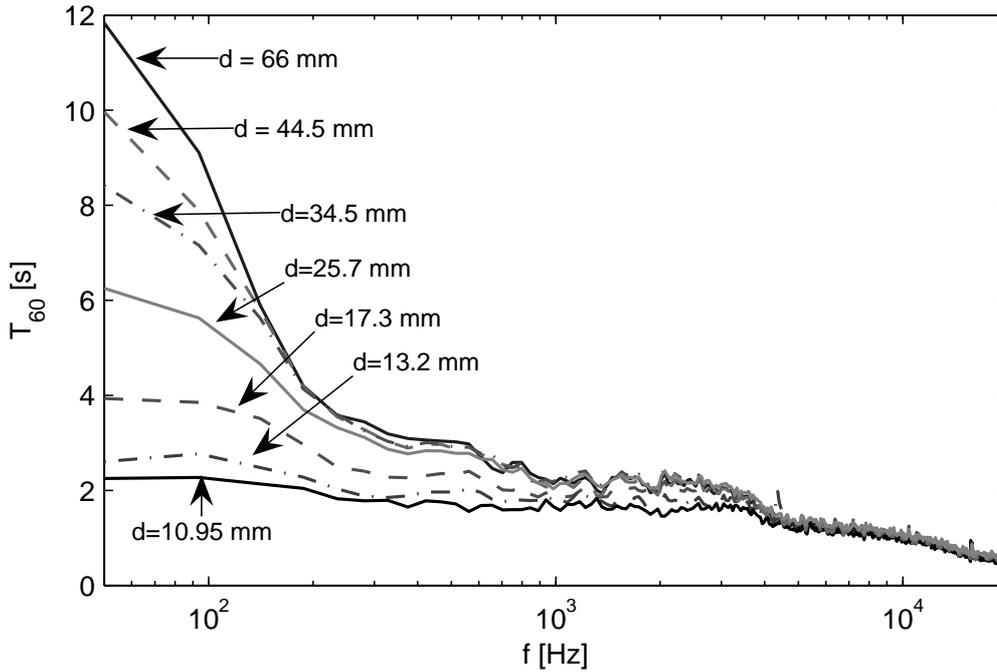


FIG. 3.13: Temps de réverbération  $T_{60}$  pour différentes distances entre les deux plaques  $d = 10.9, 13.2, 17.3, 25.7, 34.5, 44.5, 66$  mm.

### 3.4.2.1 Amortissement thermoélastique

On rappelle que l'amortissement thermoélastique est donné par :

$$\alpha(\omega) \approx \frac{\omega^2 R_1 C_1}{2(\omega^2 h^2 + C_1^2/h^2)} \quad \Rightarrow \quad \alpha_\infty = \frac{R_1 C_1}{2h^2},$$

$$R_1 = \frac{8}{\pi^4} \frac{\varphi^2 T_0}{\rho C_e D_1} \quad [-], \quad \text{avec :} \quad \varphi = \frac{\alpha_{TH} E}{1 - \nu}, \quad (3.9)$$

$$C_1 = \frac{K_z \pi^2}{\rho C_e} \quad [\text{rad m}^2 \text{ s}^{-1}].$$

Pour le réverbérateur EMT140, la valeur précise des paramètres  $R_1$  et  $C_1$  n'est pas connue a priori. Les valeurs de chaleur spécifique  $C_e$ , conductivité  $K_z$  et coefficient de dilatation thermique  $\alpha_{th}$  dépendent du type d'alliage d'acier. Pour l'acier, ces constantes physiques varient dans les intervalles :  $C_e \in [402; 544] \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ,  $K_z \in [33.1; 65.3] \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  et  $\alpha_{TH} \in [9.3; 18] \text{ K}^{-1}$  [10]. Un ordre de grandeur de  $R_1$  et  $C_1$  peut s'obtenir en prenant les valeurs les plus usuelles pour l'acier de ces constantes physiques, ce qui conduit aux valeurs  $R_1 = 9.5 \times 10^{-3} [-]$  et  $C_1 = 1.7 \times 10^{-4} \text{ rad m}^2/\text{s}$ .

On se propose d'utiliser les mesures d'amortissement pour déterminer les valeurs  $R_1$  et  $C_1$ . L'amortissement utilisé correspond à la position de la plaque poreuse donnée par  $d = 66$  mm, à laquelle la contribution à l'amortissement de la plaque poreuse est négligeable. D'après le modèle de rayonnement présenté au chapitre 2, la contribution de l'amortissement par rayonnement est aussi négligeable. L'amortissement en basses fréquences est donc principalement thermoélastique. De plus, l'évolution fréquentielle de l'amortissement mesuré en basses fréquences correspond à

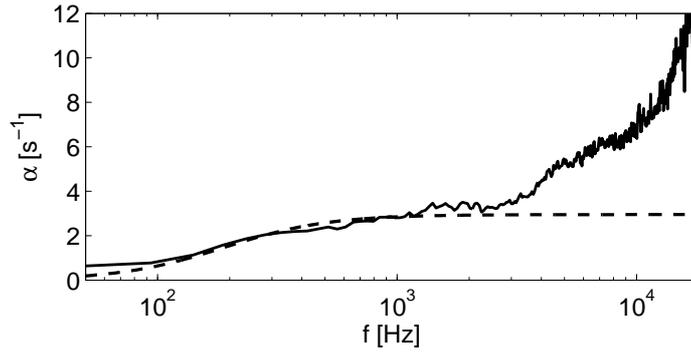


FIG. 3.14: Mesure d'amortissement pour  $d = 66$  mm (—) et modèle d'amortissement thermoélastique ajusté avec  $R_1 = 9.83 \times 10^{-3}$  et  $C_1 = 1.85 \times 10^{-4}$  (- -).

celle de l'amortissement thermoélastique. La Figure 3.14 montre la mesure et le modèle (3.9) avec les paramètres ajustés. Les valeurs obtenues sont  $R_1 = 9.83 \times 10^{-3}$  et  $C_1 = 1.85 \times 10^{-4}$ , qui sont en accord avec l'ordre de grandeur attendu à partir des constantes physiques de l'acier.

### 3.4.2.2 Transmission d'énergie aux supports

On fait l'hypothèse que la totalité de l'amortissement des vibrations est la somme des contributions de l'amortissement thermoélastique, par rayonnement et de la transmission mécanique aux supports. L'amortissement  $\alpha_{CL}$  dû au transfert d'énergie vers les supports à travers les points d'attache est alors estimé comme l'amortissement total mesuré moins la contribution des amortissements thermoélastique et par rayonnement. La Figure 3.15 montre les modèles d'amortissement

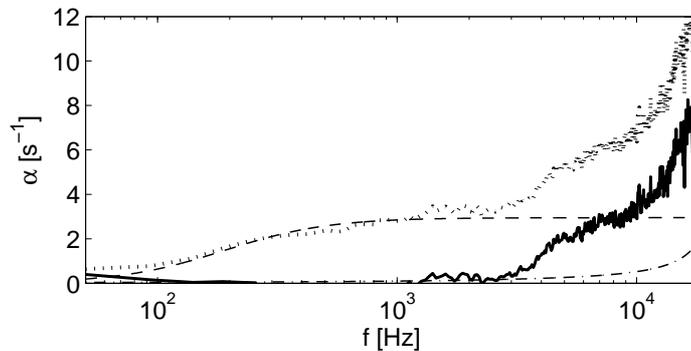


FIG. 3.15: Mesure d'amortissement pour  $d = 66$  mm ( ··· ), modèle d'amortissement thermoélastique (- -), modèle d'amortissement par rayonnement(- · -) et estimation de l'amortissement par transmission d'énergie aux supports  $\alpha_{CL}$ (—) .

thermoélastique et par rayonnement, l'amortissement total mesuré et l'estimation de l'amortissement par transmission d'énergie aux supports. Cette transmission d'énergie est négligeable en basses fréquences et devient importante en hautes fréquences.

La validation expérimentale de l'existence de ce transfert d'énergie est obtenue par excitation large bande de la plaque et par mesure simultanée de l'accélération en un point de la plaque

$\ddot{x}_p$  et de l'accélération en un point de la structure de support  $\ddot{x}_s$ . S'il n'y avait pas de transfert d'énergie l'accélération du support serait nulle dans tout le spectre.

Une mesure relative de la transmission d'énergie est la fonction de transfert  $H_c(\omega) = \frac{\ddot{x}_s(\omega)}{\ddot{x}_p(\omega)}$  entre l'accélération au support et l'accélération à la plaque, qui peut être estimée par :

$$H_c(\omega) = \frac{\ddot{x}_s(\omega)}{\ddot{x}_p(\omega)} = \frac{G_{\ddot{x}_s\ddot{x}_p}(\omega)}{G_{\ddot{x}_p\ddot{x}_p}(\omega)}, \quad (3.10)$$

où  $G_{\ddot{x}_p\ddot{x}_p}$  est l'autospectre de l'accélération  $\ddot{x}_p$  et  $G_{\ddot{x}_s\ddot{x}_p}(\omega)$  est l'interspectre des accélérations  $\ddot{x}_s$  et  $\ddot{x}_p$ . L'acquisition des signaux, le calcul des spectres et la génération du signal aléatoire d'excitation large bande  $f \in [0; 12]$  kHz sont gérés par le système d'acquisition Pulse de B&K.

A cause de la densité modale élevée de la plaque, on peut considérer que le comportement global de  $H_c(\omega)$  est indépendant du point d'excitation. Cette affirmation a été validée expérimentalement. A partir de la mesure de  $H_c(\omega)$ , montrée par la Figure 3.16, il n'est pas

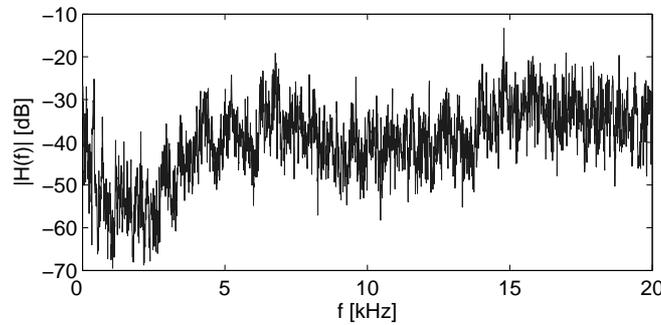


FIG. 3.16: Module de la fonction de transfert  $H_c = \ddot{x}_s/\ddot{x}_p$  obtenue par excitation de la plaque et mesure simultanée de l'accélération en un point de la plaque  $\ddot{x}_p$  et sur le support  $\ddot{x}_s$ . Cette mesure correspond à la moyenne obtenue à partir de la mesure de l'accélération en 3 positions du support.

possible de valider quantitativement l'estimation de l'amortissement  $\alpha_{CL}$  faite précédemment. Néanmoins, cette mesure prouve l'existence de ce transfert d'énergie.  $H_c$  augmente à partir de 3 kHz, ce qui est le cas aussi pour  $\alpha_{CL}$ .

### 3.4.2.3 Effet de la plaque poreuse sur l'amortissement

La mesure de l'amortissement des vibrations pour différentes distances entre plaque poreuse et plaque vibrante permet d'estimer l'amortissement produit par la plaque poreuse, dont l'épaisseur est  $H = 13$  mm. Ces résultats expérimentaux peuvent être comparés aux prédictions du modèle de Cummings présenté au chapitre 2. La comparaison du modèle avec les mesures d'amortissement est faite à partir de la différence d'amortissement  $\Delta\alpha$  entre deux distances  $d_i$  et  $d_j$  entre la plaque poreuse et la plaque vibrante :  $\Delta\alpha = \alpha_{d_i} - \alpha_{d_j}$ . Cette comparaison permet de vérifier l'accord entre modèle et mesures et de déterminer les limites de validité du modèle.

Pour le calcul du modèle de Cummings (cf. §2.3.3) il est nécessaire de connaître la masse volumique  $\rho_{eq}$  et la vitesse de propagation  $c_{eq}$  du matériau poreux qui interviennent dans (2.59). Ces deux paramètres sont complexes et dépendent de la fréquence. Dans [19; 18] ils sont estimés, pour un matériau donné, à partir de l'ajustement de données expérimentales. Ici, afin d'obtenir un modèle plus général, on utilise le modèle de matériau poreux Limp [26], qui prédit  $\rho_{eq}$  et  $c_{eq}$

à partir de la connaissance de la résistivité au passage de l'air et de la porosité du matériau. Le modèle de Limp tient compte de l'inertie de la phase solide du matériau poreux mais en néglige la raideur. Pour le réverbérateur, d'après Kuhl [45], la résistivité au passage de l'air de la plaque d'amortissement du réverbérateur EMT140 est 1.5 fois celle de l'air, c'est à dire  $610.5 \text{ N s/m}^2$ . Une valeur typique de la porosité pour ce type de matériau est prise en hypothèse égale à 95%. Avec ces valeurs des paramètres d'entrée du modèle de Limp, on obtient les valeurs complexes  $\rho_{eq}(\omega)$  et  $c_{eq}(\omega)$  du matériau poreux.

La Figure 3.17 montre les prédictions de l'augmentation de l'amortissement produit par la plaque poreuse pour les paramètres du réverbérateur EMT140 et pour différentes distances de séparation  $d$  décroissantes entre la plaque réverbérante et la plaque poreuse.

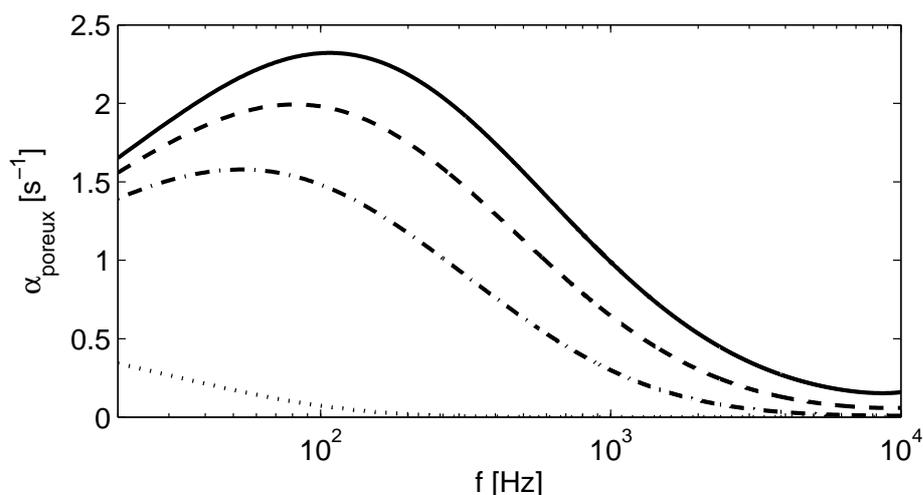


FIG. 3.17: Prédications du modèle de Cummings de l'amortissement des vibrations produit par la plaque poreuse sur la plaque vibrante de l'EMT140 pour différentes distances entre les deux plaques :  $d = 65.8 \text{ mm}$  ( $\cdots$ ),  $d = 17.3 \text{ mm}$  ( $\cdot - \cdot$ ),  $d = 13.2 \text{ mm}$  ( $- -$ ) et  $d = 10.9 \text{ mm}$  ( $-$ ).

Ces résultats peuvent être comparés aux amortissements mesurés. Pour estimer expérimentalement l'amortissement produit par la plaque poreuse sur la plaque réverbérante pour une distance de séparation  $d_i$ , il faut faire la différence entre l'amortissement mesuré avec la plaque poreuse à  $d_i$  et l'amortissement en absence de la plaque poreuse. En pratique, on calcule la différence d'amortissement entre deux positions de la plaque poreuse  $\Delta\alpha_i = \alpha_{d_i} - \alpha_{d_{max}}$ , où  $\alpha_{d_{max}}$  est l'amortissement mesuré quand la plaque poreuse est le plus loin possible de la plaque réverbérante. Pour la configuration d'origine du réverbérateur EMT140 on a  $d_{max} = 65.8 \text{ mm}$ . Pour comparer modèle et mesures on calcule  $\Delta\alpha_i$  à partir des prédictions du modèle et on la compare à celle calculée avec les données expérimentales d'amortissement.

La Figure 3.18 montre la différence d'amortissement entre les deux positions extrêmes de la plaque poreuse  $d = 10.9 \text{ mm}$  et  $d = 65.8 \text{ mm}$ . Le modèle est proche des résultats obtenus par la mesure sauf pour les très basses fréquences  $f < 170 \text{ Hz}$ . Cummings montre dans son article que son modèle basé sur l'hypothèse de plaque infinie peut sous-estimer le rayonnement en basses fréquences dans certaines situations [18].

Pour la vitesse du son  $c_a = 340 \text{ m/s}$ , la condition  $f < 170 \text{ Hz}$  correspond à la condition sur la longueur d'onde de la pression acoustique  $\lambda_a > 2 \text{ m}$ . Cette dimension coïncide avec la dimension caractéristique de la plaque. Pour cette raison on peut penser que l'origine des différences

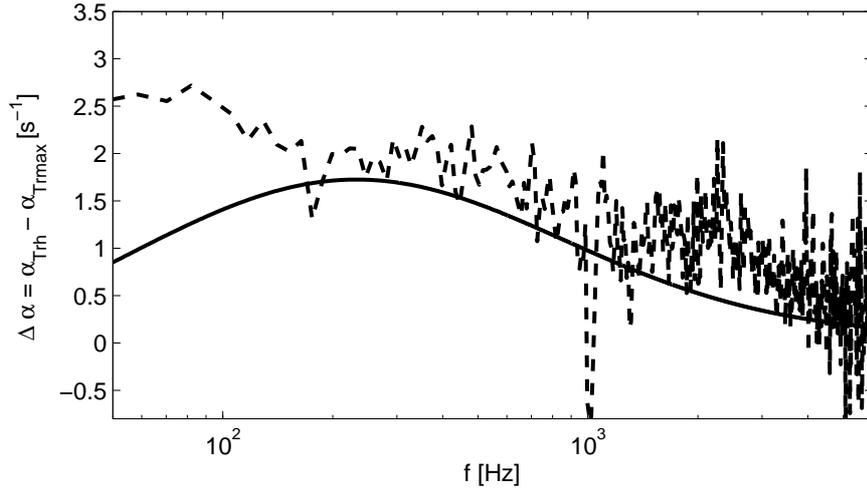


FIG. 3.18: Augmentation de l'amortissement des vibrations de la plaque du EMT140 entre les deux positions extrêmes de la plaque poreuse  $d = 65.8$  mm et  $d = 10.9$  mm :  $\Delta\alpha = \alpha_{d_{min}} - \alpha_{d_{max}}$  obtenu par le modèle de Cummings (—) et par les mesures d'amortissement (- - -).

entre modèle et mesures en basses fréquences vient du fait que la modélisation de Cummings suppose une plaque infinie. Une démarche expérimentale systématique avec des plaques de tailles différentes permettrait de valider ou rejeter cette hypothèse, mais cet approfondissement nécessite trop de temps par rapport à l'intérêt qu'il présente pour l'étude du réverbérateur à plaque.

### 3.4.3 Constante de propagation des ondes de flexion

L'estimation précise du paramètre de propagation  $\kappa = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$  nécessite la connaissance du module d'Young  $E$ , de la masse volumique  $\rho$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ . L'acier est un alliage à base de fer avec un faible pourcentage de carbone dont les propriétés physiques peuvent varier selon la composition de l'alliage. Si on n'a pas une connaissance a priori de l'alliage, les propriétés de l'acier peuvent varier dans les fourchettes de valeurs suivantes :  $\rho \in [7400; 8160]$  kg/m<sup>3</sup>,  $E \in [186; 215]$  GPa et  $\nu \in [0.27; 0.3]$  [10]. L'indétermination sur ces paramètres est de l'ordre de 10%. La mesure directe du paramètre de propagation  $\kappa$  permet de lever cette indétermination.

Les expressions de la vitesse de phase  $c_{ph}$  et de la vitesse de groupe  $c_{gr}$  des ondes de flexion pour une plaque mince isotrope sont obtenues à partir de la relation de dispersion par :

$$\begin{aligned} \text{relation de dispersion :} \quad \omega^2 &= \kappa^2 k^4, & \text{où :} \quad \kappa^2 &= \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}, \\ \text{vitesse de phase :} \quad c_{ph}(\omega) &= \frac{\omega}{k} = \sqrt{\kappa\omega}, & & (3.11) \\ \text{vitesse de groupe :} \quad c_{gr}(\omega) &= \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = 2\sqrt{\kappa\omega}. \end{aligned}$$

La connaissance de  $c_{ph}(\omega)$  ou de  $c_{gr}(\omega)$  permet alors la détermination du paramètre  $\kappa$ . Pour une plaque en acier d'épaisseur  $h = 0.5$  mm, on s'attend à obtenir  $\kappa = 0.764 \pm 6\%$ . La vitesse de phase à  $f_0$  peut être déduite à partir de la mesure de la longueur d'onde lors d'un forçage harmonique à cette fréquence par  $c_{ph}(f_0) = \lambda f_0$ . L'ordre de grandeur de la longueur d'onde pour  $\kappa = 0.764$  est de 2 cm pour une excitation à 10 kHz. Il est difficile d'estimer avec précision  $\kappa$

parce que la tolérance autorisée sur la mesure de  $\lambda$  est faible.

La mesure de la vitesse de groupe ne nécessite pas une résolution spatiale aussi importante.  $c_{gr}(f_0)$  correspond à la vitesse de propagation de l'enveloppe d'un paquet d'ondes de fréquence centrale  $f_0$ . La vitesse  $c_{gr}(f_0)$  peut être alors estimée à partir du temps de propagation  $t_{f_0,d}$  d'un paquet d'ondes de fréquence centrale  $f_0$  entre deux points séparés d'une distance  $d$  par  $\tilde{c}_{gr}(f_0) = d/t_{f_0,d}$ . La précision de mesure sur cette distance, qui peut être choisie bien plus grande qu'une longueur d'onde, est moins contraignante que celle nécessaire pour la mesure de la vitesse de phase.

En raison du comportement dispersif des ondes de flexion, la forme d'onde initiale subit une distorsion lors de sa propagation, qui est plus grande lorsque son énergie s'étale fréquemment. Cette dispersion est due à la dépendance en fréquence des vitesses de phase et de groupe. Plus l'énergie du signal initial est concentrée à une fréquence donnée et moins ce signal sera déformé au cours de sa propagation. C'est pourquoi on réalise les mesures de vitesse de groupe fréquence par fréquence, avec des signaux de type sinusoïde de durée finie. L'énergie d'une sinusoïde est d'autant plus concentrée autour de sa fréquence que sa durée est grande. Une sinusoïde finie s'obtient en pondérant une sinusoïde infinie avec une fenêtre rectangulaire, mais d'autres fenêtres peuvent être choisies pour cette troncature. La transformée de Fourier de la sinusoïde tronquée est la convolution de la transformée de Fourier de la sinusoïde infinie,  $\delta(f_0)$ , avec celle de la fenêtre, un sinus cardinal pour la fenêtre rectangulaire. Les propriétés fréquentielles de la fenêtre déterminent alors comment l'énergie est distribuée autour de la fréquence centrale. Alors, le choix de la fenêtre a une influence sur la distorsion du paquet d'ondes au cours de sa propagation.

### 3.4.3.1 Estimation du temps de propagation

Pour quantifier l'influence des paramètres du signal initial sur la distorsion au cours de la propagation, on étudie numériquement la propagation des signaux dans le milieu infini unidimensionnel équivalent. Ce milieu est une barre d'Euler Bernoulli avec la même relation de dispersion que la plaque mais à une dimension. On simplifie ainsi les calculs tout en tenant compte du même phénomène de dispersion. Cette étude de la propagation des ondes de flexion est faite à l'aide des techniques d'analyse spectrale proposées par Doyle [27]. La propagation virtuelle est faite par application de l'opérateur de propagation au signal initial dans le domaine de Fourier spatial. L'avantage par rapport aux différences finies est l'absence de dispersion numérique, puisque la relation de dispersion est directement imposée lors de la construction de l'opérateur de propagation. La Figure 3.19 montre la propagation d'une distance  $d = 0.3$  m par superposition de la forme d'onde à  $x_0$  avec celle à  $x_0 + d$ . Le milieu de propagation est une barre infinie dont la vitesse de groupe est donnée par (3.11) avec  $\kappa = 0.7486$ . Le signal initial est une sinusoïde de fréquence  $f_0 = 5000$  Hz et de durée  $N_T = 5$  périodes. L'objectif est de montrer les différents comportements selon le choix de la fenêtre. Dans un cas le signal est pondéré avec une fenêtre rectangulaire et dans l'autre avec une fenêtre de Hanning. La vitesse de groupe du milieu à la fréquence  $f_0$  est  $c_{gr} = 306.7$  m/s, d'après (3.11). On observe que la sinusoïde pondérée avec la fenêtre rectangulaire est assez déformée lors de sa propagation. En raison de cette déformation, l'estimation de sa vitesse de groupe à partir du déplacement de l'enveloppe d'un paquet d'ondes n'est pas évidente. En revanche, la sinusoïde pondérée avec la fenêtre de Hanning maintient une enveloppe presque constante au cours de sa propagation, et sa vitesse de groupe peut être estimée à partir de la durée de propagation de l'enveloppe. Le temps de propagation de l'enveloppe est estimé à partir de la corrélation du signal initial avec le signal propagé. Cette fonction possède des maxima qui correspondent à la similitude maximale entre les deux signaux. Pour une propagation non dispersive, la valeur maximale de la corrélation correspond en toute rigueur

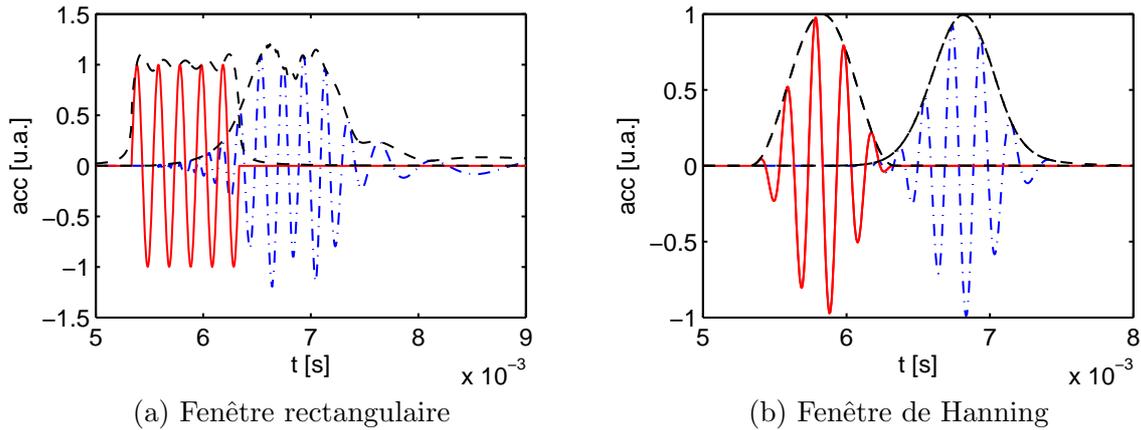


FIG. 3.19: Signal initial (—) et signal propagé (- · -) d'une distance  $d = 0.3$  m dans une barre d'Euler Bernoulli et leurs enveloppes (- - -). Le signal initial est une sinusoïde de fréquence  $f_0 = 5000$  Hz et durée 5 périodes. (a) : sinusoïde avec fenêtre rectangulaire. (b) : sinusoïde avec fenêtre de Hanning.

au temps de propagation. Dans le cas dispersif traité ici, moins la distorsion est forte, plus on s'attend à que le maximum de la corrélation corresponde au temps de propagation. En raison de la nature ondulatoire de la corrélation obtenue (voir Figure 3.20), il faut utiliser l'enveloppe de la corrélation. La durée du parcours est alors estimée par le maximum de l'enveloppe. Cette méthode est utilisée pour le traitement des signaux sismiques en géophysique [39]. L'enveloppe du signal est donnée par la valeur absolue du signal analytique qui lui est associé. Le signal analytique d'un signal réel quelconque est un signal complexe dont la partie réelle est le signal lui-même et la partie imaginaire sa transformée de Hilbert [61]. La Figure 3.20 montre le résultat de ces estimations de vitesse de groupe pour les deux cas présentés précédemment. On remarque que, même pour la propagation avec distorsion du signal avec la fenêtre rectangulaire, l'application de la méthode conduit à des résultats cohérents, bien que la corrélation soit plus longue en raison de l'étalement du signal propagé. L'erreur des estimations de vitesse de groupe pour les

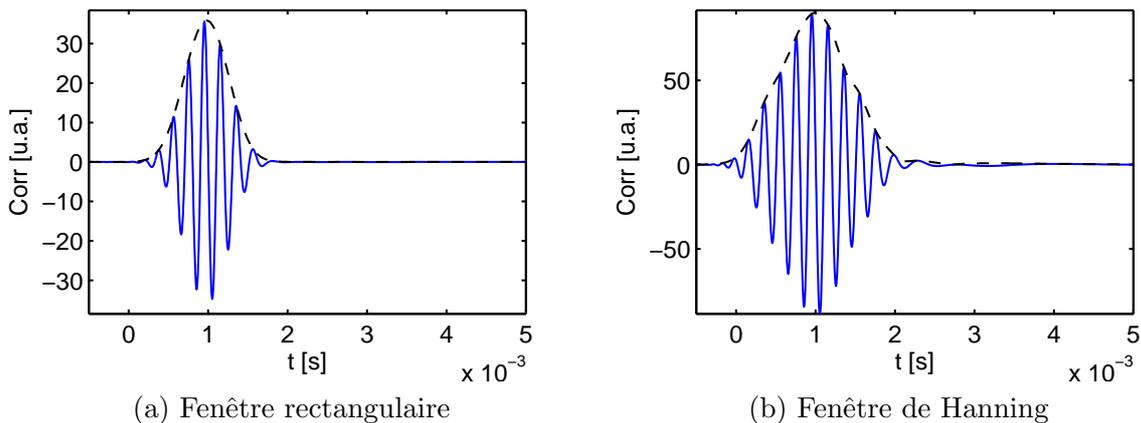


FIG. 3.20: Corrélation entre le signal initial et le signal propagé (—) et enveloppe de la corrélation (- - -) pour les cas de la Figure 3.19. (a) : sinusoïde avec fenêtre rectangulaire. (b) : sinusoïde avec fenêtre de Hanning.

deux cas est calculée par comparaison avec la valeur attendue  $c_{gr} = 306.7$  m/s. Dans les deux cas, les vitesses de groupe sont sous-estimées, avec une erreur de 0.64% pour le signal avec la fenêtre

de Hanning et de 2.19% pour le signal avec la fenêtre rectangulaire. La précision reste acceptable dans les deux cas, mais l'utilisation d'une fenêtre de Hanning conduit à de meilleurs résultats. Il faut tenir compte du fait que l'échantillonnage temporel introduit une limite sur la précision temporelle qui peut avoir une influence sur l'erreur. Pour tous ces calculs, l'échantillonnage est fait à  $F_s = 192$  kHz. Cette limite, correspondant à un décalage de  $\pm 0.5$  échantillon par rapport au temps de parcours estimé, correspond à une erreur de  $\pm 0.8\%$  sur la vitesse de groupe. Cette erreur d'échantillonnage est d'autant plus grande que le temps de propagation est court, c'est à dire pour des distances petites et des fréquences élevées. L'erreur obtenue par la technique de corrélation quand le signal initial est bien conditionné avec une fenêtre de Hanning est inférieure à celle due à l'échantillonnage temporel des signaux, et montre la robustesse et l'efficacité de la méthode présentée.

Une remarque sur cette méthode lors de son application dans la réalité sur une plaque finie, et non pas dans une barre infinie, concerne les réflexions aux bords qui peuvent perturber le signal propagé qu'on veut comparer avec le signal initial. La durée du signal d'excitation doit être choisie suffisamment petite pour que les réflexions aux bords de la plaque ne viennent pas perturber la mesure du signal propagé.

### 3.4.3.2 Dispositif expérimental et résultats

Le matériel du montage expérimental est un pot vibrant B&K 4810 avec une tête d'impédance B&K 8001 et deux accéléromètres B&K 4374 collés sur la plaque. La disposition des éléments est indiquée sur la Figure 3.21. Le pot vibrant délivre une force sur la plaque à partir d'une entrée électrique du type sinusoïde pondérée avec fenêtre de Hanning. La tête d'impédance mesure l'accélération de référence Ref au point d'excitation. Deux accéléromètres, Out1 et Out2, sont placés à 30 cm et 60 cm du pot vibrant horizontalement afin de mesurer deux signaux propagés. Le système d'acquisition, Pulse de B&K, génère le signal d'excitation et réalise la mesure simultanée des trois accélérations à une fréquence d'échantillonnage  $F_s = 65536$  Hz. On a réalisé une totalité

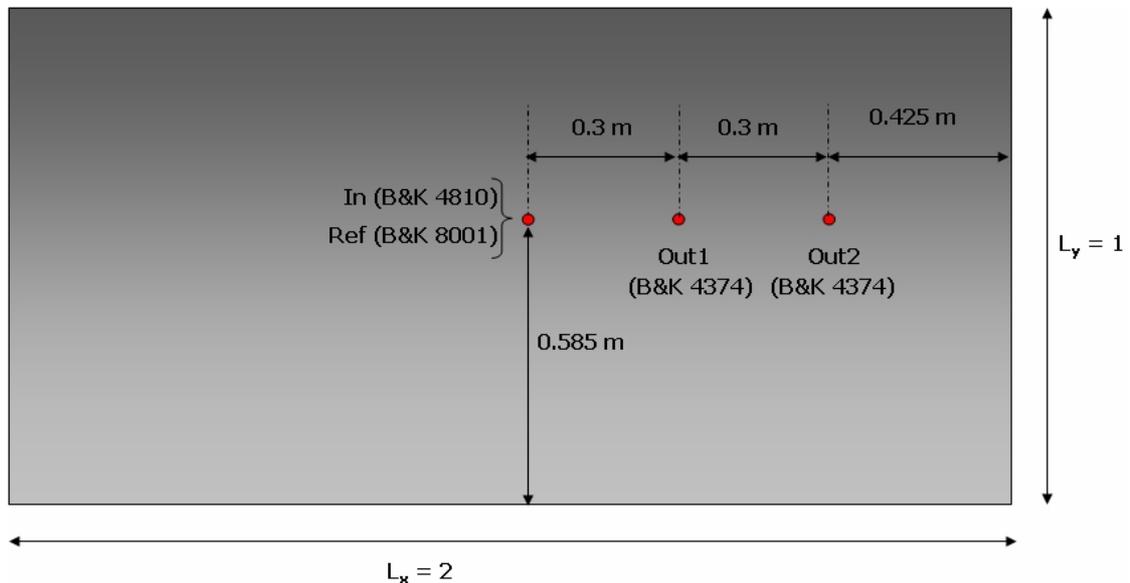


FIG. 3.21: Disposition des éléments de mesure sur le réverbérateur. Pot vibrant (In), accéléromètre de référence (Ref) et accéléromètres pour la mesure du signal propagé (Out1 et Out2).

de 36 mesures ou "tirs" avec des signaux d'excitation dont la fréquence varie entre 500 Hz et

15 kHz et le nombre de périodes entre 3 et 10. Pour chaque mesure, on estime le temps de propagation entre Ref et Out1, et entre Ref et Out2. Toutes les données mesurées n'ont pas été exploitées en raison de l'influence des réflexions dans certains cas. La Figure 3.22 montre la mesure pour un signal d'excitation de 5 périodes à  $f_0 = 3$  kHz pour le couple (Ref, Out1) et le processus d'obtention du temps de propagation.

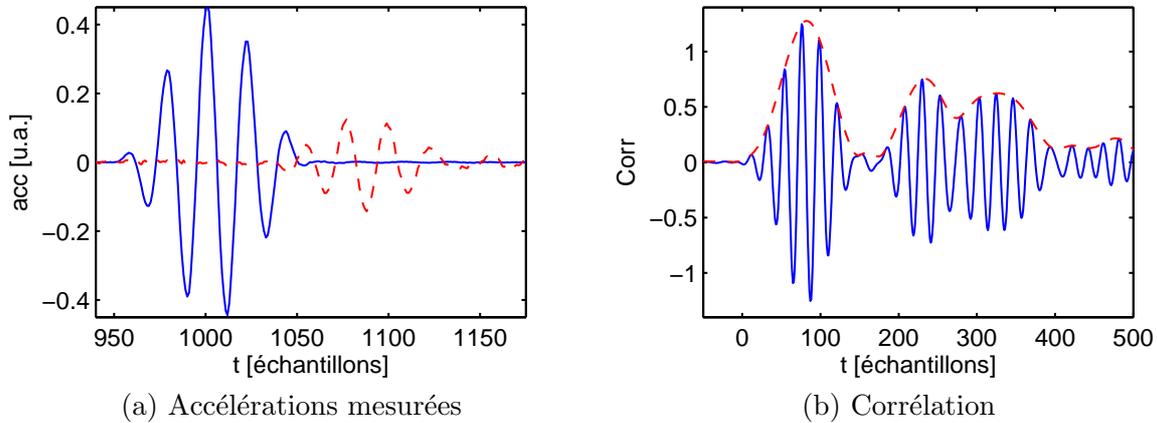


FIG. 3.22: Exemple de mesure pour le couple (Ref, Out1) avec un signal d'excitation de 5 périodes et fréquence  $f_0 = 3$  kHz. (a) : accélérations temporelles délivrées par Ref (—) et Out1(- -). (b) : corrélation des accélérations (—) et son enveloppe (- - -).

La totalité des résultats valables obtenus par cette méthode est montrée à la Figure 3.23, où chaque estimation de vitesse de groupe est représentée par  $\times$  pour (Ref, Out1) et par  $+$  pour (Ref, Out2). Chacune de ces valeurs correspond à la moyenne des résultats valables à une même fréquence. En général on moyenne deux ou trois estimations, chacune correspondant à un signal d'excitation avec un nombre de périodes différents  $N_T = 3, 5$  ou  $10$ . Les réflexions aux bords de la plaque limitent la valeur de  $N$ . En basses fréquences on se contente de  $N_T = 3$  ou  $N_T = 3$  et  $5$ . En hautes fréquences les mesures peuvent être réalisées avec  $N_T \leq 10$ . La Figure 3.23 montre également la régression linéaire par moindres carrés, qui fournit la valeur du paramètre de propagation  $\kappa = 0.7846$ . Les points correspondants aux mesures sont bien alignés sur une droite, ce qui confirme la validité de la méthode.

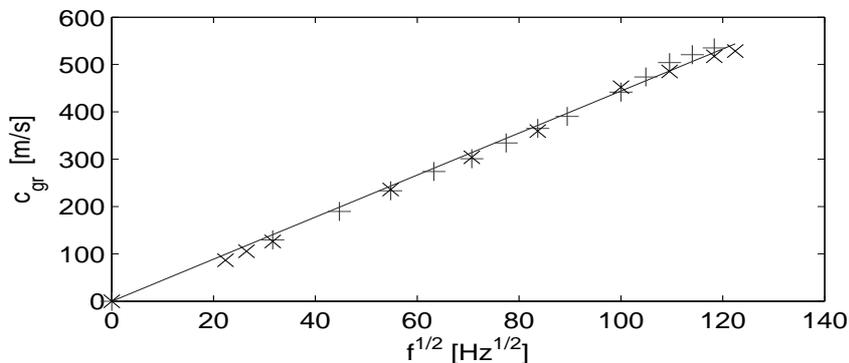


FIG. 3.23: Estimations discrètes de la vitesse de groupe à partir de la propagation (Ref, Out1) ( $\times$ ) et la propagation (Ref, Out2) ( $+$ ). Droite de la régression linéaire sur ces mesures dont la pente est  $\kappa = 0.7846$ .

## 3.5 Mesure de la densité modale

Une densité modale élevée est une des caractéristiques demandée au réverbérateur en termes de qualité de réverbération artificielle. La densité modale d'une plaque mince peut être calculée analytiquement à partir de ses paramètres physiques. La densité modale est presque indépendante des conditions aux limites, et peut être estimée à partir du cas simple de la plaque simplement appuyée sur ses bords. Pour ce cas, l'expression analytique des fréquences modales est connue, ce qui permet d'estimer le nombre de modes jusqu'à une fréquence donnée  $N_m(f)$ . La densité modale est alors donnée par [94] :

$$n_p(f) = \frac{\partial N_m(f)}{\partial f} \approx \frac{L_x L_y}{2\kappa} - (L_x + L_y) \sqrt{\frac{1}{8\pi\kappa f}} \approx \frac{L_x L_y}{2\kappa}. \quad (3.12)$$

Quand la fréquence augmente, le deuxième terme de  $n_p(f)$  dans (3.12) devient négligeable et la densité modale est constante, et est égale à  $n_p(f) = 1.27$  modes/Hz pour la valeur de  $\kappa$  obtenue par la mesure et la surface du EMT140.

Ici, on s'intéresse à la mesure de cette densité modale. Une estimation de la densité modale peut être faite à partir de l'identification du nombre de modes dans un intervalle fréquentiel du spectre de l'accélération mesurée. Néanmoins, lorsque la densité modale est élevée, les modes se superposent et ils ne peuvent être détectés facilement à partir du spectre vibratoire. Une alternative pour la mesure de la densité modale est basée sur des mesures d'admittance [41; 66; 15]. La densité modale  $n_p(f)$  d'une structure peut être estimée par [17] :

$$n_p(f) = 4M \langle \Re\{Y(f)\} \rangle_S, \quad (3.13)$$

où  $M$  est la masse de la structure et  $\langle \Re\{Y(f)\} \rangle_S$  est la partie réelle de l'admittance au point d'excitation moyennée en temps et en espace. Ce résultat est valable quand il y a au moins 5 modes par bande fréquentielle d'analyse et quand l'amortissement est suffisamment petit pour que la fréquence propre du mode amorti soit très proche de la fréquence propre du mode non amorti [17]. La mesure de l'admittance au point d'excitation est décrite ci-après.

### 3.5.1 Admittance mécanique de la plaque

#### 3.5.1.1 Définition

L'admittance mécanique d'un système est définie comme le rapport complexe entre vitesse et force. Cette grandeur permet de quantifier comment la plaque réagit à la force qu'elle subit de l'actionneur. L'admittance est définie par :

$$Y(\omega) = \frac{\dot{x}(\omega)}{F(\omega)} \quad [\text{s/kg}], \quad (3.14)$$

où  $\dot{x}(\omega)$  est la vitesse de la surface d'excitation et  $F(\omega)$  la force d'excitation [17]. Cette définition nécessite aussi de préciser la région d'excitation et la distribution de la force. Quand la force agit sur un seul point, on parle d'admittance au point d'excitation (en anglais *driving point admittance*). En pratique, une excitation est ponctuelle quand la taille caractéristique de la région d'excitation est plus petite que le dixième de la longueur d'onde minimale. L'intérêt de la grandeur  $Y(\omega)$  est qu'elle est indépendante du système d'excitation et est uniquement une caractéristique de la structure mesurée.

### 3.5.1.2 Méthode de mesure

L'admittance est souvent obtenue par mesure simultanée de l'accélération et de la force à l'aide d'une tête d'impédance. La base de la tête d'impédance est fixée au pot vibrant et son extrémité est fixée au point de mesure de la structure. La liaison entre la structure et la tête d'impédance doit être aussi rigide que possible et il faut s'assurer que la plaque est sollicitée uniquement dans sa direction transversale. Un estimateur de la fonction de transfert  $Y(\omega)$  est donnée par :

$$Y_m(\omega) = H_{\dot{x}F} = \frac{1}{j\omega} \frac{G_{\ddot{x}F}(\omega)}{G_{FF}(\omega)} = \frac{1}{j\omega} H_{\dot{x}F}(\omega). \quad (3.15)$$

$Y_m(\omega)$  est l'admittance mesurée.  $G_{FF}(\omega)$  est l'autospectre du signal de force et  $G_{\ddot{x}F}(\omega)$  est l'interspectre des signaux de force et d'accélération. L'acquisition des signaux et les calculs de ces spectres sont faits par le système d'acquisition Pulse de B&K. L'excitation du système est un signal aléatoire large bande  $f \in [0, 12]$  kHz généré par Pulse. Ce signal est amplifié et envoyé en entrée d'un pot vibrant B&K 4810 équipé d'une tête d'impédance B&K 8001. Selon les spécifications du constructeur, la mesure de la tête d'impédance est valable à  $\pm 5\%$  jusqu'à 6 kHz et à  $\pm 10\%$  jusqu'à 10 kHz. Le système d'acquisition donne accès à la cohérence entre les deux signaux, permettant ainsi de s'assurer du comportement linéaire des vibrations pendant la mesure. Le problème qui est souvent associé à ce type de mesure est dû à l'influence de la tête d'impédance sur la mesure de force. Entre le capteur de force placé à l'intérieur de la tête et la structure, il y a une masse. Cette masse provient de la tête d'impédance mais aussi de la pièce utilisée pour la fixer à la plaque. L'inertie de cette masse  $F_{TI} = \ddot{x}\Delta m$  perturbe la mesure de force, en particulier aux hautes fréquences. Cet effet est amplifié en raison de la faible épaisseur de la plaque que l'on mesure. La Figure 3.24 montre comment la force mesurée par le

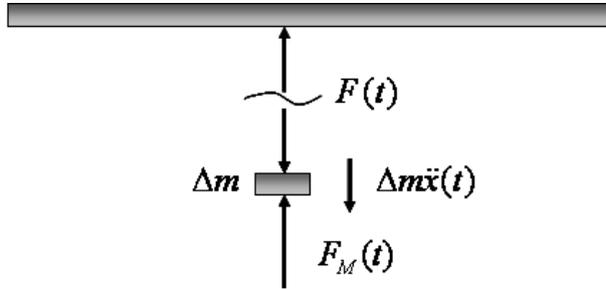


FIG. 3.24: Correction de masse de la force du pot vibrant.

capteur  $F_M(t)$  est modifiée par rapport à la force appliquée sur la structure  $F(t)$ . En pratique, la correction la plus efficace de ce phénomène s'obtient à partir d'une mesure réalisée avec le pot vibrant séparé de la plaque mais comprenant la tête d'impédance et l'élément d'attache [41]. On appelle admittance de la tête d'impédance  $Y_{TI} = (j\omega H_{TI})^{-1}$  l'admittance du système obtenu par cette mesure, où  $H_{TI} = G_{FF}/GF\ddot{x}$ . L'admittance réelle de la structure peut alors s'obtenir par correction de la mesure avec  $Y_{TI}$  par :

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{\dot{x}(\omega)}{F(\omega)} = \frac{\dot{x}(\omega)}{F_M(\omega) - F_{TI}} = \frac{\dot{x}(\omega)/F_M(\omega)}{1 - (F_{TI}(\omega)/F_M(\omega))} \\ &= \frac{Y_m(\omega)}{1 - (Y_m(\omega)/Y_{TI}(\omega))} = \frac{1}{j\omega} H_{\dot{x}F}(\omega) \cdot FC(\omega), \end{aligned} \quad (3.16)$$

où  $FC(\omega)$  est le facteur de correction appliqué à l'admittance mesurée pour obtenir l'admittance réelle :

$$FC(\omega) = \frac{1}{1 - H_{TI}(\omega) \cdot H_{\ddot{x}F}(\omega)}. \quad (3.17)$$

$H_{TI}$  est souvent appelée dans la littérature masse dynamique de la tête d'impédance. Cette grandeur, pour le dispositif de mesure qu'on a utilisé, est montrée par la Figure 3.25. Jusqu'à

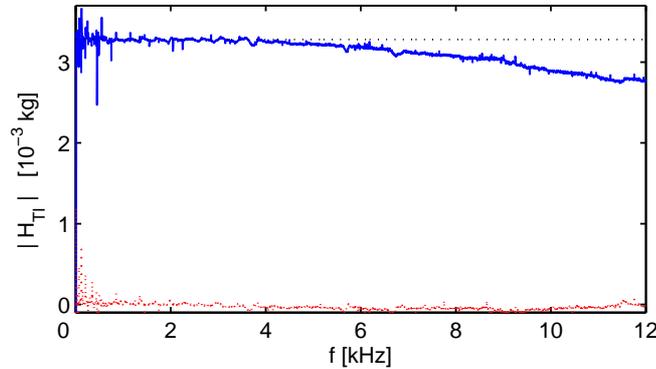


FIG. 3.25: Masse dynamique de la tête d'impédance  $H_{TI}(\omega)$  : partie réelle (—) et partie imaginaire (- -). Approximation par une masse constante (· · ·)

$f = 4$  kHz,  $H_{TI}$  peut être bien approchée par une masse  $\Delta m = 3.28 \cdot 10^{-3}$  kg. Cette approximation,  $Y_{TI} = 1/(j\omega\Delta m)$ , a été utilisée par d'autres auteurs [41; 66; 15].

### 3.5.1.3 Résultats de mesure

La Figure 3.26 montre les résultats issus de la mesure de l'admittance sans appliquer la correction, celle corrigée à partir de l'inertie d'une masse  $\Delta m$  et celle corrigée avec la fonction de transfert mesurée  $H_{TI}(\omega)$ . Cette dernière correction donne les meilleurs résultats. Comme prévu dans la littérature, l'admittance de la plaque tend vers une valeur asymptotique constante [79]. Dans l'intervalle [10; 12] kHz l'admittance obtenue oscille encore un peu, entre  $-24$  dB et  $-31$  dB. La valeur moyenne dans cet intervalle est de  $0.042$  s/kg ( $-27.5$  dB). On s'attend à ce que cette valeur asymptotique corresponde à l'admittance de la plaque infinie, donnée par  $Y_{dp} = 1/(8\rho h\kappa)$ . Pour la valeur de  $\kappa$  mesurée précédemment,  $\rho = 7860$  kg/m<sup>3</sup> et  $h = 0.5$  mm, on obtient  $Y_{dp} = 0.0405$  s/kg ( $-27.8$  dB), qui est en très bon accord avec la valeur mesurée. Cet accord confirme la validité de l'estimation du paramètre  $\kappa$ .

## 3.5.2 Estimation de la densité modale à partir de l'admittance

Pour réaliser la moyenne spatiale de (3.13), on mesure l'admittance aux 9 points de la plaque indiqués par la Figure 3.27. L'estimation de la densité modale par cette technique est montrée sur la Figure 3.28. Sur (a) on présente l'estimation obtenue sans moyenne spatiale, à partir d'une seule mesure d'admittance. Sur (b) il s'agit de l'estimation à partir de la moyenne de l'admittance mesurée en 9 points différents. La non prise en compte de la moyenne spatiale se traduit par une oscillation importante autour d'une valeur moyenne de densité modale. La prise en compte de la moyenne spatiale avec 9 points de mesure réduit ces oscillations parce qu'elle minimise l'influence des participations modales de chaque point de mesure. La densité modale prédite par la théorie des plaques ainsi que sa valeur asymptotique sont en accord avec les mesures sauf en

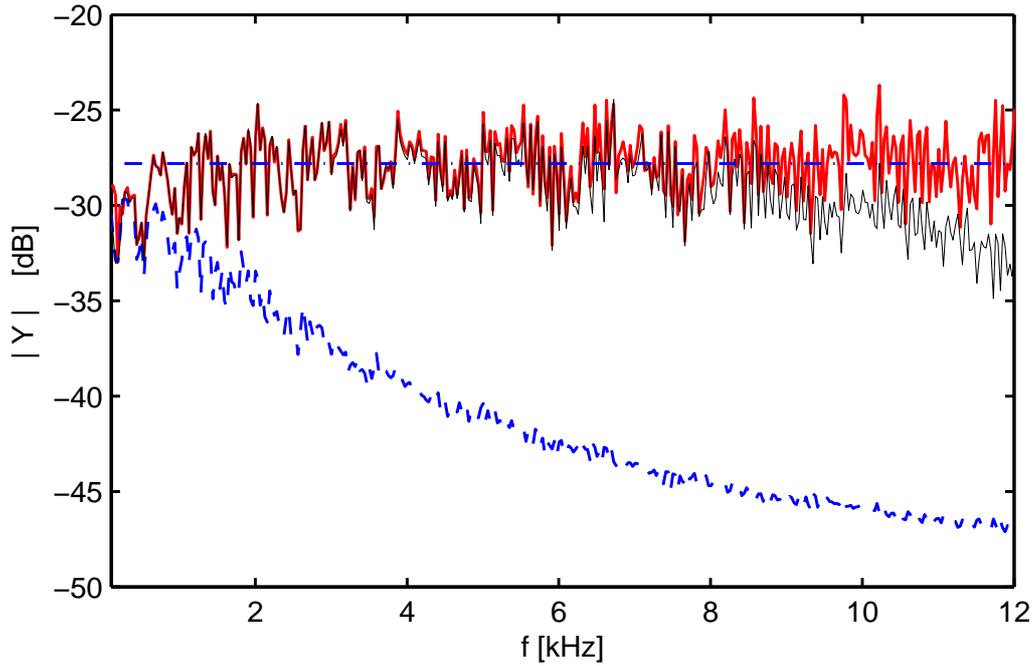


FIG. 3.26: Admittance au point d'excitation de coordonnées  $(x, y) = (1.055, 0.425)$  m : mesurée sans correction (---), corrigée avec  $\Delta m$  (— trait fin) et corrigée avec  $H_{TI}(\omega)$  (— trait épais). Valeur théorique pour la plaque infinie  $-27.8$  dB (- · -)

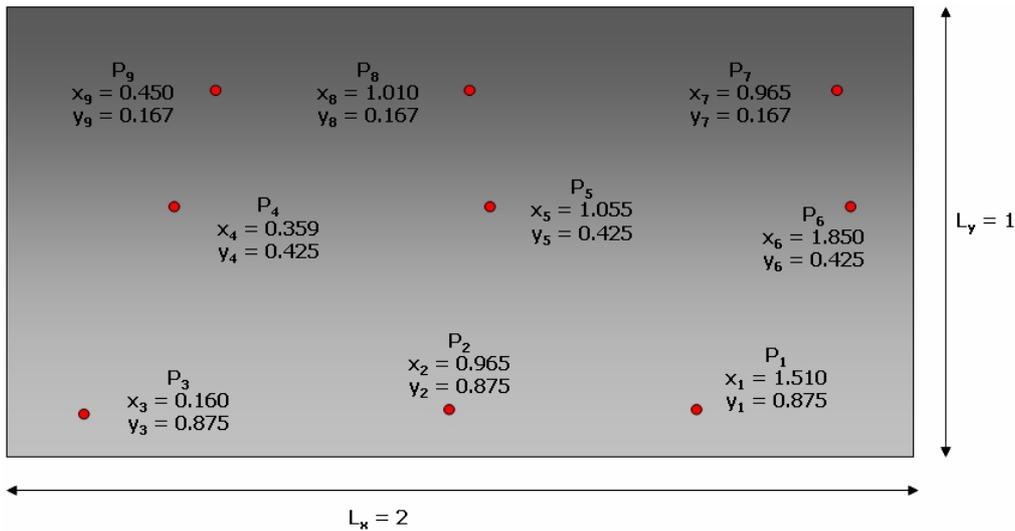


FIG. 3.27: Disposition des points de mesure de l'admittance pour l'estimation de la densité modale.

basses fréquences, où l'expérimentation sous-estime d'environ 35% la densité modale. Une sous-estimation lors de la mesure d'une plaque isotrope a déjà été observée par Clarkson [14]. Il réduit l'écart entre mesure et théorie en ajoutant de l'amortissement à la plaque. Cependant, l'auteur ne commente pas en quoi l'ajout d'amortissement permet d'améliorer l'accord entre mesure et théorie. Renji mesure la densité modale de panneaux sandwich nid d'abeille [66], et ses résultats sous-estiment aussi la densité modale théorique d'environ 30% pour des fréquences inférieures à

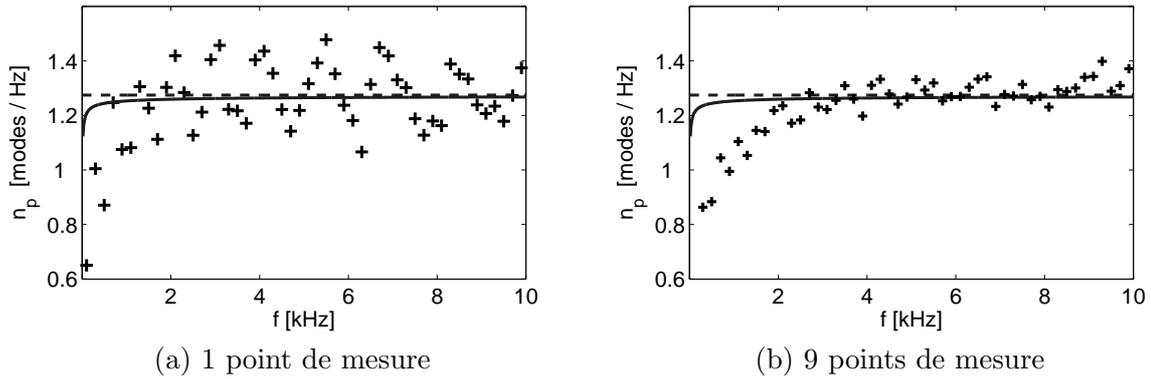


FIG. 3.28: Estimation de la densité modale du réverbérateur EMT140 à partir de l'équation (3.12) (—), la valeur asymptotique de (3.12) (- -) et la valeur obtenue à partir des mesures d'admittance (+). (a) : à partir d'une mesure d'admittance. (b) : par moyenne spatiale avec 9 mesures d'admittance en des points différents.

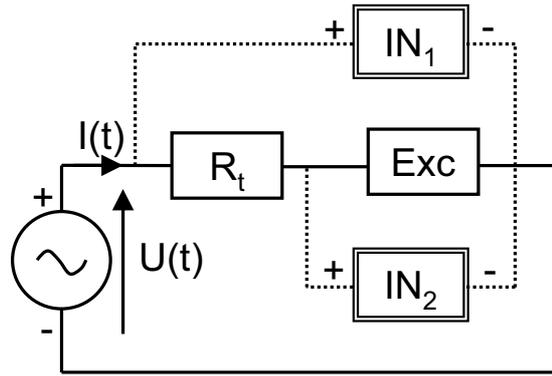
1 kHz. Lui non plus ne commente pas cette divergence. Ce désaccord entre mesure et théorie, qui n'est donc pas clairement justifié dans la littérature, est provoqué par une diminution de la valeur moyenne de l'admittance en basses fréquences, où l'amortissement et le recouvrement modal sont plus petits, mais rien ne justifie que l'origine de ces différences soit une conséquence du faible recouvrement modal.

## 3.6 Couplage actionneur-plaque

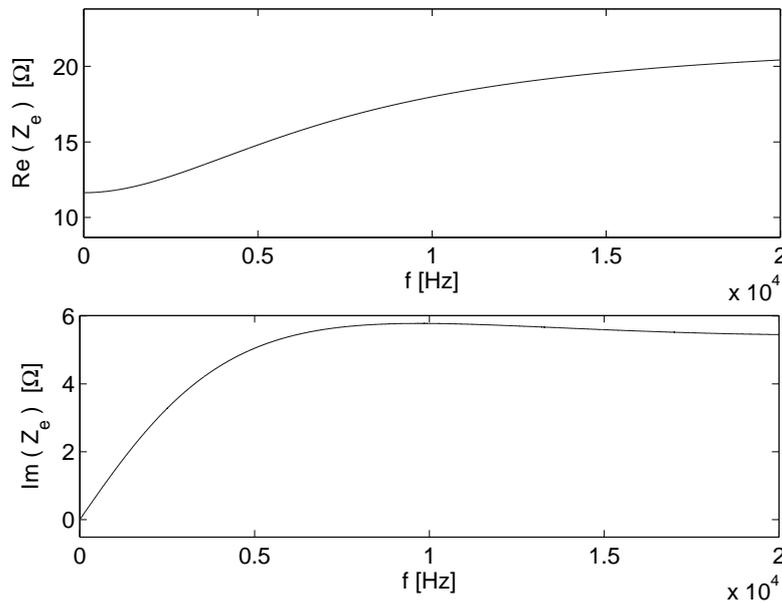
La mesure des paramètres de l'excitateur du réverbérateur EMT140 permet de vérifier l'adéquation et les limites de la validité du modèle d'actionneur proposé au chapitre 2.4. Ces mesures démontrent que ce modèle simplifié permet de décrire le comportement du couplage entre l'actionneur électrodynamique et la plaque aux basses et moyennes fréquences. La principale difficulté lors de ces mesures est liée au dispositif expérimental. L'actionneur électrodynamique du réverbérateur EMT140 est soudé à la plaque réverbérante et il ne peut pas être découplé de la plaque pour être mesuré indépendamment, ce qui rend difficile la détermination des paramètres du modèle. D'autre part, l'admittance mécanique de la plaque ne peut pas être mesurée au point d'excitation en raison de la présence de l'actionneur. Grâce à la densité modale élevée, on peut supposer que le comportement global de l'admittance ne change pas de façon significative selon l'endroit de la mesure. La précision de la mesure des paramètres est affectée par ces difficultés, mais l'objectif principal de ces mesures reste de valider en termes globaux l'influence de l'excitateur.

### 3.6.1 Mesures électriques

Le circuit électrique de l'actionneur est composé d'une bobine, qui est souvent modélisée comme une résistance et une inductance en série. Pour mesurer l'impédance électrique du circuit de l'actionneur, l'aimant permanent entourant la bobine est retiré. Alors le champ  $B$  est nul et il n'y a plus de couplage entre le circuit mécanique et le circuit électrique. Le circuit électrique R-L peut alors être mesuré découplé de la transduction électrodynamique. La Figure 3.29 montre le circuit permettant la mesure simultanée de l'intensité et de la tension électrique. Le signal électrique d'un générateur de bruit pseudo-aléatoire est amplifié.  $IN_1$  et  $IN_2$  sont les deux voies d'entrée d'impédance 100 k $\Omega$  du système d'acquisition (Pulse de B&K) utilisées pour la mesure. L'intensité du circuit est mesurée indirectement à partir de la tension aux bornes d'une

FIG. 3.29: Représentation schématique de la mesure simultanée de  $U(\omega)$  et  $I(\omega)$ .

résistance connue  $R_t = 100 \Omega$  placée en série avec le circuit R-L. L'intensité parcourant l'excitateur est obtenue comme  $I(t) = (IN_1(t) - IN_2(t))/R_t$  et le potentiel aux bornes de l'excitateur est donné par  $IN_2$ . La fonction de transfert de l'impédance électrique  $Z_e(\omega)$  est estimée comme le rapport de l'interspectre  $P_{uI} = \overline{U(\omega)I(\omega)}$  sur l'autospectre de l'intensité  $P_{II} = \overline{I(\omega)I(\omega)}$ , obtenu avec la fonction Matlab<sup>®</sup> *tfestimate*. L'utilisation des spectres moyens, calculés à partir de la moyenne des transformées de Fourier de segments des signaux temporels, permet d'éliminer une grande partie du bruit de mesure. La Figure 3.30 montre la fonction  $Z_e(\omega)$  obtenue. Un

FIG. 3.30: Partie réelle et partie imaginaire de l'impédance électrique  $Z_e(\omega) = U(\omega)/I(\omega)$  du circuit électrique de l'actionneur sans aimant permanent.

comportement du type  $R_e + j\omega L$ , décrit par deux constantes, est valable uniquement en basses fréquences. Ce phénomène a déjà été observé par la communauté scientifique étudiant le haut-parleur électrodynamique et est attribuée à la présence de courants de Foucault, dont l'effet est de diminuer l'inductance et d'augmenter la résistance en hautes fréquences [84], [24], [85].

### 3.6.2 Mesures électromécaniques : $M_m$ et $Bl$

La masse  $M_m$  de l'actionneur et son facteur de force  $Bl$  sont les deux paramètres qui restent à déterminer du modèle. La mesure simultanée du déplacement de la plaque au point d'excitation et de l'intensité permet de remonter à  $Bl/M_m$ , puisque  $H_{\ddot{x},I}(\omega) = \frac{Bl}{M_m + \frac{Z_p}{j\omega}}$ , et pour  $\omega$  suffisamment grand  $\frac{Z_p}{j\omega} \ll M_m$  et  $H_{\ddot{x},I}(\omega) \approx \frac{Bl}{M_m}$ . On mesure l'intensité avec le même montage que pour  $Z_e$ . L'accélération est obtenue à partir d'une mesure de la vitesse sans contact par vibrométrie laser.

La masse de l'actionneur peut être estimée à partir de ses dimensions, de son épaisseur et de la masse volumique du laiton, pour obtenir une valeur totale  $M_m = 7.2 \cdot 10^{-3}$  kg. Pour cette valeur de la masse,  $Bl = 1.2$  est la valeur du facteur de force qui s'ajuste le mieux aux mesures. La Figure 3.31 montre le modèle ajusté et la mesure pour  $H_{\ddot{x},I}(\omega)$ .

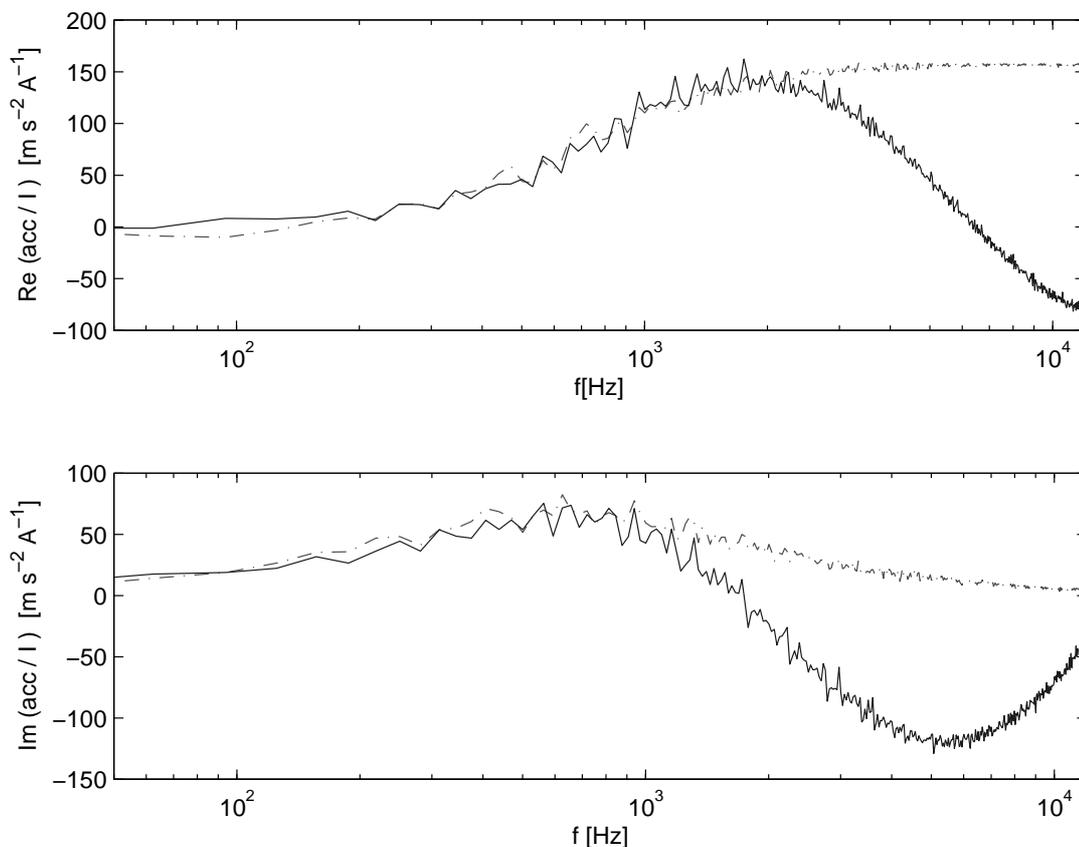


FIG. 3.31: Fonction de transfert  $H(\omega) = a(\omega)/I(\omega)$  entre l'accélération au point d'excitation et l'intensité électrique parcourant l'excitateur : mesure (—) et modèle avec l'ajustement des paramètres (- - -), où  $Bl = 1.2$  et  $M_m = 7.2 \cdot 10^{-3}$  kg.

## 3.7 Conclusion

Les mesures réalisées sur le réverbérateur EMT140 ont permis de valider les choix de modélisation présentés au chapitre 2, d'identifier les limites de cette modélisation et de quantifier les phénomènes pour lesquels on n'a pas de modèle physique, comme l'amortissement dû aux condi-

tions aux limites de la plaque.

Il a été nécessaire de valider au préalable l'hypothèse de linéarité des vibrations du réverbérateur pour l'amplitude d'excitation délivrée par l'actionneur. La mesure de l'amplitude de vibration par rapport à l'excitation aux bornes de l'actionneur du réverbérateur a permis de valider cette hypothèse. Cependant, pour les excitations dont l'énergie est concentrée en très basses fréquences le réverbérateur peut avoir un comportement faiblement non linéaire. Par ailleurs, la linéarité des vibrations du réverbérateur est une qualité souhaitable pour simuler la réverbération acoustique, qui est un phénomène linéaire.

En raison de la linéarité du réverbérateur, sa réponse impulsionnelle électrique permet d'en caractériser le comportement tel qu'il est perçu lors de son utilisation en studio d'enregistrement. On s'occupe ici du signal électrique de l'accéléromètre obtenu en réponse à une impulsion de tension électrique appliquée à l'actionneur. Cette réponse impulsionnelle a été mesurée par balayage fréquentiel avec un signal d'excitation dont la fréquence varie exponentiellement. L'avantage de cette méthode provient de son immunité aux légères non-linéarités du système en basses fréquences, mais aussi de sa facilité d'implémentation et du bon rapport signal sur bruit de la réponse impulsionnelle obtenue.

Les mesures ont permis l'identification des paramètres du réverbérateur EMT140 et la validation des modèles proposés. L'amortissement des vibrations a été obtenu par analyse temps-fréquence des réponses impulsionnelles mesurées et par l'utilisation de la courbe de décroissance de Schroeder. Les résultats de ces mesures ont été comparés aux modèles d'amortissement proposés. Les paramètres  $R_1$  et  $C_1$  du modèle d'amortissement thermoélastique ont été estimés à partir de l'amortissement mesuré en basses fréquences. L'amortissement dû au transfert d'énergie depuis la plaque vers son cadre de support à travers les points d'attache a été mis en évidence et estimé. Finalement, la comparaison des amortissements pour différentes distances de séparation entre plaque vibrante et plaque poreuse a permis de valider le modèle de Cummings et les paramètres choisis pour le matériau poreux. Cette comparaison montre que le modèle est valable pour  $f \geq 170$  Hz. En-deçà de cette fréquence, le modèle sous-estime l'amortissement.

La valeur du paramètre de propagation  $\kappa = 0.7486$  de l'équation de Kirchhoff-Love pour les plaques isotropes a été obtenue à partir de mesures de propagation des ondes de flexion dans la plaque. Ce paramètre n'était pas connu d'avance en raison de la méconnaissance des propriétés du matériau. Le dispositif expérimental est loin d'être un cas parfait de plaque mince avec des conditions aux limites idéales et il ne permet pas la détermination de  $\kappa$  à partir de la valeur des premières fréquences modales. La plaque est soumise à une tension appliquée à ses quatre coins et sa surface n'est pas parfaitement plate à cause de sa faible épaisseur, de sa position verticale et du soudage avec l'actionneur et les capteurs. On a profité de la grande taille de la plaque qui facilite la mesure de la vitesse de groupe fréquence par fréquence, pour obtenir  $\kappa$  à partir du comportement fréquentiel de la vitesse de groupe. Ces mesures montrent l'accord avec le modèle qui prédit une dépendance linéaire de la vitesse de groupe avec la racine carrée de la fréquence.

Une caractéristique nécessaire à la qualité des systèmes de réverbération artificielle consiste en une densité modale élevée. La densité modale du EMT140 a été mesurée à partir de mesures d'admittance au point d'excitation. Elle tend vers une constante en hautes fréquences et correspond bien à celle prédite à partir du modèle de Kirchhoff-Love avec la valeur de  $\kappa$  obtenue précédemment. Pour des fréquences  $f < 2$  kHz, la densité modale mesurée est sous-estimée. Outre leur rôle pour estimer la densité modale, les mesures d'admittance servent également comme donnée d'entrée pour le modèle décrivant le couplage entre l'actionneur et la plaque.

Finalement, les paramètres du modèle de couplage de l'actionneur électrodynamique avec la plaque ont été mesurés. Le modèle a été ajusté en basses fréquences, mais pour des fréquences supérieures à 1.5 kHz il ne suffit pas à décrire le comportement mesuré. Le comportement complexe des systèmes électromagnétiques en hautes fréquences, et en particulier les courants de Foucault, sont probablement responsables de ces divergences.



# Simulation

## 4.1 Introduction

La première partie de ce chapitre concerne la résolution du modèle continu décrivant les vibrations de flexion des plaques minces isotropes présenté au chapitre 2. On rappelle que le déplacement transversal  $w(x, y, t)$  en tout point  $(x, y)$  de la plaque soumise à une densité de force  $f_z(x, y, t)$  est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = -h^3 \begin{pmatrix} D_1 & D_2/2 & 0 \\ D_2/2 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & D_4/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + f_z(x, y, t). \end{array} \right. \quad (4.1)$$

La résolution du modèle continu (4.1) dans un domaine fini nécessite l'emploi d'outils de calcul numérique. On s'inspire de [48] qui traite de la résolution des équations de Kirchhoff-Love dans le cas de plaques de géométrie rectangulaire, de matériau orthotrope et avec les conditions aux limites idéales présentées au chapitre 2. Dans [48], ce problème est résolu dans le domaine temporel avec la méthode des différences finies (DF). On présente une synthèse de ces travaux ainsi que leur simplification pour les plaques isotropes : le schéma utilisé (§4.3.1), la condition de stabilité (§4.3.2), les propriétés de dispersion numérique (§4.3.3) et l'écriture numérique des conditions aux limites du domaine (§4.3.4).

Pour la plaque non amortie simplement appuyée, on compare la solution de référence obtenue par décomposition modale (DM) avec la solution obtenue par les DF. Ce cas simple permet de déterminer l'influence de la discrétisation des DF sur la densité modale, qui est une des propriétés clés de toute réverbération artificielle [40]. D'autre part, pour le jeu de paramètres du réverbérateur à plaque EMT140, on compare la réponse impulsionnelle (RI) analytique avec celle obtenue par DF dans les domaines temporel et fréquentiel pour un même point d'excitation et d'observation.

Au §4.3.7 on présente une formulation continue et son approximation numérique par les DF [48] pour tenir compte des amortissements thermoélastique et par rayonnement dans le domaine temporel. Pour la synthèse du réverbérateur à plaque, on étudie la validité de ces deux modèles d’amortissement, leur degré de précision et leur influence sur le temps de calcul.

La deuxième partie de ce chapitre présente la stratégie de synthèse adoptée pour l’effet de réverbération à plaque, qui est basée sur la synthèse de la RI du réverbérateur. On souhaite en effet obtenir des RI dont les propriétés d’amortissement et la distribution d’énergie totale sont bien contrôlées. Dans ce but, on présente une méthodologie de modification de l’amortissement de la RI simulée, qui permet d’imposer le comportement fréquentiel de l’amortissement souhaité. Finalement, on décrit la méthodologie pour l’égalisation de l’énergie totale de la RI, en prenant comme exemple l’ajustement de l’énergie de la synthèse du réverbérateur EMT140 sur celle de la mesure présentée au chapitre 3.

## 4.2 Simulation par décomposition modale

Pour la simulation des vibrations d’une plaque à partir de la décomposition modale, la connaissance des fréquences propres  $\omega_{mn}$  et des déformées modales  $\phi_{mn}(x, y)$  du système est nécessaire. Pour le cas de la plaque rectangulaire d’épaisseur constante et avec des bords simplement appuyés, on connaît les expressions analytiques de ces grandeurs (voir §2.2.3.2), et la simulation par décomposition modale est envisageable. Dans d’autres cas, comme par exemple pour la plaque rectangulaire aux bords libres,  $\omega_{mn}$  et  $\phi_{mn}(x, y)$  doivent être obtenus numériquement. Si on tient compte de la densité modale obtenue au §3.5,  $n_p(f) = 1.27$  modes/Hz, on estime à  $N = 25400$  le nombre de modes en dessous de la fréquence maximale audible 20 kHz et le système a  $2N$  degrés de liberté. Pour un problème de cette taille, la résolution par des méthodes numériques permettant d’obtenir les  $\phi_{mn}(x, y)$  et  $\omega_{mn}$  du problème, comme par exemple les éléments finis, n’est pas envisageable. La difficulté d’obtenir les  $\phi_{mn}(x, y)$  et  $\omega_{mn}$  pour une plaque avec  $N = 25400$  modes est la principale limitation de la simulation par décomposition modale.

Une autre remarque concerne la quantité importante de mémoire nécessaire pour stocker toutes les déformées modales  $\phi_{mn}(x, y)$  avec une bonne résolution spatiale. Prenons l’exemple du réverbérateur EMT140 : la longueur d’onde la plus petite du problème est  $\lambda_{(20kHz)} = 0.00157$ . Pour le stockage de chaque  $\phi_{mn}(x, y)$  avec un échantillonnage spatial de la surface de la plaque (ici 2 m<sup>2</sup>) à au moins la moitié de  $\lambda_{(20kHz)}$ , on a besoin de 32455 nombres réels. Pour des réels de 32 bits, le stockage des 25400  $\phi_{mn}(x, y)$  nécessite environ 3.3 Go de mémoire.

Le §2.2.3.2 montre que la synthèse modale pour le cas non amorti équivaut à une somme de sinusoïdes pondérées par des facteurs qui dépendent uniquement des paramètres de la simulation : point d’excitation, point d’observation et fréquence propre du mode. On a vu également que, pour le cas faiblement amorti, chaque sinusoïde est amortie avec une enveloppe exponentielle décroissante de la forme  $e^{-\alpha_{mn}t}$ , où  $\alpha_{mn}$  est la facteur d’amortissement du mode d’indices  $m$  et  $n$ .

Ces calculs peuvent être optimisés en évitant l’utilisation des fonctions trigonométriques et exponentielles. L’utilisation de filtres numériques conduit à des algorithmes de résolution plus performants, où la contribution de chaque mode est obtenue avec un filtre numérique d’ordre 2. Le détail de la formulation est décrit en Annexe C, où les filtres numériques dans le domaine de la transformée en  $Z$  sont obtenus à partir de la transformation bilinéaire des filtres continus dans le domaine de Laplace.

### 4.3 Différences finies d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace

#### 4.3.1 Présentation du schéma utilisé

Le principe des différences finies (DF) repose sur la discrétisation des variables temps et espace des équations continues. Une fonction continue  $v(x, y, t)$  est alors approchée par une fonction définie sur une grille repérée par les indices  $l, m$  et  $n$ , et notée :

$$v(x, y, t) \approx v(l\Delta x, m\Delta y, n\Delta t) = v_{l,m}^n, \quad (4.2)$$

où  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les deux pas d'espace et  $\Delta t$  le pas de temps. Les opérateurs différentiels continus sont approchés par des opérateurs aux différences, obtenus à partir des développements de Taylor [16]. Par exemple, pour construire une approximation de la dérivée seconde en temps, on écrit les développements de Taylor à l'ordre 4 de  $v^{n+1}$  et  $v^{n-1}$  autour de  $v^n$  :

$$\begin{aligned} v^{n-1} &= v^n - \Delta t \partial_t v^n + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 v^n - \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^3 v^n + O(\Delta t^4), \\ v^{n+1} &= v^n + \Delta t \partial_t v^n + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 v^n + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^3 v^n + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (4.3)$$

La somme de ces deux équations permet d'isoler une approximation de  $\partial_t^2 v^n$  sous forme d'opérateur aux différences entre les points de la grille temporelle :

$$\partial_t^2 v^n = \frac{v_{l,m}^{n+1} - 2v_{l,m}^n + v_{l,m}^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2). \quad (4.4)$$

L'erreur de l'approximation est proportionnelle au carré du pas de discrétisation ; on parle alors d'erreur d'ordre 2 (en  $\Delta t$ ). Cet opérateur est centré par rapport à la discrétisation, parce que l'approximation est faite sur un point de la grille.

Pour la résolution du champ vibratoire le schéma utilisé est centré, explicite, d'ordre 2 en temps (pour les opérateurs aux différences temporels) et d'ordre 4 en espace (opérateurs spatiaux). Ce schéma est présenté en détail dans [48]. L'opérateur temporel discret d'ordre 2 est :

$$(D_{tt}^{(2)}v)_{l,m}^n = \frac{v_{l,m}^{n+1} - 2v_{l,m}^n + v_{l,m}^{n-1}}{\Delta t^2} = \partial_t^2 v_{l,m}^n + O(\Delta t^2). \quad (4.5)$$

Les opérateurs d'ordre 4 en espace approchant les dérivées secondes selon  $x$  et selon  $y$  sont :

$$\begin{aligned} (D_{xx}^{(4)}v)_{l,m}^n &= \frac{1}{12\Delta x^2} [-(v_{l+2,m}^n + v_{l-2,m}^n) + 16(v_{l+1,m}^n + v_{l-1,m}^n) - 30v_{l,m}^n], \\ (D_{yy}^{(4)}v)_{l,m}^n &= \frac{1}{12\Delta y^2} [-(v_{l,m+2}^n + v_{l,m-2}^n) + 16(v_{l,m+1}^n + v_{l,m-1}^n) - 30v_{l,m}^n]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

et les opérateurs dérivée seconde croisée selon  $x$  et  $y$  sont :

$$\begin{aligned} (D_{xy}^{(4)}v)_{l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{24^2\Delta x\Delta y} \left[ (v_{l-1,m-1}^n + v_{l+2,m+2}^n - v_{l-1,m+2}^n - v_{l+1,m-1}^n) \right. \\ &\quad + 27(v_{l-1,m+1}^n + v_{l,m+2}^n + v_{l+1,m-1}^n + v_{l+2,m}^n) \\ &\quad - 27(v_{l-1,m}^n + v_{l,m-1}^n + v_{l+1,m+2}^n + v_{l+2,m+1}^n) \\ &\quad \left. + 27^2(v_{l,m}^n + v_{l+1,m+1}^n - v_{l+1,m}^n - v_{l,m+1}^n) \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{D}_{xy}^{(4)}v)_{l,m}^n &= \frac{1}{24^2 \Delta x \Delta y} \left[ (v_{l-\frac{3}{2},m-\frac{3}{2}}^n + v_{l+\frac{3}{2},m+\frac{3}{2}}^n - v_{l+\frac{3}{2},m-\frac{3}{2}}^n - v_{l-\frac{3}{2},m+\frac{3}{2}}^n) \right. \\
&\quad + 27(v_{l-\frac{3}{2},m+\frac{1}{2}}^n + v_{l-\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}}^n + v_{l+\frac{1}{2},m-\frac{3}{2}}^n + v_{l+\frac{3}{2},m-\frac{1}{2}}^n) \\
&\quad - 27(v_{l-\frac{3}{2},m-\frac{1}{2}}^n + v_{l-\frac{1}{2},m-\frac{3}{2}}^n + v_{l+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}}^n + v_{l+\frac{3}{2},m+\frac{1}{2}}^n) \\
&\quad \left. + 27^2(v_{l-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^n + v_{l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^n - v_{l+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^n - v_{l-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^n) \right].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

L'expression (4.7) corrige celle donnée par [48] et [13]. Avec les opérateurs aux différences présentés ci-dessus, le système continu (4.1) est approché par le système discret suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} (M_x)_{l,m}^n \\ (M_y)_{l,m}^n \\ (M_{xy})_{l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^n \end{array} \right) = -h^3 \left( \begin{array}{ccc} D_1 & D_2/2 & 0 \\ D_2/2 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & D_4/2 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} (D_{xx}^{(4)}w)_{l,m}^n \\ (D_{yy}^{(4)}w)_{l,m}^n \\ (D_{xy}^{(4)}w)_{l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^n \end{array} \right), \\ \\ w_{l,m}^{n+1} = 2w_{l,m}^n - w_{l,m}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\rho h} \left[ (D_{xx}^{(4)}M_x)_{l,m}^n + (D_{yy}^{(4)}M_y)_{l,m}^n \right. \\ \left. + 2(\tilde{D}_{xy}^{(4)}M_{xy})_{l,m}^n + (fz)_{l,m}^n \right]. \end{array} \right. \tag{4.9}$$

### 4.3.2 Stabilité

Le choix des pas de discrétisation des schémas numériques présentés doit respecter une condition de stabilité afin de vérifier la convergence de la solution numérique. Elle peut s'interpréter comme une condition de bornitude des solutions numériques au cours du temps [16]. Pour le schéma explicite présenté ici, avec un pas de temps donné  $\Delta t$ , il existe une valeur limite inférieure de  $\Delta x$  au delà de laquelle la solution numérique diverge.

On fait la différence entre deux définitions de la stabilité : [67]

- Stabilité faible : un schéma numérique est faiblement stable si la solution à un instant donné  $T = n\Delta t$  est bornée pour tout  $\Delta t$  par rapport à la norme euclidienne  $\|w^n\| = (\sum_{l,m} |w_{l,m}^n|^2)^{1/2}$ .
- Stabilité forte : un schéma numérique est fortement stable s'il est faiblement stable et sa solution est bornée quels que soient  $n$  et  $\Delta t$ .

D'après ces définitions, pour un algorithme de synthèse sonore il est souhaitable d'avoir une stabilité forte. La méthode de Von Neumann permet l'étude de cette stabilité pour les milieux infinis et homogènes. Il s'agit d'étudier chaque composante  $w_{l,m}^n = W_n e^{jk_x l \Delta x + jk_y m \Delta y}$  de la transformée de Fourier en espace de la solution en régime libre. Le schéma est fortement stable si, pour tout  $k_x, k_y$  et  $\Delta t$ , on a :

$$\left| \frac{W_{n+1}}{W_n} \right| \leq 1. \tag{4.10}$$

Cette méthode, appelé aussi méthode de Fourier, est limitée puisqu'elle ne prend pas en compte le comportement des schémas près des bords du domaine. Les conditions aux limites numériques doivent être approchées soigneusement pour garantir la stabilité de la méthode numérique. Les méthodes énergétiques permettent de trouver les formes conservatives des conditions aux limites qui assurent la stabilité, mais leur application pour des schémas d'ordre 2 – 4 en 2 dimensions s'avère très complexe. Pour les domaines rectangulaires, on rappelle les résultats sur la stabilité

déterminés par la méthode de Fourier dans [48]. L'introduction de  $w_{l,m}^n$  dans (4.9) donne :

$$W_{n+1} + (b^2 \Delta t^2 - 2)W_n + W_{n-1} = 0, \quad (4.11)$$

avec :

$$b^2 = 16 \left[ \frac{\xi_1^2}{\Delta x^4} (X^2 + \frac{1}{3}X^4)^2 + \frac{\xi_3^2}{\Delta y^4} (Y^2 + \frac{1}{3}Y^4)^2 + \frac{\xi_2^2}{\Delta x^2 \Delta y^2} (X^2 + \frac{1}{3}X^4)(Y^2 + \frac{1}{3}Y^4) + \frac{\xi_4^2}{\Delta x^2 \Delta y^2} (X^2 + \frac{1}{6}X^4)(Y^2 + \frac{1}{6}Y^4) \right], \quad (4.12)$$

où :

$$X = \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right), \quad Y = \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right), \quad \xi_i = \sqrt{\frac{h^2 D_i}{\rho}}. \quad (4.13)$$

La condition de stabilité (4.10) est remplie si le discriminant du polynôme caractéristique associé à (4.11) est négatif, ce qui se traduit par la condition sur le pas de discrétisation temporelle :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\max(b)}, \quad (4.14)$$

et, comme la valeur maximale de  $b$  est atteinte pour  $X^2 = Y^2 = 1$ , le critère de stabilité pour le schéma s'écrit :

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{\xi_1^2}{\Delta x^4} + \frac{\xi_2^2}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\xi_3^2}{\Delta y^4}\right) + \left(\frac{7}{6}\right)^4 \frac{\xi_4^2}{\Delta x^2 \Delta y^2}}}. \quad (4.15)$$

Pour les plaques isotropes, où  $\xi_3 = \xi_1$  et  $\xi_2 = 2\xi_1 - \xi_4$ , le choix naturel de la grille spatiale est une grille isotrope où  $\Delta x = \Delta y$ , et la condition de stabilité se simplifie à :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\xi_1^2(8/3)^2 + \xi_4^2((7/6)^4 - (4/3)^2)}} = r_m. \quad (4.16)$$

On remarque que la condition de stabilité peut s'écrire comme une borne supérieure du paramètre de Courant Friedrichs Lewy faisant intervenir  $\Delta t$ ,  $\Delta x^2$  et les propriétés de la plaque à travers les paramètres  $\xi_1$  et  $\xi_4$ . Pour une plaque donnée, la constante  $r_m$  correspond à la valeur limite du rapport  $\Delta t/\Delta x^2$  qui assure la stabilité du problème infini. Si on souhaite pouvoir doubler la résolution spatiale tout en conservant la stabilité, il est alors nécessaire d'échantillonner 4 fois plus vite en temps.

### 4.3.3 Dispersion numérique

La vitesse de propagation des ondes du système numérique n'est pas la même que celle du système continu en raison de l'erreur due à la discrétisation. Ce phénomène, qui dépend de l'équation discrétisée, est étudié à partir de la dispersion numérique, définie par [16] :

$$q_h = \frac{c_{ph_{num}}}{c_{ph}} = \frac{\omega_{num}}{\omega}, \quad (4.17)$$

où  $c_{ph}$  et  $c_{ph_{num}}$  sont respectivement la vitesse de phase du système continu et numérique. La relation de dispersion du problème continu pour la plaque isotrope s'obtient en cherchant

des solutions de la forme  $w(t, x, y) = Ae^{j\omega t}e^{jk_x x + jk_y y}$  dans l'équation de la dynamique (2.5). On obtient alors :

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad \text{avec : } k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \arctan \frac{k_y}{k_x}, \quad (4.18)$$

où  $k$  est le module du nombre d'onde et  $\theta$  l'angle de propagation par rapport à l'axe des abscisses. La vitesse de phase  $c_{ph}$  et la vitesse de groupe  $c_{gr}$  des ondes de flexion sont alors :

$$\begin{aligned} c_{ph} &= \frac{\omega}{k} = \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/4} \sqrt{\omega}, \\ c_{gr} &= \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2 \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/4} \sqrt{\omega}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Pour déterminer la vitesse de propagation du système numérique, on doit trouver la relation de dispersion du système numérique. Elle s'obtient en cherchant des solutions de la forme  $w_{l,m}^n = Ae^{j\omega n \Delta t} e^{jk_x l \Delta x + jk_y m \Delta y}$  dans l'équation discrétisée, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{e^{j\omega \Delta t} - 2 + e^{-j\omega \Delta t}}{8\Delta t^2} + b^2 &= 0, \\ \Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2} - b^2 \Delta t^2 &= 0, \\ \Leftrightarrow \omega &= \frac{2}{\Delta t} \arcsin \frac{b \Delta t}{2}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

où l'expression de  $b$  est la même que celle intervenant dans l'étude de la stabilité et est donnée par (4.12). La pulsation numérique dépend alors de l'angle de propagation. Pour une propagation suivant l'axe de discrétisation des  $x$ , (4.20) se simplifie à :

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left[ \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left( \sin^2 \frac{k \Delta x}{2} + \frac{1}{3} \sin^4 \frac{k \Delta x}{2} \right) \right]. \quad (4.21)$$

L'effet de la dispersion numérique est alors un décalage vers le bas des fréquences de résonance lors de la discrétisation du système. La Figure 4.1 montre la dispersion numérique de l'équation discrétisée avec le schéma 2-4 en fonction du nombre d'onde adimensionné  $\bar{k} = k/k_{max}$  ( $k_{max}$  est le nombre d'onde à la fréquence de Shannon). Pour les directions  $\theta = 0$  (a) et  $\theta = \pi/4$  (b) les différentes courbes correspondent à la dispersion numérique pour différentes valeurs du rapport  $\Delta t/\Delta x^2$  par rapport à la valeur limite de stabilité  $r_m$  donnée par (4.16). On observe que :

- l'erreur du schéma augmente avec le nombre d'onde,
- plus le rapport  $\Delta t/\Delta x^2$  est près de la limite de stabilité  $r_m$  et plus l'erreur due à la dispersion numérique est petit,
- l'erreur est plus importante pour une propagation suivant la direction de discrétisation de la grille ( $\theta = 0$ ) que pour une propagation en diagonale ( $\theta = \pi/4$ ).

Pour une application en synthèse sonore, la fréquence d'échantillonnage  $F_s = 1/\Delta t$  est souvent fixée en avance. La discrétisation spatiale optimale (qui minimise l'erreur) est alors donnée par la limite de stabilité :  $\Delta x^2 = \Delta t/r_m$ . La Figure 4.2 montre la dispersion numérique pour la discrétisation "optimale"  $\Delta t/\Delta x^2 = r_m$  et différents angles de propagation. Ces résultats confirment la dépendance de l'erreur avec la direction de propagation. On dit alors que le schéma est anisotrope, puisqu'il se comporte différemment selon la direction de propagation.

La Figure 4.3 montre le comportement de la dispersion numérique dans toutes les directions de

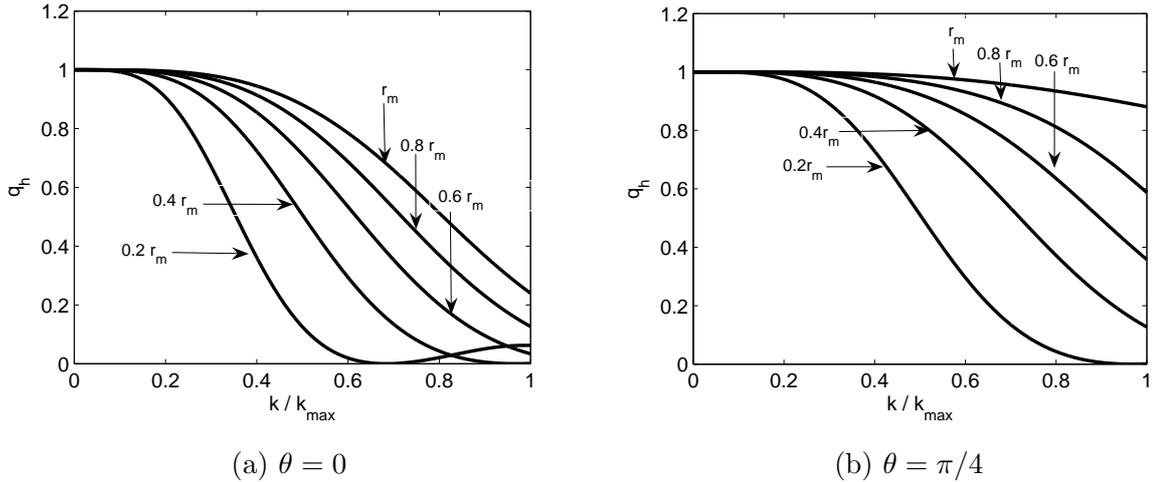


FIG. 4.1: Dispersion numérique pour le schéma aux différences finies 2-4 en fonction du nombre d'onde adimensionné  $k/k_{max}$ , avec  $k_{max}$  correspondant à la fréquence de Shannon. Courbes pour différentes valeurs de  $\Delta t/\Delta x^2 = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1] \times r_m$  et pour une propagation dans la direction d'angle  $\theta = 0$  (a) et  $\theta = \pi/4$  (b).

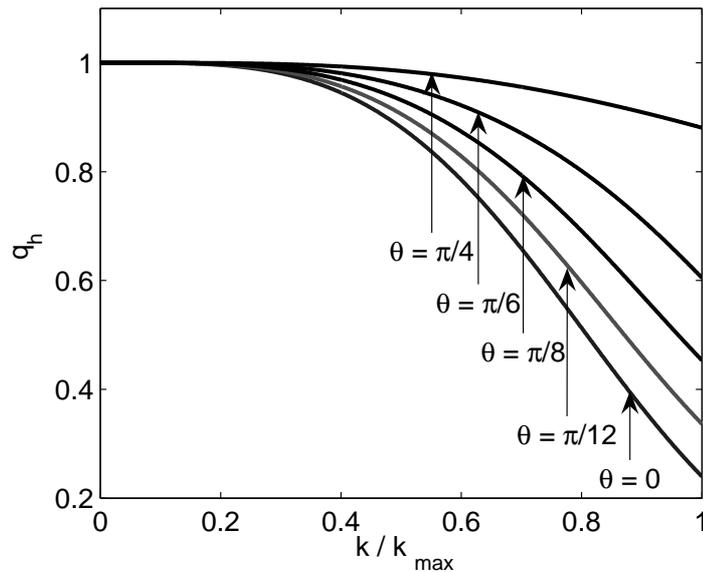


FIG. 4.2: Dispersion numérique pour le schéma aux différences finies 2-4 en fonction du nombre d'onde adimensionné  $k/k_{max}$ , avec  $k_{max}$  correspondant à la fréquence de Shannon. Courbes pour différentes directions de propagation.

propagation (entre 0 et  $\pi/2$  en raison de la symétrie du problème). Chaque courbe correspond à la dispersion numérique  $q_h$  pour une valeur de la fréquence adimensionnée  $F = f/F_s$ . On observe que le schéma devient de plus en plus anisotrope lorsqu'on s'approche de la fréquence de Shannon.

Une conséquence de l'anisotropie du schéma est que l'erreur des différences finies sur la fréquence propre de chaque mode dépendra de la déformée modale. L'erreur ne pourra alors

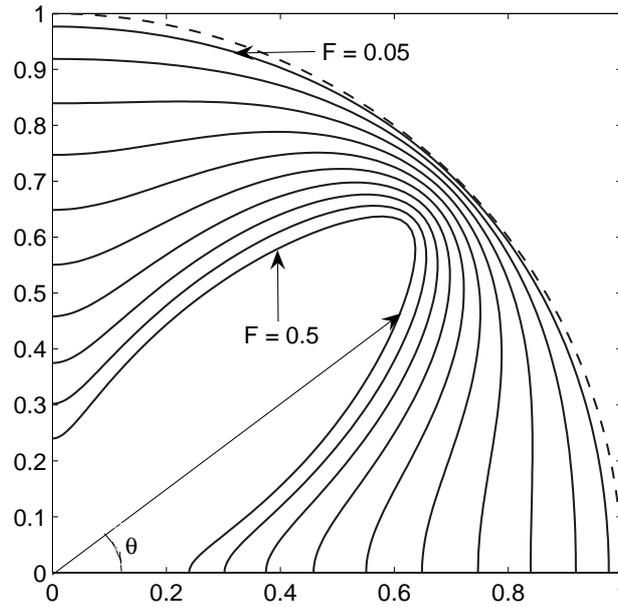


FIG. 4.3: Isotropie numérique pour le schéma aux différences finies 2-4. Chaque courbe représente l'évolution de la dispersion numérique en fonction de l'angle de propagation  $\theta \in [0; \pi/2]$  pour une valeur fixe de la fréquence adimensionnée  $F = f/Fs$ . Courbes pour  $F = 0, 0.05, 0.1, \dots, 0.5$ .

être corrigée par un simple décalage des fréquences propres en fonction de la fréquence, car des déformées modales différentes cohabitent à des fréquences très proches ont besoin de corrections différentes. L'anisotropie du schéma rend aussi difficile la recherche d'un schéma qui minimise la dispersion numérique par optimisation comme cela a déjà été fait pour le cas du schéma à une dimension lors de la simulation des vibrations de flexion des poutres [2].

La précision sur les fréquences propres n'est pas critique pour la simulation d'un réverbérateur à plaque en raison de sa grande densité modale et donc de l'absence de hauteur dominante dans sa sonorité. Néanmoins, un décalage fréquentiel important des fréquences propres se traduit par un décalage sur l'amortissement, or le contrôle du comportement fréquentiel de l'amortissement du réverbérateur est important. Une autre grandeur influencée par la dispersion numérique est la densité modale, car le décalage des fréquences propres modifie leur densité dans l'axe des fréquences.

#### 4.3.4 Conditions aux limites numériques

Pour la simulation des plaques rectangulaires finies il est nécessaire d'approcher les conditions aux limites idéales continues présentées au chapitre 2. L'approximation des conditions aux limites par des opérateurs d'ordre 4 conduit en général à des schémas instables [16]. Pour contourner ce problème, on utilise un schéma d'ordre 2 à proximité des bords du domaine.

L'approximation des conditions aux limites est basée sur la méthode des images, qui consiste à calculer des points fictifs en dehors de la plaque à partir des relations données par les conditions aux limites numériques. Ces points fictifs sont ensuite utilisés pour la résolution des équations

aux différences près des bords.

Pour le calcul du déplacement à l'instant  $n + 1$  d'une plaque située dans le demi plan  $x > 0$ , les conditions aux limites discrètes sur le bord suivant l'axe  $y$  tel que  $x = 0$  s'écrivent [48] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bord encastré : } w_{0,m}^{n+1} = 0 \quad \text{et } D_x^{(2)} w_{0,m}^{n+1} = \frac{1}{2\Delta x} (w_{1,m}^{n+1} - w_{-1,m}^{n+1}) = 0. \\ \text{Bord appuyé : } w_{0,m}^{n+1} = 0 \quad \text{et } (M_x)_{0,m}^n = 0. \\ \text{Bord libre : } (M_x)_{0,m}^n = 0 \quad \text{et } D_x^{(2)} (M_x)_{0,m}^n + 2D_y^{(2)} (\widetilde{M}_{xy})_{0,m}^n = 0, \end{array} \right. \quad (4.22)$$

où les opérateurs intervenant dans la condition aux bords libres sont :

$$\begin{aligned} D_x^{(2)} (M_x)_{0,m}^n &= \frac{1}{2\Delta x} \left( (M_x)_{1,m}^n - (M_x)_{-1,m}^n \right), \\ D_y^{(2)} (\widetilde{M}_{xy})_{0,m}^n &= \frac{1}{2\Delta y} \left( (M_{xy})_{1/2,m+1/2}^n + (M_{xy})_{-1/2,m+1/2}^n \right. \\ &\quad \left. - (M_{xy})_{1/2,m-1/2}^n + (M_{xy})_{-1/2,m-1/2}^n \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

### 4.3.5 Densité modale numérique

La sous-estimation des fréquences propres du système numérique décrite par la dispersion numérique peut s'interpréter comme une compression du spectre de la solution numérique par rapport au spectre de la solution continue. Ce phénomène se traduit par une augmentation de la densité de fréquences propres, ou densité modale. Néanmoins, à partir d'une certaine fréquence seuil, la densité modale diminue au lieu d'augmenter. Pour une région fréquentielle, la densité modale diminue quand le nombre de fréquences propres décalées vers cette région est inférieur au nombre de fréquences propres qui ne sont plus dans cette région en raison de la dispersion numérique. On étudie les effets de la dispersion numérique sur la densité modale à partir du cas simple de la plaque non amortie sur des appuis simples, dont les fréquences propres du système continu sont connues analytiquement et données au chapitre 2 (2.16). Les fréquences propres du système numérique peuvent être calculées à partir des valeurs continues et l'expression donnée pour la dispersion numérique (4.20).

Pour estimer la densité modale, on divise le spectre  $f \in [0; Fs/2]$  en bandes de fréquences de largeur égale. La densité modale est estimée comme le rapport entre le nombre de modes présents dans chaque bande sur la largeur de la bande. Pour le système continu, on tient compte des fréquences propres inférieures à la fréquence de Shannon  $Fs/2$ . Pour le système discrétisé, on fait l'hypothèse que toute l'erreur responsable de la sous-estimation des fréquences propres est due à la propagation des ondes numériques dans le milieu. L'influence de l'erreur due aux conditions aux limites est alors négligeable. La grande taille des grilles utilisées pour la simulation d'un réverbérateur justifie cette hypothèse. Le nombre de fréquences propres à prendre en compte pour le cas discret dépend de la capacité de la grille spatiale à les représenter. Les valeurs maximales prises en compte pour les indices  $l$  et  $m$  dépendent du nombre de points de discrétisation selon les axes  $x$  et  $y$  respectivement. Pour représenter un mode d'ordre  $l_{max}$ , la grille nécessite au moins  $l_{max} + 2$  points de discrétisation suivant l'axe des  $x$ . Le  $+2$  provient du fait qu'il faut tenir compte des deux bords où le déplacement est nul. Cette condition est équivalente à un théorème d'échantillonnage, qui nécessite au moins deux points de discrétisation par longueur d'onde. Des exemples en une dimension sont montrés par la Figure 4.4, où le mode d'ordre le plus élevé est représenté. La valeur  $l_{max} = N_x - 2$  est alors le nombre de modes du système numérique. Le

système discret possède alors  $2l_{max}$  degrés de liberté (ddl). Une interprétation à partir du rang de la matrice d'amplification de la représentation matricielle des DF conduit au même résultat. Le nombre de ddl est deux fois le nombre de points où le déplacement est calculé par l'algorithme des DF, en raison de la dérivée d'ordre 2 dans l'équation de la dynamique. L'extrapolation pour

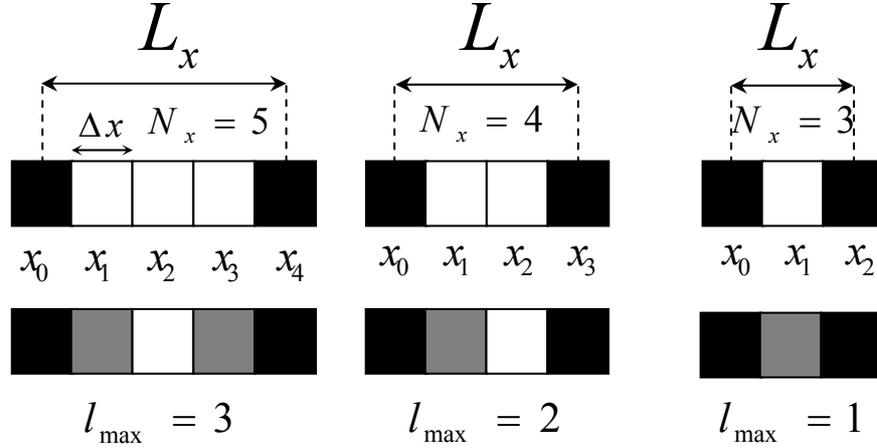


FIG. 4.4: Dernière déformée modale représentable d'une poutre sur des appuis simples sur des grilles d'espace de 3, 4 et 5 points. Chaque cellule correspond à un point de la grille et le déplacement des cellules noires est nul. Pour représenter le mode d'ordre  $l_{max}$  il faut au moins  $N_x = l_{max} + 2$  points de discrétisation (incluant les deux extrémités de la barre).

les deux dimensions est directe. Avec cette considération sur les modes présents dans le système numérique, il est possible de calculer la densité modale numérique à partir des fréquences propres numériques de la plaque sur des appuis simples.

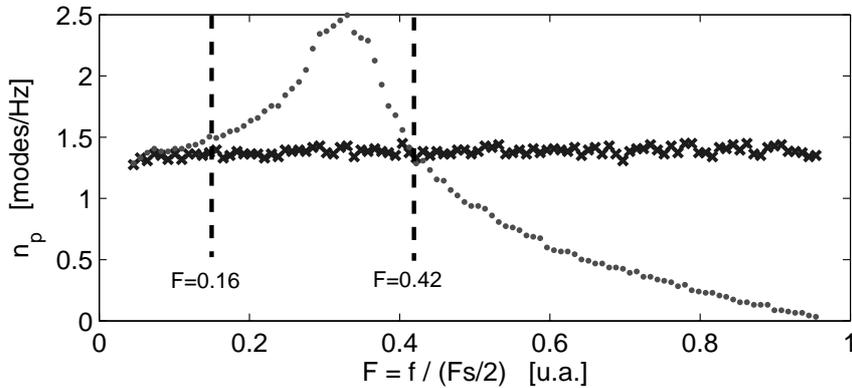


FIG. 4.5: Estimation de la densité modale d'une plaque non amortie sur des appuis simples : densité modale du système continu calculée à partir de la connaissance des fréquences propres ( $\times$ ) et densité modale du système obtenu par DF 2-4 calculée avec les fréquences propres décalées par la dispersion numérique ( $\cdot$ ). Les lignes verticales discontinues séparent trois zones selon l'erreur de la densité modale  $n_p$  numérique par rapport à celle du système continu :  $F < 0.16$  l'erreur en  $n_p$  est inférieure à 10%,  $0.16 < F < 0.42$  l'erreur est supérieure à 10% mais la  $n_p$  numérique reste égale ou supérieure à la  $n_p$  continue,  $F > 0.42$  la densité modale numérique est inférieure à celle continue.

La Figure 4.5 montre l'estimation de la densité modale pour une plaque sur des appuis simples,

pour le système continu  $n_p$  et pour le système discret  $n_{p_{Num}}$ . La plaque simulée a les paramètres du réverbérateur EMT140 : plaque en acier, d'épaisseur 0.5 mm et de dimensions 2 m×1 m. La fréquence d'échantillonnage est fixée à 2000 Hz. L'estimation est faite dans 100 bandes de fréquences réparties entre 0 et 1 kHz qui se recouvrent de 90%. Chaque bande a une longueur de 91.74 Hz. Pour la solution continue, la densité modale  $n_p$  estimée est quasi constante, comme prévu par la théorie des plaques. Pour la solution numérique, la densité modale  $n_{p_{Num}}$  converge vers  $n_p$  uniquement pour  $F < 0.16$ , où  $F$  est la fréquence adimensionnée par la fréquence de Shannon. Dans le région  $0.16 < F < 0.42$  il y a une augmentation de  $n_{p_{Num}}$  due à la compression du spectre, qui arrive à son maximum à environ  $F = 0.3$ , puis il y a une forte diminution au delà.

Pour le système continu, d'après la théorie des plaques minces, la densité modale dépend de la surface de la plaque mais est indépendante du rapport entre ses dimensions latérales. On se demande si pour le système discret, qui est anisotrope, la dispersion numérique affecte cette propriété. La Figure 4.6 montre les résultats des  $n_p$  et  $n_{p_{Num}}$  pour 4 plaques rectangulaires de même surface mais avec des rapports différents entre les côtés. On observe que la densité modale des différentes plaques est très similaire en continu et en discret.

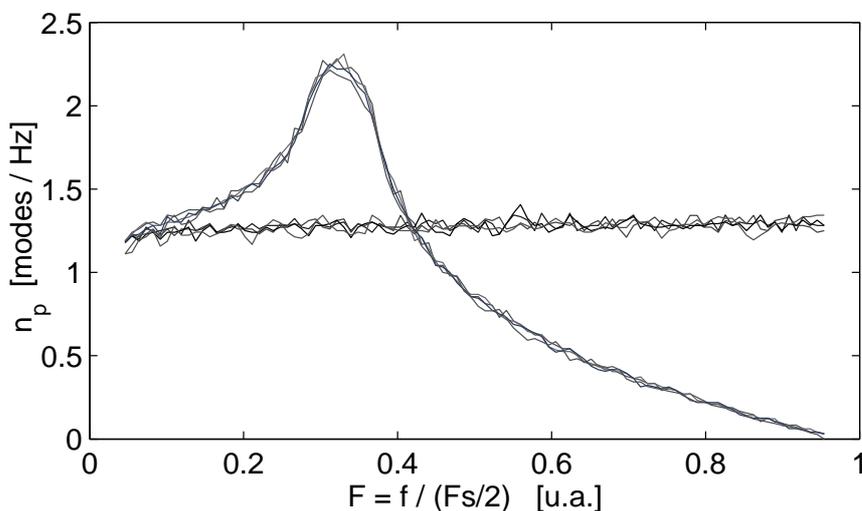


FIG. 4.6: Estimation de la densité modale de plaques de même surface mais avec des rapports entre ses dimensions  $\Gamma = L_x/L_y$  différents : 1, 1/2, 1/4 et 1/8. On observe que le comportement des densités modales continue et numérique ne dépend pas de  $\Gamma$ .

#### 4.3.6 Admittance mécanique du modèle numérique

Le calcul par différences finies de l'admittance mécanique au point d'excitation peut s'effectuer par excitation du modèle numérique avec une densité de force impulsionnelle en temps et localisée en espace  $f_{l,m}^n = \delta(n)\delta(l-l_i)\delta(m-m_i)$ . Le premier élément du vecteur discret de densité de force est non nul et les autres éléments sont nuls. La simulation numérique donne un signal de déplacement, et la vitesse est obtenue par dérivation. On obtient alors la fonction de Green numérique en vitesse en réponse à une force, dont la transformée de Fourier est l'admittance mécanique  $Y(\omega) = V(\omega)/F(\omega)$ . Les simulations de la même plaque dont on a calculé la densité modale (cf. Figure 4.5) ont été faites à différentes valeurs de fréquence d'échantillonnage et comparées à la valeur théorique obtenue par décomposition modale.

### Normalisation de $f^n$ à différents $Fs$

Lors de la comparaison de simulations à différentes  $Fs$ , il faut tenir compte du fait que la quantité d'énergie fournie au système numérique par une impulsion de force dépend de la fréquence d'échantillonnage. La normalisation de la force d'excitation  $f^n$  est alors nécessaire. Le terme de forçage des équations est une densité surfacique de force  $f^n$ . La force est alors le produit  $f^n S_{el}$ , où  $S_{el} = \Delta x \Delta y$  est la taille de l'aire d'une cellule de la grille spatiale. Comme la taille  $S_{el}$  est différente selon la  $Fs$  de la simulation (en raison de la condition de stabilité), la force totale est différente selon  $Fs$ . Il faut aussi tenir compte de la durée d'application de la force, qui pour ce cas est un échantillon, et dépend alors de  $Fs$ . Ainsi, plus  $Fs$  est petite et plus grande est l'énergie fournie au système.

Supposons qu'on se propose de comparer deux simulations d'une impulsion de force discrète ponctuelle dont les paramètres sont  $Fs_A$ ,  $S_{elA}$  et  $f_A^n$  pour la première simulation et  $Fs_B$ ,  $S_{elB}$  et  $f_B^n$  pour la deuxième simulation. On suppose  $Fs_B > Fs_A$ . Pour avoir la même énergie d'excitation du système à des fréquences inférieures à  $Fs_A/2$ , l'amplitude de l'impulsion du système numérique à  $Fs_B$  doit être  $f_B^n = f_A^n \frac{S_{elA}}{S_{elB}} \frac{Fs_B}{Fs_A}$ .

Les signaux temporels de déplacement sont tronqués à  $t = 1$  s et sont comparés dans le domaine temporel et fréquentiel.

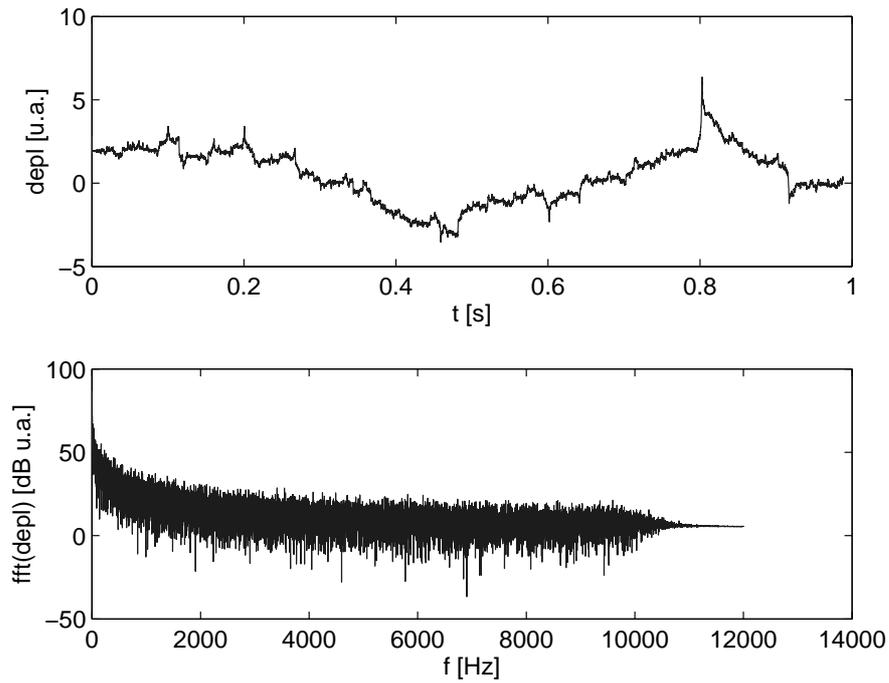
#### 4.3.6.1 Domaine temporel

La Figure 4.7 montre le signal continu issu d'une décomposition modale (DM) à  $Fs = 96$  kHz prenant en compte les modes jusqu'à 12 kHz et le signal issu d'une simulation par différences finies à  $Fs = 96$  kHz. Les deux signaux temporels ont été filtrés avec un filtre passe-bas et sous-échantillonnés d'un facteur 4 pour réduire les effets de la dispersion numérique. La superposition des deux courbes de la Figure 4.7 est globalement bonne en raison de la concentration d'énergie en basses fréquences, où les effets de la dispersion numérique sont négligeables.

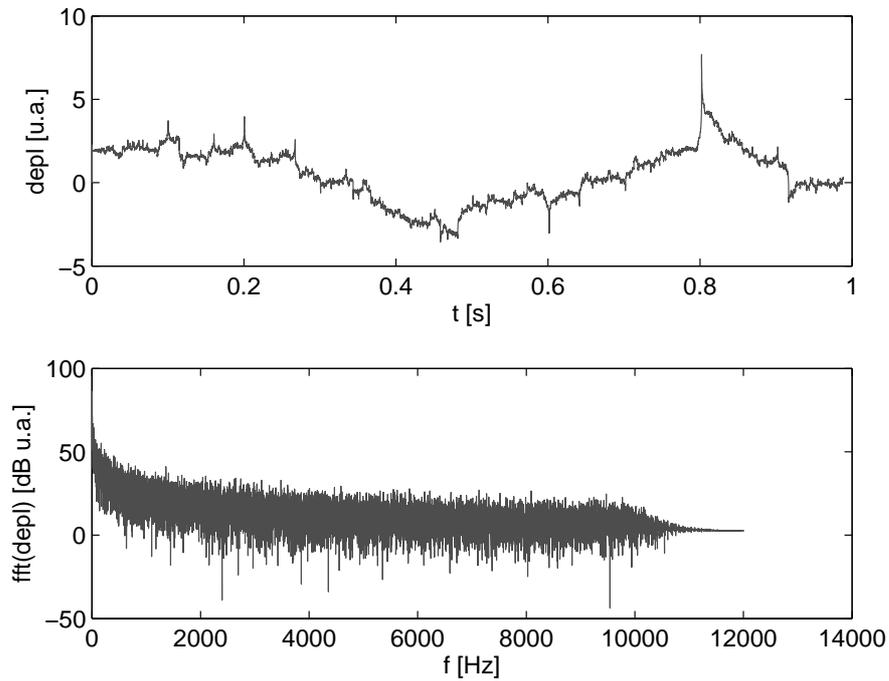
La Figure 4.8 montre le détail de la comparaison entre l'évolution temporelle de la solution discrète et de la solution analytique. Les différences entre le signal analytique et la simulation sont visibles quand on diminue l'échelle de temps. On remarque qu'au début du signal, en raison de la présence de précurseurs à très hautes fréquences caractéristiques de la propagation dispersive des ondes de flexion, l'erreur numérique est importante.

#### 4.3.6.2 Domaine fréquentiel

La Figure 4.9 montre le détail de la superposition de ces spectres à différentes localisations fréquentielles. La corrélation entre la solution analytique et la simulation se dégrade avec l'augmentation de la fréquence. A très basses fréquences  $f \in [0; 200]$  Hz, la superposition est parfaite. Dans la plage  $[500; 700]$  Hz, les pics du spectre sont à la même fréquence mais leur amplitude peut être un peu différente. A  $[1000; 1200]$  Hz, de légers décalages entre la position des pics d'amplitude apparaissent. Finalement, à  $[8000; 8200]$  Hz il est difficile d'observer une superposition dans les spectres, et il n'est plus possible d'identifier les similitudes à cause de la grande quantité de fréquences propres. Ces différences sont provoquées par la dispersion numérique à laquelle il faut ajouter les imprécisions en raison de la discrétisation des conditions aux limites du domaine. Néanmoins, même si les spectres ne se superposent pas bien, le comportement global (densité de pics, moyenne d'amplitude des pics) est très similaire.



(a) Solution numérique (DF 2 – 4)



(b) Solution continue (DM)

FIG. 4.7: Déplacement au point d'excitation en réponse à une impulsion de force  $f_{l,m}^n = \delta(n)\delta(l-l_i)\delta(m-m_i)$  obtenu par les différences finies 2 – 4 (a) et solution de référence obtenue par décomposition modale (b). On observe un bon accord entre les déplacements obtenus par les deux méthodes dans les domaines temporel et fréquentiel.

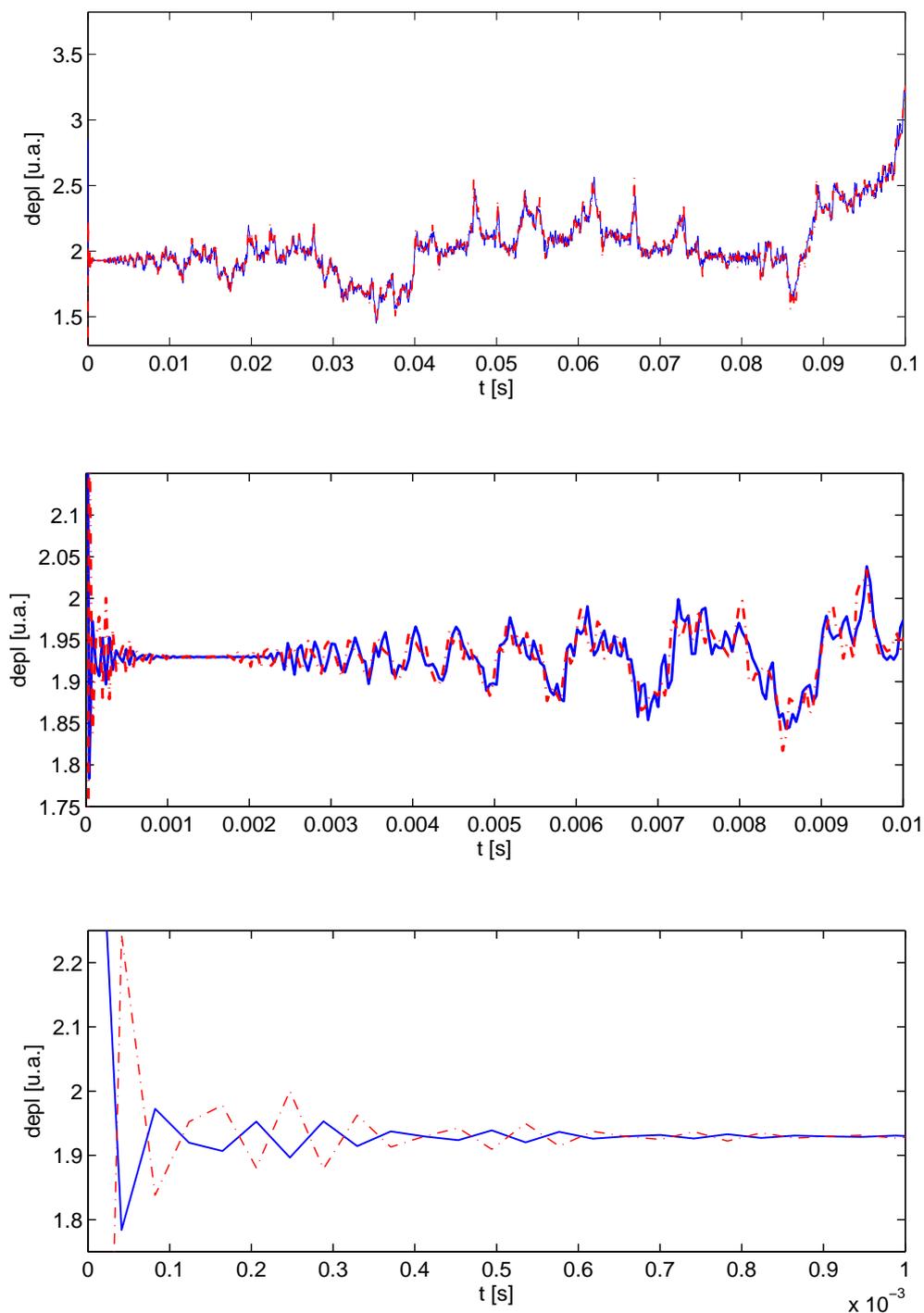


FIG. 4.8: Détail du déplacement temporel de la Figure 4.7 : comparaison entre le signal analytique obtenu par décomposition modale (- - -) et le signal simulé par différences finies. L'erreur est importante au début du signal en raison de la présence d'énergie en hautes fréquences.

#### 4.3.6.3 Comparaison pour différentes fréquences d'échantillonnage

Ces considérations sur l'identification des fréquences propres montrent qu'il faut évaluer plus globalement le comportement entre simulation et solution analytique. Les signaux temporels

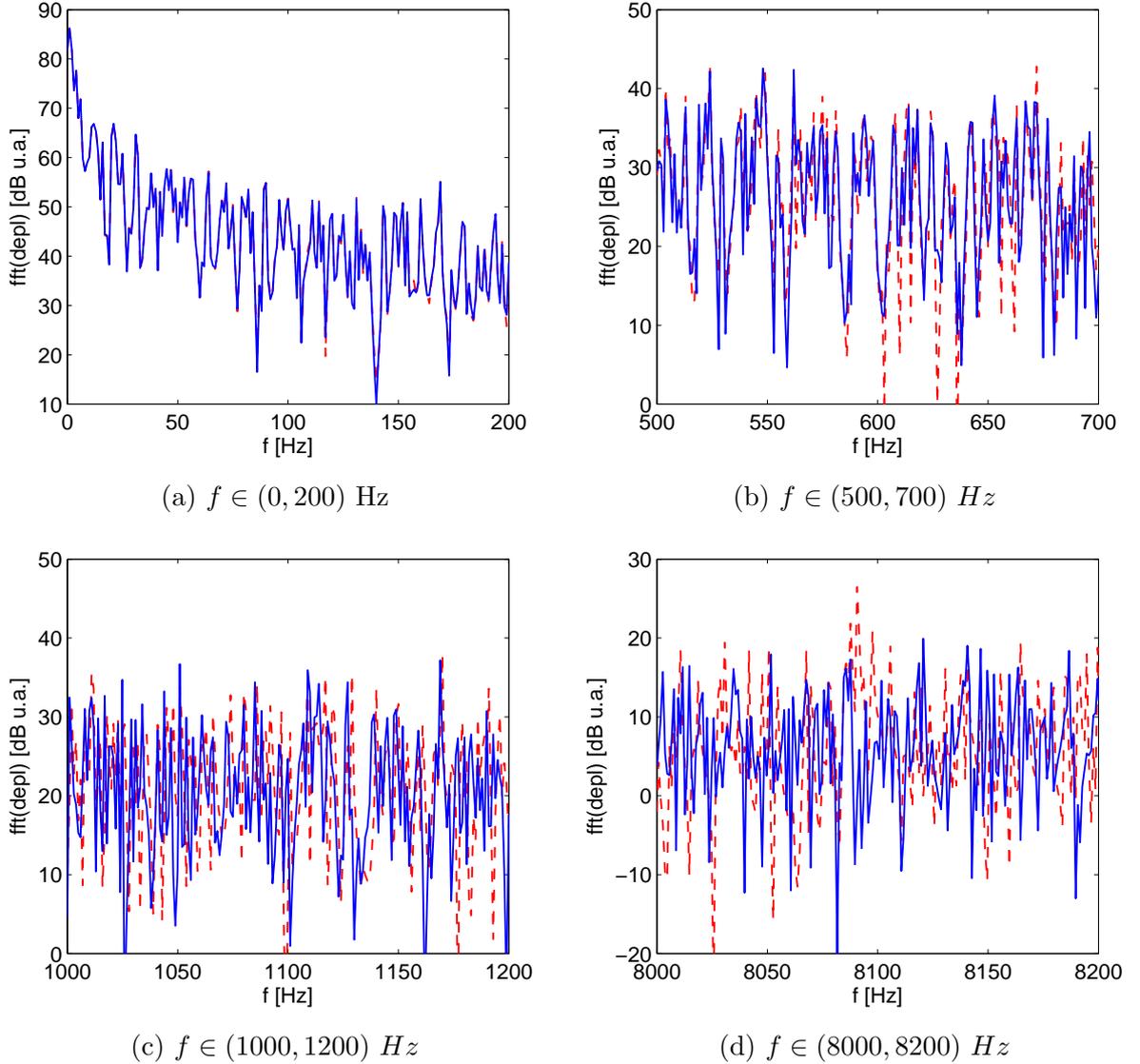


FIG. 4.9: Détail sur les spectres de la réponse à une impulsion de force localisée de la Figure 4.7 : analytique par DM(—) et numérique par DF 2-4 (- -). En basses fréquences (a) la superposition entre les spectres est parfaite tandis qu'en hautes fréquences (d) il n'y a pas de superposition à cause de la dispersion numérique.

de déplacement tronqués à  $t = 1$  s sont alors analysés à partir de leur densité spectrale de puissance  $P_{xx}(\omega)$ . Cette grandeur est estimée à partir du périodogramme moyenné de Welch  $\bar{I}_x(\omega)$  [61], calculé avec la fonction Matlab<sup>©</sup> *pwelch*. Cette méthode consiste à calculer plusieurs périodogrammes à partir d'un signal en utilisant une fenêtre glissante, dont la taille est très inférieure à celle du signal. Ainsi, il est possible d'avoir un spectre à peu près lisse tout en tenant compte de la totalité du signal pour son calcul. L'amplitude est donnée par la racine carrée de la puissance. Pour estimer l'admittance, l'amplitude de la vitesse est obtenue comme le produit de  $j\omega$  avec l'amplitude du déplacement. L'estimation de l'amplitude de l'admittance est donnée par :

$$|\bar{Y}(\omega)| = j\omega (\bar{I}_x(\omega))^{1/2}. \quad (4.24)$$

La Figure 4.10 montre cette quantité pour simulations à  $F_s = 24, 48, 96, 192$  kHz et pour la solution continue (DM). On observe que le phénomène de concentration des fréquences propres

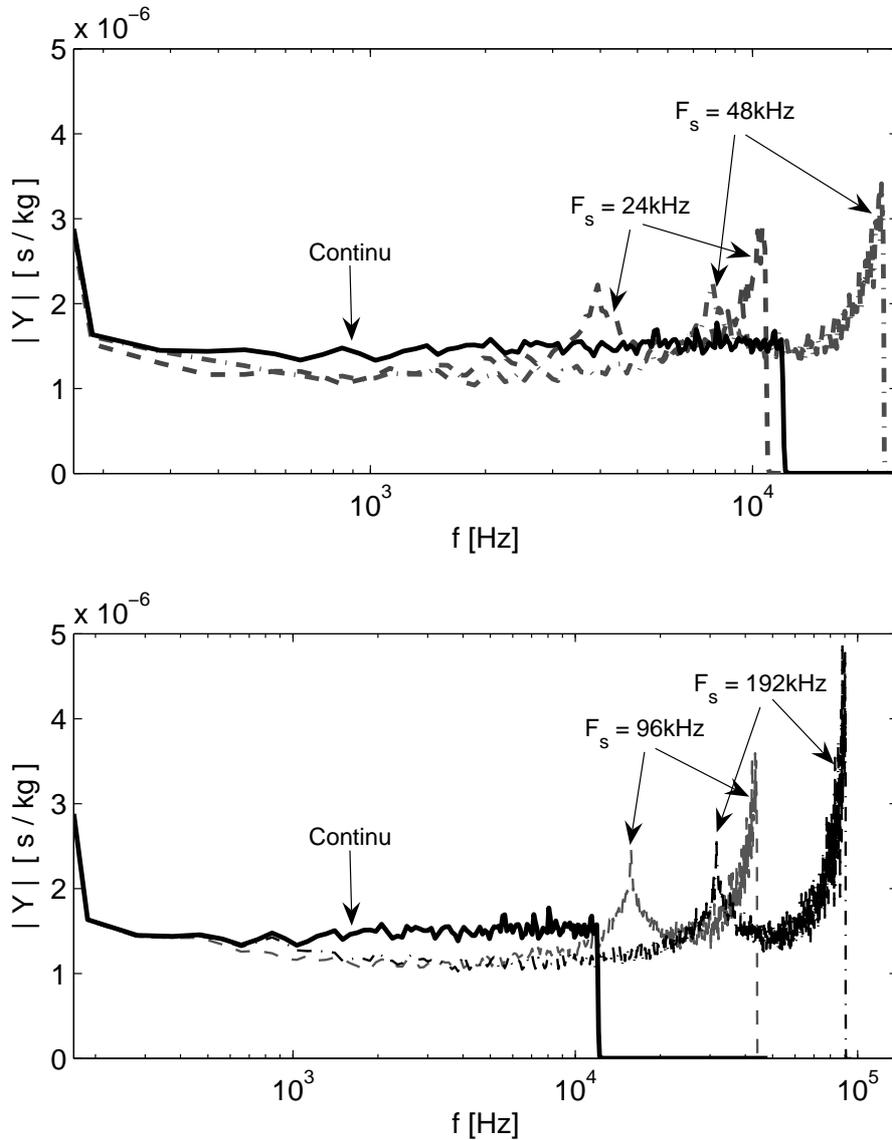


FIG. 4.10: Densités spectrales de puissance (dsp) de l'admittance au point d'excitation d'une plaque non amortie et simplement appuyée, simulée par DF aux fréquences d'échantillonnage  $F_s = 24, 48, 96, 192$  kHz, et comparaison avec la dsp de la RI analytique obtenue par décomposition modale, et dont le comportement temporel est donné par la Figure 4.7. Pour éviter d'avoir dans le domaine audible le maximum relatif de la dsp de simulations par DF qui apparaît à  $0.3F_s/2$ , il faut faire la simulation à  $F_s = 192$  kHz.

mis en évidence lors de l'étude de la densité modale des simulations est retrouvé dans l'allure de l'admittance. A environ 0.3 fois la fréquence de Shannon, il y a un pic d'admittance provoqué par la dispersion numérique des simulations. Pour éviter ce phénomène dans le domaine audible ( $f < 20$  kHz), on a besoin de simulations à  $F_s = 192$  kHz, ce qui augmente d'un facteur 16 le coût de calcul (cf. §4.3.8). On remarque aussi qu'en s'approchant de la fréquence de Shannon il y a une augmentation importante de l'énergie, qui amplifie artificiellement les très hautes fréquences.

### Effet de l'interpolation

Lors de la validation du comportement fréquentiel des simulations, on s'est aperçu que le point d'application de la force et le point d'observation du déplacement de la simulation doivent être choisis sur la grille, dont la résolution spatiale minimale est imposée par la condition de stabilité. On pourrait être tenté de calculer le déplacement en n'importe quel point par interpolation sur ses 4 voisins les plus proches, mais cette sorte de moyenne équivaut à un filtrage passe-bas, réduisant ainsi l'énergie en hautes fréquences, comme le montre la Figure 4.11.

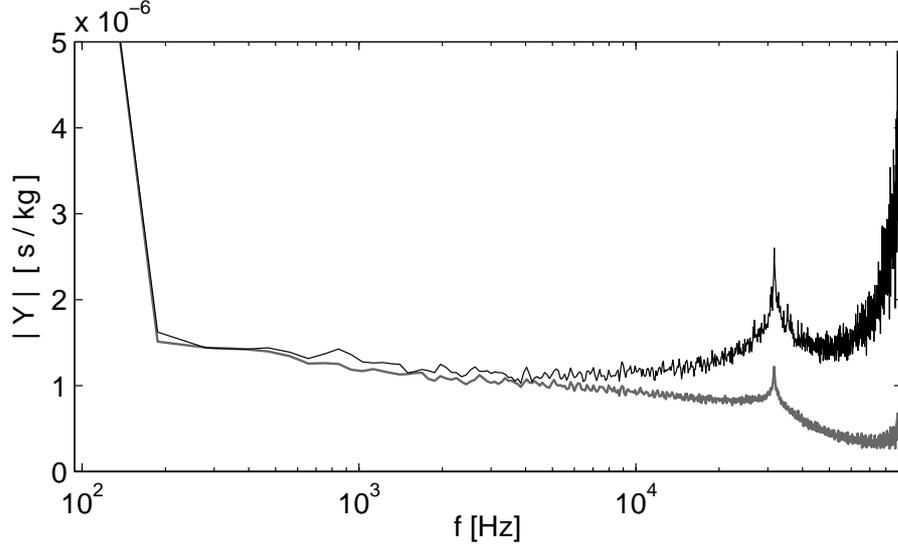


FIG. 4.11: Densité spectrale de puissance de l'admittance au point d'excitation d'une plaque simulée par DF à  $F_s = 192$  kHz sans interpolation (noir) et avec interpolation (gris) du déplacement sur les 4 points voisins de la grille. On observe l'effet de filtrage passe-bas produit par l'interpolation.

## 4.3.7 Prise en compte de l'amortissement

### 4.3.7.1 Modèle continu

On rappelle les principaux résultats concernant la prise en compte de l'amortissement dans les modèles temporels décrivant les vibrations de plaques minces proposés par Lambourg [48] et basé sur le formalisme viscoélastique. Le modèle de relaxation est la représentation la plus naturelle et physique de la viscoélasticité, mais on peut montrer qu'il existe une représentation différentielle équivalente, dont l'avantage est d'être mieux adaptée au traitement numérique du problème. La représentation différentielle entre les tenseurs de contrainte et de déformation est alors donnée par :

$$\sigma + \sum_{m=1}^N q_m \frac{\partial^m \sigma}{\partial t^m} = E \left[ \epsilon + \sum_{n=1}^N p_n \frac{\partial^n \epsilon}{\partial t^n} \right]. \quad (4.25)$$

Les relations entre les moments fléchissants et le déplacement transversal des plaques minces contiennent des dérivées temporelles jusqu'à l'ordre  $N$ . On peut alors décrire l'amortissement à partir d'une constante de rigidité complexe. Dans le domaine de Laplace, la rigidité complexe  $\tilde{D}_i$  s'écrit [48; 12] :

$$\tilde{D}_i(s) = D_i \left( 1 + \tilde{d}_i(s) \right) = D_i \frac{1 + \sum_{n=1}^N s^n p_{in}}{1 + \sum_{m=1}^N s^m q_m}, \quad (4.26)$$

La relation différentielle dans le domaine temporel de la relation contrainte-déformation viscoélastique pour les plaques minces s'écrit :

$$\left(1 + \sum_{m=1}^N q_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}\right) M_{ij} = -h^3 D_i \left(1 + \sum_{n=1}^N p_{in} \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right) w_{,kl} , \quad (4.27)$$

On peut montrer qu'en régime harmonique et avec l'hypothèse de faible amortissement, les angles de pertes s'écrivent :

$$\eta_i = \arctan \frac{\Im m \left( \tilde{D}_i(j\omega) \right)}{\Re \left( \tilde{D}_i(j\omega) \right)} \simeq \frac{\Im m \left( \tilde{D}_i(j\omega) \right)}{D_i} = \Im m(\tilde{d}_i(s)) . \quad (4.28)$$

L'équation (4.26) est une classe particulière de représentation des rigidités complexes où l'opérateur  $\tilde{D}_i(s)$  est borné sous la condition  $q_N \neq 0$ . La dissipativité de cette représentation dépend du choix des paramètres  $p_{in}$  et  $q_m$ . Pour le cas à une dimension la dissipativité est vérifiée si et seulement si on a [48] :

$$\Im m \left( \tilde{D}_i(j\omega) \right) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^+ \quad (4.29)$$

Et pour une plaque orthotrope la condition de dissipativité est donnée par [48; 12] :

$$p_{1N} > 0, \quad p_{3N} > 0, \quad p_{4N} > 0 \quad \text{et} \quad p_{1N}p_{3N} - \frac{D_2 p_{2N}^2}{4D_1 D_3} > 0. \quad (4.30)$$

Dans ces conditions le modèle continu dissipatif est physiquement bien posé. **Par commodité, on écrit par la suite la dérivation temporelle ( $j\omega$  du régime harmonique) dans le domaine de Laplace :  $s = j\omega = \partial_t$ .**

#### Application à l'amortissement thermoélastique

Le modèle d'amortissement thermoélastique présenté au chapitre 2 a la même structure que le formalisme présenté ci-dessus. On peut alors l'écrire comme :

$$\tilde{D}_i(s) = D_i(1 + \tilde{d}_{ith}(s)) = D_i \left(1 + \frac{R_1 s}{s + C_1/h^2}\right) \quad i = [1, 2, 3], \quad (4.31)$$

$$\tilde{D}_4(s) = D_4.$$

#### Application à l'amortissement par rayonnement

A partir d'une description approchée du rayonnement des plaques, Lambourg propose une description de l'amortissement par rayonnement sous forme d'une constante de rigidité complexe  $\tilde{D}_{i \text{ ray}}(s)$ . Cette rigidité est obtenue à partir d'un développement de Padé à l'ordre 3 en fonction de  $j\omega$ . La construction de  $\tilde{D}_{i \text{ ray}}(s)$  est faite pour approcher l'amortissement par rayonnement des plaques finies. La constante de rigidité permettant de simuler l'amortissement par rayonnement dans le domaine temporel est :

$$\tilde{D}_{i \text{ ray}}(s) = D_i \left(1 + \frac{2\rho_a c_a \sum_{m=1}^3 b_m \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m}{\omega_c \rho h \sum_{n=0}^3 a_n \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^n}\right),$$

avec :

$$\omega_c = c_a^2 \sqrt{\frac{\rho}{h^2 D_i}}, \quad \text{pulsation critique.} \quad (4.32)$$

$$a_0 = 1.1669, \quad a_1 = 1.6574, \quad a_2 = 1.5528, \quad a_3 = 1,$$

$$b_1 = 0.0620, \quad b_2 = 0.5950, \quad b_3 = 1.0272.$$

Avec l'hypothèse de faible amortissement et pour une plaque isotrope, le facteur d'amortissement dû au rayonnement pour le mode de pulsation propre  $\omega_i$  est alors :

$$\alpha_i = \frac{\omega_i}{2} \eta(\omega_i) \simeq \frac{\omega_i}{2} \Im m(\tilde{d}_i(\omega_i)) . \quad (4.33)$$

En réalité, la précision de l'approximation faite par (4.32) est bonne au delà de la fréquence critique, mais pour des fréquences en dessous de la fréquence critique l'amortissement est surestimé. L'obtention d'un modèle plus précis mais aussi général que (4.32) nécessite d'augmenter le nombre de termes du développement de Padé. La Figure 4.12 montre la comparaison des

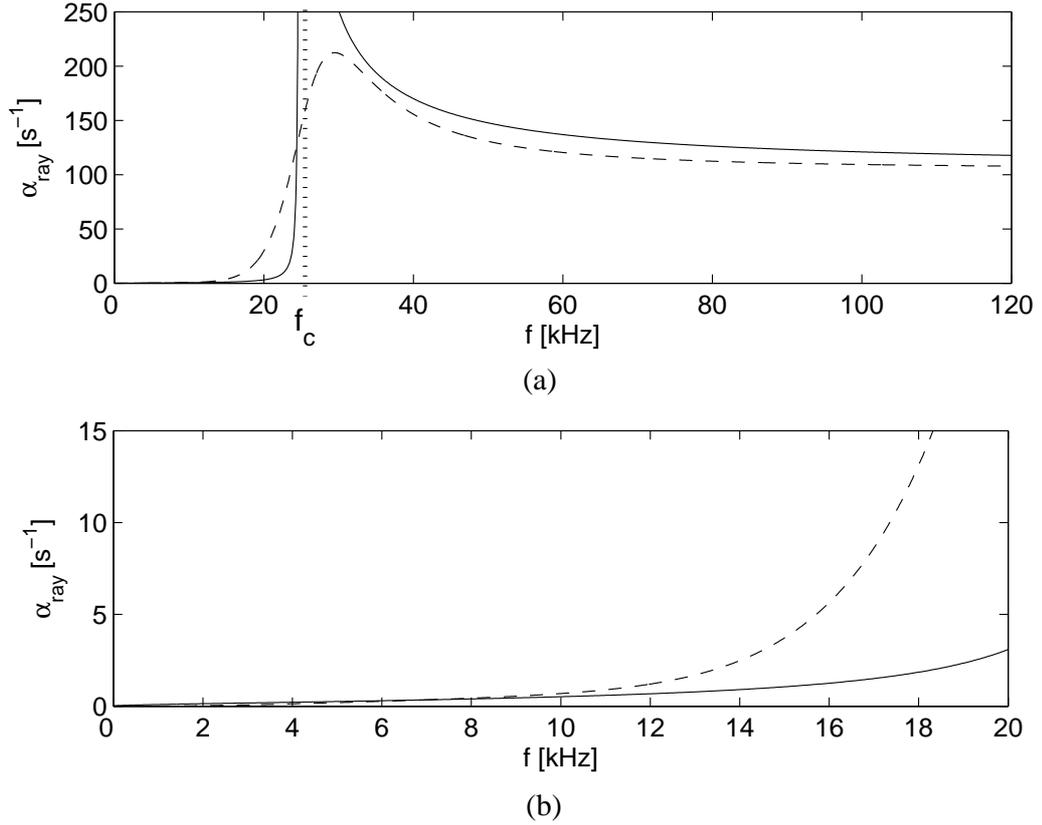


FIG. 4.12: Facteur d'amortissement en fonction de la fréquence pour le réverbérateur EMT140 rayonnant des deux cotés : le modèle temporel proposé par Lambourg (---), (4.32) et (4.33), est comparé au modèle de référence (Maidanik [53]) pour une plaque dans un écran infini simplement appuyée sur ses bords (—). Comportement fréquentiel jusqu'à environ 5 fois la fréquence critique  $f_c$  (a) et détail dans le domaine audible (b), qui ici est en dessous de  $f_c$ . Au-delà de la fréquence critique les estimations des deux modèles sont similaires tandis qu'en dessous de la fréquence critique  $f_c$  le modèle de Lambourg surestime l'amortissement.

comportements fréquents de ce modèle de rayonnement avec celui de référence pour le cas du réverbérateur EMT140. L'amortissement de référence est obtenu à partir du facteur de rayonnement moyen de Maidanik [53] pour une plaque sur des appuis simples et dans un écran infini présenté au §2.3.2.2. Le modèle (4.32) surestime l'amortissement par rayonnement en dessous de la fréquence critique, et donc dans tout le domaine audible pour le réverbérateur EMT140. Ceci est dû au fait que le rayonnement moyen en dessous de  $f_c$  est inversement proportionnel à la surface et l'optimisation faite pour obtenir (4.32) correspond à une surface très inférieure à celle du EMT140.

### 4.3.7.2 Modèle discret

Les dérivées temporelles des modèles d'amortissement (4.31) et (4.32) sont approchées à partir de l'approximation retardée à l'ordre 1  $(f^n - f^{n-1})/\Delta t$ . Ainsi, les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 qui interviennent dans ces modèles sont approchées par :

$$\begin{aligned} D_t^{(1)} f^n &= (f^n - f^{n-1})/\Delta t = \partial_t + O(\Delta t) \\ D_{tt}^{(1)} f^n &= D_t^{(1)} \circ D_t^{(1)} f^n = \frac{1}{\Delta t^2} (f^n - 2f^{n-1} + f^{n-2}) = \partial_{tt} + O(\Delta t) \\ D_{t^3}^{(1)} f^n &= D_t^{(1)} \circ D_t^{(1)} \circ D_t^{(1)} f^n = \frac{1}{\Delta t^3} (f^n - 3f^{n-1} + 3f^{n-2} - f^{n-3}) = \partial_{ttt} + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

#### Stabilité numérique

Un résultat important donné dans [48; 13] est que la dissipativité du modèle continu est une condition nécessaire à la stabilité forte du schéma numérique. On souligne que l'approximation retardée à l'ordre 1 (4.34) conserve la stabilité. En effet, l'image des pôles stables (dans le demi-plan de Laplace partie réelle négative) par la transformation  $s \rightarrow (1 - z^{-1})/\Delta t$  est dans le cercle unité du plan  $\mathbb{Z}$ , ce qui correspond à des pôles stables du système discret. Une autre type de transformation qui conserve la stabilité est la transformation bilinéaire, mais on se contente ici de l'application des approximations (4.34).

Il n'est pas possible de donner une condition de stabilité forte pour le modèle avec amortissement. Néanmoins, une condition nécessaire pour la stabilité faible du problème est donnée dans [48; 13] à partir de l'étude de la matrice d'amplification. Pour la discrétisation avec les opérateurs (4.34) de la constante de rigidité (4.26), cette condition est la même que celle de la plaque non amortie mais en remplaçant chaque constante de la plaque non amortie  $D_i$  par  $D_i p_{iN}/q_{iN}$  dans l'expression des  $\xi_i$  de (4.15).

#### Effets de la discrétisation sur l'amortissement

Pour l'application au réverbérateur à plaque, l'utilisation du modèle temporel discret d'amortissement par rayonnement, en plus de la surestimation de l'amortissement en dessous de la fréquence critique, a deux autres inconvénients majeurs. D'une part, le coût de calcul augmente de façon prohibitive en raison des séries de puissances de  $\partial_t$  intervenant dans la constante de rigidité complexe (cf. §4.3.8). D'autre part, le comportement fréquentiel de l'amortissement du modèle continu (4.32) n'est pas le même que celui du même modèle discrétisé avec 4.34. Ce phénomène est montré par la Figure 4.13, qui compare l'amortissement du modèle continu (thermoélastique et par rayonnement), obtenu par substitution de (4.31) et (4.32) dans (4.33), avec l'amortissement obtenu avec le modèle discret pour différentes fréquences d'échantillonnage. L'amortissement du modèle continu est calculé à partir de (4.33). L'amortissement du modèle discret est estimé par analyse temps fréquence des RI simulées avec la méthode présentée au §3.4.1. L'erreur du modèle discret par rapport au modèle continu vient de la formulation de l'amortissement par rayonnement. Cette erreur devient importante à partir de 10 kHz, même pour la simulation échantillonnée à  $Fs = 192$  kHz. Ces différences vont dans le même sens que la dispersion numérique : si on suppose que l'amortissement de chaque mode ne varie pas lors de la discrétisation, le décalage des fréquences propres a pour effet de modifier le comportement fréquentiel de l'amortissement. En particulier, pour un modèle d'amortissement croissant (comme celui du rayonnement en dessous de la fréquence critique), plus il y a de dispersion numérique et plus l'amortissement augmente vite. Sur la Figure 4.13, on peut observer ce comportement, mais quand la dispersion numérique augmente trop, l'amortissement a tendance à saturer, comme on le remarque pour la simulation à  $Fs = 48$  kHz. En conclusion, la formulation numérique présentée pour l'amortissement par rayonnement ne conduit pas à des résultats satisfaisants en dessous de la fréquence critique.

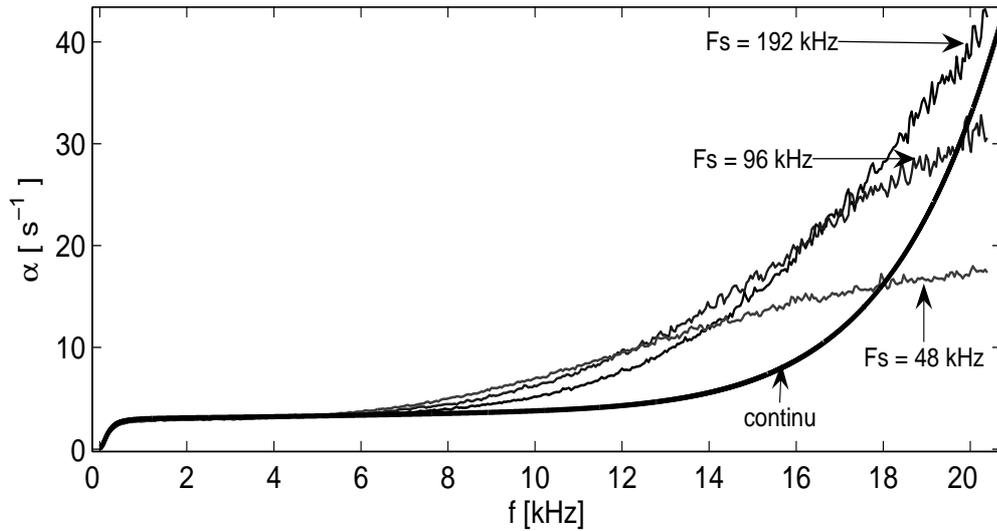


FIG. 4.13: Facteur d'amortissement en fonction de la fréquence pour le réverbérateur EMT140. Comparaison de l'amortissement du modèle continu, estimé à partir de la rigidité complexe, avec l'amortissement estimé des RI des simulations par DF à différentes fréquences d'échantillonnage : 48 kHz, 96 kHz et 192 kHz. L'erreur introduite dans l'amortissement justifie la recherche d'une alternative au modèle de rayonnement (4.33) discrétisé avec (4.34) pour contrôler l'amortissement des simulations.

#### 4.3.8 Temps de calcul

On présente ici le temps de calcul de l'algorithme des DF pour le calcul d'une seconde de RI du réverbérateur EMT140, à différentes fréquences d'échantillonnage  $F_s$ , et en prenant en compte ou non les modèles d'amortissement. Les simulations correspondent alors à la plaque non amortie, à la plaque avec amortissement thermoélastique et à la plaque avec amortissement thermoélastique et par rayonnement.

Les grilles utilisées dans les trois cas ont été définies à partir de la condition de stabilité de la plaque non amortie, car l'influence des modèles d'amortissement sur la contrainte de stabilité est négligeable. Le Tableau 4.1 présente le nombre de points de discrétisation des grilles obtenues en fonction des fréquences d'échantillonnage utilisées. Compte tenu de la condition de stabilité, qui

	24 kHz	48 kHz	96 kHz	192 kHz
$N_x$	77	108	152	215
$N_y$	152	215	303	428
$N_T$	11704	23220	46056	92020

TAB. 4.1: Grilles de discrétisation du réverbérateur EMT140 pour différentes fréquences d'échantillonnage  $F_s = 24, 48, 96, 192$  kHz. Le nombre de points de discrétisation selon la direction  $x$  est  $N_x$ , celui selon la direction  $y$  est  $N_y$  et le nombre total de points de la grille est  $N_T$ .

impose  $\Delta x_{min}^2 / \Delta t$  constant, le nombre de pas dans chaque direction croît comme la racine carré de  $F_s$ . Le nombre de points total de la grille croît alors linéairement en  $F_s$ .

Le Tableau 4.2 rassemble les temps de calcul effectifs de l'algorithme des DF programmé en langage C pour un ordinateur cadencé à 3.4 GHz et avec 3 Go de mémoire vive. Le temps de cal-

	non amorti	therm.	therm. et ray.
24 kHz	41 s	67 s	286 s ( $\approx$ 5 min)
48 kHz	168 s	287 s ( $\approx$ 5 min)	1044 s ( $\approx$ 17 min)
96 kHz	689 s ( $\approx$ 11 min)	1146 s ( $\approx$ 19 min)	4511 s ( $\approx$ 75 min)
144 kHz	1571 s ( $\approx$ 26 min)	2636 s ( $\approx$ 44 min)	11379 s ( $\approx$ 3h 9 min)
192 kHz	2814 s ( $\approx$ 47 min)	4662 s ( $\approx$ 77 min)	21655 s ( $\approx$ 6h 9 min)

TAB. 4.2: Temps de calcul en secondes pour les différents modèles discrets du réverbérateur EMT140 : sans amortissement, avec amortissement thermoélastique (therm.) et avec amortissement thermoélastique et par rayonnement (therm. et ray.). Comparaison pour différentes fréquences d'échantillonnage  $F_s = 24, 48, 96, 144, 192$  kHz.

cul varie avec le carré de la fréquence d'échantillonnage, car le nombre de points de la grille ainsi que le nombre d'instants temporels discrets sont proportionnels à la fréquence d'échantillonnage.

Les modèles d'amortissement augmentent considérablement le temps de calcul. Pour le calcul avec le modèle thermoélastique, on a besoin d'environ 1.6 fois plus de temps que pour la plaque non amortie, ce qui reste raisonnable. La prise en compte du modèle par rayonnement, faisant intervenir deux séries de puissances des dérivées temporelles jusqu'à l'ordre 3, nécessite environ 6 fois plus de temps que la plaque non amortie. Par exemple, la prise en compte de l'amortissement par rayonnement pour une simulation de 7 secondes de la RI de l'EMT140 à  $F_s = 192$  kHz nécessite alors 42 heures de calcul, et en plus introduit des erreurs d'amortissement (cf. Figure 4.13).

## 4.4 Stratégie de synthèse

Une façon d'appliquer l'effet de réverbération à un signal est de l'utiliser comme entrée (densité de force sur la plaque) de l'algorithme des DF. Cette approche a deux inconvénients :

- Il est difficile d'avoir une formulation de l'amortissement pour les différences finies qui soit à la fois précise et générale pour n'importe quel groupe de paramètres. On a vu les difficultés pour la simulation de l'amortissement par rayonnement (cf. §4.3.7.2, §4.3.8), mais on aurait les mêmes problèmes pour les autres amortissements.
- Elle nécessite le calcul d'au moins un pas de temps par échantillon du signal à traiter. Le calcul est très coûteux en raison du grand nombre de degrés de liberté (ddl) du système discret.

La simulation de la réponse impulsionnelle (RI) du réverbérateur à plaque permet de surmonter ces deux difficultés. D'une part, on peut envisager de modifier la décroissance de la RI par bandes de fréquence afin d'imposer le comportement fréquentiel de l'amortissement désiré. Ceci permettrait de contourner les problèmes liés à la définition d'une formulation suffisamment générale et précise de l'amortissement par rayonnement, mais aussi de tenir compte des autres phénomènes d'amortissement, comme l'influence du matériau poreux à proximité (§2.3.3) ou l'amortissement par transmission mécanique (§2.3.4). D'autre part, l'effet de réverbération peut s'appliquer par convolution du signal à traiter avec la RI simulée. La convolution peut se faire dans l'espace des fréquences, qui profite ainsi de l'optimisation du calcul de la transformée de Fourier rapide (FFT). Ceci permet l'obtention d'un effet de réverbération en temps réel même si la synthèse de la RI n'est pas faite en temps réel.

L'objectif est alors le développement d'une méthodologie de synthèse de réponses impulsionnelles à la fois précise et flexible, qui puisse tenir compte des modèles fréquentiels d'amortissement décrits au chapitre 2. Pour l'analyse des RI, le paragraphe suivant décrit le relief de décroissance, un outil adapté à la représentation temps-fréquence des RI de réverbération.

### Le relief de décroissance

Pour l'analyse temps-fréquence de la réverbération, les travaux de thèse de Jot [40] proposent l'utilisation du relief de décroissance (EDR). Dans ce qui suit on décrit les principales propriétés de l'EDR ainsi que la façon de l'obtenir à partir de la RI.

Le relief de décroissance est une représentation temps fréquence dont toute "isofréquence" (coupe à fréquence constante) peut être considérée comme une courbe de décroissance de Schroeder (3.7) évaluée localement au voisinage de la fréquence considérée. Si on dispose d'une représentation temps-fréquence énergétique  $\rho_h(t, f)$  de la RI notée  $h(t)$ , le relief de décroissance associé  $EDR_h(t, f)$  est défini par :

$$EDR_h(t, f) = \int_t^\infty \rho_h(\tau, f) d\tau. \quad (4.35)$$

Il est souhaitable que l'intégration fréquentielle du relief de décroissance corresponde à la courbe de décroissance de Schroeder  $EDC_h(t)$  définie par (3.7), et que l'isotemps  $t = 0$  du relief de décroissance au temps initial soit la densité spectrale de puissance  $|H(f)|^2$ . Ces propriétés s'écrivent :

$$\int_{f=-\infty}^\infty EDR_h(t, f) df = \int_t^{+\infty} h^2(\tau) d\tau = EDC_h(t), \quad (4.36)$$

$$EDR_h(t = 0, f) = \int_{t=0}^{t=\infty} \rho_h(t, f) dt = |H(f)|^2.$$

L'approche présentée au §3.4.1.3 pour la mesure de l'amortissement, basée sur la TFCT, n'a pas ces propriétés. Le spectre courant futur de Page-Levin respecte ces propriétés [40] et il est donc adopté comme relief de décroissance. Il est donné par :

$$EDR_h(t, f) = \left| \int_{\tau=t}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right|^2. \quad (4.37)$$

Cette représentation permet alors la comparaison objective des différentes réverbérations et permet le calcul des critères objectifs traditionnels de l'acoustique des salles.

Si on définit un temps  $t_{max}$  à partir duquel la réponse impulsionnelle est nulle, l'équation (4.37) permet d'obtenir le relief de décroissance par évaluation de la transformée de Fourier sur des fenêtres de durée variable  $[\tau; t_{max}]$ . Cette méthode conduit à des résolutions fréquentielles qui diminuent pendant qu'on avance en temps, car le nombre de points de la transformée de Fourier diminue. Ceci est résolu en ajoutant des zéros à la fin du signal (*zero-padding*), et le calcul de l' $EDR_h$  revient au calcul d'un spectrogramme avec une fenêtre d'analyse suffisamment longue pour contenir tout le signal (tronqué à  $t_{max}$ ). Le recouvrement du spectrogramme dépend de la résolution temporelle souhaitée pour le relief de décroissance. Pour la visualisation du relief de décroissance, on passe souvent par un sous-échantillonnage de chacun des spectres, effectué en sommant l'énergie par blocs fréquentiels voisins sur chaque isotemps.

La RI obtenue par DF contient toute l'information du système numérique pour un point d'excitation et un point d'observation. On peut alors envisager de la comparer avec la RI obtenue

par les mesures. D'après les considérations sur le relief de décroissance, deux conditions sont nécessaires pour que l'effet de réverbération simulé soit le même que celui mesuré. Il faut que la décroissance à chaque isofréquence et que la densité spectrale de puissance de la RI soient identiques. Néanmoins, la simulation par DF n'a pas pu tenir compte de tous les mécanismes d'amortissement ni des égalisations d'énergie du système réel faites par l'actionneur et les capteurs. Des modifications de la RI simulée sont alors nécessaires pour qu'elle puisse être comparée à la RI mesurée. Deux étapes de post-traitement du signal d'accélération obtenu par les DF ont été développées afin d'ajuster le comportement simulé avec celui mesuré pour le réverbérateur EMT140 : l'ajustement de l'amortissement et l'ajustement de l'énergie totale.

Dans §4.4.1 on présente une routine d'**ajustement de l'amortissement moyen par bande de fréquence**, dont l'objectif est de modifier une RI simulée pour qu'elle suive une spécification fréquentielle de l'amortissement donnée. Cette spécification peut être issue des mesures d'un réverbérateur à plaque dont on souhaite reproduire le comportement, mais elle peut aussi être donnée par les courbes d'amortissement obtenues avec les modèles physiques d'amortissement (cf. chapitre 2) pour un jeu de paramètres donné.

Une fois que l'amortissement de la RI simulée est ajusté, le deuxième post-traitement est l'**ajustement de l'énergie totale** de la RI simulée. Cette **égalisation** de l'énergie permet de tenir compte de l'effet de l'actionneur électrodynamique et de l'accéléromètre de mesure du dispositif réel. On peut alors, dans le cas du réverbérateur EMT140, comparer la synthèse à la mesure. Pour un signal d'alimentation électrique dont l'énergie est uniformément distribuée en fréquence, le spectre de la force de l'actionneur sur la plaque n'est pas plat. Le comportement temporel du couplage entre l'actionneur et la plaque ne peut pas être simulé facilement. D'autre part, la masse ajoutée de l'accéléromètre réduit légèrement l'énergie de l'accélération du point de mesure en hautes fréquences.

Pour la simulation du réverbérateur EMT140, la spécification d'égalisation est calculée comme la différence entre la réponse en fréquence simulée et celle mesurée. Mais on peut aussi imaginer utiliser cette égalisation pour tenir compte de l'effet d'un actionneur virtuel, comme par exemple un actionneur électrodynamique comme celui du §2.4.

#### 4.4.1 Ajustement de l'amortissement

Pour la simulation d'un réverbérateur à plaque, l'utilisation d'un modèle complet d'amortissement dans le domaine temporel a plusieurs inconvénients. Premièrement, il est difficile de construire un modèle temporel qui tient compte de toutes les configurations possibles, en particulier par rapport à l'influence du matériau poreux à proximité et de l'amortissement par transmission mécanique aux supports. Même si on arrive à surmonter cette difficulté, et qu'on a, pour une configuration donnée, un modèle temporel d'amortissement basé sur le formalisme de la viscoélasticité, comme celui utilisé dans [48]. Les inconvénients de ce type de modèles sont l'augmentation considérable du temps de calcul et le décalage en fréquence du facteur d'amortissement produit par la dispersion numérique.

On propose ici une méthode de modification de la décroissance par bande de fréquence de la RI. Pour une RI, l'amortissement correspond à la décroissance de l'énergie au cours du temps. Pour un signal harmonique amorti  $x = A_0 \cos(\omega t) e^{-\alpha_{ini} t}$ , où  $\alpha_{ini}$  est le facteur d'amortissement, le changement du facteur d'amortissement de  $\alpha_{ini}$  à  $\alpha_{sp}$  se fait par multiplication avec le signal  $e^{-(\alpha_{sp} - \alpha_{ini}) t}$ . Le problème devient plus complexe quand au lieu d'une sinusoïde on a une somme de  $N$  sinusoïdes uniformément distribuées dans le spectre  $[0; F_s/2]$ .

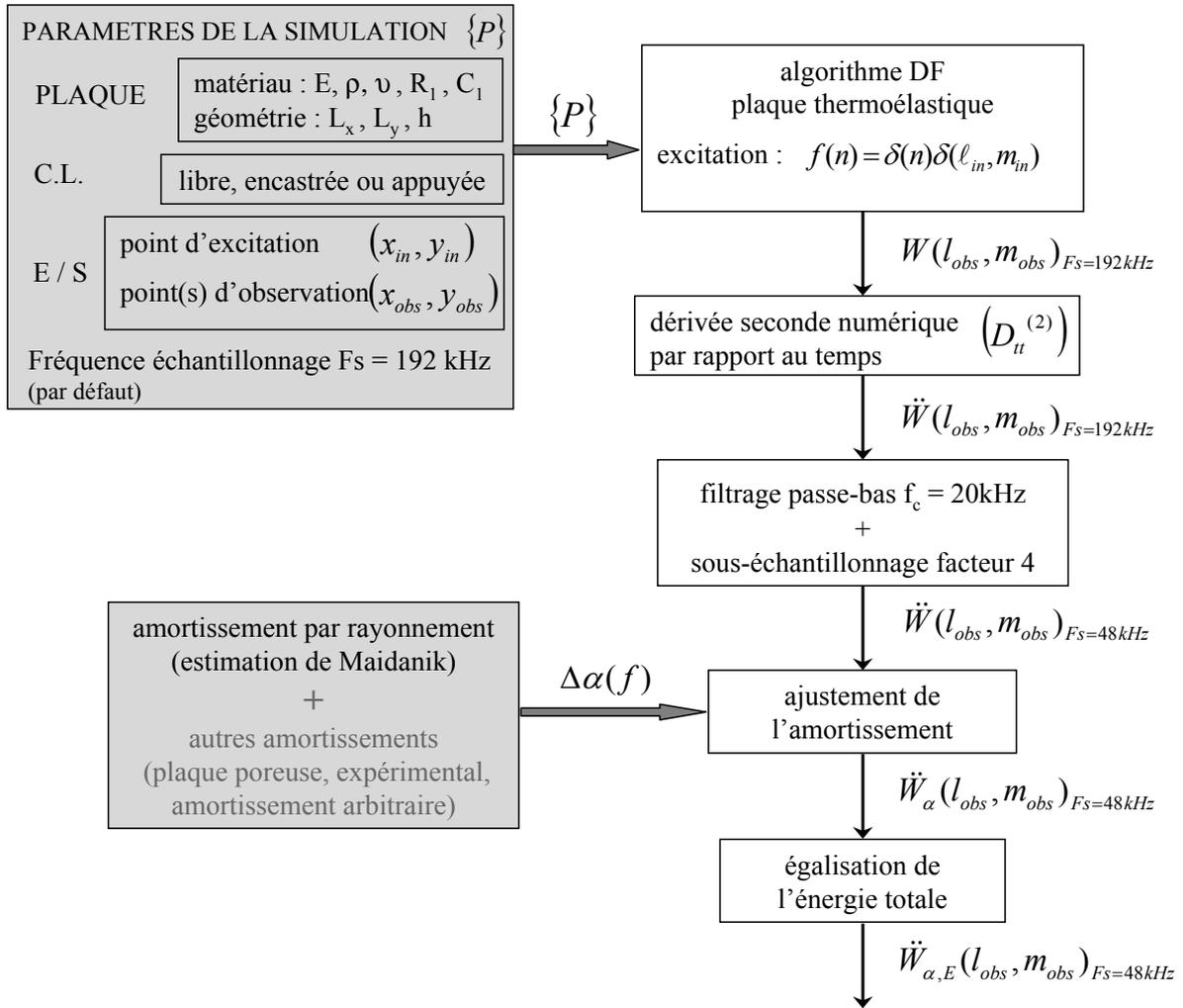


FIG. 4.14: Processus de synthèse d'une RI de réverbérateur.

On propose ici une méthode consistant à modifier la représentation du signal dans l'espace temps-fréquence et à reconstruire le signal à partir de la représentation temps-fréquence modifiée. Il s'agit alors de déterminer la modification nécessaire pour que le signal modifié suive au mieux la spécification fréquentielle d'amortissement. L'enjeu ici est de minimiser l'erreur due à la limitation sur la précision simultanée en temps et en fréquence de la représentation (dualité temps-fréquence).

#### 4.4.1.1 Description de l'algorithme

Le signal en entrée de l'algorithme est la RI simulée  $h(n)$  de taille  $N_{ech} = t_h F_s$  échantillons, où  $F_s$  est la fréquence d'échantillonnage et  $t_h$  est la durée de  $h(n)$  en secondes. L'analyse de son amortissement avec la méthode décrite à §3.4.1 fournit la courbe  $\alpha_{ini}(f_n)$ , qui décrit la décroissance de l'énergie dans chaque bande de fréquence centrée sur  $f_n$  et de largeur  $\Delta f$ . Ici,  $\alpha_{ini}(f_n)$  correspond à l'amortissement thermoélastique simulée avec les DF. L'objectif de l'algorithme présenté ci-dessous est de modifier  $h(n)$  pour qu'elle suive une spécification d'amortissement  $\alpha_{sp}(f_n)$ . Cette spécification correspond à l'amortissement mesuré pour un dispositif réel

donné ou elle peut être donnée par les modèles physiques d'amortissement décrits au chapitre 2. L'enveloppe  $e^{\Delta\alpha(f_n)} = e^{\alpha_{sp}(f_n) - \alpha_{ini}(f_n)}$  définit la décroissance à appliquer à chaque bande fréquentielle.

L'approche de la modification de l'amortissement s'appuie sur l'utilisation de la Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT) comme un banc de filtres passe bande. L'algorithme se divise en trois parties :

- analyse temps fréquence avec la TFCT de la RI obtenue par la simulation,
- modification de la représentation temps fréquence obtenue,
- reconstruction de la nouvelle RI à partir de la représentation temps fréquence modifiée.

On rappelle la notation utilisée pour la TFCT au §3.4.1 :

$$X_{n,k} = X[n, 2\pi k/N_f] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{j(2\pi/N_f)km}. \quad (4.38)$$

$X_{n,k}$  est la Transformée de Fourier Discrète (TFD) du signal, obtenue à partir du produit d'une portion du signal étudié  $x[n]$  fois la fenêtre d'analyse  $w[m]$  de longueur  $L$ . Les paramètres de cette représentation sont la taille des TFD successives  $N_f = L$ , le type de fenêtre  $w(m)$  et le pas d'avancement dans le signal  $\Delta n$ . On obtient ainsi une estimation de la distribution fréquentielle de l'énergie tous les  $\Delta n$  échantillons, i.e. échantillonnée à  $Fs/\Delta n$  Hz. Plus  $\Delta n$  est petit, plus grand est le recouvrement en échantillons entre portions successives, et donc plus précise est la modification temporelle de l'énergie. Le signal à traiter doit commencer par  $\Delta n$  zéros précédant le signal outil (la RI), afin de garder la même précision temporelle dès le début du signal outil. Le résultat obtenu par cette analyse peut s'interpréter de 2 manières différentes :

- La TFCT donne accès à la distribution fréquentielle d'énergie à un instant donné. On obtient  $N_{sp} = t_h Fs/\Delta n$  spectres "instantanés" de taille  $N_f/2 + 1$ .
- On se sert de la TFCT comme un banc de  $N_f/2 + 1$  filtres passe-bande. On obtient  $N_f/2 + 1$  signaux temporels de longueur  $N_{sp}$  échantillons, correspondant à l'évolution de l'énergie dans une bande de fréquences. L'axe discret temporel est donné par  $t_i = (2i + 1)\Delta n/2$ , où chaque  $t_i$  correspond au temps central de la portion de signal sur laquelle on fait la TFD.

La deuxième partie de l'algorithme consiste à changer l'évolution de l'énergie de chaque bande fréquentielle pour imposer l'amortissement spécifié. On multiplie chaque vecteur  $X_{\cdot,k}$ , qui décrit l'évolution temporelle de l'énergie à la fréquence  $f_k$ , par l'enveloppe exponentielle de l'amortissement  $e^{-(\alpha_{sp}(f_k) - \alpha_{ini}(f_k)t_i)}$ , avec  $t_i$  le vecteur du temps en secondes.

L'étape de reconstruction consiste à reconstruire le signal temporel à partir de la représentation temps-fréquence modifiée. Cette reconstruction est faite par la méthode *Overlap and Add* consistant à faire les Transformées de Fourier Inverses de chaque vecteur  $X_{t_i,k}$  à un  $t_i$  donné, et à en additionner les signaux temporels résultants. Le signal temporel obtenu doit être normalisé afin de tenir compte du recouvrement utilisé, c'est-à-dire combien de fois chaque échantillon du signal initial a été pris en compte lors de la première étape. Cette normalisation est faite par division du signal temporel obtenu avec la somme des fenêtres utilisées pour chaque échantillon temporel.

On étudie premièrement le comportement de cet algorithme d'ajustement avec le cas le plus simple possible : le changement d'amortissement d'une sinusoïde pure. Ce cas simple permet de valider le fonctionnement de l'algorithme et d'estimer l'influence du recouvrement sur l'erreur. En étape intermédiaire, on valide l'application sur  $N_f$  sinusoïdes avec une spécification qui varie

avec la fréquence. Finalement, on valide la méthode sur une synthèse du réverbérateur EMT140 où seulement l'amortissement thermoélastique a été pris en compte par les simulations par DF. La spécification d'amortissement est alors fournie par les mesures présentées au chapitre 3. Cette modification de l'amortissement est réalisée pour les temps positifs de la réponse impulsionnelle et ne modifie pas les temps négatifs.

#### 4.4.1.2 Application à une sinusoïde amortie

Le cas le plus simple auquel l'algorithme peut être confronté est l'ajustement de l'amortissement d'une sinusoïde amortie. On est ici loin de l'application visée, où la spécification d'amortissement varie selon la bande de fréquence et où on est en présence de nombreuses sinusoïdes. Néanmoins, ce cas simple permet de valider l'algorithme, de quantifier l'erreur produite par la méthode sur une bande et d'établir le lien entre l'erreur et le recouvrement de la TFCT. Dans ce qui suit, on utilise une taille de transformée  $N_f = 1024$  et on travaille avec des signaux échantillonnés à  $F_s = 48$  kHz. On utilise une fenêtre de type Hanning, qui offre un bon compromis entre largeur du lobe principal et atténuation des lobes secondaires. On a constaté que l'utilisation d'autres types de fenêtres, comme par exemple Blackman, n'améliore pas les résultats obtenus.

On présente l'exemple de la transformation de  $x_{ini} = \sin(2\pi f_i t)e^{-\alpha_{ini} t}$  vers  $x_{ci} = \sin(2\pi f_i t)e^{-\alpha_{sp} t}$ , où l'amortissement initial est  $\alpha_{ini} = 2$  et l'amortissement final  $\alpha_{sp} = 5$ . L'application de l'algorithme à  $x_{ini}$  retourne en sortie le signal modifié  $x_{out}$ . Ce signal est comparé au signal cible  $x_{ci}$  à partir de l'erreur  $\varepsilon(n)$  normalisée avec l'enveloppe de  $x_{ci}$  et définie par :

$$\varepsilon(n) = (x_{out}(n) - x_{ci}(n))/ENV[x_{ci}(n)]. \quad (4.39)$$

Comme l'erreur introduite par l'algorithme concerne seulement l'amplitude du signal, le calcul des enveloppes  $ENV[ ]$  des signaux facilite l'analyse. L'amortissement appliqué par l'algorithme  $\Delta\alpha = \alpha_{sp} - \alpha_{ini}$  est ici la même pour toutes les fréquences. La Figure 4.15 montre les résultats

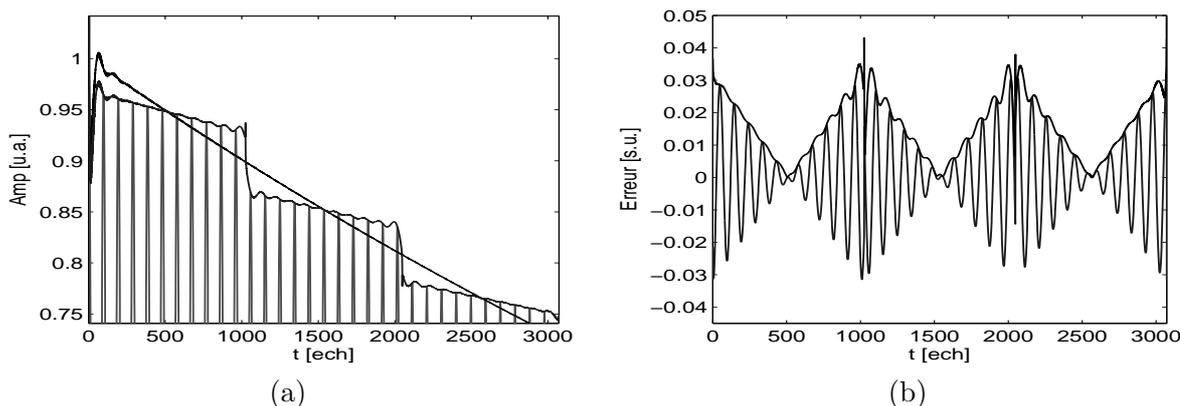


FIG. 4.15: Résultats de l'algorithme d'ajustement de l'amortissement pour la modification de  $x_{ini} = \sin(2\pi f_i t)e^{-\alpha_{ini} t}$  avec  $f_i = 500$  Hz, amortissement initial  $\alpha_{ini} = 2$  s<sup>-1</sup> et amortissement imposé  $\alpha_{sp} = 5$  s<sup>-1</sup>. Il n'y a pas de recouvrement entre les transformées successives. (a) : signal obtenu par l'algorithme et son enveloppe, comparé à l'enveloppe du signal théorique attendu  $x_t$ . (b) : erreur  $\varepsilon(n)$  entre le signal obtenu et le signal théorique et enveloppe de  $\varepsilon(n)$ . On observe que quand l'analyse temps fréquence est fait sans recouvrement l'amortissement est imposé par paliers de taille ed la taille des transformées successives, ce qui introduit une erreur importante.

de l'analyse par TFCT sans recouvrement ( $r = 0$ ) entre les portions de signal pour lesquelles on calcule les TFD successives. La résolution temporelle est faible et l'erreur obtenue de l'ordre de 3%. L'erreur est provoquée par la décroissance par paliers de l'enveloppe appliquée. La longueur de chaque palier est le pas d'avancement  $\Delta n$ , ici égal à la longueur des transformées successives  $N_f = 1024$ . Pour diminuer l'erreur, il suffit d'augmenter le recouvrement  $r$  de l'analyse, comme le montre la Figure 4.16. Cette figure montre l'erreur obtenue pour ce même exemple mais avec des recouvrements plus importants :  $r = 0.5, 0.75, 0.9, 0.95$ , et  $0.99$ . L'erreur se réduit avec

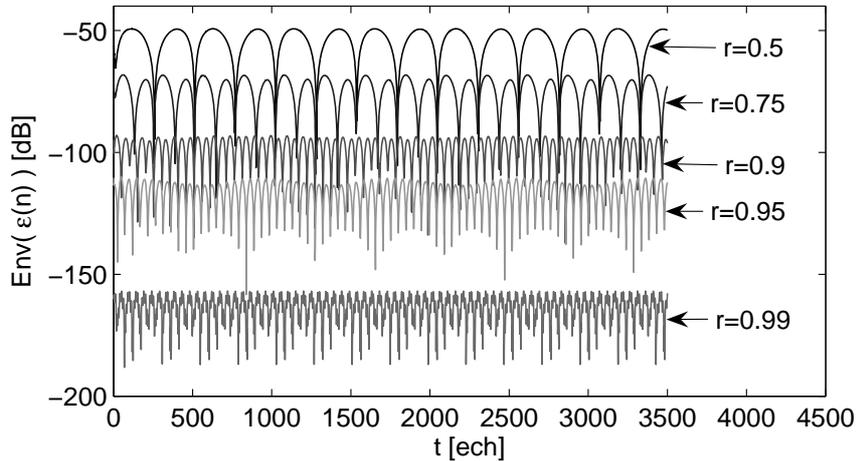


FIG. 4.16: Enveloppe de l'erreur  $\epsilon(n)$  de l'algorithme d'ajustement de l'amortissement sur une sinusoïde pour différents recouvrements  $r = 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.99$ . L'erreur diminue quand on augmente le recouvrement de l'analyse temps-fréquence.

l'augmentation du recouvrement et est égale à  $4 \cdot 10^{-8}$  ( $-150$  dB) pour le cas  $r = 0.99$ . Pour ce recouvrement, l'algorithme nécessite environ 30 s avec un ordinateur cadencé à 1.6 GHz. Un compromis est obtenu avec  $r = 0.90$ , pour lequel on obtient une erreur de l'ordre de  $-100$  dB, et le calcul est presque instantané. Ces résultats pour une sinusoïde amortie sont indépendants de la fréquence fondamentale, néanmoins ils dépendent de la fréquence d'échantillonnage, de la taille des segments et de la fenêtre utilisée.

#### 4.4.1.3 Application à $N_f$ sinusoïdes non amorties

Une situation plus complexe concerne la modification d'un signal somme de  $N_f$  sinusoïdes avec une spécification d'amortissement dépendant de la fréquence. Le signal initial  $x_{ini}$  choisi est la somme de  $N_f$  sinusoïdes non amorties, dont les fréquences sont réparties de façon à avoir une sinusoïde à chaque bande d'analyse de la TFCT. La fréquence de chaque sinusoïde est donnée par  $f_k = nN_f/Fs$  et sa phase initiale est obtenue avec un générateur de nombres aléatoires. Le signal cible analytique  $x_{ci}$  est construit en multipliant chaque sinusoïde avec une enveloppe d'amortissement différente. On définit arbitrairement un amortissement du signal cible proportionnel à la fréquence : l'amortissement de la sinusoïde de fréquence  $f_k$  Hz est  $\alpha_{ini}(f_k) = 20f_k/Fs$  s $^{-1}$ . L'utilisation de l'algorithme d'ajustement de l'amortissement sur le signal non amorti  $x_{ini}$  donne en sortie le signal  $x_{out}$ . L'amortissement de ce signal doit correspondre à celui du signal cible  $x_{ci}$ . La performance de l'algorithme est évaluée par comparaison de la sortie de l'algorithme  $x_{out}$  avec le signal cible  $x_{ci}$ , en temps et en fréquence. Le recouvrement utilisé est  $r = 0.95$ .

La Figure 4.17 montre l'évolution temporelle et les spectres correspondant à 3 secondes des trois signaux : non amorti, amorti par l'algorithme et amorti analytiquement (signal cible). Le

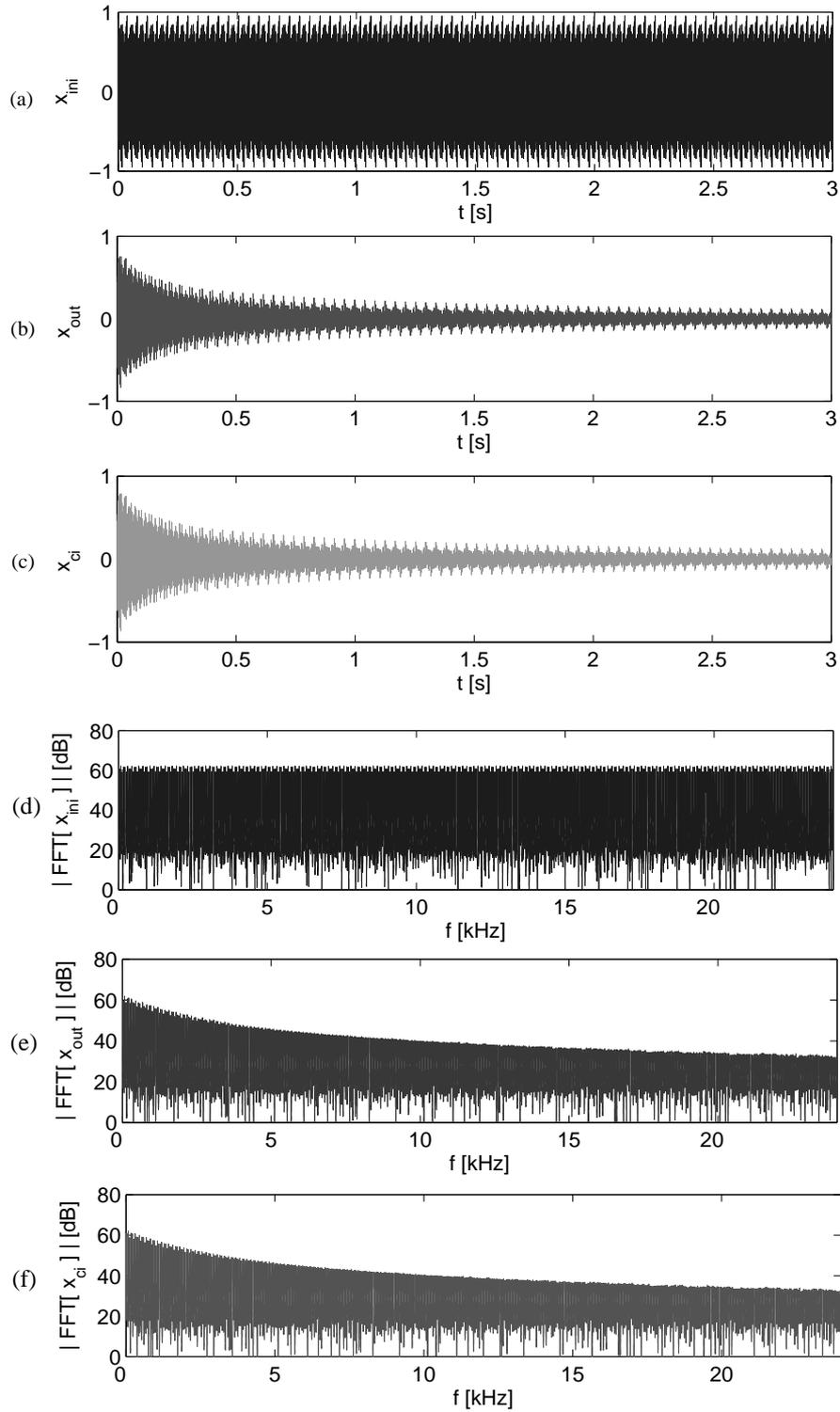


FIG. 4.17: Ajustement de l'amortissement de  $N_f$  sinusoides. Signaux temporels et spectres du signal en entrée de l'algorithme  $x_{ini}$  (a), (d), du signal modifié par l'algorithme  $x_{out}$  (b), (e), et du signal cible  $x_{ci}$  (c), (f). Le signal  $x_{out}$  obtenu par l'algorithme d'ajustement de l'amortissement est très similaire au signal cible attendu, dont la valeur exacte est obtenue à partir de la somme de  $N_f$  sinusoides amorties.

comportement global du signal obtenu par l'algorithme et celui du signal cible sont très similaires dans les domaines temporels et fréquentiels. La différence entre ces deux signaux est évaluée par calcul de l'erreur :

$$E(n) = x_{ci}(n) - x_{out}(n). \quad (4.40)$$

La Figure 4.18 montre l'erreur  $E(n)$  superposée au signal cible. Dans ce cas, on ne peut plus adimensionner l'erreur avec l'enveloppe du signal cible (comme on l'avait fait avec  $\varepsilon(n)$ ) parce que l'enveloppe peut être nulle, ce qui fait diverger l'erreur. L'erreur est plus importante que dans le cas d'une seule sinusoïde, mais elle reste petite par rapport au signal. L'évolution temporelle de l'erreur est décroissante. Dans le domaine fréquentiel, la contribution à l'erreur des sinusoïdes en basses fréquences est plus grande en raison de leur faible amortissement, et donc leur plus grande énergie totale. La représentation temps-fréquence de l'erreur, non montrée ici, confirme qu'elle est uniformément distribuée pour toutes les bandes de fréquence au début du signal, puis décroît à la même vitesse que les partiels.

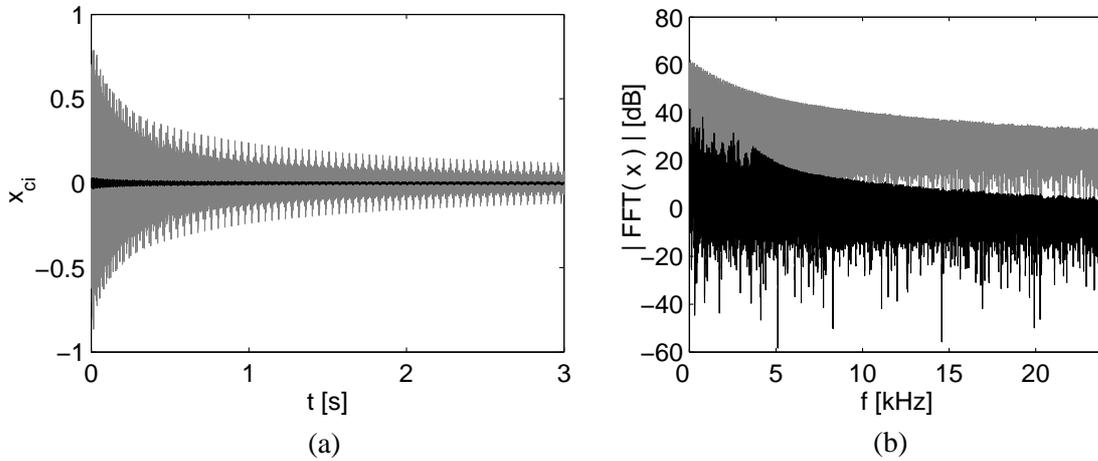


FIG. 4.18: Ajustement de l'amortissement de  $N_f$  sinusoïdes : comparaison entre le signal cible l'erreur produit par l'algorithme d'ajustement de l'amortissement. (a) : signal cible  $x_{ci}(n)$  (gris) et l'erreur (noir) produit par l'algorithme d'ajustement de l'amortissement. (a) : signal cible  $x_{ci}(n)$  (gris) et erreur  $E(n)$  (noir). (b) : module de la transformée de Fourier des signaux  $x_{ci}(n)$  (gris) et  $E(n)$  (noir). On observe que l'erreur dans les domaines temporel et fréquentiel est très petite par rapport au signal cible.

#### 4.4.1.4 Application au réverbérateur EMT140

On présente ici l'ajustement de l'amortissement pour le cas particulier du réverbérateur EMT140. L'ajustement est réalisé sur une réponse impulsionnelle de durée  $t = 6$  s,  $Fs = 48$  kHz, dans 513 bandes de fréquence et avec un recouvrement de 95% entre les transformées successives. La simulation par DF a été réalisée avec un modèle numérique tenant compte uniquement de l'amortissement thermoélastique et échantillonnée à  $Fs = 192$  kHz, afin d'avoir une simulation avec la même densité modale que le système continu. L'accélération est calculée à partir du déplacement avec l'opérateur  $D_{tt}^{(2)}$  et sous-échantillonnée 4 fois (avec filtrage passe-bas 20 kHz), pour travailler avec un signal à  $Fs = 48$  kHz. On modifie l'amortissement de la simulation  $\alpha_{ini}(f_n)$  pour obtenir l'amortissement mesuré  $\alpha_{sp}(f_n)$  sur l'EMT140 avec la plaque poreuse située le plus loin possible de la plaque réverbérante. Les amortissements obtenus par l'analyse, avec une taille de FFT  $N_f = 1024$ , des RI simulée et mesurée sont montrés sur la Figure 4.19 (a). La spécification

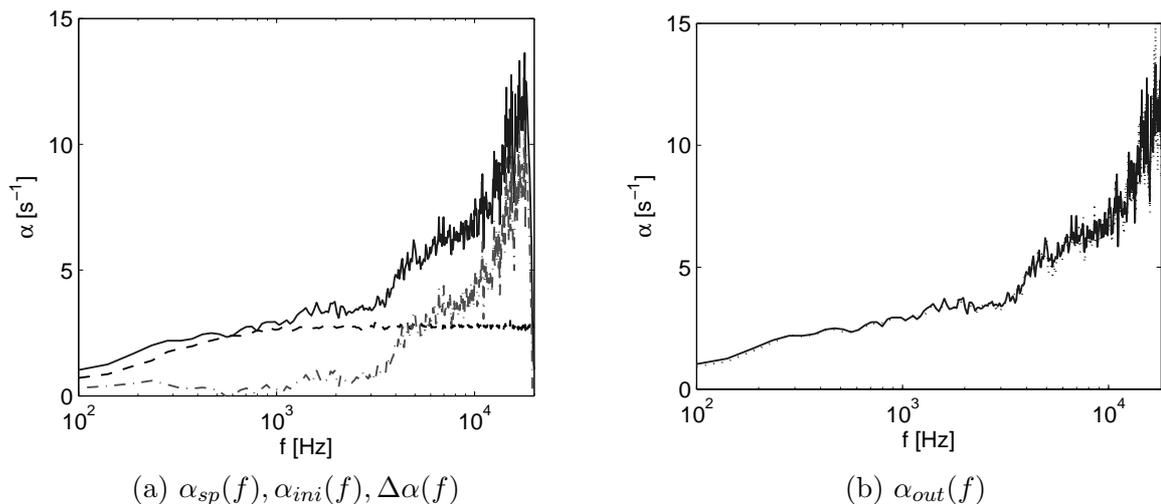


FIG. 4.19: Amortissement de l'EMT140 dans sa configuration la plus réverbérante. (a) : amortissement expérimental  $\alpha_{sp}(f)$  (—), simulé par DF  $\alpha_{ini}(f)$  (- - -) et leur différence  $\Delta\alpha(f)$  (- · -) qui est l'amortissement à appliquer par l'algorithme d'ajustement de l'amortissement. (b) : l'amortissement expérimental (—) et l'amortissement de la simulation ajustée par l'algorithme (- - -) se superposent.

d'entrée de l'algorithme est obtenue par la différence entre ces deux amortissements. La Figure 4.19 (b) montre que l'amortissement obtenu avec l'algorithme d'ajustement coïncide bien avec l'amortissement cible. Le signal temporel ainsi obtenu est montré par la figure 4.20. L'ajout d'amortissement se traduit par une décroissance plus rapide de l'énergie. Au début de la RI, la différence entre les deux signaux n'est pas significative.

Les besoins en calcul de l'ajustement de l'amortissement sont faibles. Pour  $r = 0.95$ , la durée de calcul de l'algorithme avec Matlab<sup>©</sup> est de 5.67 s sur un ordinateur de bureau cadencé à 1.6 GHz et avec 3Go de mémoire RAM. Les temps de calcul  $t$  en secondes pour différents choix du recouvrement  $r$  sont :  $(r, t[s]) = (0.98, 14.14), (0.9, 2.82), (0.75, 1.17), (0.5, 0.61)$ .

#### 4.4.2 Ajustement de l'énergie totale (égalisation)

Considérons le système réverbérateur à plaque, qui a comme entrée et sortie les signaux électriques d'alimentation de l'excitateur électrodynamique et de l'accéléromètre collé sur la plaque. La simulation numérique calcule la réponse en accélération d'une plaque soumise à une impulsion de force et ne prend pas en compte l'égalisation produite par l'entrée et la sortie. Néanmoins, la prise en compte de ces effets est nécessaire pour obtenir des RI comparables aux mesures faites sur le réverbérateur EMT140. En particulier, la différence perçue à l'écoute selon que l'on prend en compte ou non l'égalisation est très importante.

On appelle  $h_m(n)$  la RI obtenue par les mesures et  $h_s(n)$  celle obtenue avec les simulations par DF. Après l'ajustement de l'amortissement de  $h_s(n)$ , la décroissance énergétique de la RI mesurée et de la RI simulée est la même. La première étape du processus consiste à définir la spécification du filtre d'égalisation. Elle est obtenue comme le rapport, dans le domaine des fréquences, entre l'énergie totale de la RI mesurée sur celle simulée  $E[H_m(\omega)]$  et  $E[H_s(\omega)]$ . Le périodogramme de Welch  $\bar{I}_h(\omega)$  fournit l'estimation de l'énergie de chaque signal. La longueur des transformées  $N_f$  qu'on moyenne pour obtenir  $\bar{I}_h(\omega)$  dépend de la résolution en fréquence souhaitée, donnée par  $\Delta f = Fs/N_f$ . Pour un échantillonnage à  $Fs = 48000$  Hz, le choix  $N_f = 512$  donne une

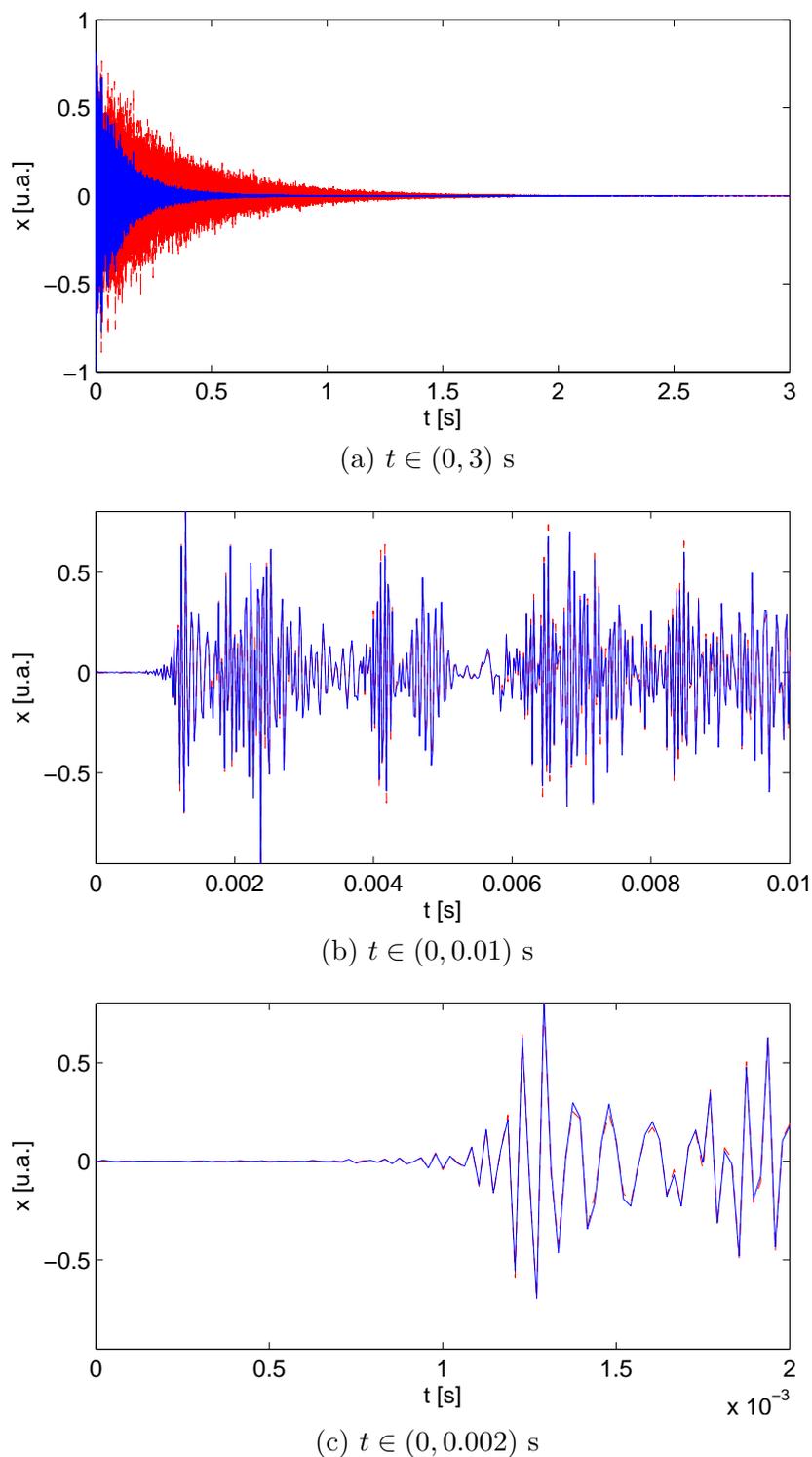
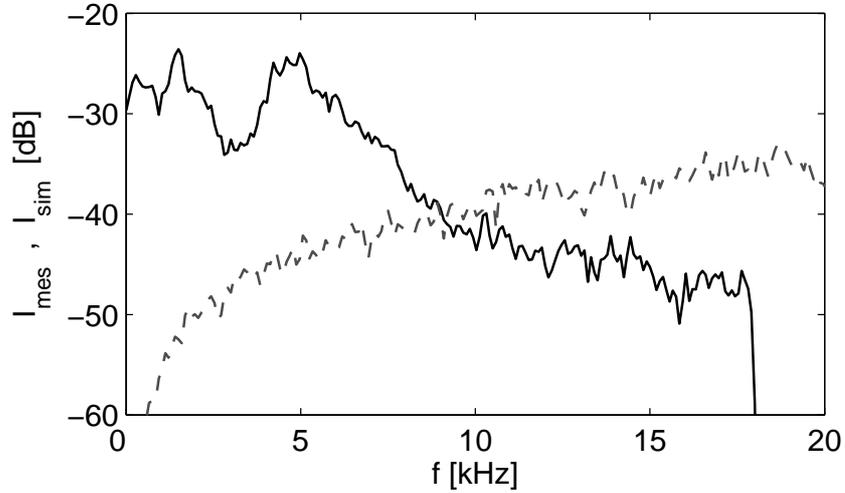


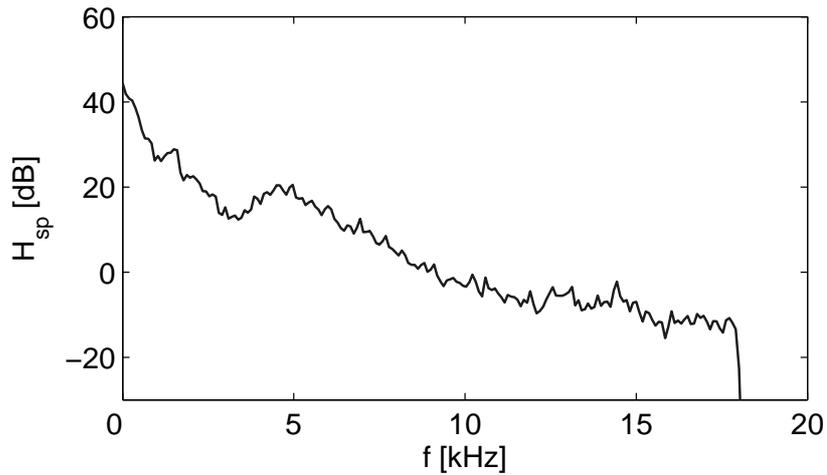
FIG. 4.20: Comparaison de l'évolution temporelle de la simulation du EMT140 avant (—) et après (- - -) l'ajustement de l'amortissement. Détail sur les premiers 3 s (a), 10 ms (b) et 2 ms (c). Le comportement global (a) montre l'augmentation de l'amortissement produite par le traitement. Dans les détails (b) et (c), on peut observer la modification de l'amplitude faite sur le signal.

résolution fréquentielle de  $\Delta f = 93.75$  Hz, considérée suffisante pour ce type d'application. Cette

valeur de  $\Delta f$  est du même ordre de grandeur que l'intervalle plus petit de l'échelle de Bark [8]. La spécification du filtre à construire est  $H_{EF}(\omega) = (\bar{I}_{h_m}(\omega)/\bar{I}_{h_s}(\omega))^{1/2}$ , où  $\bar{I}_{h_m}$  et  $\bar{I}_{h_s}$  sont respectivement les périodogrammes de Welch des réponses mesurée  $h_m$  et simulée  $h_s$ . La Figure



(a)



(b)

FIG. 4.21: (a) : périodogrammes de Welch de la RI mesurée (—) et de la RI simulée (- - -) du réverbérateur EMT140 qui interviennent dans le calcul de la spécification du filtre d'égalisation, qui est donnée par (b).

4.21 montre l'estimation d'énergie pour la RI mesurée et la RI simulée, ainsi que la spécification d'amplitude du filtre d'égalisation obtenue. L'égalisation consiste en une augmentation d'énergie en basses fréquences, dont l'origine physique est l'excitateur électrodynamique.

Afin de ne pas introduire de distorsions dans la phase de la RI, on souhaite en réaliser l'égalisation avec des filtres à phase linéaire. Ce type de filtres est souvent utilisé quand on veut modifier l'amplitude du spectre d'un signal tout en préservant le plus possible la forme d'onde dans le domaine temporel [80]. La réponse impulsionnelle d'un tel filtre est finie (filtre RIF) et symétrique. On rappelle que la réponse impulsionnelle d'un filtre causal récursif (à réponse

impulsionnelle infinie, RII) ne peut pas être symétrique.

La réponse en fréquence d'un filtre à phase linéaire  $H(e^{j\omega})$  peut s'écrire comme :

$$H(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega}. \quad (4.41)$$

Le retard de phase  $\tau_p(\omega)$  et le retard de groupe  $\tau_g(\omega)$  de ce filtre est :

$$\begin{aligned} \tau_p(\omega) &= \frac{\phi[H(e^{j\omega})]}{\omega} = \alpha, \\ \tau_g(\omega) &= \frac{d}{d\omega}\phi[H(e^{j\omega})] = \frac{d}{d\omega}(\alpha\omega) = \alpha, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$\tau_p$  et  $\tau_g$  sont indépendants de la fréquence, ce qui permet d'assurer que le filtrage d'un signal avec ce filtre n'introduit pas de distorsion sur la phase du signal initial. Pour la synthèse du filtre on construit le spectre symétrique réel  $\tilde{H}_s(\omega)$  à partir d'une spécification  $H_{EF}(\omega)$  définie dans l'intervalle  $\omega \in [-Fs/2; Fs/2)$ . La réponse impulsionnelle  $h(n)$  du filtre est obtenue alors par transformée de Fourier Inverse de  $\tilde{H}_s(\omega)$ . La structure de  $h(n)$  obtenue doit être de la forme :

$$\begin{aligned} h(0) &= h_0, \\ h(n) &= h(-n), \quad n \in [1, N_f/2 - 1], \end{aligned} \quad (4.43)$$

En raison de la symétrie de la transformée de Fourier, les signaux réels pairs ont des transformées de Fourier paires et réelles.  $h(n)$  est donc symétrique et paire, et correspond à un filtre à phase nulle. Il s'agit d'un filtre non causal, car sa réponse impulsionnelle  $h(n)$  est non nulle pour  $n < 0$ . En retardant  $h(n)$  de  $(N_f - 1)/2$  échantillons, le filtre devient causal. Puisqu'un retard de  $N$  échantillons dans le domaine temporel correspond à une multiplication par  $e^{j\omega N}$  de la réponse en fréquence, la phase de la réponse en fréquence du filtre n'est plus nulle mais linéaire en  $\omega$ , ce qui montre pourquoi ce type de filtres est dénommé à phase linéaire. Sa réponse impulsionnelle est de la forme :

$$\begin{aligned} h(0), \\ h(n) &= h(N_f - 1 - n), \quad n \in [1, N_f/2 - 1]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

L'égalisation de la RI avec ce filtre introduit un retard pur de  $N_f/2$  échantillons. Il suffit alors de corriger ce retard par décalage temporel de la RI égalisée.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre donne les outils permettant la simulation physique d'un réverbérateur à plaque à partir de la modélisation décrite au chapitre 2. La résolution de l'équation des ondes de flexion des plaques par la méthode des différences finies (DF) s'inspire des travaux de thèse de Lambourg [48]. On a présenté une synthèse de l'application de cette méthode aux plaques isotropes, en particulier les opérateurs aux différences intervenant dans l'équation discrétisée, la condition de stabilité et la dispersion numérique des schémas. La prise en compte des amortissements dans les algorithmes des DF à partir du formalisme de la viscoélasticité a aussi été détaillée.

L'application de cette méthode à la simulation d'un réverbérateur à plaque présente quelques particularités. On a montré que la densité modale du modèle numérique n'est pas la même que celle du modèle continu sauf en très basses fréquences. Le comportement du modèle numérique

par rapport au modèle continu a été étudié avec le cas simple de la plaque non amortie appuyée simplement sur ses bords et soumise à une impulsion. Dans ce cas, l'admittance mécanique au point d'excitation a un comportement similaire à celui de la densité modale, ce qui est en accord avec la relation entre admittance et densité modale présentée au chapitre 3. Pour garantir une densité modale et un spectre de la simulation très proches de ceux du modèle continu jusqu'à  $f = 20$  kHz, il faut faire des simulations échantillonnées à  $F_s = 192$  kHz.

D'autre part, l'obtention du déplacement à n'importe quel point de la plaque par interpolation des déplacements aux 4 points de la grille les plus proches est équivalent à un filtrage, qui se traduit par une forte diminution de l'énergie en hautes fréquences. Cette interpolation est donc à éviter.

En raison de sa grande densité modale, la simulation du modèle physique d'un réverbérateur à plaque est très gourmande en temps de calcul, car le nombre de degrés de liberté du système est très élevé (de l'ordre de 50000 dans le domaine audible). Si, de plus, on y ajoute des modèles d'amortissement basés sur des séries de puissances de la dérivée temporelle, les coûts de calculs deviennent très vite prohibitifs. Pour cette raison la synthèse sonore qu'on propose est limitée à la synthèse de la RI, qui peut être ensuite utilisée pour appliquer l'effet à n'importe quel signal par convolution. Pour la convolution on peut profiter de l'optimisation des calculs de la transformée de Fourier rapide (FFT).

L'erreur introduite par les DF sur la valeur de l'amortissement en fonction de la fréquence, ainsi que le coût de calcul très élevé des modèles d'amortissement issus de [48], suggèrent la recherche d'une alternative pour tenir compte de l'amortissement des vibrations du réverbérateur à plaque. Une méthodologie de post-traitement des RI obtenues par DF permet de modifier l'amortissement par bandes de fréquences et ses capacités ont été analysées à partir de cas simples. Même si les modifications introduites par cette méthode restent approchées, elles suffisent pour modifier la décroissance par bandes de fréquences de la RI simulée. Le coût de calcul de cette méthode est négligeable par rapport à celle de la synthèse par DF, et en particulier il est beaucoup plus faible que le coût qui résulte de l'ajout des modèles d'amortissement dans l'algorithme des DF. De plus, l'amortissement de chaque bande de fréquences est fixé avec précision, sans le décalage des amortissements observé lors de l'introduction des modèles d'amortissement dans les DF. Ce post-traitement permet alors d'imposer les spécifications d'amortissement données par les modèles physiques d'amortissement décrits au chapitre 2, mais aussi d'ajuster l'amortissement des synthèses à l'amortissement observé expérimentalement.

Pour tenir compte de l'égalisation de l'énergie due à l'actionneur et au capteur du réverbérateur EMT140, la méthode d'égalisation de l'énergie de la RI a été présentée. Cette égalisation est faite à l'aide d'un filtre à phase linéaire afin de préserver au mieux la structure temporelle du signal original tout en modifiant l'amplitude de son spectre.

Pour le réverbérateur EMT140, les Figures 4.22 et 4.23 montrent le relief de décroissance de la RI mesurée et simulée respectivement. La simulation a été réalisée avec la méthodologie détaillée dans ce chapitre. On peut observer que ces deux reliefs de décroissance sont identiques. De plus, à l'écoute aucune différence est perçue entre la mesure et la simulation. On peut conclure que la méthodologie de synthèse a réussi à simuler un dispositif mesuré. L'outil de synthèse sonore peut donc être exploitée pour la simulation de réverbérateurs avec des jeux de paramètres différents. Ceci est l'objet du chapitre 6.

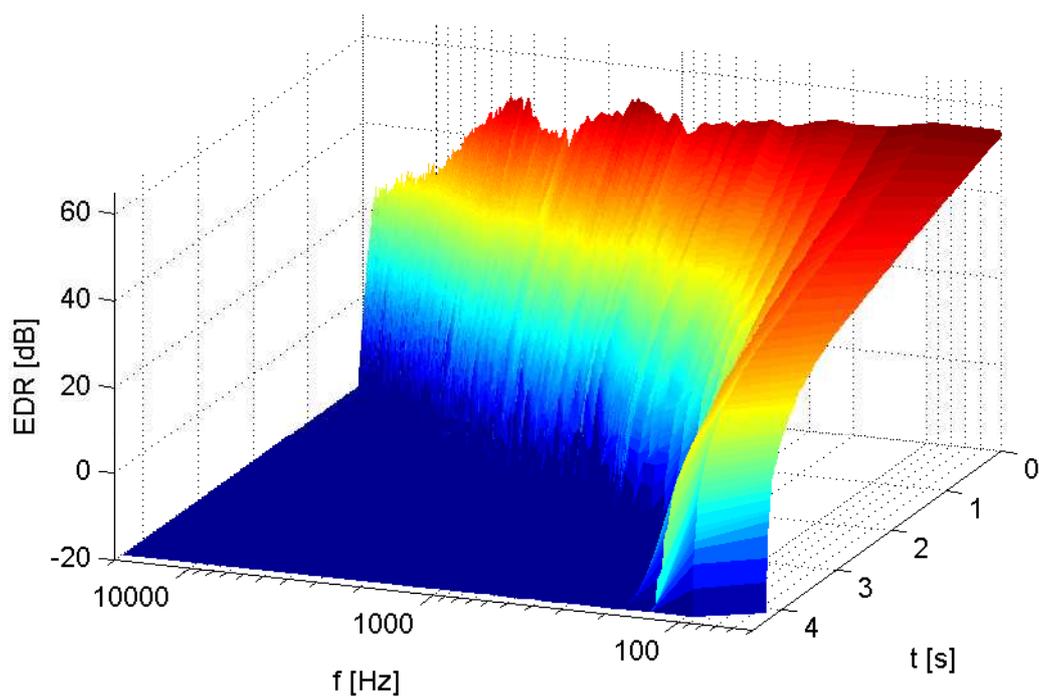


FIG. 4.22: Relief de décroissance de la réponses impulsionnelle mesurée du réverbérateur EMT140 avec la plaque poreuse à une distance  $d = 65.8$  mm de la plaque vibrante.

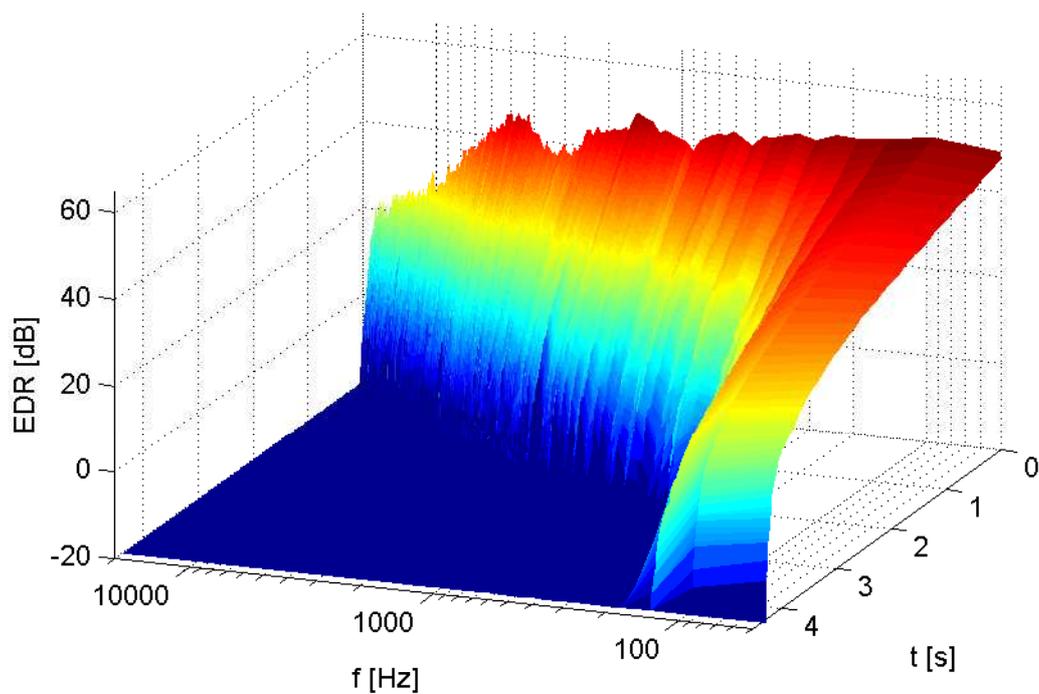


FIG. 4.23: Relief de décroissance de la réponses impulsionnelle simulée pour la même configuration de la Figure 4.22.

# Comparaison avec l'acoustique des salles

---

## 5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de comparer les propriétés de la réverbération à plaque et celles de la réverbération acoustique naturelle. La réverbération à plaque est basée sur la propagation d'ondes élastiques de déplacement dans un milieu à deux dimensions. La réverbération acoustique naturelle est un phénomène produit par la propagation des ondes de pression acoustique dans un milieu fluide à trois dimensions. Les différences entre ces deux phénomènes sont dues à la nature des ondes et à leurs milieux de propagation respectifs. L'identification de leurs similitudes aide à comprendre pourquoi la réverbération à plaque a été largement utilisée pour simuler l'effet de salle, tandis que les différences aident à expliquer en quoi un réverbérateur à plaque possède une identité sonore caractéristique.

Premièrement, on présente l'analyse des phénomènes dans le domaine temporel. En particulier, on décrit la propagation des ondes pour les deux types de réverbération et on établit leur densité d'échos et le temps de mélange qui en découle. Cette étude théorique est confortée par l'analyse des réponses impulsionnelles (RI) mesurées pour une salle et pour le réverbérateur EMT140.

La comparaison dans le domaine fréquentiel est faite à partir de la densité modale. On sait qu'une densité modale élevée est nécessaire pour obtenir une réverbération artificielle de qualité. Ce critère permet de déterminer quelles propriétés sont souhaitables pour qu'une plaque puisse être utilisée comme réverbérateur à plaque.

Dans la mesure du possible, on compare les résultats numériques du réverbérateur EMT140 avec ceux de salles de différente taille afin d'appréhender au mieux les ordres de grandeur de la densité modale, de la densité de réflexions et du temps de mélange.

## 5.2 Domaine temporel

### 5.2.1 Propagation des ondes

La propagation des ondes de pression acoustique est régie par l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_a^2 \Delta p = 0, \quad (5.1)$$

où  $c_a$  est la vitesse de propagation du son dans l'air. De la relation de dispersion de cette équation,  $\omega^2 = c_a^2 k^2$ , on en déduit la vitesse de phase et la vitesse de groupe des ondes de pression acoustique :

$$\begin{aligned} c_{ph_a} &= \frac{\omega}{k} = c_a, \\ c_{gr_a} &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k_0} = c_a. \end{aligned} \quad (5.2)$$

La vitesse de groupe et la vitesse de phase sont constantes et de valeur  $c_a$ . La propagation est non dispersive et elle ne modifie pas la forme du signal.

La propagation des ondes élastiques dans les plaques est décrite par le modèle de Kirchhoff Love. On rappelle les expressions de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe données par 3.11 :

$$\begin{aligned} c_{ph}(\omega) &= \sqrt{\kappa \omega}, \\ c_{gr}(\omega) &= 2\sqrt{\kappa \omega}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

La propagation est dispersive puisque  $c_{ph}$  et  $c_{gr}$  dépendent de  $\omega$ . Ainsi, la forme des signaux n'est pas préservée au cours de leur propagation.

#### 5.2.1.1 Temps d'arrivée

Une conséquence directe de l'équation (5.3) est que, pour les plaques, l'énergie vibratoire en hautes fréquences se propage plus rapidement que celle en basses fréquences. Pour la réponse impulsionnelle (RI) du réverbérateur, cela se traduit par l'arrivée des hautes fréquences avant celle des basses fréquences. Ce phénomène peut se traduire par une augmentation du niveau perçu en hautes fréquences. On observe expérimentalement cette dépendance fréquentielle de l'arrivée de l'énergie grâce à l'analyse temps-fréquence de la RI mesurée montrée à la Figure 5.1.

La vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'énergie vibratoire de la plaque. Pour le réverbérateur EMT140, où  $\kappa = 0.7846$ , la vitesse de groupe dans le domaine audible  $f \in [20; 20000]$  Hz est dans l'intervalle  $c_{gr} \in [20; 628]$  m/s. A partir de cet intervalle de vitesse et de la distance entre l'excitateur et les points d'observation de gauche 0.6 m et de droite 0.88 m, on peut estimer le temps de propagation jusqu'aux points d'observation :  $t_{O1} \in [1; 30.3]$  ms à gauche et  $t_{O2} \in [1.4; 44.3]$  ms à droite. Ces retards à l'arrivée ne sont pas négligeables par rapport aux capacités du système auditif humain [8]. En particulier, les retards temporels sont dans des intervalles pouvant faire intervenir l'effet de précedence du système auditif : lorsqu'un son arrive deux fois aux oreilles, l'information sur la localisation n'est retenue que pour la première manifestation de ce son. Ceci explique l'importance du retard initial dans l'appréciation de la localisation de la source dans un lieu réverbérant.

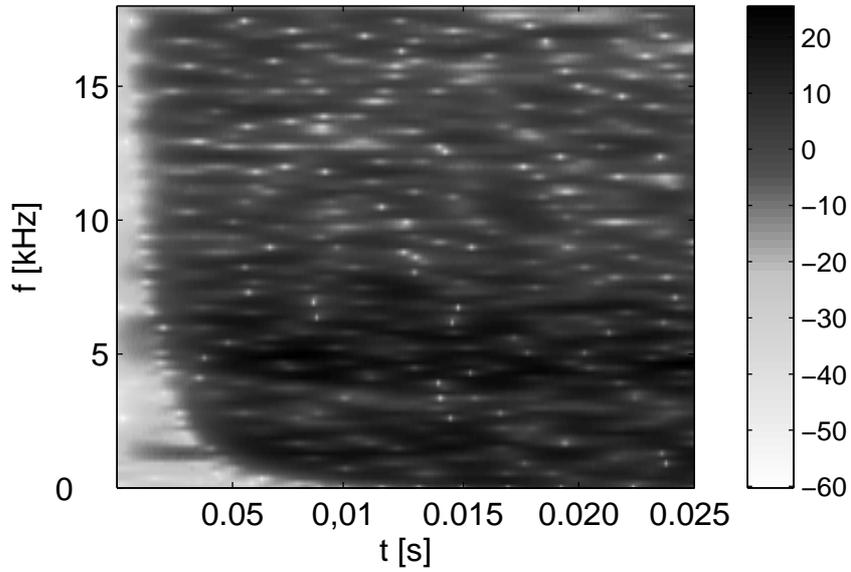


FIG. 5.1: Spectrogramme du transitoire initial de la RI mesurée du réverbérateur EMT140. L'énergie arrive plus tôt en hautes fréquences par rapport aux basses fréquences.

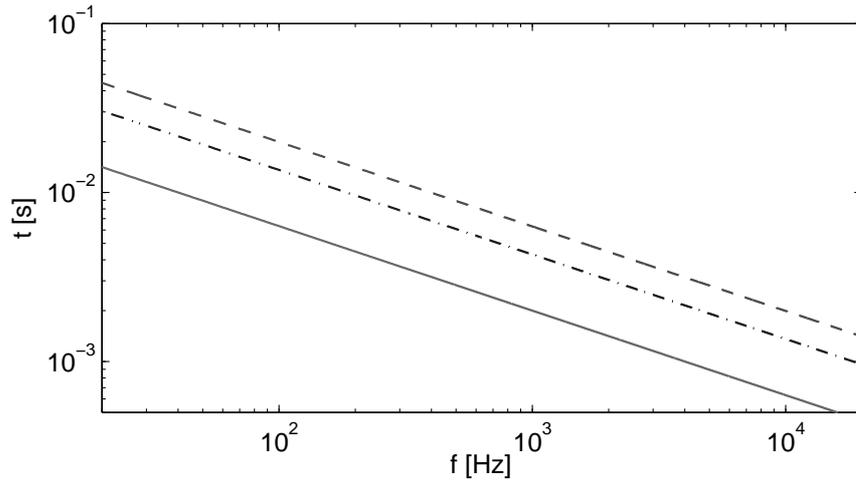


FIG. 5.2: Temps d'arrivée de l'énergie introduite par l'excitateur à l'accéléromètre de droite (- - -) et à celui de gauche (- . -) du réverbérateur EMT140 dans le domaine audible  $f \in [20; , 20000]$  Hz. Retard de l'arrivée à l'accéléromètre de gauche par rapport à celui de droite (—).

### 5.2.1.2 Distorsion de la propagation

La distorsion de la propagation des ondes de flexion est montrée ici à partir de l'étude de la propagation des ondes de vibration transversales d'une corde raide. L'équation aux dérivées partielles qui régit ces vibrations est :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \Delta y + \kappa^2 \Delta^2 y = 0, \quad \text{où :} \quad c^2 = \frac{T}{\rho S}, \quad \kappa^2 = \frac{EI}{\rho S}, \quad (5.4)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $S$  la section,  $I$  le moment d'inertie de flexion par rapport à la fibre neutre et  $E$  le module de Young de la corde.  $T$  est la tension appliquée à la corde en N/m. Si on

supprime le terme en  $\kappa^2$ , on obtient l'équation de la corde idéale (sans raideur), dont l'écriture est la même que celle de l'équation des ondes en une dimension. Si on supprime le terme en  $c^2$  en conservant les deux autres termes, on obtient l'équation d'Euler Bernoulli qui décrit les vibrations de flexion des poutres minces et qui est l'équivalent à une dimension de l'équation de Kirchhoff-Love.

Pour passer progressivement d'une propagation non dispersive à une propagation de plus en plus dispersive, on garde une valeur fixe de  $c^2$  et on regarde la propagation pour des valeurs croissantes de  $\kappa'$ . On contrôle la raideur à partir du coefficient d'inharmonicité  $B = (EI/TL^2)^{1/2}$ , où  $L$  est la longueur de la corde. La Figure 5.3 montre le signal temporel obtenu par synthèse modale pour une corde appuyée sur ses extrémités et avec un déplacement initial impulsionnel, pour des valeurs croissantes de  $B$ . On observe que plus la raideur augmente, plus l'impulsion initiale est distordue au cours de sa propagation. Pour  $B = 10^{-10}$ , on a une propagation non dispersive comme celle de l'équation des ondes 1D et le motif initial est conservé au cours du temps. Pour  $B = 10^{-4}$ , l'effet de la dispersion est faible et on a une légère distorsion du signal initial, mais on identifie bien les réflexions de l'impulsion. Pour  $B = 10^{-3}$ , la forme impulsionnelle est perdue progressivement au cours de sa propagation. Pour  $B = 10^{-2}$ , la distorsion est tellement importante qu'on peut identifier uniquement la première réflexion, et pour  $B = 10^{-1}$ , on n'identifie même pas la première réflexion. La propagation des ondes dans les plaques est similaire à celle décrite par le dernier cas. On constate qu'il n'est pas possible d'identifier les réflexions en raison de l'étalement de l'impulsion initiale qui est dû à la propagation dispersive.

### 5.2.1.3 Identification des réflexions

Le comportement dispersif des ondes de flexion d'une plaque mince est similaire à celui d'une poutre mais en deux dimensions. Les effets de la dispersion peuvent s'observer sur le transitoire initial de la RI mesurée du réverbérateur EMT140, montrée par la Figure 5.4. Pour comparaison, on montre la RI acoustique d'une salle de concerts. La RI de la salle a été enregistrée par G. Defrance dans la Salle Pleyel (Paris), une salle de concert de 2000 places. Pour plus de détails sur les mesures de la Salle Pleyel, le lecteur peut se référer à [22]. On observe que, pour la salle, le son direct et les premières réflexions sont identifiables facilement, tandis que pour la plaque cette identification n'est pas possible. Ce phénomène est dû à la dispersion dans la propagation.

## 5.2.2 Densité d'échos et temps de mélange

En acoustique des salles, la RI d'un espace acoustique peut être séparée en trois parties qui se succèdent : le son direct, les premières réflexions et le régime diffus ou réverbération tardive. Ce régime est atteint quand au moins 10 échos se superposent à tout "instant". Pour appliquer ce critère il faut définir la durée d'un "instant", qui est supposée de 24 ms par Polack [62].

Quand ce régime est atteint, la RI d'une salle peut être considérée aléatoire, et un modèle stochastique non stationnaire suffit à la décrire. On appelle temps de mélange d'une salle  $t_m$  le temps nécessaire à la création du régime diffus. On s'intéresse ici au temps de mélange et à ses ordres de grandeur pour la réverbération acoustique et la réverbération à plaque.

Pour le cas simple de la salle parallélépipédique aux parois parfaitement rigides, la méthode des sources images [46] donne une expression analytique de la densité d'échos. Le nombre d'échos par seconde au voisinage de l'instant  $t$  de la réponse impulsionnelle d'une salle parallélépipédique de volume  $V$  est [46] :

$$D_{e_r} = \frac{dN_r}{dt} = 4\pi \frac{c_a^3 t^2}{V}. \quad (5.5)$$

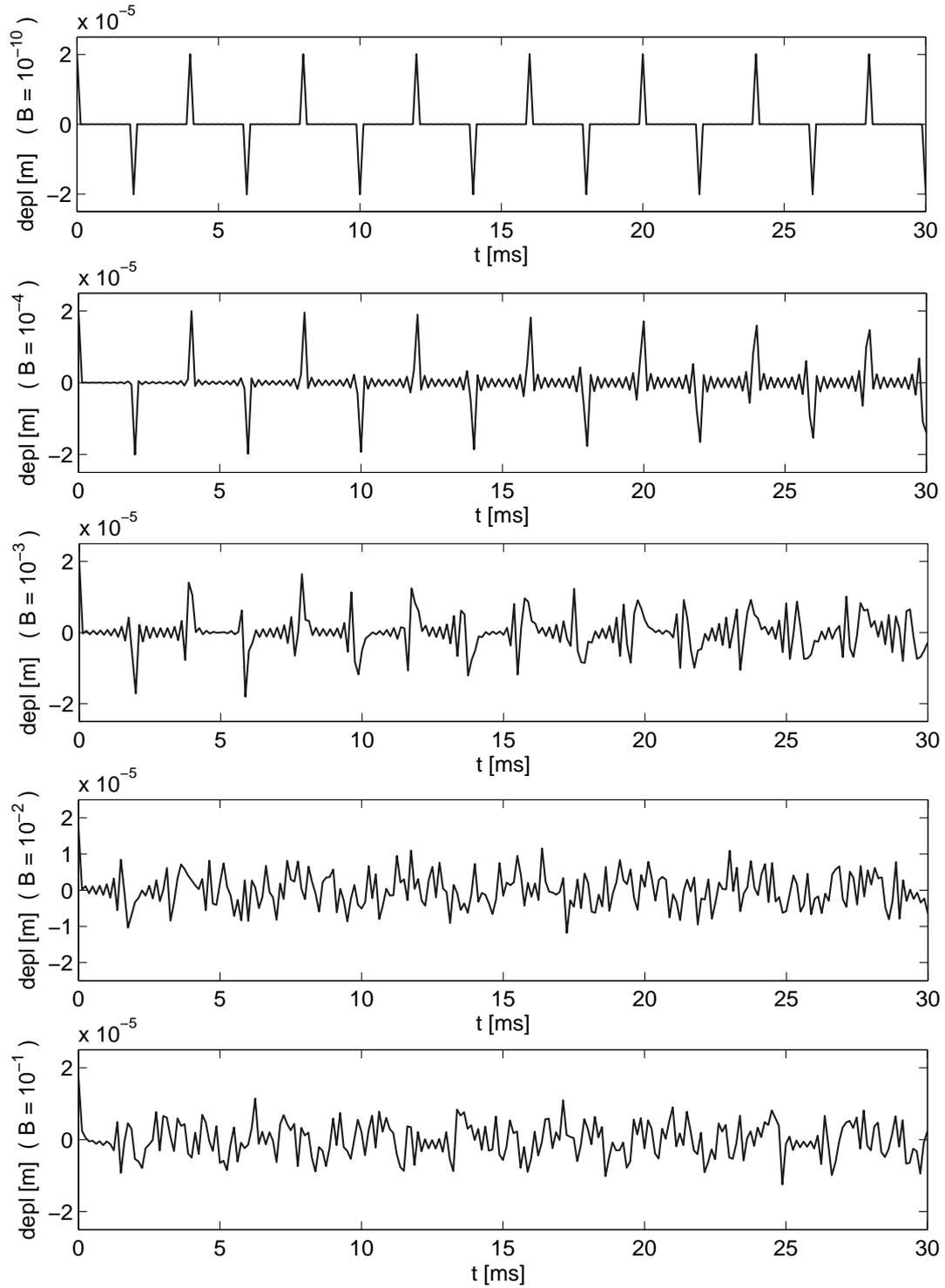


FIG. 5.3: Illustration des effets de la dispersion sur une impulsion initiale. On représente l'évolution temporelle du déplacement en un point d'observation pour une corde raide non amortie appuyée à ses extrémités et décrite par (5.4). Les calculs ont été réalisés par décomposition modale. On augmente progressivement la raideur en augmentant la valeur de  $\kappa^2$ . Deux cas limites : la première figure correspond à une corde presque idéale dont les effets de la raideur sont négligeables et la dernière à une corde tellement raide que son comportement s'approche à celui d'une poutre d'Euler Bernoulli soumise à une tension.

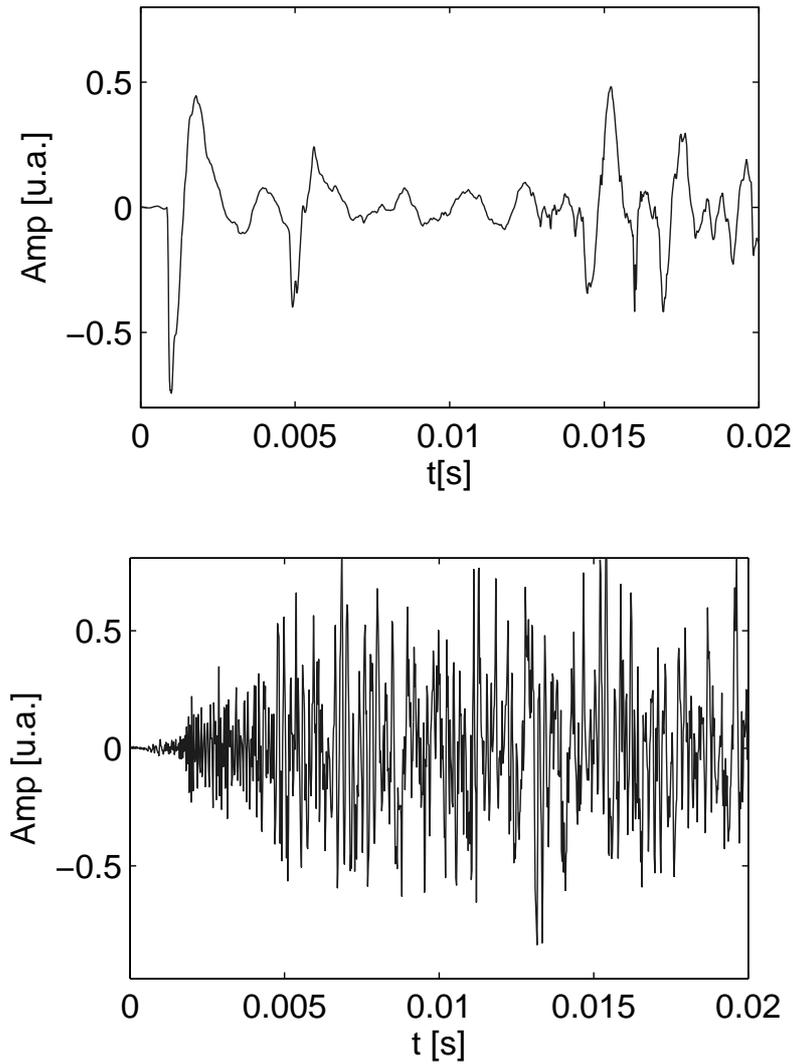


FIG. 5.4: Transitoire initial de la RI d'une salle de concerts (a) et du réverbérateur EMT140 (b) obtenus par la mesure. Unités arbitraires (u.a.).

De  $D_{er}$  on peut déduire le temps de mélange à partir du critère 10 échos /0.0024 secondes. On obtient alors :

$$D_{er} = \frac{10}{0.0024} \implies t_{m_r} = 0.9025 \cdot 10^{-3} \sqrt{V} \quad \text{pour : } c_a = 344 \text{ m/s} \quad (5.6)$$

Le temps de mélange d'une salle parallélépipédique dépend uniquement du volume de la salle. L'estimation du temps de mélange à partir de (5.6) pour la salle Pleyel, dont le volume est  $V = 19000 \text{ m}^3$ , donne  $t_{m_r} = 124 \text{ ms}$ .

Les temps de mélange obtenus à partir de (5.6) pour des salles de dimensions usuelles sont rassemblés au Tableau 5.1.

Pour la comparaison, on calcule la densité de réflexions d'une plaque rectangulaire avec la méthode des sources images. Comme la vitesse de propagation des ondes de flexion dépend de la fréquence, l'interprétation du terme réflexion est délicate ici, car il ne s'agit plus de la réflexion

Type de salle	$L_i$ [m x m x m]	Volume [ $m^3$ ]	$t_{m_r}$ [ms]
$S_1$ : petite chambre	2 x 2 x 2	8	2.6
$S_2$ : salon d'appartement	5 x 5 x 3	75	7.8
$S_3$ : salle de cours	10 x 7.5 x 3	225	13.5
$S_4$ : amphithéâtre de cours	15 x 10 x 5	750	24.7
$S_5$ : salle de concert	44 x 27 x 19	22572	135.6

TAB. 5.1: Temps de mélange de salles de tailles variées obtenus avec (5.6).

d'une impulsion. Néanmoins ce calcul permet d'estimer les réflexions de paquets dont l'énergie est concentrée autour d'une fréquence donnée. On détaille ce calcul car il n'a pas été trouvé dans la littérature, mais il reste très similaire à celui réalisé dans [46] pour obtenir (5.5). Les différences sont liées au fait que, pour la plaque, on est en deux dimensions au lieu de trois pour les salles et que la vitesse de propagation est  $c_{gr}(\omega)$  au lieu de  $c_a$ .

On suppose qu'au temps  $t = 0$  toutes les sources images génèrent un signal large bande de même amplitude. Les sources qui arrivent au point d'observation entre les temps  $t$  et  $t + dt$  correspondent aux sources dont la distance au centre est entre  $c_{gr}(\omega)t$  et  $c_{gr}(\omega)(t + dt)$ . Ces sources sont dans l'anneau dont la surface est :

$$S_a = \pi [(c_{gr}(\omega)(t + dt))^2 - (c_{gr}(\omega)t)^2] \simeq 2\pi c_{gr}(\omega)^2 t dt. \quad (5.7)$$

Le nombre de sources images dans cet anneau peut être approché par le rapport de la surface de l'anneau  $S_a$  sur la surface d'une plaque image élémentaire  $S_p = L_x L_y$ . La densité temporelle de réflexions qui arrivent à l'instant  $t$  est alors :

$$D_{e_p} = \frac{dN_r}{dt} = 2\pi \frac{c_{gr}^2 t}{L_x L_y} = \frac{8\pi}{t_0} \omega t. \quad (5.8)$$

où  $t_0 = L_x L_y / \kappa$  est le temps caractéristique obtenu par l'adimensionnement de l'équation de Kirchhoff-Love au chapitre 2. La densité moyenne de réflexions croît de façon proportionnelle à la fréquence et au temps. Le temps de mélange pour une plaque obtenu à partir de  $D_{e_p}$  est :

$$t_{m_p} = 2.6386 \frac{L_x L_y}{\kappa f} = 2.6386 t_0 \frac{1}{f}. \quad (5.9)$$

Le temps de mélange dépend alors du temps caractéristique de la plaque  $t_0$  et décroît avec la fréquence, ce qui donne une interprétation de  $t_0$  liée à la réverbération dans le domaine temporel. La Figure 5.5 montre le temps de mélange pour le réverbérateur EMT140 en fonction de la fréquence. En raison du caractère dispersif des ondes de flexion, le temps de mélange pour une plaque dépend du contenu fréquentiel du signal d'excitation de la plaque. A la limite du domaine audible (20 kHz), le temps de mélange pour le réverbérateur EMT140 est  $t_{m_p}|_{20kHz} = 0.15$  ms. Cette valeur de  $t_{m_p}$  correspond, en acoustique de salles, au temps de mélange d'une salle parallélépipédique de volume  $V_{eq} = 0.11$  m<sup>3</sup> (équivalent à un cube dont la longueur des arêtes est  $L_{eq} = 0.48$  m). En pratique, la taille des espaces acoustiques d'écoute est toujours beaucoup plus grande, et on peut conclure que le temps de mélange pour les plaques (au moins pour le réverbérateur EMT140) est plus faible que pour les espaces acoustiques.

### 5.2.3 Distribution d'amplitudes de la réponse impulsionnelle

Le régime diffus de la RI d'un espace acoustique se caractérise par une distribution gaussienne d'amplitudes. D'après les considérations théoriques sur le temps de mélange, le réverbérateur à

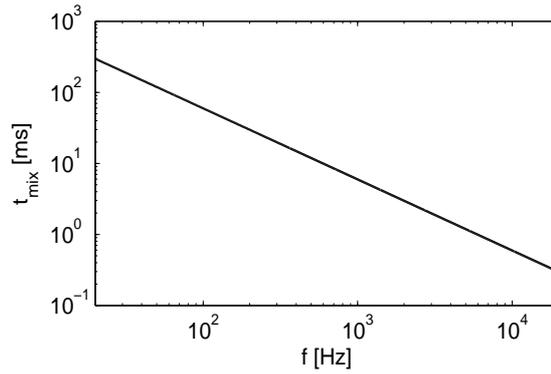


FIG. 5.5: Dépendance fréquentielle du temps de mélange du réverbérateur à plaque EMT140.

plaque doit atteindre ce régime presque instantanément, tandis que pour la salle Pleyel ce régime doit arriver après environ 124 ms. La Figure 5.6 montre la distribution d'amplitudes à  $t = 0$  s et

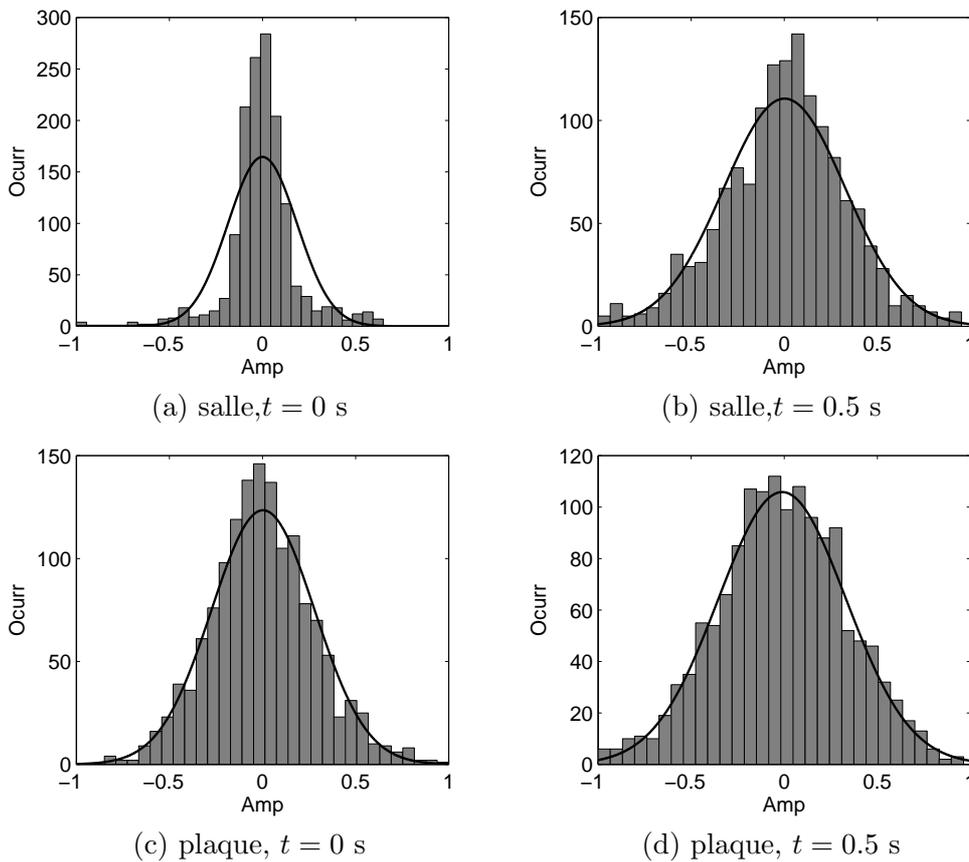


FIG. 5.6: Histogrammes de portions de 30 ms des RI dont le temps initial est  $t = 0$  s et  $t = 0.5$  s : (a) et (b) pour l'espace acoustique (Salle Pleyel) ; (c) et (d) pour le réverbérateur à plaque EMT140.

$t = 0.5$  s des RI expérimentales de la Salle Pleyel et du réverbérateur à plaque. Ces histogrammes montrent la distribution d'amplitudes sur des portions de RI de durée 30 ms, où les amplitudes de chaque portion sont normalisées à 1. Pour la salle, la distribution d'amplitudes dépend de l'instant d'observation. Au début de la RI ( $t = 0$  s), la plupart des échantillons sont proches de

zéro car ceux correspondant au son direct et aux premières réflexions sont des impulsions courtes. A  $t = 0.5$  s, la distribution d'amplitudes s'ajuste bien à une gaussienne. C'est le comportement caractéristique du régime diffus de la réverbération tardive, quand le recouvrement entre un grand nombre de réflexions à un instant donné peut être approché par des modèles stochastiques. Pour la réverbération à plaque, on observe une distribution gaussienne d'amplitudes dès le début de la RI : la forme de la distribution d'amplitudes ne change pas au cours du temps et elle est proche de celle de la réverbération tardive. En raison de la dispersion du milieu, l'impulsion initiale s'étale rapidement et le recouvrement de réflexions est observé presque instantanément.

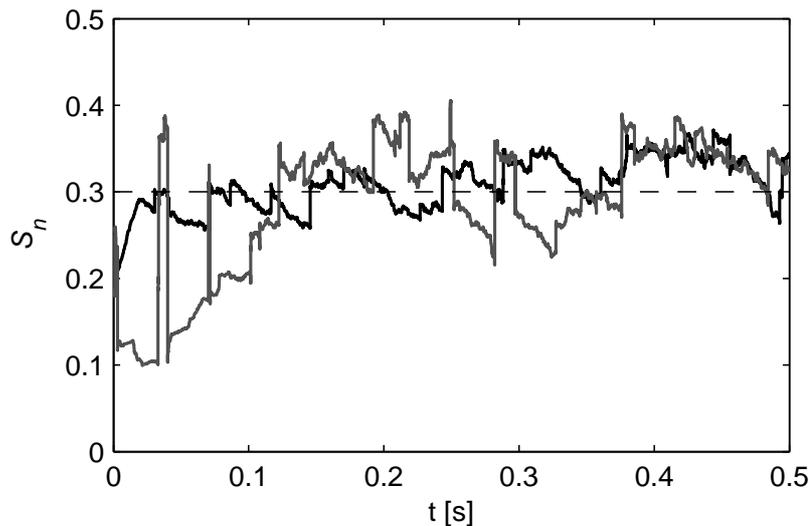


FIG. 5.7: Écart type  $S_n$  pour des portions de 30 ms de la RI du réverbérateur EMT140 (— noir) et de la salle Pleyel (— gris). La valeur asymptotique moyenne  $S_n = 0.3$  est représentée (- - -).

L'écart type  $S_n$  d'un groupe d'échantillons mesure l'étalement des échantillons autour de la moyenne. La Figure 5.7 montre l'évolution temporelle de l'écart type des distributions d'amplitudes de portions de 30 ms, normalisées en amplitude, pour la salle et la plaque. Pour la RI de la plaque,  $S_n$  oscille légèrement autour d'une valeur moyenne de 0.3 en conservant le même comportement au cours du temps. Pour la RI de la salle Pleyel, on identifie deux comportements : en dessous de  $t_m = 125$  ms, l'écart type est soumis à des variations brusques et, en moyenne, sa tendance est croissante ; après  $t_m$ , l'écart type a un comportement similaire à celui de la plaque. Ce comportement correspond à celui du régime diffus de la réverbération tardive, acquis instantanément pour la plaque, mais obtenu après  $t_m \approx 125$  ms pour la salle.

Ces résultats issus de l'analyse des RI mesurées pour la plaque et la salle Pleyel confirment les résultats issus de l'analyse théorique sur le temps de mélange et la dispersion. La détermination du temps de mélange d'une salle à partir de l'étude de la RI est traitée plus en détail dans les travaux de Defrance [23; 34].

## 5.3 Domaine fréquentiel

### 5.3.1 Densité modale

Dans le domaine fréquentiel, la densité modale  $n(f)$  correspond au nombre de modes par Hz qu'on trouve dans le système. Lors de la conception de systèmes de réverbération artificielle, une densité modale élevée est nécessaire pour obtenir un effet de réverbération avec une sonorité naturelle. Schroeder préconise une valeur de  $n(f)$  d'au moins un quart le temps de réverbération  $T_{60}$  [74].

Pour le cas simple de la salle parallélépipédique avec des parois parfaitement rigides la densité modale est donnée par [46] :

$$n_r(f) = \frac{\partial N_m(f)}{\partial f} \approx 4\pi V \frac{f^2}{c_a^3}. \quad (5.10)$$

$n_r(f)$  est proportionnelle au carré de la fréquence.

On rappelle l'expression de la densité modale d'une plaque mince (3.12) donnée au §3.5 :

$$n_p(f) \approx \frac{L_x L_y}{2\kappa} - (L_x + L_y) \sqrt{\frac{1}{8\pi\kappa f}} \approx \frac{1}{2} t_0. \quad (5.11)$$

Quand la fréquence augmente, le deuxième terme de  $n_p(f)$  dans (5.11) devient négligeable et la densité modale est constante. On peut observer que  $n_p(f)$  est proportionnelle à  $t_0$ , ce qui donne une autre interprétation du temps caractéristique, par rapport à la première interprétation donnée au §5.2.2, mais cette fois dans le domaine fréquentiel. La densité modale d'une plaque est élevée quand sa surface est grande et son épaisseur faible ( $\kappa$  est proportionnelle à l'épaisseur). Ces considérations justifient les paramètres du réverbérateur EMT140, pour lequel on obtient  $n_p(f) = 1.27$  modes/Hz à partir de (5.11). En particulier, il faut des plaques minces et avec une grande surface. Cette valeur numérique coïncide bien avec la valeur obtenue expérimentalement au chapitre 3.

Pour les plaques, (5.11) permet d'écrire la règle de Schroeder pour avoir une sonorité naturelle comme une condition sur le temps de réverbération  $T_{60}$  en fonction du temps caractéristique de la plaque :  $T_{60}]_{max} = 2t_0$ . Pour le réverbérateur EMT140, la valeur maximale de  $T_{60}$  donnée par cette condition est  $T_{60}]_{max} = 5.1$  s.

### 5.3.2 Champ diffus et fréquence de Schroeder

Dans l'acoustique des salles, la fréquence de Schroeder  $f_s$  est la fréquence qui sépare le comportement modal du comportement réverbérant. Pour  $f > f_s$ , il y a un recouvrement modal important et les contributions individuelles de chaque mode ne peuvent être séparées. Cette fréquence est atteinte quand, en moyenne, on retrouve trois fréquences propres dans une largeur de bande modale  $\Delta f = \alpha/\pi$  Hz [73],[46], où le facteur d'amortissement  $\alpha$  gouverne la décroissance exponentielle du mode  $e^{-\alpha(\omega)t}$ .

La fréquence de Schroeder de la plaque peut être obtenue à partir de l'expression de la densité modale (5.11). La condition sur le facteur d'amortissement est alors :

$$\alpha(\omega) \geq \frac{3\pi}{n_p} = \frac{6\pi}{t_0} \quad \implies \quad T_{60} < \frac{\ln(10)}{2\pi} t_0 \simeq 0.37 t_0 [\text{s}]. \quad (5.12)$$

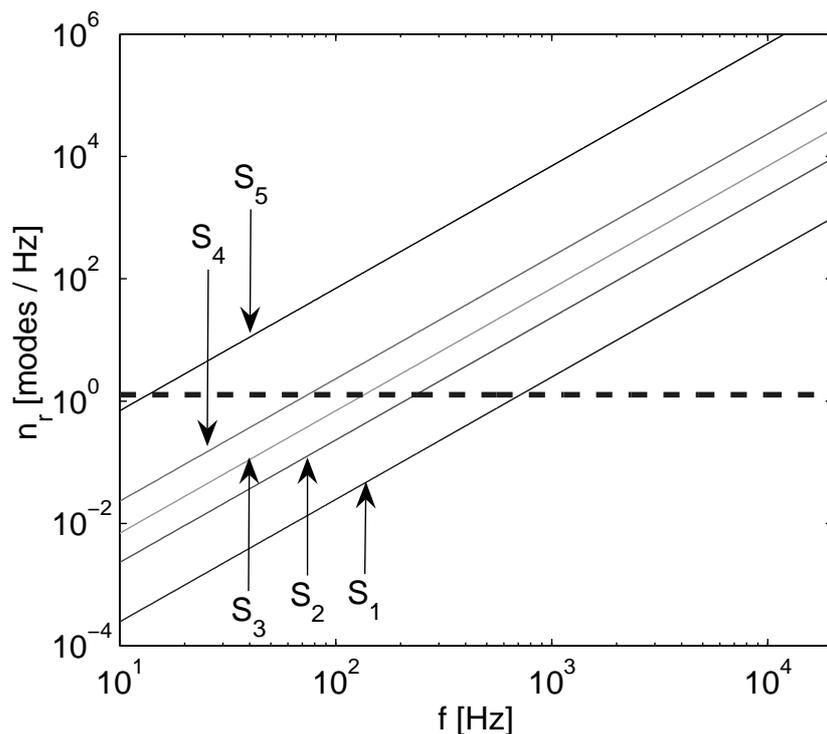


FIG. 5.8: Densité modale du réverbérateur EMT140 (---) et des salles parallélépipédiques  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  (—) dont les dimensions sont données au tableau 5.1.

Pour le réverbérateur EMT140 ( $t_0 = 2.549$  s), le facteur d'amortissement minimum pour être dans le comportement réverbérant d'après le critère de Schroeder est  $\alpha = 7.4 \text{ s}^{-1}$ . Les mesures présentées au chapitre 3 montrent que cet amortissement est atteint à environ 10 kHz. La valeur de la fréquence de Schroeder de la plaque est très supérieure à celle des espaces acoustiques, pour lesquels  $f_s \simeq 2000\sqrt{T_{60}/V}$  [46]. En général, on a  $f_s \in [20; 30]$  Hz pour les petites salles et  $f_s \in [200; 300]$  Hz pour les grandes salles.

Dans la communauté scientifique étudiant les vibrations de structures, le critère de transition entre régime modal et régime vibratoire diffus est donné, d'après Skudrzyk [78], par la présence en moyenne d'une fréquence propre par largeur de bande. La condition de régime diffus des vibrations est alors moins contraignante  $\alpha(\omega) \geq 2\pi/t_0$  ou  $T_{60} < 1.1t_0$ .

Pour résumer, on peut dire que le temps caractéristique  $t_0$  de la plaque est étroitement lié au temps de réverbération. Pour  $T_{60} < 2t_0$  on considère que la réverbération a une sonorité perçue comme naturelle, et pour la condition plus restrictive  $T_{60} < 0.37t_0$ , les modes sont complètement mélangés d'après Schroeder.

## 5.4 Conclusion

Les différences entre la propagation des ondes de pression acoustique dans l'espace en trois dimensions et la propagation des ondes de flexion dans une plaque de deux dimensions sont responsables de la différence de comportement entre la réverbération naturelle et la réverbération à plaque. La RI d'une salle est composée de trois parties bien différenciées : le son direct, les

premières réflexions et le régime diffus ou réverbération tardive. Pour un réverbérateur à plaque, la dispersion des ondes de flexion produit l'étalement de l'impulsion initiale, ce qui rend impossible l'identification du son direct et des échos dans la RI.

Dans le domaine temporel, le temps d'arrivée de l'énergie aux points d'observation du réverbérateur dépend de la fréquence en raison de la dépendance fréquentielle de la vitesse de groupe. La densité de réflexions de la plaque dépend aussi de la fréquence et sa valeur très élevée en hautes fréquences se traduit par un temps de mélange  $t_{m_p}(f)$  inférieur à celui des salles habituelles. Le seul paramètre de la plaque intervenant dans  $t_{m_p}(f)$  est le temps caractéristique  $t_0$  issu de l'adimensionnement de l'équation de Kirchhoff-Love (chapitre 2). Cette faible valeur de  $t_{m_p}(f)$  et la distorsion dans la propagation des ondes élastiques expliquent que le réverbérateur à plaque atteigne presque instantanément un régime diffus équivalent à celui de la réverbération tardive pour les salles. Ce phénomène a été validé expérimentalement à partir de l'analyse de la distribution d'amplitudes des RI mesurées.

Dans le domaine fréquentiel, une densité modale  $n_p(f)$  élevée est nécessaire pour obtenir une réverbération artificielle avec une sonorité naturelle, ce qui impose l'utilisation de plaques avec une faible épaisseur et une grande surface. Pour les plaques,  $n_p(f)$  tend vers une constante dépendant uniquement du temps caractéristique  $t_0$ , tandis que pour les espaces acoustiques,  $n_r(f)$  grandit avec le carré de la fréquence. C'est pourquoi, en basses fréquences, la densité modale d'un réverbérateur à plaque peut être supérieure à celle des salles, alors qu'elle est très probablement inférieure en hautes fréquences. Finalement, on montre que la condition de Schroeder, pour obtenir une réverbération artificielle avec une sonorité naturelle, peut s'exprimer par une borne supérieure sur le temps de réverbération de la plaque  $T_{60} < 2t_0$ .

# Exploitation du modèle

---

## 6.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de montrer la diversité de réverbérateurs à plaque que l'on peut obtenir en faisant varier les paramètres du modèle. Puisque les réverbérateurs existants sont métalliques, on se restreint à cette famille de matériaux. En particulier, on compare l'acier, l'or, l'aluminium, le titane, le fer, le cuivre, l'argent, le platine et le plomb. Le caractère isotrope de ce type de matériaux simplifie l'analyse de leur comportement vibratoire. De plus, la modélisation fine des principaux mécanismes d'amortissement des vibrations prédit l'amortissement à partir de la seule connaissance des paramètres physiques du matériau et des paramètres géométriques de la plaque, sans avoir recours à la mesure. Pour le choix des paramètres géométriques, on s'inspire des réverbérateurs à plaque réels sur lesquels ont été faites les mesures, l'EMT140 et l'EMT240. Leurs paramètres sont présentés au tableau 6.1. Le réverbérateur EMT240 est décrit

	Matériau	Épaisseur $h$ [mm]	Surface $S$ [m <sup>2</sup> ]
EMT140	acier	0.5	2
EMT240	or	0.018	0.0719

TAB. 6.1: Matériau, épaisseur et surface des réverbérateurs réels les plus populaires : le réverbérateur à plaque EMT140 et la feuille d'or EMT240.

en détail à l'annexe B. Quand l'épaisseur de la plaque est de l'ordre du millimètre (EMT140) on parle de tôle, tandis que pour des épaisseurs de l'ordre de 0.01 mm (EMT240) on parle plutôt de feuille. Une feuille très fine peut présenter des difficultés technologiques comme par exemple la difficulté à la produire avec une épaisseur uniforme, la fragilité de la feuille ou la sensibilité aux bruits mécaniques et acoustiques. Pour des épaisseurs de l'ordre de celle de l'EMT140, on peut supposer qu'il n'y a pas de contraintes technologiques importantes lors de la production ou de l'utilisation de la plaque. Pour l'épaisseur de l'EMT240, le choix de certains métaux peut poser des problèmes car le matériau doit être capable de résister à la tension appliquée sur les bords de la feuille. D'autre part, la corrosion que subissent certains métaux dans des environnements humides, comme le fer ou le plomb, peut avoir comme conséquence la perte de matière de la feuille, qui devient critique pour ces faibles épaisseurs.

Aujourd'hui il est possible de se procurer des feuilles d'or, de cuivre, d'argent ou d'aluminium, dont les usages sont très variés : par exemple, la feuille d'aluminium, dont l'épaisseur est d'environ 20  $\mu\text{m}$ , sert à emballer et protéger des aliments ; la feuille d'or est utilisée dans des domaines

aussi variés que l'artisanat d'art ou les soins dentaires.

Ces considérations technologiques sont à prendre en compte pour la réalisation physique d'un réverbérateur à plaque, mais n'ont aucune incidence pour sa synthèse sonore.

## 6.2 Paramètres de la plaque

### 6.2.1 Vibrations des plaques métalliques

L'objet de ce paragraphe est d'explorer l'influence des paramètres géométriques et physiques du matériau sur les descripteurs globaux des vibrations de flexion que sont la densité de réflexions, le temps de mélange et la densité modale. On explore alors systématiquement le comportement de différents métaux pour identifier lesquels présentent des caractéristiques convenables.

Pour un matériau élastique isotrope donné, le rapport entre les forces élastiques et les forces d'inertie peut se quantifier par la célérité des ondes de compression  $c_p$ . Il s'agit du seul paramètre dépendant du matériau qui intervient dans l'équation des plaques non amorties. Ce paramètre, déjà introduit au chapitre 2, est défini par :

$$c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}. \quad (6.1)$$

On a vu au chapitre 5 que le comportement vibratoire global d'une plaque isotrope non amortie, d'épaisseur  $h$  et de surface  $S$ , dépend uniquement du temps caractéristique  $t_0$ , donnée par :

$$t_0 = \sqrt{12} \frac{S}{h} \frac{1}{c_p}. \quad (6.2)$$

Dans le domaine temporel, on rappelle que la densité de réflexions  $D_{e_p}(t, f)$  à un instant et à une fréquence donnés et le temps de mélange  $t_{m_p}(f)$  dépendent uniquement du paramètre  $t_0$  :

$$\begin{aligned} D_{e_p}(t, f) &= \frac{16\pi^2}{t_0} ft, \\ t_{m_p}(f) &= 2.6386t_0 \frac{1}{f}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

et dans le domaine fréquentiel, la densité modale  $n_p$  de la plaque dépend aussi uniquement de  $t_0$  :

$$n_p = \frac{1}{2}t_0. \quad (6.4)$$

Un réverbérateur à plaque doit avoir une densité modale suffisamment élevée afin de s'approcher le plus possible du spectre continu des salles acoustiques au delà de la fréquence de Schroeder. Quand la densité modale est trop faible, l'effet obtenu avec la plaque n'est pas perçu comme une réverbération à cause de l'excitation séparée des fréquences propres du système. D'après (6.4), pour maximiser la densité modale, il faut augmenter la valeur du temps caractéristique  $t_0$ . Ceci est possible par modification du paramètre matériau  $c_p$  ou des paramètres géométriques de la plaque qui sont l'épaisseur  $h$  et la surface  $S$ . On s'intéresse alors à des matériaux avec une faible valeur de  $c_p$ , c'est-à-dire lourds et mous, et à des plaques de faible épaisseur et de grande surface.

Matériau	$c_p$ [m/s]	$t_0$ [s]
Aluminium	5598	2.475
Titane	5542	2.500
Fer	5420	2.556
Acier	5296	2.549
Cuivre	3891	3.561
Argent	3090	4.484
Platine	3057	4.532
Or	2243	6.176
Plomb	1307	10.598

TAB. 6.2: Célérité des ondes de compression  $c_p$  de différents matériaux métalliques [10] et temps caractéristique  $t_0$  des ondes de flexion selon le matériau correspondant aux plaques de surface  $S = 2 \text{ m}^2$  et épaisseur  $h = 0.5 \text{ mm}$ .

Pour différents matériaux métalliques, le tableau 6.2 rassemble les valeurs de  $c_p$  et le  $t_0$  qui correspond à une plaque avec  $h = 0.5 \text{ mm}$  et  $S = 2 \text{ m}^2$ .

Les métaux légers comme l'aluminium et le titane ont des valeurs de  $t_0$  faibles tandis qu'à l'autre extrême, l'or ou le plomb ont des valeurs de  $t_0$  élevées. Ces deux derniers matériaux permettent d'obtenir une plaque avec une densité modale élevée. Néanmoins, des considérations non mécaniques comme le prix de l'or ou la toxicité du plomb sont restrictives quand il s'agit d'obtenir une plaque réelle avec ces matériaux.

Les liens entre ces matériaux et les paramètres géométriques peuvent être mis en évidence à partir de la définition d'une épaisseur équivalente  $h_{eq}$  et d'une surface équivalente  $S_{eq}$  pour chaque matériau, en prenant comme référence la configuration géométrique du réverbérateur EMT140,  $S = 2 \text{ m}^2$  et  $h = 0.5 \text{ mm}$ . Pour un matériau donné,  $h_{eq}$  correspond à l'épaisseur de la plaque de  $S = 2 \text{ m}^2$  dont la densité modale est la même que celle du réverbérateur EMT140, 1.27 modes/Hz. De façon similaire,  $S_{eq}$  est la surface de la plaque d'épaisseur  $h = 0.5 \text{ mm}$  et de densité modale 1.27 modes/Hz. Ainsi, si le réverbérateur EMT140 était fait en plomb, on

Matériau	$n_p$ [Hz <sup>-1</sup> ]	$h_{eq}$ [mm]	$S_{eq}$ [m <sup>2</sup> ]
Aluminium	1.238	0.487	2.052
Titane	1.250	0.492	2.032
Acier	1.274	0.500	2.000
Fer	1.278	0.503	1.987
Cuivre	1.780	0.700	1.427
Argent	2.242	0.883	1.133
Platine	2.266	0.892	1.121
Or	3.088	1.216	0.822
Plomb	5.299	2.086	0.479

TAB. 6.3: Pour chacun des matériaux métalliques, densité modale  $n_p$  de la plaque de  $S = 2 \text{ m}^2$  et  $h = 0.5 \text{ mm}$ , surface équivalente  $S_{eq}$  et épaisseur équivalente  $h_{eq}$ .

pourrait réduire fortement son encombrement en gardant la même densité modale. Néanmoins, il faut aussi tenir compte de l'amortissement, ce qui fait l'objet du §6.2.3, où on montre que pour un matériau donné, la modification du temps caractéristique de la plaque en conservant ses propriétés d'amortissement n'est pas possible. En particulier, un changement d'épaisseur peut produire des

changements très importants sur les amortissements thermoélastique et par rayonnement. La surface a une influence uniquement sur l'amortissement par rayonnement, raison pour laquelle elle semble constituer le paramètre de contrôle le plus adéquat pour la densité modale.

### 6.2.2 Changement de la densité modale

L'outil de synthèse sonore permet d'explorer les effets de la densité modale sur la sonorité d'un réverbérateur à plaque à partir de la réalisation de simulations de la même plaque en changeant uniquement ses dimensions et en évitant de prendre en compte, de façon complètement artificielle, les effets du changement de surface sur l'amortissement par rayonnement. De cette façon on peut changer la densité modale, qui est proportionnelle à la surface, en gardant le même amortissement. Les spectres des Figures 6.1 et 6.2 correspondent à la simulation avec les paramètres de l'EMT140 et aux simulations de la même plaque mais avec des dimensions longitudinales 2, 4 et 8 fois plus petites que les originales. Plus la densité modale est faible et plus les modes sont

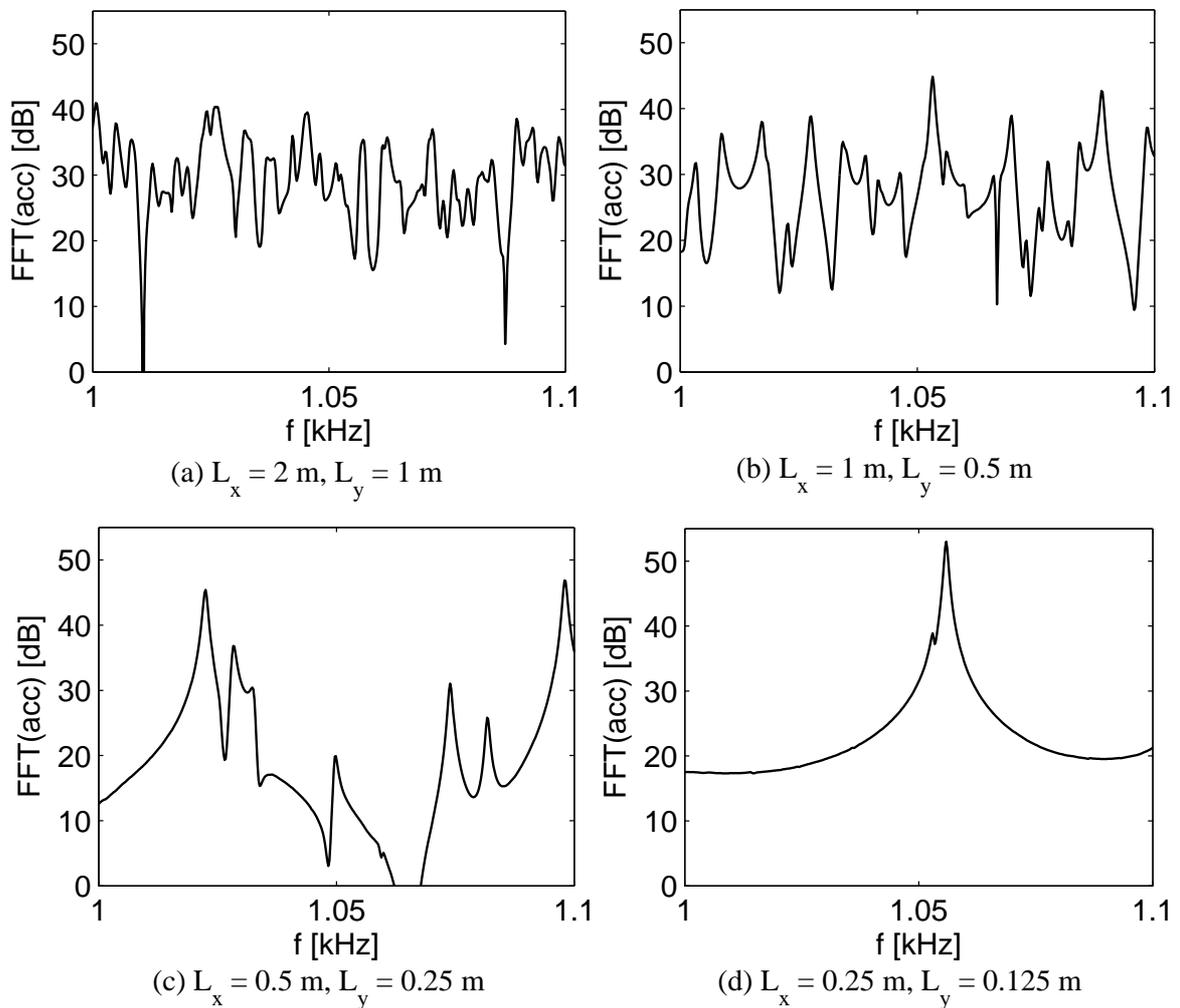


FIG. 6.1: Spectre entre 1000 Hz et 1100 Hz de la réponse impulsionnelle simulée de l'EMT140 en changeant la valeur des dimensions de sa surface  $L_x$  et  $L_y$ . Plus la surface est grande et plus la densité modale est importante : (a)  $n_p = 1.27$  modes/Hz, (b)  $n_p = .3175$  modes/Hz, (c)  $n_p = 0.0797$  modes/Hz, (d)  $n_p = 0.0198$  modes/Hz.

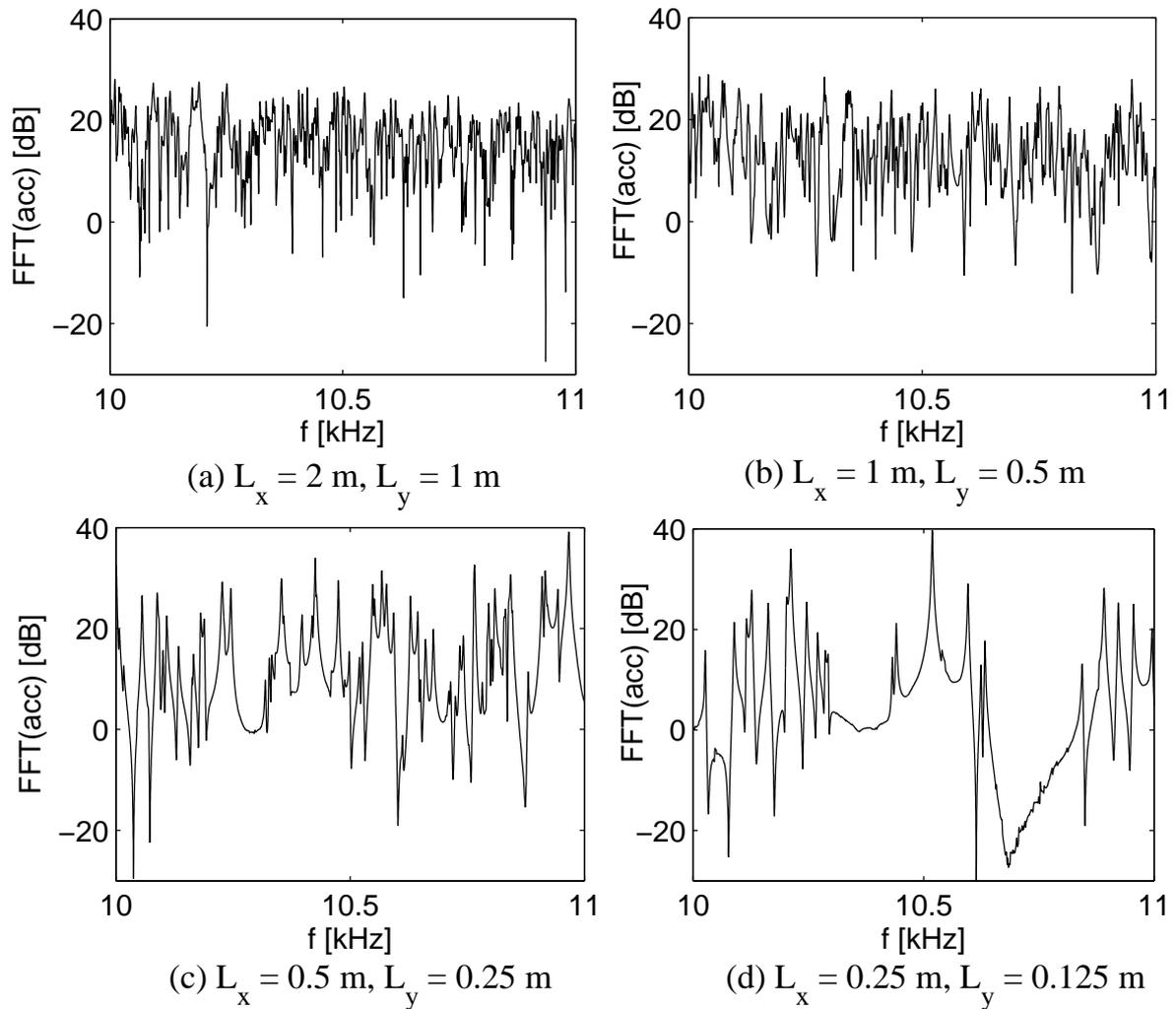


FIG. 6.2: Suite de la Figure 6.1. Spectre entre 10 kHz et 11 kHz de la réponse impulsionnelle simulée de l'EMT140 en changeant la valeur des dimensions de sa surface  $L_x$  et  $L_y$ . La variation autour de la moyenne du spectre augmente quand on diminue la surface de la plaque.

séparés dans le spectre. Dans les Figures 6.1 et 6.2, on observe que plus la surface, et donc la densité modale, est élevée et moins l'écartement du spectre autour de son amplitude moyenne est important. Pour une densité modale élevée, l'écart de niveau entre des fréquences proches est relativement petit, tandis que pour une faible densité modale, comme celle de la Figure 6.2 (d), l'écart des niveaux du spectre est beaucoup plus important. Une estimation quantitative de ces écarts est donné par l'écart type d'une portion du spectre. Par exemple, pour les spectres de la Figure 6.2 on obtient les écarts types suivants : (a) 6.45 dB, (b) 7.66 dB, (c) 9.90 dB et (d) 12.04 dB.

Ces simulations ont permis de percevoir à l'écoute les effets de la densité modale sur la qualité de la réverbération artificielle obtenue. L'outil de synthèse sonore peut alors être utilisé pour la réalisation de tests psychoacoustiques permettant de valider le critère de qualité de la réverbération artificielle de Schroeder [74] dans le cas particulier des plaques (cf. §5.3.1).

### 6.2.3 Amortissement des plaques métalliques

Lors du choix des paramètres d'un réverbérateur à plaque réel, on souhaite que les amortissements thermoélastique et par rayonnement soient faibles, afin de pouvoir obtenir des temps de réverbération longs. Il est possible d'augmenter l'amortissement des vibrations par des éléments externes, comme par exemple une plaque poreuse, mais réduire ces amortissements pour une plaque donnée n'est pas possible (sauf si on met la plaque sous vide pour en éviter le rayonnement). Dans les paragraphes qui suivent, on montre systématiquement les amortissements thermoélastique et par rayonnement pour les matériaux du tableau (6.2) et différentes épaisseurs, ce qui permet d'orienter le choix des paramètres pour la synthèse sonore.

#### 6.2.3.1 Amortissement thermoélastique

On rappelle que l'amortissement thermoélastique est donné par :

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega^2 R_1 C_1}{2(\omega^2 h^2 + C_1^2/h^2)}, \quad (6.5)$$

où  $R_1$  et  $C_1$  sont des constantes qui dépendent uniquement du matériau. Le tableau 6.4 présente la valeur de ces paramètres pour les métaux étudiés précédemment, ainsi que les facteurs  $R_1 C_1$  et  $R_1/C_1$  dont l'intérêt est détaillé ci-dessous.

Matériau	$R_1 \times 10^3$ [ ]	$C_1 \times 10^3$ [rad m <sup>2</sup> /s]	$R_1 C_1 \times 10^6$	$R_1/C_1$
Acier	9.416	0.1496	1.409	62.9
Plomb	6.790	0.2272	1.543	29.9
Titane	2.523	0.0897	0.226	28.1
Fer	4.663	0.2151	1.003	21.7
Platine	3.218	0.2513	0.809	12.8
Aluminium	9.975	0.9760	9.736	10.2
Argent	8.403	1.679	14.11	5.00
Cuivre	5.691	1.148	6.533	4.96
Or	4.727	1.270	6.003	3.72

TAB. 6.4: Paramètres thermoélastiques des métaux de la Figure 6.3

La Figure 6.3 montre l'amortissement thermoélastique prédit par (6.5) pour ces matériaux et les épaisseurs  $h = 0.5$  mm (a) et  $h = 18$   $\mu$ m (b). On observe que, pour une plaque d'épaisseur  $h = 0.5$  mm, on atteint la valeur asymptotique de l'amortissement thermoélastique,  $\alpha_\infty = \frac{R_1 C_1}{2h^2}$ , aux basses ou moyennes fréquences. C'est alors le facteur  $R_1 C_1$  de chaque matériau qui gouverne l'amortissement thermoélastique. Pour des matériaux comme l'argent, l'aluminium, le cuivre ou l'or,  $R_1 C_1$  est élevée et la dissipation thermoélastique pour les plaques de cette épaisseur est importante. A l'opposé, des matériaux comme l'acier, le fer, le titane ou le platine ont une faible valeur de  $\alpha_\infty$  et donc un faible amortissement thermoélastique. On comprend alors pourquoi le matériau choisi pour la conception du réverbérateur EMT140 est l'acier.

Pour une plaque d'épaisseur  $h = 18$   $\mu$ m et dans le domaine audible, aucun de ces matériaux n'atteint le comportement asymptotique  $\alpha_\infty$  de l'amortissement thermoélastique. Si on regarde le comportement de (6.5) pour de très faibles épaisseurs, telles que le terme en  $\omega^2$  du dénominateur soit négligeable, on a :

$$\text{Pour : } h \ll \sqrt{C_1/\omega} \quad \Rightarrow \quad \alpha(\omega) \approx \frac{1}{2} \frac{R_1}{C_1} h^2 \omega^2. \quad (6.6)$$

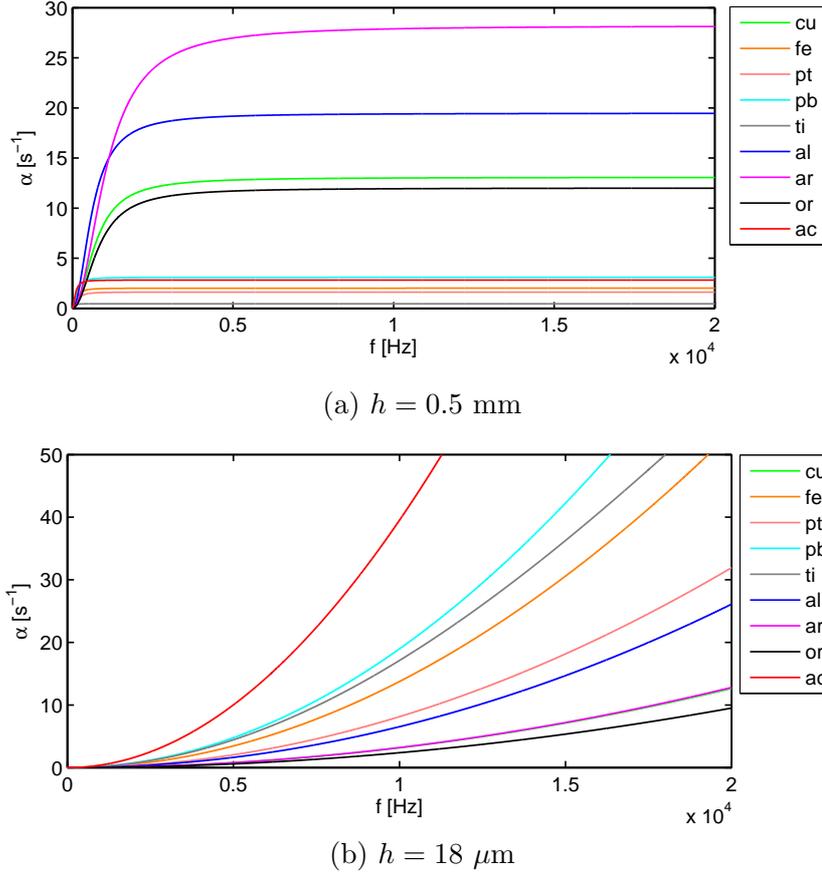


FIG. 6.3: Amortissement thermoélastique pour différents matériaux et une épaisseur  $h = 0.5 \text{ mm}$  (a) ou  $h = 18 \text{ }\mu\text{m}$  (b).

Dans ces conditions, l'amortissement thermoélastique  $\alpha$  est proportionnel à  $\omega^2$ , et pour une épaisseur donnée, les matériaux avec la valeur de  $\frac{R_1}{C_1}$  la plus faible sont ceux qui ont le moins d'amortissement thermoélastique. Ce rapport peut s'écrire comme :

$$\frac{R_1}{C_1} = \frac{8}{\pi^6} T_0 12 \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_{TH}^2}{K_z} E, \quad (6.7)$$

où  $\alpha_{TH}$  est le coefficient de dilatation thermique linéaire et  $K_z$  est la conductivité thermique. Plus le rapport entre le carré de  $\alpha_{TH}$  et  $K_z$  est petit et plus l'amortissement est faible. Ce résultat est déjà suggéré dans le brevet américain du réverbérateur EMT240 [29].

La Figure 6.3 montre que, pour une plaque d'épaisseur  $h = 18 \text{ }\mu\text{m}$ , l'acier est le matériau présentant le plus fort amortissement thermoélastique tandis que, pour  $h = 0.5 \text{ mm}$ , l'acier fait partie des matériaux avec le moins d'amortissement thermoélastique. A  $h = 18 \text{ }\mu\text{m}$ , des matériaux comme l'or, l'argent et le cuivre sont ceux qui présentent le plus faible amortissement thermoélastique. L'amortissement de l'or est le plus faible et parmi les trois matériaux, l'or permet d'obtenir la densité modale  $n_p$  la plus élevée grâce à sa plus faible valeur de  $c_p$  : à surface et épaisseur constante, la densité modale de l'or est 1.38 fois et 1.73 fois plus grande que celle de l'argent et du cuivre respectivement. Il n'est pas surprenant alors que l'or ait été le matériau choisi par les concepteurs du EMT240.

### 6.2.3.2 Amortissement par rayonnement

L'amortissement par rayonnement est contrôlé par la fréquence critique  $f_c$ , dont la valeur pour une plaque mince isotrope est donnée par :

$$f_c = \frac{c_a^2}{2\pi\kappa}, \quad \text{où : } \kappa = \frac{1}{\sqrt{12}}hc_p. \quad (6.8)$$

Pour éviter un amortissement par rayonnement excessif, il faut avoir une fréquence critique la plus élevée possible. D'après (6.8) on augmente  $f_c$  en choisissant des plaques de faible épaisseur et dont la  $c_p$  du matériau est la plus petite possible. On caractérise alors l'ensemble formé par un matériau et le milieu dans lequel il baigne par sa valeur de  $f_ch$  :

$$f_ch = \frac{c_a^2\sqrt{3}}{\pi c_p}. \quad (6.9)$$

Une autre constante d'intérêt est la valeur asymptotique en hautes fréquences  $\alpha_{r_\infty}$  de l'amortissement par rayonnement, qui est la même que pour une plaque infinie et correspond à un facteur de rayonnement  $\sigma = 1$ . Elle est donnée par :

$$\alpha_{r_\infty} = \frac{\rho_a c_a}{\rho h}. \quad (6.10)$$

Pour les matériaux traités et en considérant une vitesse du son  $c_a = 344$  m/s, le tableau 6.5 rassemble le paramètre matériau  $f_ch$ , la fréquence critique  $f_c$  pour  $h = 0.5$  mm, et l'amortissement par rayonnement asymptotique  $\alpha_{r_\infty}$  pour  $h = 0.5$  mm.

Matériau	$f_ch$ [m/s]	$f_c$ [Hz] ( $h=0.5$ mm)	$\alpha_{r_\infty}$ [ $s^{-1}$ ] ( $h=0.5$ mm)
Aluminium	11.654	23309	309.2
Titane	11.772	23545	183.5
Fer	12.036	24071	104.9
Acier	12.386	24772	104.9
Cuivre	16.765	33531	92.1
Argent	21.115	42229	78.6
Platine	21.340	42679	38.5
Or	29.082	58163	42.8
Plomb	49.901	99802	70.7

TAB. 6.5: Paramètres gouvernant l'amortissement par rayonnement pour les différents matériaux : constante matériau  $f_ch$ , fréquence critique  $f_c|_{(h=0.5mm)}$  et amortissement par rayonnement asymptotique en hautes fréquences  $\alpha_{r_\infty}|_{(h=0.5mm)}$  pour une plaque de  $h = 0.5$  mm. En générale, plus grand est le paramètre  $f_ch$  et plus faible et l'amortissement par rayonnement en dessous de  $f_c$  (voir Figure 6.5). Également, plus faible et  $\alpha_{r_\infty}$  et plus faible et l'amortissement par rayonnement au delà de  $f_c$ .

Pour les plaques métalliques minces, la valeur de  $\alpha_{r_\infty}$  conduit à des temps de réverbération très petits. On souhaite alors que la fréquence critique reste en dehors du domaine audible. La Figure 6.4 montre l'amortissement par rayonnement pour différents matériaux et les épaisseurs  $h = 0.5$  mm et  $h = 1$  mm. On observe que, plus  $f_c$  est grande, plus l'amortissement par rayonnement est petit. Pour  $h = 1$  mm (b), la Figure 6.4 (b) montre que dès qu'on s'approche trop de la fréquence critique l'amortissement croît très rapidement. En général, jusqu'à  $f = 0.8f_c$  l'amortissement par rayonnement reste inférieur à  $0.05\alpha_{r_\infty}$ , mais au-delà, l'amortissement devient très important. La Figure 6.5, où l'épaisseur des plaques est  $h = 18$   $\mu\text{m}$ , montre que pour

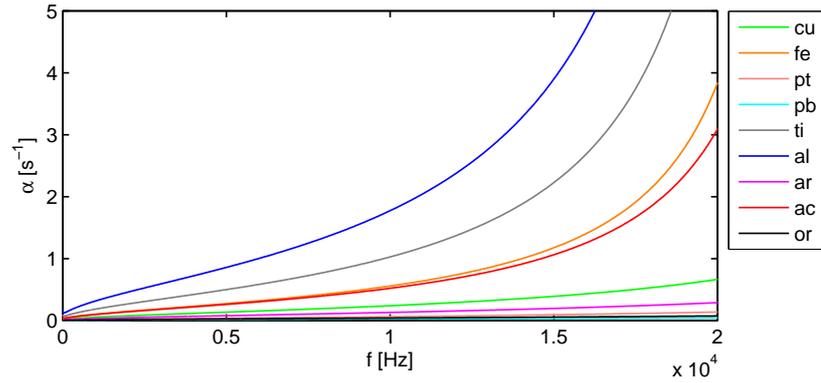
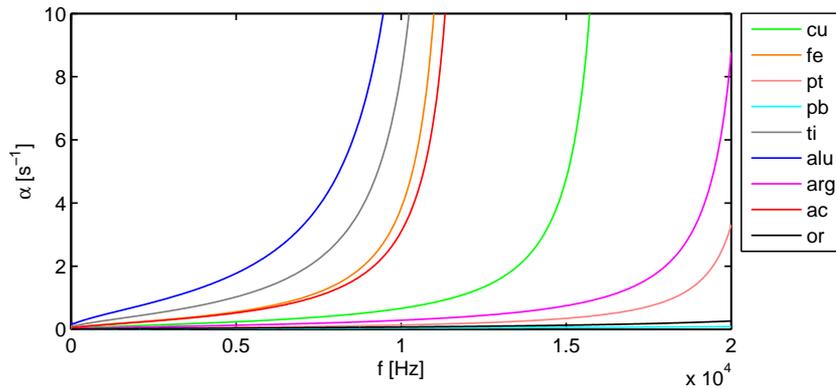
(a)  $h = 0.5$  mm(b)  $h = 1$  mm

FIG. 6.4: Amortissement par rayonnement des plaques de dimensions  $L_x = 2$ ,  $L_y = 1$ , épaisseurs  $h = 0.5$  mm (a) et  $h = 1$  mm (b), pour les matériaux du tableau 6.5.

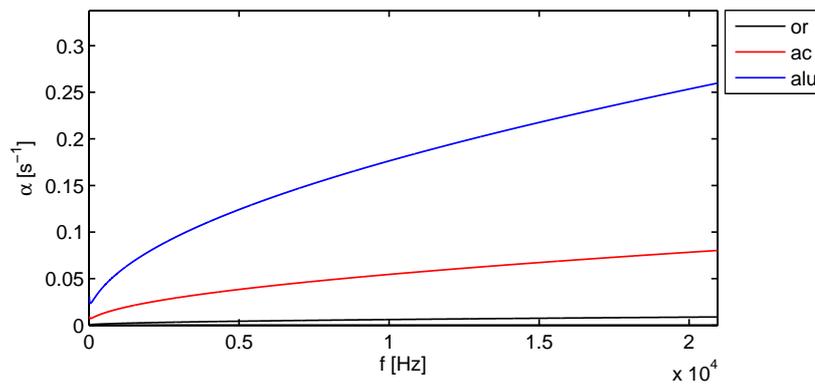


FIG. 6.5: Amortissement par rayonnement des plaques de dimensions  $L_x = 2$ ,  $L_y = 1$ , épaisseur  $h = 18 \mu\text{m}$ , en acier, en or et en aluminium.

cette épaisseur l'amortissement par rayonnement est négligeable quel que soit le matériau. C'est un des avantages, outre une densité modale élevée, des plaques très minces.

Quand on néglige les modes de coin, l'expression de l'amortissement par rayonnement en

dessous de la fréquence critique s'écrit :

$$\alpha_r = \frac{P\rho_a c_a^2}{S\rho h f_c} g_2 \quad \text{avec :} \quad (6.11)$$

$$g_2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(1 - \psi^2)}{(1 - \psi^2)^{3/2}} \ln \left[ \frac{(1 + \psi)}{(1 - \psi)} + 2\psi \right], \quad \text{où : } \psi = (f/f_c)^{1/2}.$$

Pour une valeur fixe de  $f_c$ , l'amortissement peut être contrôlé à partir de la surface  $S$  ou du périmètre  $P$  de la plaque. Si on veut conserver la densité modale de la plaque, la surface doit rester constante, et le seul paramètre de contrôle est donc le périmètre  $P$ . A surface constante, plus les deux dimensions de la surface de la plaque sont proches et plus l'amortissement par rayonnement est petit.

### 6.2.3.3 Regroupement des modèles

L'étude systématique de l'amortissement total prédit par les modèles thermoélastique et de rayonnement pour un matériau donné et en fonction de l'épaisseur de la plaque permet d'identifier les différentes configurations d'amortissement possibles. On se limite à des épaisseurs  $h > 0.1$  mm. Pour de plus faibles épaisseurs, l'amortissement par rayonnement est en général négligeable, comme le montre la Figure 6.5, et il suffit de considérer l'amortissement thermoélastique pour l'analyse.

La Figure 6.6 montre la variation de l'amortissement total avec l'épaisseur pour une plaque en or (a) et pour une plaque en platine (b). On observe que pour les deux matériaux il existe un intervalle d'épaisseurs permettant d'obtenir un amortissement inférieur à environ  $\alpha = 12 \text{ s}^{-1}$  dans tout le domaine audible :  $h \in [0.5; 1.25]$  mm pour l'or et  $h \in [0.1; 0.5]$  mm pour le titane. La limite inférieure de cet intervalle est imposée par l'amortissement thermoélastique tandis que la limite supérieure dépend de la fréquence critique de rayonnement. Quand la plaque est trop mince,  $\alpha_\infty$  de l'amortissement thermoélastique dépasse  $12 \text{ s}^{-1}$  dans la majorité du spectre. Quand la plaque est trop épaisse, la fréquence critique est dans le domaine audible et l'amortissement par rayonnement dépasse  $12 \text{ s}^{-1}$  pour approximativement  $f > 0.95 f_c$ .

## 6.3 Influence des conditions aux limites

La résolution numérique par différences finies (DF) présentée au chapitre 4 permet de résoudre le problème vibratoire pour des plaques finies sous les 3 types de conditions aux limites (CL) conservatives suivantes : bords libres, bords encastés et bords simplement appuyés. On peut alors mettre à profit l'algorithme des DF pour examiner si l'influence des conditions aux limites sur la réponse impulsionnelle d'un réverbérateur à plaque est importante. On utilise le jeu de paramètres du réverbérateur EMT140 et on tient compte des amortissements thermoélastique et par rayonnement. On fait trois simulations par DF, une pour chaque type de CL, selon la méthodologie décrite par la Figure 4.14. Les trois signaux obtenus par la synthèse sont différents mais à l'écoute aucune différence n'a été perçue.

### 6.3.1 Domaine temporel

La Figure 6.7 montre la superposition des trois signaux obtenus en fonction du temps. Ces signaux correspondent à l'accélération du point d'observation en réponse à une impulsion de force au point d'excitation. La valeur instantanée de l'accélération est différente pour les trois configurations des CL, mais le comportement global du signal semble similaire. Les distributions

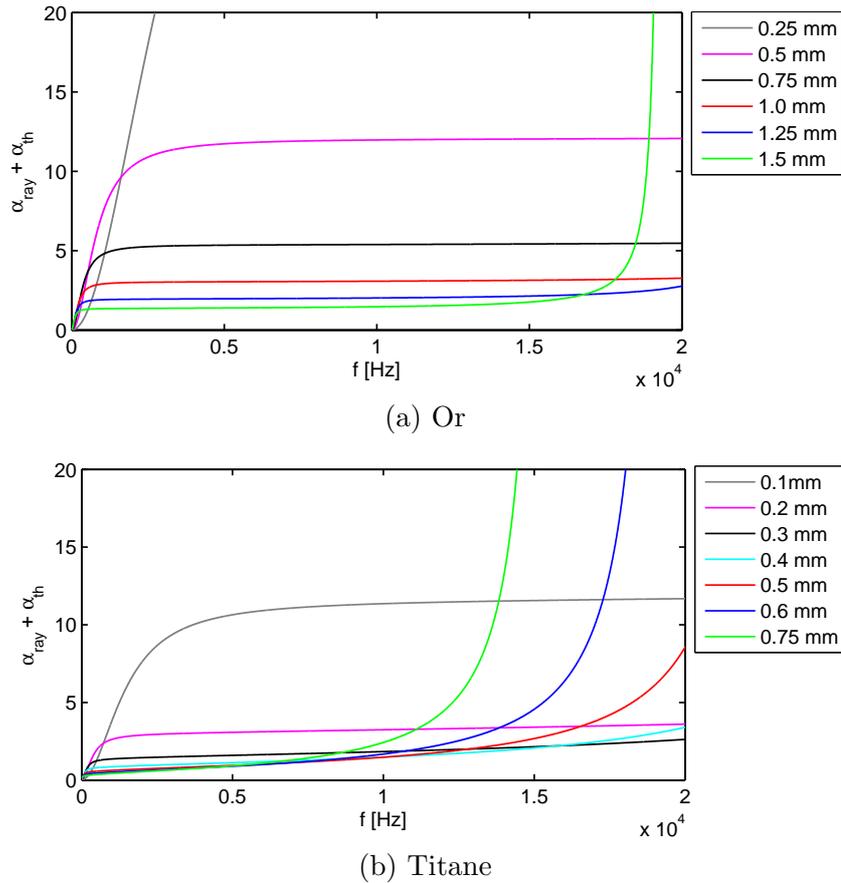


FIG. 6.6: Amortissement total prédit par les modèles thermoélastique et par rayonnement pour un matériau donné et différentes épaisseurs. Matériau : (a) or et (b) titane.

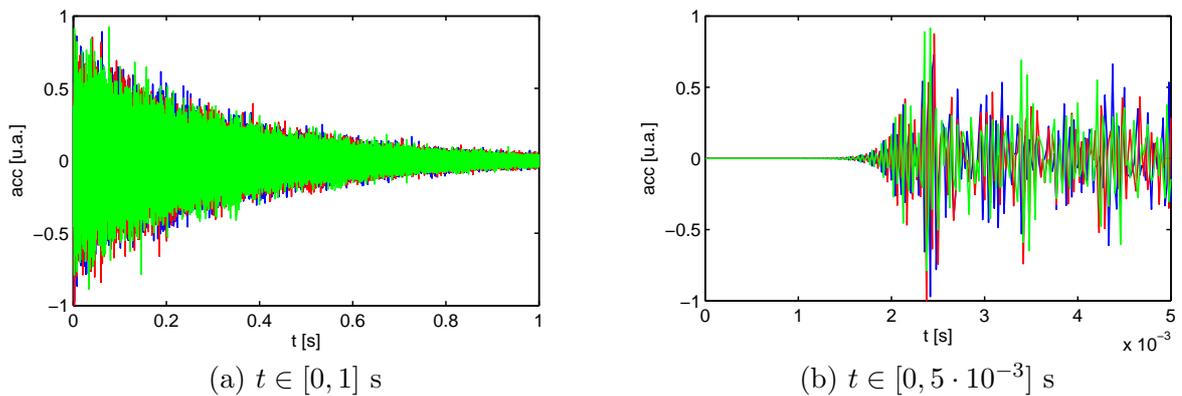


FIG. 6.7: Réponses impulsionnelles tronquées (accélération en unités arbitraires) d'une plaque en acier, de dimensions  $L_x = 2$ ,  $L_y = 1$  et d'épaisseur  $h = 0.5$  mm sous différentes conditions aux limites : bords libres (bleu), plaque encastree (rouge) et plaque simplement supportee (vert). Les signaux temporels des trois simulations sont différents mais leur comportement global est similaire.

statistiques des échantillons des trois signaux peuvent être comparées à partir des histogrammes représentant la distribution de la valeur des échantillons pour une portion du signal.

La Figure 6.8 montre les histogrammes des trois RI pour la portion qui correspond à  $t \in [0; 0.1]$

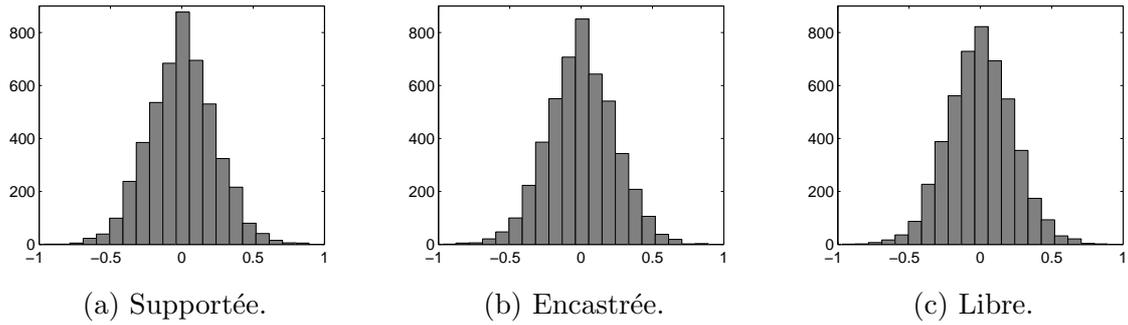


FIG. 6.8: Histogrammes des échantillons des premiers 100 ms des signaux temporels d'accélération de la Figure 6.7 correspondant aux trois conditions aux limites différentes. Les distributions des échantillons des trois histogrammes sont très similaires.

secondes. La distribution des échantillons est la même indépendamment des CL de la simulation. Pour des portions des RI correspondant à des  $t$  plus grands, la comparaison des histogrammes des trois RI conduit à des résultats très similaires. On peut alors affirmer que la distribution globale d'amplitudes est indépendante des CL.

### 6.3.2 Domaine fréquentiel

L'analyse fréquentielle est réalisée par transformée de Fourier des trois RI synthétisées. La Figure 6.9 montre le détail des spectres en basses fréquences (a) et en hautes fréquences (b). Les pics du spectre observés, correspondant aux fréquences propres, dépendent des CL mais leur densité en est indépendante. En raison de la densité modale élevée, il est très probable que l'oreille humaine ne puisse discerner le changement de fréquences propres entre les trois configurations. D'autre part, le niveau moyen des spectres est similaire pour les trois simulations. Pour l'analyse

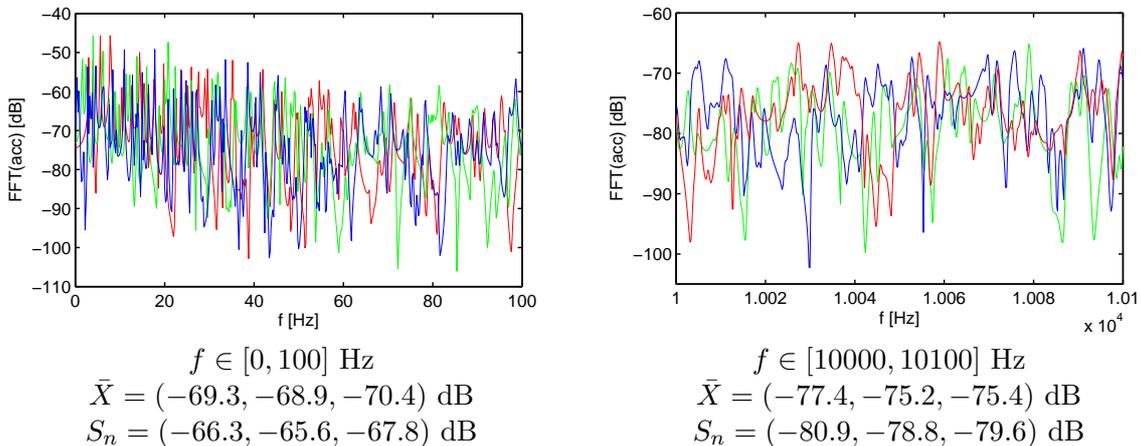


FIG. 6.9: Module de la transformée de Fourier des signaux temporels de durée 6 s présentés à la Figure 6.7 et pour les intervalles de fréquences  $[0; 100] \text{ Hz}$  (a) et  $[10000; 10100] \text{ Hz}$  (b).  $\bar{X}$  et  $S_n$  sont les vecteurs contenant les moyennes et les écarts type des spectres dans l'intervalle montré pour les trois CL de plaque simulées, appuyée, encastrée et libre respectivement. Les fréquences propres des trois spectres ne sont pas les mêmes mais globalement le comportement fréquentiel est similaire.

global des spectres, on compare la moyenne  $\bar{X}$  et l'écart type  $S_n$  des amplitudes des portions de spectres de la Figure 6.9 pour les trois CL. Les valeurs obtenues pour  $\bar{X}$  et  $S_n$  des trois simula-

tions restent très proches, ce qui montre que l'amplitude moyenne des spectres et leur dispersion autour de leur moyenne est indépendante des CL à cette échelle d'observation.

Pour comparer la distribution fréquentielle de l'énergie totale des trois RI, leur densité spectrale de puissance dans tout le spectre audible est montré par la Figure 6.10. Les courbes des trois

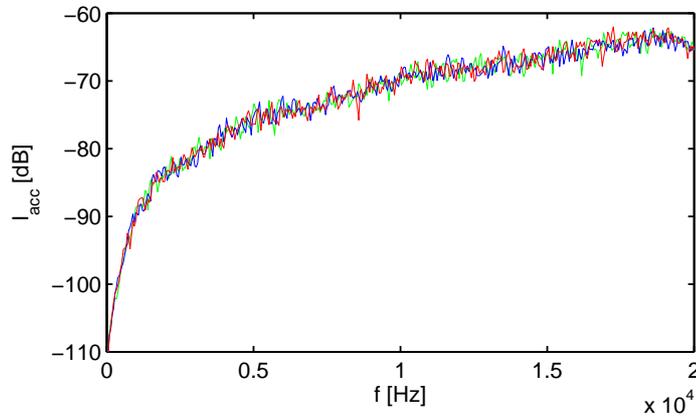


FIG. 6.10: Estimation de la distribution fréquentielle de l'énergie totale des signaux temporels de durée 6 s présentés à la Figure 6.7 à partir du périodogramme moyenné de Welch. Le comportement est indépendant des conditions aux limites.

simulations se superposent, montrant ainsi qu'à une échelle globale la répartition fréquentielle de l'énergie est indépendante des CL. Ces expériences semblent indiquer que l'influence des conditions aux limites sur la réverbération obtenue est négligeable, et donc qu'on pourrait envisager de réaliser les simulations par synthèse modale du cas simple de la plaque sur des appuis simples, ce qui permettrait d'accélérer et simplifier les calculs. On n'est pas obligé alors d'être fidèle en tout au dispositif expérimental car on n'a pas les contraintes de construction. Par exemple, l'amortissement par transmission mécanique d'une plaque sur des appuis simples réelle est très important tandis que par la synthèse on peut imposer l'amortissement désirée et profiter de la facilité de calcul de ce cas simple.

## 6.4 Deux exemples de synthèse de RI

On propose deux exemples des synthèses qui sont possibles avec la méthode proposée dans cette thèse et résumée par la Figure 4.14. Le premier exemple est la synthèse sonore de la RI de la feuille d'or du réverbérateur EMT240 et le deuxième la synthèse d'une plaque en aluminium avec les paramètres géométriques du réverbérateur EMT140. La conséquence principale de ce changement de matériau est l'obtention d'un effet de réverbération plus court. Pour chaque exemple, on présente l'amortissement en fonction de la fréquence prévu par le modèle continu et celui de la RI obtenue par les DF, afin de vérifier le comportement de la simulation. Le relief de décroissance, qui caractérise complètement l'effet de réverbération obtenu, est aussi représenté pour chaque exemple.

### 6.4.1 Feuille d'or

La synthèse de la RI de la feuille d'or du réverbérateur EMT240 est réalisée en tenant compte uniquement de l'amortissement thermoélastique, car pour sa faible épaisseur,  $h = 18 \mu\text{m}$ , l'amortissement par rayonnement est négligeable. Pour cette synthèse on ne cherche pas à simuler la

feuille d'or dans la configuration du réverbérateur EMT240, car on ne tient compte ni de la tension ni du couplage avec les actionneurs et les capteurs, qui ont probablement une influence significative à cause de la faible épaisseur de la feuille. Les post-traitements d'ajustement de l'amortissement et d'égalisation de l'énergie ne sont pas faits pour cet exemple. Un bon ac-

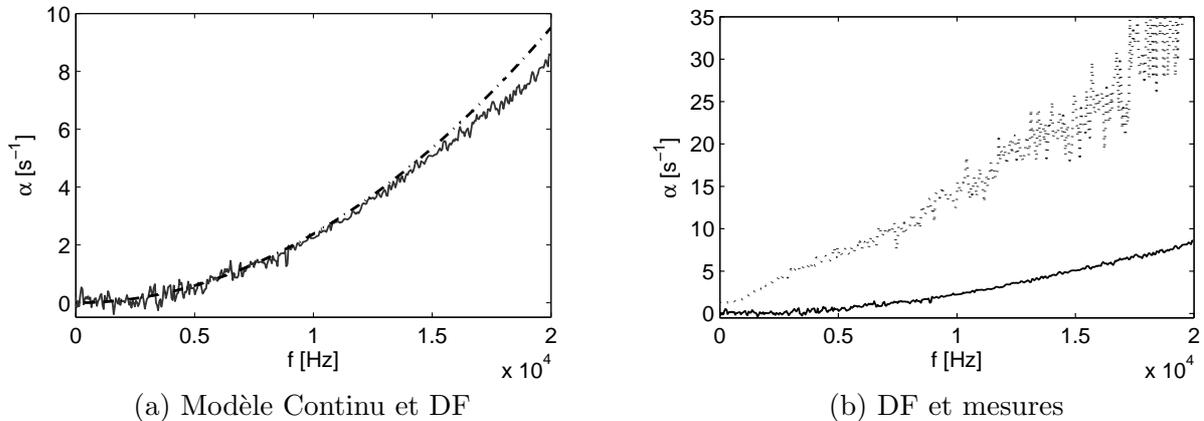


FIG. 6.11: Amortissement thermoélastique de la feuille en or du réverbérateur EMT240. (a) : modèle continu (- · -) comparé à l'amortissement mesuré sur la RI obtenue par DF. L'algorithme des DF suit bien le comportement imposé, mais les effets de la dispersion numérique commencent à apparaître à partir de 15 kHz tout en restant négligeables. (b) : comparaison de l'amortissement obtenu par la simulation avec celui des mesures expérimentales sur l'unité EMT240 dans sa configuration la plus réverbérante. L'amortissement réel est plus important que celui de la synthèse, ce qui s'explique par la sensibilité aux pertes par transmission mécanique d'une plaque d'épaisseur  $h = 18 \mu\text{m}$ .

cord entre l'amortissement du modèle continu et celui de la RI obtenue par les DF est observé à la Figure 6.11 (a). L'accord est très bon sauf en hautes fréquences où une légère erreur apparaît.

La Figure 6.11 (b) compare l'amortissement de la simulation avec celui obtenu expérimentalement pour la configuration la plus réverbérante du réverbérateur EMT240. L'amortissement de la simulation est très inférieur à la mesure. Du fait de la faible épaisseur de la feuille d'or, de l'amortissement est ajouté par transmission mécanique de la feuille à ses points d'attache, à ses deux capteurs et aux deux actionneurs. Cet amortissement n'est pas pris en compte par la modélisation physique. Si l'objectif de la synthèse est de reproduire la mesure, cet amortissement additionnel peut être ajouté à la simulation grâce à l'algorithme d'ajustement de l'amortissement décrit au chapitre 4. Le relief de décroissance de la simulation par DF est représenté à la Figure 6.12. On observe que la majorité de l'énergie se concentre en basses et moyennes fréquences.

#### 6.4.2 Plaque en aluminium

Le deuxième exemple correspond à une plaque en aluminium dont les paramètres géométriques sont les mêmes que ceux du réverbérateur EMT140. La Figure 6.13 (a) montre les amortissements thermoélastique, par rayonnement et total prédits par les modèles physiques à partir des paramètres de la plaque. Pour des fréquences supérieures à 1000 Hz, l'amortissement de la plaque est supérieur à  $\alpha = 14 \text{ s}^{-1}$ , ce qui correspond à un temps de réverbération inférieur à 0.5 s. La plaque est donc peu amortie uniquement en basses fréquences. Le choix de l'aluminium conduit à une plaque dont les vibrations sont plus amorties que celles du réverbérateur EMT140.

Suivant la méthodologie de la Figure 4.14, la simulation faite par DF inclut uniquement l'amortissement thermoélastique. Dans la Figure 6.13 (b) on observe le bon accord entre l'amor-

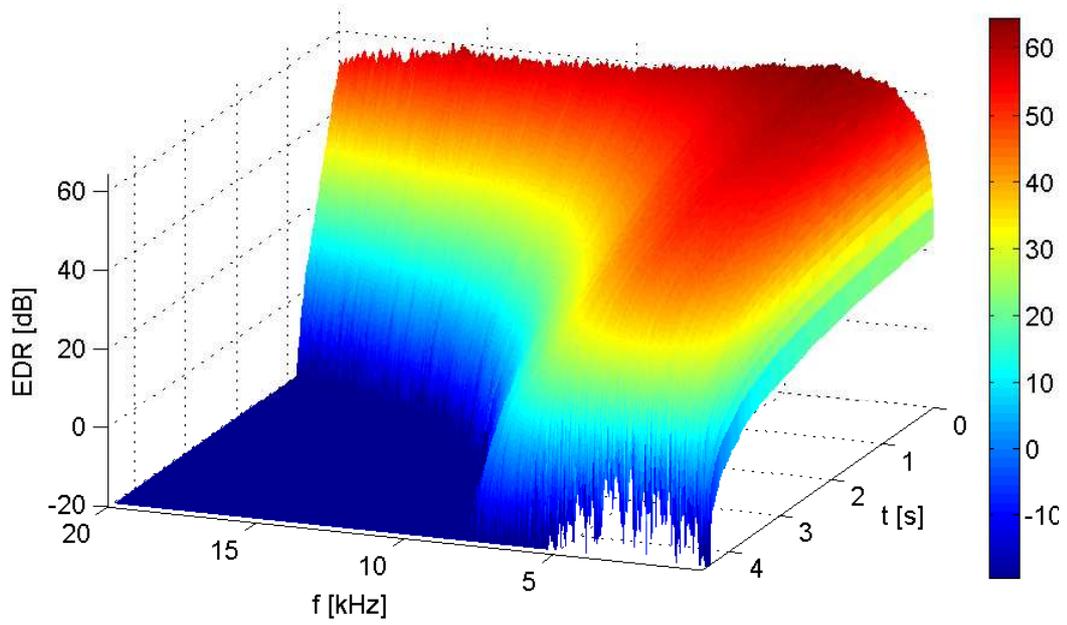


FIG. 6.12: Relief de décroissance de l'accélération obtenue par DF en réponse à une impulsion ponctuelle de force. Plaque en or, d'épaisseur  $h = 18 \mu\text{m}$  et de dimensions  $L_x = 0.29 \text{ m}$  et  $L_y = 0.27 \text{ m}$ . La simulation est faite à la fréquence d'échantillonnage  $F_s = 192 \text{ kHz}$  et sous-échantillonnée d'un facteur 4. L'énergie totale est plus importante en basses fréquences en raison du faible amortissement du modèle physique en basses fréquences.

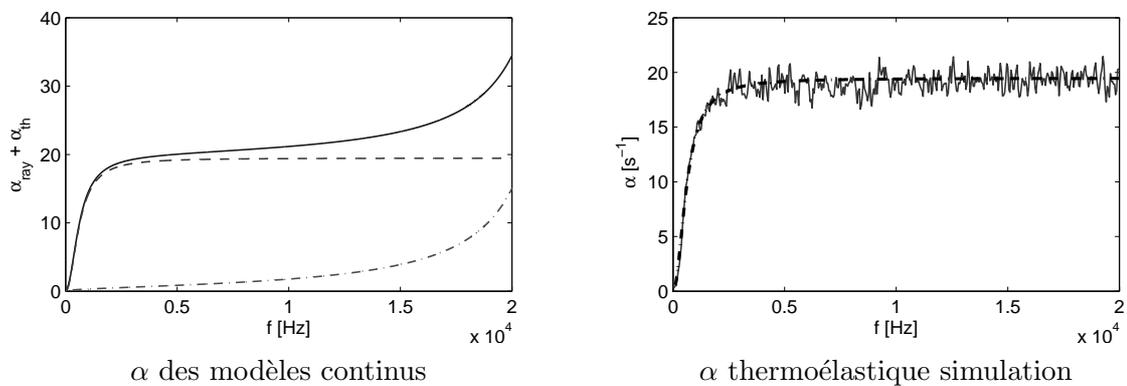


FIG. 6.13: Amortissement d'une plaque en aluminium d'épaisseur  $h = 0.5 \text{ mm}$  : (a) amortissement thermoélastique (- - -), amortissement par rayonnement (- · -) et leur somme (—) obtenus par les modèles continus. (b) amortissement thermoélastique du modèle continu comparé à l'amortissement mesuré sur la RI obtenue par DF avec modèle temporel d'amortissement thermoélastique

tissement de la RI en sortie des DF et l'amortissement du modèle continu. L'amortissement par rayonnement est donc ajusté dans le post-traitement de la RI. Le relief de décroissance de la RI obtenue après le post-traitement est représenté à la Figure 6.14. On peut observer clairement l'effet passe-haut dû à l'observation de l'accélération en réponse à une impulsion de force. Comme le spectre de l'admittance d'une plaque tend vers une constante, la pente du spectre de l'accélération est de  $+20 \text{ dB}$  par décade. L'égalisation de l'énergie ne pose pas de problème car

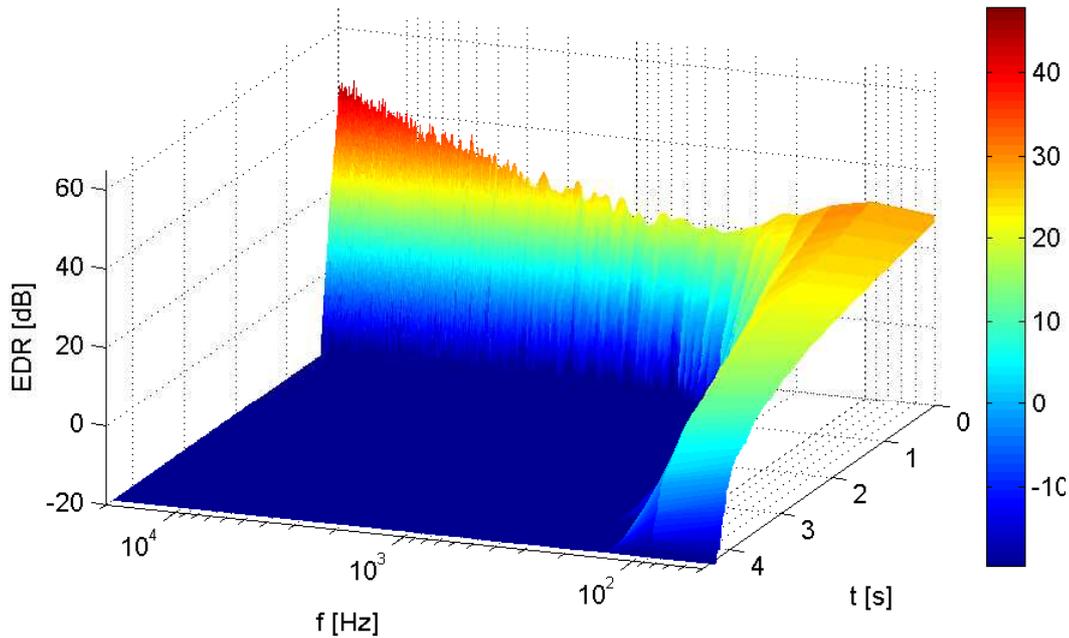


FIG. 6.14: Relief de décroissance de l'accélération simulée par DF en réponse à une impulsion ponctuelle. Paramètres : plaque en aluminium d'épaisseur  $h = 0.5$  mm, de dimensions  $L_x = 2$  et  $L_y = 1$ . Simulation à la fréquence d'échantillonnage  $F_s = 192$  kHz et sous-échantillonnée d'un facteur 4.

elle peut être corrigée par le filtrage numérique décrit au §4.4.2.

Une alternative à la lecture de l'accélération en sortie de l'algorithme est l'utilisation de la vitesse, ce qui permet d'obtenir une distribution fréquentielle de l'énergie plus homogène. Le relief de décroissance obtenu à partir de la RI en vitesse est représenté à la Figure 6.15.

## 6.5 Conclusion

Ce chapitre a permis d'explorer les possibilités de l'algorithme de synthèse du réverbérateur à plaque par application des modèles et méthodes présentés aux chapitres précédents. Pour aboutir à un réverbérateur avec une densité modale élevée, il est nécessaire de simuler des plaques de faible épaisseur, de grande surface et faites d'un matériau avec un rapport masse-raideur le plus élevé possible (équivalent à une vitesse des ondes de compression  $c_p$  la plus petite possible). Parmi les métaux présentés,  $c_p$  peut varier d'un facteur 5, et la densité modale pour une géométrie identique peut donc varier de ce même facteur. Pour examiner les effets du changement de densité modale dans les spectres, et surtout pour l'écoute, on s'est servi de l'outil de synthèse, et on a fait des simulations en changeant uniquement la surface de la plaque. Ces synthèses confirment la nécessité d'une valeur élevée de la densité modale pour obtenir une réverbération perçue comme naturelle.

Puisque le temps de réverbération est la caractéristique la plus perceptible de la réverbération, on s'est efforcé de montrer les comportements fréquentiels de l'amortissement pour différents matériaux métalliques réels et pour différents paramètres géométriques. Les propriétés dissipatives de la plaque peuvent varier substantiellement selon le matériau et selon l'épaisseur. Pour des épaisseurs de l'ordre du millimètre, l'amortissement thermoélastique atteint rapidement sa valeur

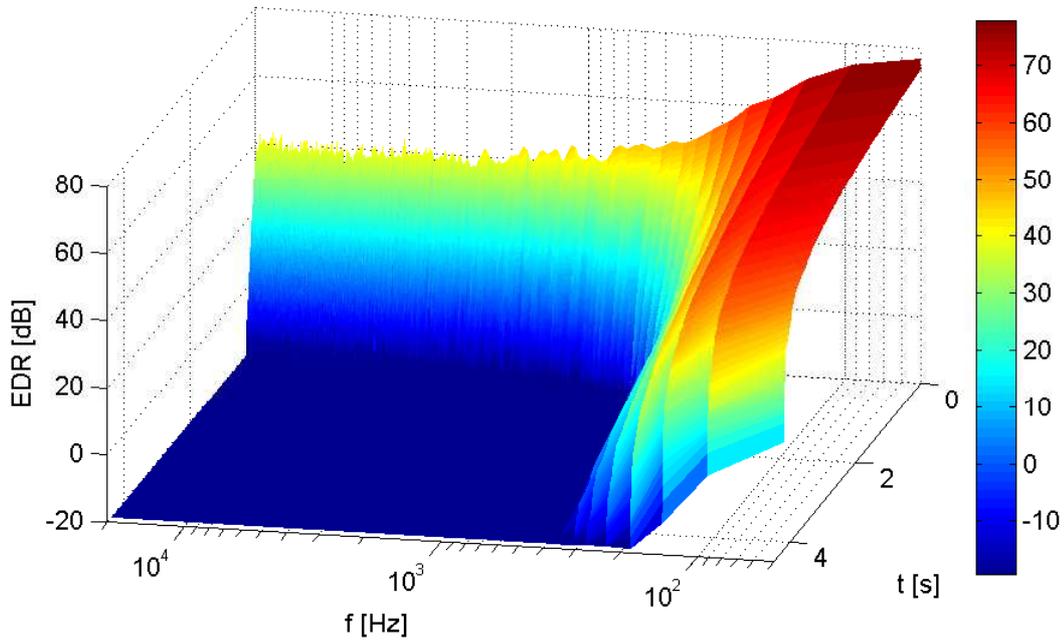


FIG. 6.15: Relief de décroissance de la dérivée temporelle numérique (vitesse) du déplacement simulé par les DF en réponse à une impulsion ponctuelle pour la même plaque que la Figure 6.14.

asymptotique  $\alpha_\infty = \frac{R_1 C_1}{2h^2}$ , tandis que pour de très faibles épaisseurs, ici de l'ordre de 0.018 mm, l'amortissement thermoélastique est de la forme  $\frac{1}{2} \frac{R_1}{C_1} h^2 \omega^2$  (voir Figure 6.3). Dans un cas, le facteur qui gouverne l'amortissement thermoélastique est  $R_1 C_1$ , tandis que dans l'autre c'est  $R_1 / C_1$ . Certains matériaux comme l'acier dissipent alors plus d'énergie que d'autres pour une épaisseur 0.02 mm mais moins que les autres pour une épaisseur de l'ordre du millimètre. Concernant l'amortissement par rayonnement, il n'est pas très élevé pour des fréquences inférieures à environ  $0.8f_c$ , où  $f_c$  est la fréquence critique de la plaque. Pour éviter un amortissement excessif dans le domaine audible, une valeur  $f_c > 20$  kHz est convenable. Pour un matériau donné, cette condition impose une borne supérieure sur l'épaisseur de la plaque. Il faut choisir alors une plaque mince, ce qui est en accord avec la condition de densité modale élevée, mais il faut s'assurer que l'amortissement thermoélastique ne devient pas trop important, car sa valeur asymptotique  $\alpha_\infty$  est en  $h^{-2}$ . A titre d'exemple, on a examiné ce compromis pour l'or et le platine, par le calcul de leur courbe d'amortissement total (thermoélastique et par rayonnement) à des épaisseurs différentes.

Une étude comparative sur l'influence des conditions aux limites a été menée pour trois simulations correspondant à la même plaque sous différentes conditions aux limites (encastrée, simplement appuyée et bords libres). La comparaison entre les trois RI simulées a été faite dans les domaines temporel et fréquentiel. Les résultats semblent indiquer que les conditions aux limites n'ont pas une influence importante sur l'effet de réverbération obtenu. L'intérêt de ce résultat est que la simulation de la RI d'une plaque simplement appuyée peut se faire très efficacement par synthèse modale à partir d'un banc d'oscillateurs numériques (voir l'annexe C). Néanmoins, ces résultats ne sont pas extrapolables à une plaque réelle, car les conditions du type encastrement ou appuis simples ne sont jamais conservatives et produisent souvent des pertes importantes par transfert d'énergie mécanique. Cet accroissement de l'amortissement aurait une

influence très forte sur l'effet de réverbération obtenu.

Finalement, on présente deux exemples de synthèse avec leur courbe d'amortissement et leurs reliefs de décroissance respectifs :

- une simulation à partir des paramètres physiques de la feuille d'or EMT240 qui produit une réverbération très longue. L'amortissement obtenu est très inférieur à celui de la mesure en raison de la non prise en compte de l'amortissement par transmission mécanique,
- une plaque en aluminium avec les paramètres géométriques du réverbérateur EMT140, qui produit une réverbération très courte.

# Différences finies pour une plaque circulaire

---

## 7.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter la simulation dans le domaine temporel des vibrations de plaques circulaires, en portant une attention particulière à l'étude de la stabilité des schémas aux différences finies (DF) proposés. Ce sujet n'a pas été traité pour l'instant dans la littérature .

Pour l'équation des ondes, plusieurs auteurs se sont intéressés à sa résolution temporelle dans une géométrie quelconque avec des DF en coordonnées cartésiennes [42; 43; 44]. Il s'agit de la technique connue sous le nom de "*embedded boundary technique*". Les conditions aux limites du domaine, qui ne sont pas forcément sur un point de la grille, sont approchées par interpolation. Cette méthode pose des problèmes de stabilité pour la simulation dans le domaine temporel et des termes additionnels dissipatifs doivent être ajoutés à l'équation pour assurer la stabilité de l'algorithme. Cette méthode n'est donc pas adaptée pour la synthèse sonore où l'on souhaite pouvoir contrôler la dissipation du système tout en garantissant la stabilité de la méthode. Pendant cette thèse, des efforts ont été réalisés pour appliquer cette méthode à une plaque circulaire encastrée en modifiant les opérateurs aux différences près des bords du domaine pour le cas le plus simple de la plaque encastrée, mais les systèmes numériques obtenus peuvent être instables. Cette instabilité ne peut être détectée qu'a posteriori, après construction du système discret, par une analyse des valeurs propres de la matrice d'amplification. Pour ces raisons on s'est orienté vers des DF en coordonnées polaires pour la résolution numérique dans un domaine circulaire, qui semble être plus adapté pour le problème à traiter.

Lors de la discrétisation d'une équation aux dérivées partielles par DF, la stabilité dépend des opérateurs discrets utilisés. La méthode classique de Von Neumann permet de déterminer des conditions de stabilité pour un schéma aux DF donné dans un milieu infini ou périodique. La condition de stabilité s'exprime souvent comme une borne sur un paramètre faisant intervenir les pas de discrétisation spatiale et temporelle. Cette méthode ne permet cependant pas de tenir compte des conditions aux limites (CL) numériques des DF. Or des CL continues conservatives peuvent devenir non conservatives lors de leur discrétisation. Ces CL peuvent apporter de l'énergie numérique à chaque pas de temps et rendre l'algorithme instable. L'analyse de la stabilité par des méthodes énergétiques permet de déterminer la façon d'approcher numériquement les CL continues conservatives afin de conserver l'énergie numérique. L'application de ces méthodes pour la synthèse sonore en acoustique musicale a été introduite par Bilbao [5; 7; 6].

Un autre avantage de ces méthodes, qui n'est pas exploité ici, est qu'elles permettent l'analyse d'équations non linéaires. Dans cette thèse on étudie l'équation linéaire de Kirchhoff-Love, mais une partie des résultats peuvent être utilisés pour l'analyse de la stabilité de l'équation de von Kármán, qui décrit les vibrations des plaques minces avec des non linéarités géométriques. En particulier, des travaux récents [5] montrent que pour les plaques rectangulaires les conditions aux limites conservatives du cas linéaire (équation de Kirchhoff-Love) sont les mêmes que pour le cas non linéaire géométrique (équation de von Kármán). Il semble raisonnable de penser que pour la discrétisation des mêmes équations dans un domaine circulaire on aura le même comportement.

Les types de schémas aux DF présentés ici sont d'ordre deux en temps et en espace. L'application des méthodes énergétiques pour des schémas d'ordre supérieur en espace est un problème plus complexe qui n'a pas été approfondi dans cette thèse. Pour ces schémas d'ordre supérieur, l'opérateur discret est modifié près des bords pour tenir compte des conditions aux limites. En général, on utilise un opérateur d'ordre 2 près des limites du domaine. Ce changement rend l'analyse complexe car l'opérateur discret n'a pas la même structure dans tout le domaine. On se limite donc volontairement à des opérateurs d'ordre 2 en espace, car le but de ces travaux est de faire une première contribution à l'utilisation des DF pour la résolution de l'équation des plaques dans un domaine circulaire.

L'application de la méthode énergétique à l'étude de la stabilité des schémas aux DF pour la résolution du cas simple à une dimension du problème de la barre d'Euler-Bernoulli est présentée à l'annexe A. L'extension aux DF en coordonnées polaires pour les plaques minces circulaires est plus complexe mais l'approche générale de la méthode est très similaire à celle de la barre. Ainsi, une partie des résultats obtenus pour la barre est utilisée pour l'analyse de la stabilité des plaques circulaires. **Il est donc recommandé de lire l'annexe A avant de lire la suite de ce chapitre.**

## 7.2 Système continu

L'équation de Kirchhoff-Love en coordonnées polaires peut s'écrire :

$$\rho h \ddot{w}(r, \theta, t) + D \Delta^2 w(r, \theta, t) = 0, \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (7.1)$$

où  $\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  est l'accélération et  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien, qui en coordonnées polaires est :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (7.2)$$

Un produit scalaire de l'espace  $L_2$  des fonctions de carré sommable en coordonnées polaires est :

$$(f, g)_{\mathcal{A}} = \iint_{\mathcal{A}} fg \, d\sigma = \iint_{\mathcal{A}} r(fg) \, dr \, d\theta, \quad (7.3)$$

$$(f, f)_{\mathcal{A}} = \|f\|_{\mathcal{A}}^2,$$

où  $\mathcal{A}$  correspond à la surface de la plaque de rayon  $R$ , i.e.  $0 \leq \theta < \pi$  et  $0 \leq r \leq R$ . L'élément différentiel de surface est noté  $d\sigma$ . Quand on passe aux coordonnées polaires,  $d\sigma = r \, dr \, d\theta$ , et un terme multiplicatif en  $r$  apparaît dans l'intégrale (7.3).

Pour rendre la lecture plus aisée, on définit la notation de produit scalaire  $\langle \diamond, r \diamond \rangle_{\mathcal{A}}$  qui fait apparaître explicitement le terme multiplicatif  $r$  :

$$\langle f, rg \rangle_{\mathcal{A}} = (f, g)_{\mathcal{A}} \quad (7.4)$$

### 7.2.1 Conditions aux limites

Pour simplifier l'écriture on n'écrit pas la dépendance en espace et en temps de  $w(r, \theta, t) = w$  et on utilise la notation suivante pour les dérivées partielles en espace :

$$(\diamond)_{,\alpha} = \frac{\partial \diamond}{\partial \alpha} \quad \text{et} \quad (\diamond)_{,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \diamond}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (7.5)$$

On s'intéresse aux trois types principaux de conditions aux limites non dissipatives sur le bord  $r = R$  de la plaque : appui simple, encastrement et bords libres [50].

Plaque encastree en  $r = R$  :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad w_{,r} = 0 \quad \text{en} \quad r = R. \quad (7.6)$$

Plaque sur des appuis simples en  $r = R$  :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad w_{,rr} + \frac{\nu}{R} w_{,r} + \frac{\nu}{R^2} w_{,\theta\theta} = 0 \quad \text{en} \quad r = R. \quad (7.7)$$

Plaque aux bords libres en  $r = R$  :

$$\begin{aligned} w_{,rr} + \frac{\nu}{R} w_{,r} + \frac{\nu}{R^2} w_{,\theta\theta} &= 0 & \text{en} \quad r = R & \quad \text{et} \\ w_{,rrr} + \frac{1}{R} w_{,rr} - \frac{1}{R^2} w_{,r} + \frac{2-\nu}{R^2} w_{,r\theta\theta} - \frac{3-\nu}{R^3} w_{,\theta\theta} &= 0 & \text{en} \quad r = R. & \end{aligned} \quad (7.8)$$

### 7.2.2 Énergie du système continu

On se propose ici d'obtenir une expression de l'évolution de l'énergie de la plaque à partir de l'équation de la dynamique (7.1) qui montrera que les conditions aux limites précédemment citées sont conservatives et que l'énergie du système est positive. On cherchera ensuite les mêmes propriétés pour l'énergie du schéma numérique, ce qui permettra d'en assurer la stabilité. Le produit scalaire de l'équation de la dynamique (7.1) avec la vitesse  $\dot{w}$  est :

$$\int \int_{\mathcal{A}} (\rho h \dot{w} \ddot{w} + D \dot{w} \Delta^2 w) \, d\sigma = 0, \quad (7.9)$$

Le premier terme de (7.9) peut être développé comme :

$$\int \int_{\mathcal{A}} \rho h \dot{w} \ddot{w} \, d\sigma = \frac{d}{dt} \int \int_{\mathcal{A}} \frac{\rho h}{2} \dot{w}^2 \, d\sigma = \frac{d}{dt} \mathfrak{T}, \quad (7.10)$$

et correspond à l'évolution temporelle de l'énergie cinétique de la plaque, appelée ici  $\mathfrak{T}$ , qui est toujours positive d'après (7.10).

Le deuxième terme de (7.9) correspond à l'énergie potentielle des force élastiques. Pour rendre la lecture plus aisée, on utilise par la suite la notation de produit scalaire définie par (7.4) :

$$\int \int_{\mathcal{A}} D \dot{w} \Delta^2 w \, d\sigma = D \langle \dot{w}, r \Delta^2 w \rangle_{\mathcal{A}}. \quad (7.11)$$

L'opérateur  $\Delta^2$  de (7.9) peut être développé pour aboutir à une expression détaillée :

$$\begin{aligned} \langle \dot{w}, r \Delta^2 w \rangle_{\mathcal{A}} = & \langle \dot{w}, r \left( w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} + \right. \\ & \left. \frac{2}{r^2} w_{,rr\theta\theta} - \frac{2}{r^3} w_{,r\theta\theta} + \frac{4}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^4} w_{,\theta\theta\theta\theta} \right) \rangle_{\mathcal{A}}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Cette expression de l'évolution de l'énergie n'est pas intéressante pour notre étude car la conservation et la positivité de l'énergie n'y sont pas exprimées explicitement. On cherche alors à l'écrire sous d'autres formes qui montrent explicitement ces propriétés. Le terme (7.11) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
D \langle \dot{w}, r \Delta^2 w \rangle_{\mathcal{A}} &= D \langle \Delta \dot{w}, r \Delta w \rangle_{\mathcal{A}} - D \mathfrak{B}_1 \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{D}{2} \langle \Delta w, r \Delta w \rangle_{\mathcal{A}} \right) - D \mathfrak{B}_1 \\
&= \frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{A}} \frac{D}{2} (\Delta w)^2 d\sigma - D \mathfrak{B}_1,
\end{aligned} \tag{7.13}$$

où  $D$  est une constante et  $\mathfrak{B}_1$  est :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_1 &= \int_0^{2\pi} \left[ r \dot{w}_{,r} \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) \right]_0^R d\theta + \\
&\int_0^{2\pi} \left[ r \dot{w} \left( -w_{,rrr} - \frac{1}{r} w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,r} - \frac{1}{r^2} w_{,r\theta\theta} + \frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta} \right) \right]_0^R d\theta.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

La première égalité de (7.13) s'obtient par une double intégration par parties (IPP) de (7.11).  $\mathfrak{B}_1$  est appelé terme de bord, car il fait intervenir uniquement les valeurs du déplacement et de la vitesse aux bords du domaine circulaire. En raison de la périodicité angulaire, i.e.  $w(r, 0) = w(r, 2\pi)$ , on a  $[w(r, \theta)]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$  lors des IPP. Uniquement les valeurs aux bornes de  $r$ , i.e.  $[w(r, \theta)]_{r=0}^{r=R} = 0$ , interviennent dans  $\mathfrak{B}_1$ . A partir de (7.9) on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\mathfrak{T} + \mathfrak{U}') &= D \mathfrak{B}_1, \quad \text{où :} \\
\mathfrak{T} &= \iint_{\mathcal{A}} \frac{\rho h}{2} \dot{w}^2 d\sigma \quad \text{et} \quad \mathfrak{U}' = \iint_{\mathcal{A}} \frac{D}{2} (\Delta w)^2 d\sigma
\end{aligned} \tag{7.15}$$

On remarque que, si  $\mathfrak{B}_1$  est nul, l'énergie totale du système continu est conservée. On parle alors de conditions aux limites conservatives. Par exemple pour la plaque encastree en  $R$ , les conditions aux limites (7.6) sont conservatives, car  $\mathfrak{B}_1$  est nul. D'autre part, (7.15) montre la positivité de l'énergie, car  $\mathfrak{T}$  et  $\mathfrak{U}'$  sont des formes quadratiques. Néanmoins, l'expression (7.15) ne suffit pas à juger de la conservation d'énergie pour les bords libres et les appuis simples. On est amené à chercher une autre façon d'écrire l'évolution de l'énergie potentielle.

**Remarque :**

La positivité de l'énergie n'est pas une condition suffisante pour montrer que le problème est bien posé. En particulier, il faut que l'énergie soit une **forme bilinéaire continue et coercive** sur un espace de Hilbert pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram [1], et ainsi assurer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle. La justification mathématique rigoureuse de l'équivalence entre la formulation variationnelle et l'équation de la dynamique nécessiterait de rentrer en profondeur dans la théorie des traces et des distributions ; elle est donc hors de la portée de cette thèse. Le lecteur intéressé peut s'adresser aux ouvrages [1; 58; 52; 20].

Une deuxième manière d'écrire la contribution de l'énergie potentielle à l'équation de la conser-

vation de l'énergie est :

$$\begin{aligned}
D \langle \dot{w}, r \Delta^2 w \rangle_{\mathcal{A}} &= D \left[ \left\langle \frac{1}{r} \dot{w}_{,r} + \frac{1}{r^2} \dot{w}_{,\theta\theta}, r \left( \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) \right\rangle_{\mathcal{A}} \right. \\
&\quad \left. + 2 \left\langle \left( \frac{1}{r} \dot{w}_{,\theta} \right)_{,r}, r \left( \frac{1}{r} w_{,\theta} \right)_{,r} \right\rangle_{\mathcal{A}} + \langle \dot{w}_{,rr}, r(w_{,rr}) \rangle_{\mathcal{A}} \right] - D \mathfrak{B}_2 \quad (7.16) \\
&= \frac{d}{dt} \frac{D}{2} \left( \left\| \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right\|_{\mathcal{A}}^2 + 2 \left\| \left( \frac{1}{r} w_{,\theta} \right)_{,r} \right\|_{\mathcal{A}}^2 + \|w_{,rr}\|_{\mathcal{A}}^2 \right) - D \mathfrak{B}_2.
\end{aligned}$$

où le terme de bord  $\mathfrak{B}_2$  est :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_2 &= \int_0^{2\pi} [r \dot{w}_r (w_{rr})]_0^R d\theta \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \left[ r \dot{w} \left( \frac{1}{r^2} w_{,r} + \frac{3}{r^3} w_{,\theta\theta} - \frac{2}{r^2} w_{,\theta\theta r} - w_{,rrr} - \frac{1}{r} w_{,rr} \right) \right]_0^R d\theta. \quad (7.17)
\end{aligned}$$

Cette expression a été prouvée par IPP, de façon similaire à (7.13) (on ne détaille pas les calculs pour alléger le texte, mais le lecteur peut refaire les calculs). A partir de (7.16) et de la première forme de l'énergie (7.13), on peut réécrire la variation de l'énergie potentielle comme :

$$\begin{aligned}
D \langle \dot{w}, r \Delta^2 w \rangle_{\mathcal{A}} &= D\nu \langle \dot{w}, r \Delta^2 w \rangle_{\mathcal{A}} + D(1-\nu) \langle \dot{w}, r \Delta^2 w \rangle_{\mathcal{A}} \\
&= D\nu (\langle \Delta \dot{w}, r \Delta w \rangle_{\mathcal{A}} - \mathfrak{B}_1) \\
&\quad + D(1-\nu) \left[ \left\langle \frac{1}{r} \dot{w}_{,r} + \frac{1}{r^2} \dot{w}_{,\theta\theta}, r \left( \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) \right\rangle_{\mathcal{A}} \right. \\
&\quad \left. + 2 \left\langle \left( \frac{1}{r} \dot{w}_{,\theta} \right)_{,r}, r \left( \frac{1}{r} w_{,\theta} \right)_{,r} \right\rangle_{\mathcal{A}} + \langle \dot{w}_{,rr}, r(w_{,rr}) \rangle_{\mathcal{A}} - \mathfrak{B}_2 \right] \quad (7.18) \\
&= \frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{A}} \left( \frac{D\nu}{2} (\Delta w)^2 + \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right)^2 + (w_{,rr})^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \left( \frac{1}{r} w_{,\theta} \right)_{,r} \right)^2 \right] \right) d\sigma - D\nu \mathfrak{B}_1 - D(1-\nu) \mathfrak{B}_2 = \frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{A}} \mathfrak{U} d\sigma - \mathfrak{B},
\end{aligned}$$

où  $\mathfrak{U}$  est la nouvelle façon d'écrire l'énergie potentielle :

$$\mathfrak{U} = \frac{D\nu}{2} (\Delta w)^2 + \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right)^2 + (w_{,rr})^2 + \left( \left( \frac{1}{r} w_{,\theta} \right)_{,r} \right)^2 \right], \quad (7.19)$$

Le nouveau terme de bord  $\mathfrak{B}$  est :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= D\nu \mathfrak{B}_1 + D(1-\nu) \mathfrak{B}_2 \\
&= D \int_0^{2\pi} \left[ r \dot{w}_{,r} \left( w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} + \frac{\nu}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) \right]_0^R d\theta \\
&\quad + D \int_0^{2\pi} \left[ r \dot{w} \left( -w_{,rrr} - \frac{1}{r} w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,r} - \frac{2-\nu}{r^2} w_{,r\theta\theta} + \frac{3-\nu}{r^3} w_{,\theta\theta} \right) \right]_0^R d\theta. \quad (7.20)
\end{aligned}$$

Et l'équation d'évolution de l'énergie totale de la plaque s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{H} = \mathfrak{B} \quad \text{où :} \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{T} + \mathfrak{U}, \quad (7.21)$$

où  $\mathfrak{H}$  est l'énergie totale du système, formée par l'énergie cinétique  $\mathfrak{T}$  et l'énergie potentielle  $\mathfrak{U}$ . D'après l'expression (7.17) les valeurs numériques de  $\mathfrak{U}$  et  $\mathfrak{U}'$  sont différents seulement si le terme de bord  $\mathfrak{B}_2$  est non nul.

L'expression (7.21) décrit l'évolution temporelle de l'énergie totale du système tout en montrant le caractère conservatif des conditions aux limites du type encastrement, appuis simples et bords libres. D'autre part la positivité de l'énergie est aussi montrée explicitement, car il s'agit d'une somme de termes positifs. Lors de l'analyse des schémas aux DF par la méthode énergétique on cherchera à obtenir une expression équivalente à (7.21) mais dans le domaine discret, ce qui permettra d'identifier sous quelle forme la discrétisation des conditions aux limites conserve l'énergie numérique du système et les conditions de positivité de l'énergie numérique. Pour l'étude de la stabilité du schéma dans un milieu infini on peut se contenter de la première expression obtenue pour l'évolution de l'énergie (7.15), qui s'obtient plus directement depuis l'équation de la dynamique. La conservation d'une énergie numérique positive assure la stabilité de l'algorithme des DF [5; 6].

### 7.2.3 Modes propres d'une plaque circulaire encadrée

On résume brièvement ici les résultats analytiques exacts concernant les fréquences propres et les déformées modales d'une plaque circulaire, mince, isotrope et encadrée sur son pourtour. Le problème à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned} (\Delta^2 - \gamma^4)w(r, \theta) &= 0, & \text{avec :} \quad \gamma^4 &= \frac{\omega^2 \rho h}{D}, \\ w(R, \theta) &= 0 \quad \text{et} \quad w_r(R, \theta) &= 0 & \text{sont les CL en } r = R. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Le problème est résolu dans [35] en séparant la solution en deux parties, puis en séparant la partie radiale et la partie azimutale de chaque solution. Les fréquences propres exactes sont obtenues à partir de la résolution de l'équation aux valeurs propres :

$$I_k(\gamma R)J_{k-1}(\gamma R) - J_k(\gamma R)I_{k-1}(\gamma R) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.23)$$

où  $J_k$  est la fonction de Bessel de première espèce et  $I_k$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce. Chaque équation (7.23) admet les solutions notées  $\gamma_{kn}$ , pour  $n = 1, 2, \dots$ , et dont on déduit par (7.22) les pulsations propres :

$$\omega_{kn} = \gamma_{kn}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \quad (7.24)$$

Les déformées modales  $w_{kn}$  sont données par :

$$w_{kn}(r, \theta) = (I_k(\gamma_{kn} R)J_k(\gamma_{kn} r) - J_k(\gamma_{kn} R)I_k(\gamma_{kn} r)) \begin{cases} \cos(k\theta) \\ \sin(k\theta) \end{cases} \quad (7.25)$$

où  $k = 0, 1, \dots$  et  $n = 1, 2, \dots$

Les indices  $k$  et  $n$  de chaque mode correspondent au nombre de lignes nodales (lignes d'amplitude nulle) de la déformée modale :  $k$  correspond au nombre de diamètres nodaux et  $n$  à celui des

lignes nodales circulaires concentriques. Quand  $k = 0$  le mode est axisymétrique. Quand  $k \neq 0$ , le mode en cosinus  $w_c$  et le modes en sinus  $w_s$  de (7.25) correspondent à une même fréquence propre  $\omega_{kn}$  de multiplicité 2. On a alors deux modes propres à une même fréquence dont les déformées modales sont identiques mais décalées en phase. Pour plus de détails le lecteur peut consulter [35; 50].

### 7.3 Différences finies en coordonnées polaires

Dans le domaine discret, sur une grille polaire on définit les pas de rayon  $h_r$  et le pas d'angle  $h_\theta$  constants. Pour une plaque circulaire de rayon  $R$ , les variables continues sont discrétisées par :

$$\begin{aligned} t = nk & \quad t \geq 0, & \quad n = 0, 1, \dots, \\ r = \ell h_r & \quad 0 \leq r \leq R, & \quad \ell = 0, 1, \dots, N_r, \\ \theta = mh_\theta & \quad 0 \leq \theta < 2\pi, & \quad m = 0, 1, \dots, N_\theta - 1, \\ w(r, \theta, t) & \approx w(\ell h_r, mh_\theta, nk) = w_{\ell, m}^n, \end{aligned} \quad (7.26)$$

où  $k = 1/Fs$  est le pas de discrétisation du temps, et  $h_r = R/N_r$  et  $h_\theta = 2\pi/N_\theta$  sont les pas de rayon et d'angle dans l'espace. On remarque que la variable angulaire  $\theta$  est périodique de période  $2\pi$ . Le domaine spatial discret défini ci-dessus correspond à la discrétisation du domaine  $\mathcal{A}$  défini pour le cas continu.

La transposition du produit scalaire continu vers le domaine discret a également un terme multiplicatif en  $r$  pour tenir compte des coordonnées polaires. Par souci de lisibilité des calculs, on note ce produit scalaire avec le  $r$  dans le crochet, mais on écrit la norme sans le terme en  $r$ . Dans un premier temps on s'intéresse au produit scalaire et à la norme sur un domaine infini  $\mathcal{A}_\infty$  discrétisé avec une grille polaire. De plus, on fait l'hypothèse que les fonctions  $f_{\ell, m}^n$  et  $g_{\ell, m}^n$  sont régulières et nulles sur les bords du domaine, i.e.  $\ell \rightarrow \infty$ . On écrit alors :

$$\langle f^n, rg^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = h_r h_\theta \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{N_\theta-1} r_\ell f_{\ell, m}^n g_{\ell, m}^n, \quad \|f^n\|_{\mathcal{A}_\infty} = \langle f^n, rf^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty}^{1/2} \geq 0. \quad (7.27)$$

Comme pour le cas continu, où le résultat du produit scalaire est un scalaire qui dépend du temps, on a dans l'équivalent discret un scalaire qui est repéré par l'indice de discrétisation temporel  $n$ . Par la suite, pour alléger la notation, on omet cet indice, et on écrit  $\langle f, rg \rangle_{\mathcal{A}_\infty}$  et  $\|f\|_{\mathcal{A}_\infty}$ .

#### 7.3.1 Opérateurs aux DF en coordonnées polaires

L'approximation du Laplacien en coordonnées polaires qu'on propose peut s'écrire de plusieurs façons différentes, mais il s'agit toujours du même opérateur discret :

$$\delta_\Delta = \frac{1}{r} \delta_{r+} ((\mu_r - r) \delta_{r-}) + \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta} = \delta_{rr} + \frac{1}{r} \delta_{r.} + \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta}, \quad (7.28)$$

où :

$$\begin{aligned}
\mu_{r-r_\ell} &= \frac{1}{2}(r_\ell + r_{\ell-1}) = r_\ell - h_r/2, \\
\delta_{r+} w_{\ell,m}^n &= \frac{1}{h_r}(w_{\ell+1,m}^n - w_{\ell,m}^n), \\
\delta_{r-} w_{\ell,m}^n &= \frac{1}{h_r}(w_{\ell,m}^n - w_{\ell-1,m}^n), \\
\delta_r \cdot w_{\ell,m}^n &= \frac{1}{2h_r}(w_{\ell+1,m}^n - w_{\ell-1,m}^n) = \frac{\delta_{r+} w_{\ell,m}^n + \delta_{r-} w_{\ell,m}^n}{2}, \\
\delta_{rr} w_{\ell,m}^n &= \frac{1}{h_r^2}(w_{\ell+1,m}^n - 2w_{\ell,m}^n + w_{\ell-1,m}^n) = \delta_{r+}(\delta_{r-} w_{\ell,m}^n) = \delta_{r-}(\delta_{r+} w_{\ell,m}^n), \\
\delta_{\theta\theta} w_{\ell,m}^n &= \frac{1}{h_\theta^2}(w_{\ell,m+1}^n - 2w_{\ell,m}^n + w_{\ell,m-1}^n).
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Dans le domaine infini décrit précédemment, pour  $f$  et  $g$  des fonctions régulières qui s'annulent à l'infini, i.e.  $\ell \rightarrow \infty$ , les opérateurs  $(1/r)\delta_{r-}$  et  $(1/r)\delta_{r+}$  ont les propriétés suivantes :

$$\langle f, r \frac{1}{r} \delta_{r+} g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = -\langle \delta_{r-} f, g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = -\langle \frac{1}{r} \delta_{r-} f, r g \rangle_{\mathcal{A}_\infty}, \tag{7.30}$$

$$\langle f, r \frac{1}{r} \delta_{r-} g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = -\langle \delta_{r+} f, g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = -\langle \frac{1}{r} \delta_{r+} f, r g \rangle_{\mathcal{A}_\infty}. \tag{7.31}$$

Dans ces conditions, l'opérateur discret  $(1/r)\delta_{r+}$  est l'adjoint formel de  $-(1/r)\delta_{r-}$ , et  $(1/r)\delta_{r-}$  est l'adjoint formel de  $-(1/r)\delta_{r+}$ . On remarque que cette propriété nécessite que les opérateurs soient le produit de  $\delta_{r-}$  et  $\delta_{r+}$  avec  $1/r$  à cause du terme multiplicatif en  $r$  du produit scalaire.

Pour  $f$  et  $g$  des fonctions régulières qui s'annulent à l'infini, l'approximation discrète du Laplacien (7.28) a la propriété d'opérateur formellement auto-adjoint :

$$\langle f, r \delta_\Delta g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = \langle \delta_\Delta f, r g \rangle_{\mathcal{A}_\infty}, \tag{7.32}$$

dont la démonstration est :

$$\begin{aligned}
\langle f, r \delta_\Delta g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} &= \langle f, r(\delta_{\Delta_r} + \delta_{\Delta_\theta})g \rangle_{\mathcal{A}_\infty}, \\
\langle f, r \delta_{\Delta_r} g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} &= \langle f, r \frac{1}{r} \delta_{r+} ((\mu_r - r)\delta_{r-}) \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = -\langle \delta_{r-} f, (\mu_r - r)\delta_{r-} g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} \\
&= -\langle (\mu_r - r)\delta_{r-} f, \delta_{r-} g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = \langle \delta_{r+} ((\mu_r - r)\delta_{r-} f), g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} \\
&= \langle \frac{1}{r} \delta_{r+} ((\mu_r - r)\delta_{r-} f), r g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = \langle \delta_{\Delta_r} f, r g \rangle_{\mathcal{A}_\infty},
\end{aligned} \tag{7.33}$$

$$\langle f, r \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta} \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = -\langle \delta_{\theta+} f, r \frac{1}{r^2} \delta_{\theta+} g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = \langle \frac{1}{r^2} \delta_{\theta-} \delta_{\theta+} f, r g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = \langle \delta_{\Delta_\theta} f, r g \rangle_{\mathcal{A}_\infty},$$

$$\text{et on a : } \langle f, r \delta_\Delta g \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = \langle \delta_\Delta f, r g \rangle_{\mathcal{A}_\infty}.$$

Une identité utile pour les manipulations algébriques ultérieures (voir (7.72)) est :

$$\begin{aligned}
\langle f, r \delta_{\Delta_r} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty} &= -\langle \delta_{r-} f, (\mu_r - r)\delta_{r-} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = -\langle \delta_{r-} f, r \delta_{r-} f \rangle + (h_r/2)\langle \delta_{r-} f, \delta_{r-} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty} \\
&= -\|\delta_{r-} f\|^2 + (h_r/2)\langle \delta_{r-} f, \delta_{r-} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty}.
\end{aligned} \tag{7.34}$$

L'intérêt de cette relation est la séparation du terme initial en deux termes, un négatif et l'autre positif, dont la valeur de la norme des opérateurs peut être bornée.

### 7.3.2 Bornes des opérateurs

Les bornes supérieures sur les normes des opérateurs polaires diffèrent un peu de celles des coordonnées cartésiennes. Elles seront utiles pour aboutir aux conditions de stabilité :

$$\|\delta_{\Delta}\|_{\mathcal{A}_{\infty}} \leq \frac{4}{h_r^2} + \frac{1}{r_{min}^2 h_{\theta}^2} = \frac{4}{h_r^2} \left(1 + \frac{1}{h_{\theta}^2}\right), \quad \text{où } r_{min} = h_r^2. \quad (7.35)$$

Cette borne fait intervenir le facteur  $1/r$ , qui est maximum pour le rayon le plus petit du domaine, ici  $r_{min} = h_r$ . On verra que cette dépendance de la norme de l'opérateur avec le rayon du domaine a des conséquences importantes sur la stabilité. **La condition de stabilité dépendra du rayon minimum du domaine.**

### 7.3.3 Singularité au centre

L'application de l'algorithme sur une plaque circulaire nécessite le calcul du Laplacien et du bilaplacien au centre de la plaque à chaque pas de temps. Néanmoins le centre est un point singulier pour l'approximation  $\delta_{\Delta}$  (7.28), car le rayon est nul. Une autre approximation du Laplacien est nécessaire.

On suppose une grille dont les pas de discrétisation radiale et angulaire sont  $h_r$  et  $h_{\theta}$ . Le nombre de points de discrétisation angulaire est alors  $N_{\theta} = 2\pi/h_{\theta}$ . On considère les  $N_{\theta}$  points de la première couronne, dont les coordonnées polaires sont  $r_j = h_r$  et  $\theta_j = jh_{\theta}$  pour  $j = [0, 1, \dots, N_{\theta} - 1]$ . En coordonnées cartésiennes on a :

$$\begin{aligned} x = r \cos(\theta) &\Rightarrow x_j = h_r \cos(jh_{\theta}), \\ y = r \sin(\theta) &\Rightarrow y_j = h_r \sin(jh_{\theta}). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Le développement de Taylor de chaque point  $(x_j, y_j)$  autour du centre  $(x, y) = (0, 0)$  est :

$$\begin{aligned} w(x_j, y_j) = &w(0, 0) + h_r \cos(jh_{\theta}) \frac{\partial w}{\partial x}(0, 0) + h_r \sin(jh_{\theta}) \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0) \\ &+ \frac{h_r^2}{2} \cos^2(jh_{\theta}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{h_r^2}{2} \sin^2(jh_{\theta}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(0, 0) \\ &+ 2 \frac{h_r^2}{2} \cos(jh_{\theta}) \sin(jh_{\theta}) \frac{\partial^2 w}{\partial xy}(0, 0) + O(h_r^3). \end{aligned} \quad (7.37)$$

La somme des déplacements des  $N_{\theta}$  points du premier cercle (7.37) est :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N_{\theta}-1} w(x_j, y_j) = &N_{\theta} w(0, 0) + h_r \frac{\partial w}{\partial x}(0, 0) \sum_{j=0}^{N_{\theta}-1} \cos(jh_{\theta}) + h_r \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0) \sum_{j=0}^{N_{\theta}-1} \sin(jh_{\theta}) \\ &+ \frac{h_r^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, 0) \sum_{j=0}^{N_{\theta}-1} \cos^2(jh_{\theta}) + \frac{h_r^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(0, 0) \sum_{j=0}^{N_{\theta}-1} \sin^2(jh_{\theta}) \\ &+ 2 \frac{h_r^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(0, 0) \sum_{j=0}^{N_{\theta}-1} \cos(jh_{\theta}) \sin(jh_{\theta}) + O(h_r^3), \end{aligned} \quad (7.38)$$

où les sommes de fonctions trigonométriques autour du cercle unitaire peuvent être simplifiées grâce aux identités :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N_\theta-1} \cos(jh_\theta) &= \sum_{j=0}^{N_\theta-1} \sin(jh_\theta) = \sum_{j=0}^{N_\theta-1} \cos(jh_\theta) \sin(jh_\theta) = 0, \\ \sum_{j=0}^{N_\theta-1} \cos^2(jh_\theta) &= \sum_{j=0}^{N_\theta-1} \sin^2(jh_\theta) = \frac{N_\theta}{2}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

et l'expression (7.38) devient :

$$\sum_{j=0}^{N_\theta-1} w(x_j, y_j) = N_\theta w(0, 0) + \frac{h_r^2}{2} \frac{N_\theta}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(0, 0) \right) + O(h_r^4). \quad (7.40)$$

On peut alors isoler une approximation du Laplacien au centre :

$$\Delta w|_{(0,0)} = \frac{4}{h_r^2} \left( \frac{\sum_{j=0}^{N_\theta-1} w(x_j, y_j)}{N_\theta} - w(0, 0) \right) + O(h_r^2), \quad (7.41)$$

Sur la grille des DF les déplacements intervenant dans (7.41) s'écrivent :

$$w(0, 0) \Rightarrow w_0, \quad w(x_j, y_j) \Rightarrow w_{1,j}. \quad (7.42)$$

On peut alors écrire l'opérateur Laplacien aux différences spécifique au centre du domaine comme :

$$\widetilde{\delta}_\Delta w_0 = \frac{4}{h_r^2} (\overline{w}_{1,\cdot} - w_0), \quad \text{où : } \overline{w}_{1,\cdot} = \frac{\sum_{j=0}^{N_\theta-1} w_{1,j}}{N_\theta}. \quad (7.43)$$

L'approximation du Laplacien à l'origine, notée  $\widetilde{\delta}_\Delta$ , s'obtient à partir du déplacement à l'origine  $w_0$  et de la moyenne des déplacements des points situés au premier pas de rayon de la grille  $\overline{w}_{1,\cdot}$ . L'erreur de l'approximation est en  $h_r^2$ , car les termes d'ordre 3 des développements de Taylor (7.37) sont nuls (les sommes de  $\sin^3$ ,  $\sin^2 \cdot \cos$ ,  $\sin \cdot \cos^2$  et  $\cos^3$  sur le cercle sont nulles).

Le bilaplacien qui intervient dans l'équation des plaques peut s'obtenir comme la composition du Laplacien avec lui-même. L'opérateur  $\delta_\Delta$  est remplacé par  $\widetilde{\delta}_\Delta$  quand on se trouve au centre du domaine, ce qui permet d'écrire :

$$\widetilde{\delta}_\Delta(\delta_\Delta w_0) = \frac{4}{h_r^2} \left( \overline{\delta_\Delta w_{1,\cdot}} - \widetilde{\delta}_\Delta w_0 \right), \quad (7.44)$$

et après quelques manipulations algébriques de (7.44) on obtient :

$$\widetilde{\delta}_\Delta(\delta_\Delta w_0) = \frac{6}{h_r^2} \left( \frac{\sum_{j=0}^{N_\theta-1} w_{2,j}}{N_\theta} - 4 \frac{\sum_{j=0}^{N_\theta-1} w_{1,j}}{N_\theta} + 3w_0 \right) + O(h_r^2). \quad (7.45)$$

## 7.4 Schéma explicite pour les plaques polaires

L'analyse de la stabilité pour les plaques circulaires est assez similaire à celle faite pour les barres. Les différences à prendre en compte sont les deux dimensions du domaine, les opérateurs

en coordonnées polaires et le facteur  $r$  qui intervient dans le produit scalaire. Premièrement on présente l'analyse du schéma pour le milieu infini. La prise en compte des conditions aux limites est présentée au §7.4.2. Finalement un exemple de simulation est montré au §7.4.4.

Un schéma aux DF explicite pour résoudre numériquement l'équation de la dynamique (7.1) est :

$$\delta_{tt}w_{\ell,m}^n + \kappa^2 \delta_{\Delta} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n = 0, \quad \text{avec : } \kappa^2 = \frac{D}{\rho h} \quad (7.46)$$

Le Laplacien  $\delta_{\Delta}$  (7.28) est un opérateur aux différences en coordonnées polaires et l'approximation de la dérivée seconde en temps  $\delta_{tt}$  est le même opérateur que celui utilisé pour les barres au §A.

### 7.4.1 Analyse de la stabilité en milieu infini

L'évolution de l'énergie discrète s'obtient comme le produit scalaire d'une approximation discrète de la vitesse  $\delta_t w_i^n$  avec l'équation de la dynamique (7.46) :

$$\langle \delta_t w_i^n, r(\delta_{tt}w_{\ell,m}^n + \kappa^2 \delta_{\Delta} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n) \rangle_{\mathcal{A}_{\infty}} = 0, \quad (7.47)$$

Grâce à la propriété du Laplacien en coordonnées polaires (7.32), on arrive à une conservation de l'énergie égale à celle trouvée pour la barre, mais avec le Laplacien en polaires au lieu de  $\delta_{xx}$  :

$$\delta_{t+} \mathfrak{h} = \delta_{t+} \left[ \frac{1}{2} \|\delta_{t-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_{\infty}}^2 + \kappa^2 \frac{1}{2} \langle \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n, e_{t-} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n \rangle_{\mathcal{A}_{\infty}} \right] = 0, \quad (7.48)$$

Dans le milieu infini l'énergie numérique se conserve. Une condition suffisante de stabilité est alors la positivité de l'énergie numérique  $\mathfrak{h}$ . La condition de stabilité du système s'écrit :

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{2} \|\delta_{t-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_{\infty}}^2 + \frac{\kappa^2}{2} \|\mu_{t-} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_{\infty}}^2 - \frac{\kappa^2 k^2}{8} \|\delta_{t-} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_{\infty}}^2 \geq 0, \quad (7.49)$$

On peut négliger le deuxième terme qui est positif et borner le troisième terme par sa borne supérieure (7.35). On a :

$$\|\delta_{t-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_{\infty}}^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\kappa^2 k^2}{8} \frac{16}{h_r^4} \left( 1 + \frac{1}{h_{\theta}^2} \right)^2 \right) \geq 0, \quad (7.50)$$

$$r_p \leq \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad r_p = \frac{\kappa k}{h_r^2} \left( 1 + \frac{1}{h_{\theta}^2} \right),$$

On a obtenu une condition de stabilité similaire à celle obtenue pour le schéma explicite de la barre, mais le nombre de CFL des plaques polaires,  $r_p$ , est différent de celui des barres (pour les barres  $r = \kappa k / h_r^2$ ). Les deux pas de discrétisation spatiale  $h_r$  et  $h_{\theta}$  interviennent dans  $r_p$ . Cette condition est plus restrictive que pour les barres car  $r_p$  est toujours plus grand que  $r$ . Une remarque importante concerne la borne (7.35) qui détermine la stabilité. La stabilité dépend du rayon minimum de la plaque, qui pour une plaque circulaire sans trou au centre est  $h_r$ . C'est alors ce premier anneau de la grille qui détermine la stabilité de l'algorithme. Cela est logique, car la distance entre deux points voisins de ce premier cercle est plus petite que pour les points des cercles de rayon supérieur, et la condition de stabilité pour un pas temporel donné s'exprime souvent comme une valeur minimale du pas de discrétisation spatiale. Si par exemple le domaine est un anneau dont le rayon minimum est  $r_{min} = \ell h_r$ , au lieu d'une plaque, la condition de stabilité est moins restrictive :

$$r'_p \leq \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad r'_p = \frac{\kappa k}{h_r^2} \left( 1 + \frac{1}{\ell h_{\theta}^2} \right), \quad (7.51)$$

### 7.4.2 Analyse de la stabilité en milieu fini

On cherche à inclure les bords extérieurs de la plaque dans l'analyse énergétique afin d'obtenir des conditions de conservation de l'énergie faisant intervenir les valeurs de  $w^n$  aux bords du domaine et en déduire des approximations des conditions aux limites numériques qui conservent l'énergie. Pour l'analyse on utilise le produit scalaire suivant :

$$\langle f, rg \rangle = h_r h_\theta \sum_{\ell=0}^{N_r} \sum_{m=0}^{N_\theta-1} r_\ell f_{\ell,m} g_{\ell,m} \quad \|f\| = \langle f, rf \rangle^{1/2} \geq 0 \quad (7.52)$$

#### 7.4.2.1 Conditions aux limites du type encastrement

On se concentre sur l'étude à l'extérieur de la plaque et on supposera qu'il n'y a pas de termes de bord qui apparaissent au centre de la plaque  $r = 0$  ou  $\ell = 0$ . Une relation importante est :

$$\begin{aligned} \langle v, r\delta_\Delta \delta_\Delta w \rangle &= \langle \delta_\Delta v, r\delta_\Delta w \rangle + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \quad \text{avec :} \\ \mathbf{b}_1 &= -h_\theta \sum_{m=0}^{N_\theta-1} [\mu_{r+}(r)(\delta_{r+}v)(\delta_{rr}w + \frac{1}{r}\delta_r.w + \frac{1}{r^2}\delta_{\theta\theta}w)]_{N_r,m}, \\ \mathbf{b}_2 &= h_\theta \sum_{m=0}^{N_\theta-1} [\mu_{r+}(r)v\delta_{r+}(\delta_{rr}w + \frac{1}{r}\delta_r.w + \frac{1}{r^2}\delta_{\theta\theta}w)]_{N_r,m}, \end{aligned} \quad (7.53)$$

qui est l'équivalent numérique de l'équation continue (7.13). La démonstration de ce résultat s'obtient par manipulation des sommes des produits scalaires, de la même façon que pour la barre mais avec plus de complexité algébrique en raison des deux dimensions et des coordonnées polaires. C'est l'équivalent numérique de l'intégration par parties. On remarque que en raison de la périodicité angulaire des fonctions en la variable  $\theta$  il n'y a pas de terme de bord qui fait intervenir la somme des valeurs sur tous les rayons discrets évalué aux bornes du domaine angulaire. Lors du calcul réalisé pour obtenir (7.53) ces termes de bord angulaires s'annulent. L'équation d'évolution de l'énergie discrète peut alors s'écrire :

$$\delta_{t+}\mathfrak{h} = -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, \quad (7.54)$$

d'où on peut déduire une forme conservative pour les CL numériques de la plaque encastree, qui est :

$$w_{N_r,m} = 0, (\delta_{r+}w)_{N_r,m} = 0 \implies v_{N_r,m} = 0, (\delta_{r+}v)_{N_r,m} = 0, \quad (7.55)$$

car si le déplacement  $w$  et sa dérivée  $\delta_{r+}w$  sont toujours nuls, leurs dérivées temporelles  $v$  et  $\delta_{r+}v$  sont aussi nulles.

Néanmoins ce développement n'est pas suffisant car on n'a pas obtenu les CL numériques conservatives pour les appuis simples ni pour les bords libres.

#### 7.4.2.2 Conditions aux limites du type appuis simples ou bords libres

La deuxième façon d'écrire l'énergie qu'on avait trouvé pour le cas continu (7.16), et qui permettait de trouver ces dernières CL, peut aussi s'écrire pour le cas discret. On détaille les étapes

principales du calcul sans rentrer dans le détail des manipulations algébriques. On décompose le produit scalaire discret suivant comme :

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\Delta} v, r \delta_{\Delta} w \rangle &= \langle \delta_{rr} v, r \delta_{rr} w \rangle + \langle (\frac{1}{r} \delta_r + \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta}) v, r (\frac{1}{r} \delta_r + \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta}) w \rangle \\ &+ \langle \delta_{rr} v, r (\frac{1}{r} \delta_r + \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta}) w \rangle + \langle (\frac{1}{r} \delta_r + \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta}) v, r \delta_{rr} w \rangle. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Les deux premiers termes sont des normes aux carrées équivalentes à celles trouvées pour le cas continu. Les deux derniers termes doivent être développés pour arriver à un équivalent discret du terme  $2 \langle (\frac{1}{r} w_{\theta})_r, r (\frac{1}{r} w_{\theta})_r \rangle$  de (7.16). On peut alors utiliser l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} &\langle \delta_{rr} v, r (\frac{1}{r} \delta_r + \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta}) w \rangle + \langle (\frac{1}{r} \delta_r + \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta}) v, r \delta_{rr} w \rangle = \\ &2 \langle \delta_{r-} (\frac{1}{r} \delta_{\theta-} v), \mu_{r-}(r) \delta_{r-} (\frac{1}{r} \delta_{\theta-} w) \rangle + \mathfrak{b}_3, \\ &\text{avec :} \quad \mathfrak{b}_3 = \mathfrak{b}_{3_1} + \mathfrak{b}_{3_2} + \mathfrak{b}_{3_3}, \quad \text{où :} \\ &\mathfrak{b}_{3_1} = h_{\theta} \sum_{m=0}^{N_{\theta}} [v \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta} w]_{N_r, m}, \end{aligned} \quad (7.57)$$

$$\mathfrak{b}_{3_2} = h_{\theta} \sum_{m=0}^{N_{\theta}} [(\delta_{r+} v)(\delta_{r+} w)]_{N_r, m},$$

$$\mathfrak{b}_{3_3} = h_{\theta} \sum_{m=0}^{N_{\theta}} [(\delta_{r+} v)(\frac{1}{r} \delta_{\theta\theta} w) - v \delta_{r+} (\frac{1}{r} \delta_{\theta\theta} w)]_{N_r, m},$$

dont la démonstration n'est pas détaillée afin d'alléger la présentation. Et on peut alors écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2 + \mathfrak{b}_3, \quad \text{où :} \\ \mathbf{u}_1 &= \langle \delta_{\Delta} v, r \delta_{\Delta} w \rangle, \\ \mathbf{u}_2 &= \langle \delta_{rr} v, r \delta_{rr} w \rangle + \langle (\frac{1}{r} \delta_r + \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta}) v, r (\frac{1}{r} \delta_r + \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta}) w \rangle + \\ &2 \langle \delta_{r-} (\frac{1}{r} \delta_{\theta-} v), \mu_{r-}(r) \delta_{r-} (\frac{1}{r} \delta_{\theta-} w) \rangle. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Cette relation montre les termes de bord supplémentaires qui apparaissent quand on passe de  $\langle \delta_{\Delta} v, r \delta_{\Delta} w \rangle$  à la somme de produits scalaires au carré. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \langle v, r \delta_{\Delta} \delta_{\Delta} w \rangle &= \nu (\mathbf{u}_1 + \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) + (1 - \nu) (\mathbf{u}_2 + \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3) \\ &= \nu \mathbf{u}_1 + (1 - \nu) \mathbf{u}_2 + \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + (1 - \nu) \mathfrak{b}_3, \end{aligned} \quad (7.59)$$

et on peut ainsi écrire l'équation d'évolution de l'énergie comme :

$$\delta_t \mathfrak{h} = \mathfrak{b} \quad \text{où :} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + (1 - \nu) \mathfrak{b}_3 \quad (7.60)$$

Le développement de ces termes de bord permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = & h_\theta \sum_{m=0}^{N_\theta} \left[ (\delta_{r+} v) \left( \mu_{r+}(r) \delta_\Delta(w) - (1-\nu) \delta_{r+}(w) - (1-\nu) \frac{1}{r} \delta_{\theta\theta}(w) \right) \right. \\ & \left. + (v) \left( \mu_{r+}(r) \delta_{r+}(\delta_\Delta(w)) + (1-\nu) \frac{1}{r} \delta_{r+}(\delta_{\theta\theta}(w)) - (1-\nu) \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta}(w) \right) \right]_{N_r, m} = 0 \end{aligned} \quad (7.61)$$

On peut identifier les conditions aux limites numériques conservatives correspondant à la plaque avec les bords encastres, sur des appuis simples et libres. Ces conditions s'appliquent sur chaque point du bord  $w_{N_r, m}$ , où  $m = [0, N_\theta]$ , correspondant à un rayon  $r = R$ . Alors on a  $\mu_{r+}(r) = (R + \frac{h_r}{2})$ . Pour la plaque avec les bords extérieurs encastres on a :

$$w_{N_r, m} = 0 \quad \text{et} \quad \delta_{r+} w_{N_r, m} = 0, \quad (7.62)$$

Pour la plaque avec les bords extérieurs sur des appuis simples on a :

$$\begin{aligned} w_{N_r, m} = 0 \quad \text{et} \\ \left[ \left( R + \frac{h_r}{2} \right) \delta_\Delta(w) - (1-\nu) \delta_{r+}(w_{N_r, m}) - (1-\nu) \frac{1}{R} \delta_{\theta\theta}(w_{N_r, m}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.63)$$

Et pour la plaque aux bords extérieurs libres on a :

$$\begin{aligned} \left[ \left( R + \frac{h_r}{2} \right) \delta_\Delta(w_{N_r, m}) - (1-\nu) \delta_{r+}(w_{N_r, m}) - (1-\nu) \frac{1}{R} \delta_{\theta\theta}(w_{N_r, m}) \right] = 0 \quad \text{et} \\ \left[ \left( R + \frac{h_r}{2} \right) \delta_{r+}(\delta_\Delta(w_{N_r, m})) + (1-\nu) \frac{1}{R} \delta_{r+}(\delta_{\theta\theta}(w_{N_r, m})) - (1-\nu) \frac{1}{R^2} \delta_{\theta\theta}(w_{N_r, m}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.64)$$

Cette analyse a permis de trouver la forme des conditions aux limites numériques conservatives qui sont comparables aux conditions aux limites continues données par (7.6), (7.7) et (7.8). On remarque que la forme de ces conditions aux limites numériques est simple pour le cas de l'encastrement. Néanmoins pour le cas des appuis simples et des bords libres le choix des approximations numériques n'est pas intuitif, mais grâce à cette analyse elles ont pu être identifiées.

### 7.4.3 Méthodologie d'analyse de la précision des simulations

La précision d'un schéma aux DF est le plus souvent connue par l'étude de la propagation d'ondes planes dans le système numérique. On obtient ainsi la dispersion numérique (cf. §4.3.3 pour les plaques rectangulaires). En coordonnées polaires le problème est plus délicat car la propagation d'une onde plane dans une direction quelconque ne suit pas le système de coordonnées polaires. De plus, la distance entre deux points contigus selon le pas d'angle de la grille n'est pas constante dans le milieu car elle augmente quand on s'éloigne du centre du domaine. La vitesse de propagation numérique dépend alors de la position radiale  $r_i$ . En raison de la complexité de l'étude et de la difficulté à interpréter les résultats du fait de la dépendance de la dispersion numérique avec la position, on étudie le comportement global des schémas en comparant les fréquences propres du système numérique avec celles de référence du système continu. Cette étude est faite ici pour l'exemple d'une plaque encastree.

Une analyse détaillée du système numérique est proposée à partir de la résolution du problème aux valeurs propres de la matrice d'amplification du système discret  $\mathbf{A}$ . Cette matrice est obtenue

en écrivant les équations aux DF sous forme matricielle. Elle relie le vecteur d'état du système à l'instant  $n + 1$  au vecteur d'état du système à l'instant  $n$ . Le vecteur d'état  $\mathbf{x}^n$  est le vecteur colonne des déplacements de tous les points de la grille à l'instant  $n$  suivi des déplacements à l'instant  $n - 1$  :

$$\mathbf{x}^n = [w_0^n, w_{1,1}^n, w_{1,2}^n \cdots w_{N_r-1, N_\theta}^n, w_0^{n-1} \cdots w_{N_r-1, N_\theta}^{n-1}]^T, \quad (7.65)$$

où les points du bord, d'indice  $N_r$  et situés à  $r = R$ , ne sont pas pris en compte dans  $\mathbf{x}^n$  parce qu'ils sont immobiles et n'apportent pas d'information à la dynamique du système numérique. Ces points ne sont pas des degrés de liberté (ddl) du système numérique pour la plaque encadrée. Le nombre de points utiles de la grille est  $N_{tot} = (N_r - 1)N_\theta + 1$ , où le  $+1$  correspond au centre de la plaque. L'équation (7.46) sous forme matricielle s'écrit :

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}^n, \quad \text{avec :} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{I}_{(N_{tot})} \\ \mathbf{I}_{(N_{tot})} & \mathbf{O}_{(N_{tot})} \end{pmatrix}, \quad (7.66)$$

où la dimension de  $\mathbf{A}$  est  $2N_{tot} \times 2N_{tot}$  et la dimension de chacun des blocs  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{I}_{(N_{tot})}$  et  $\mathbf{O}_{(N_{tot})}$  est  $N_{tot} \times N_{tot}$ . La matrice identité est notée  $\mathbf{I}_{(N_{tot})}$  et la matrice nulle est notée  $\mathbf{O}_{(N_{tot})}$ .

On obtient les fréquences propres du système numérique à partir des valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice d'amplification  $\mathbf{A}$  par :

$$f_i = (Fs/2) \arg(\lambda_i)/\pi, \quad (7.67)$$

où  $\arg(\lambda_i)$  est l'argument de la valeur propre complexe  $\lambda_i$ . Les vecteurs propres de cette matrice correspondent aux déformées modales associées à chaque fréquence propre. On peut ainsi identifier les modes propres du système numérique et les comparer les  $f_i$  aux résultats analytiques exacts pour les modes propres d'une plaque circulaire encadrée sur ses bords. Pour le système numérique, comme pour le cas continu (§7.2.3), on obtient deux modes propres indépendants à la même fréquence quand le nombre de diamètres nodaux  $k$  est différent de zéro.

#### 7.4.4 Exemple de simulation

On présente un exemple de simulation des vibrations de flexion d'une plaque circulaire, mince, isotrope et encadrée sur son pourtour en  $r = R$  avec le schéma explicite (7.46). On excite le système numérique avec un déplacement initial  $w_{ini}(x, y)$  centré sur  $(x_i, y_i)$  et réparti spatialement suivant un cosinus à deux dimensions :

$$\begin{aligned} w_{ini}(x, y) &= 0.5(1 + \cos(\pi d_c/R_{exc})) & \text{si : } d_c \leq R_{exc}, \\ w_{ini}(x, y) &= 0 & \text{si : } d_c > R_{exc}, \end{aligned} \quad (7.68)$$

$$\text{avec : } d_c = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2},$$

où  $d_c$  est la distance entre le point de coordonnées  $(x, y)$  et le centre  $(x_i, y_i)$  du cosinus à deux dimensions, dont la demi-largeur est  $R_{exc}$ . Pour cet exemple on choisit une plaque de rayon  $R = 1.114$  et avec la constante  $\kappa = 70 \text{ m}^2/\text{s}$ . On fixe la fréquence d'échantillonnage à  $Fs = 16 \text{ kHz}$ .

Une façon d'appliquer la condition de stabilité est de choisir à l'avance le rapport entre le pas de discrétisation de rayon et d'angle  $\sigma = h_\theta/h_r$  : pour l'instant on choisit  $\sigma = \pi$  car c'est la valeur avec laquelle on obtient les meilleurs résultats. Si on introduit  $h_\theta = \sigma h_r$ ,  $k = 1/Fs$  et  $\kappa$  dans la condition de stabilité (7.72), la seule inconnue restante est le pas de rayon  $h_r$ . On obtient ainsi la valeur minimale de  $h_r$  qui garantit la stabilité. On obtient  $h_\theta$  à partir de sa valeur minimale  $\sigma h_r$  et en imposant que  $2\pi/h_\theta$  soit un entier.

Pour cet exemple on obtient ainsi 7 pas de discrétisation du rayon, dont 1 correspondant au centre ( $N_r = 6$ ), et 10 pas de discrétisation de l'angle  $\theta \in [0; 2\pi[$  ( $N_\theta = 10$ ). En raison des CL d'encastrement, le dernier pas de rayon,  $r = R$ , correspond à un déplacement nul et peut être éliminé, car il n'apporte pas d'information au système. On a alors  $N_{tot} = 51$  points utiles dans la grille et le système numérique a  $2N_{tot}$  degrés de liberté (ddl). Le nombre de ddl correspond au rang de la matrice d'amplification du système numérique. Les paramètres de la simulation sont résumés au tableau 7.1. La Figure 7.1 montre la grille obtenue avec la condi-

$\kappa$ [m <sup>2</sup> /s]	$F_s$ [Hz]	$\sigma$ [ ]	$h_r$ [m]	$R$ [m]	$h_\theta$ [rad]	$N_r$	$N_\theta$	$N_{tot}$
70	16000	$\pi$	0.1857	1.114	0.6283	6 (+1)	10	51

TAB. 7.1: Paramètres de la simulation de la plaque encastree avec le schéma explicite.

tion de stabilité, le déplacement initial imposé aux points de la grille à partir de (7.68) et le point d'observation du déplacement. L'excitation initiale est centrée sur  $(x_i, y_i) = (0.4, 0.4)$  et sa

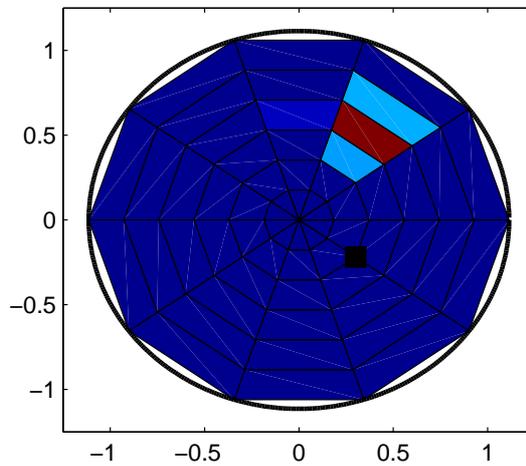


FIG. 7.1: Configuration de la simulation : grille, déplacement initial (code de couleurs) et point d'observation sur la grille  $(x_o, y_o) = (0.3004, -0.2183)$  (carré noir).

demi-largeur est  $R_{exc} = 0.3$  m. On observe le déplacement au point de la grille le plus proche de  $(x'_o, y'_o) = (0.32, -0.24)$ . La Figure 7.2 montre le déplacement au point d'observation de la grille obtenu avec la simulation ici décrite. On observe sur la Figure 7.2 que le spectre du signal de déplacement obtenu est vide à partir d'environ 1.8 kHz, au lieu d'arriver jusqu'à la fréquence de Shannon 8 kHz, comme le fait le spectre de la solution exacte continue.

Ce résultat peut se comprendre en comparant le nombre de ddl de la simulation, qui est le double du nombre de points de discrétisation utiles (cf. 7.4.3), avec celui du système continu, qui est 2 fois le nombre de modes propres en dessous de  $F_s/2$ . Pour la simulation on a  $N_{ddl} = 51 \cdot 2 = 102$  ddl. Pour le problème continu équivalent on a 199 modes en dessous de 8 kHz, et donc 398 ddl, soit 4 fois plus que pour la simulation. Il est donc illusoire d'espérer qu'un système numérique avec 4 fois moins de ddl que le système continu soit capable de les représenter correctement.

Pour l'exemple traité ici les 12 premiers modes du système numérique avec des fréquences différentes sont montrées par la Figure 7.8. Pour chaque mode on compare la fréquence propre numérique  $f_n$  obtenue avec (7.67) avec la fréquence propre analytique de référence  $f_a$  obtenue

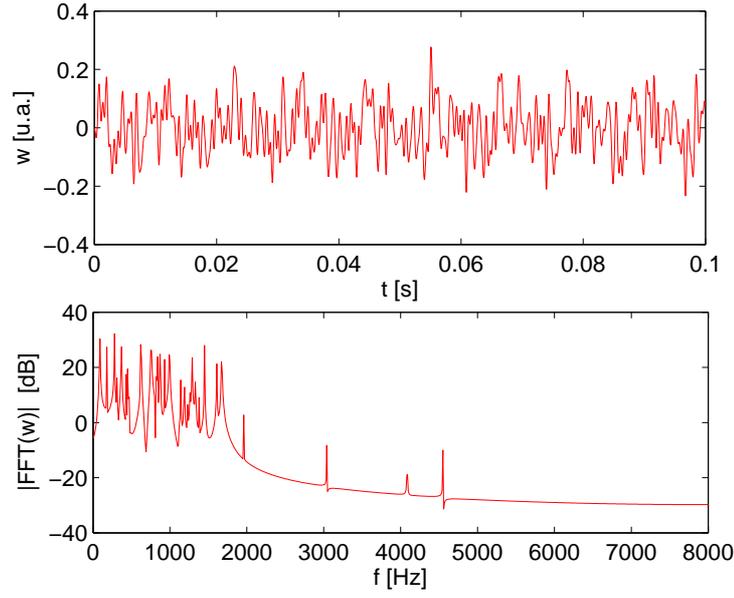


FIG. 7.2: Déplacement au point d'observation et module de sa Transformée de Fourier.

avec (7.24). Cette comparaison est possible grâce à l'identification des déformées modales qui nous informent sur l'identité d'un mode numérique donné en termes de son nombre de lignes nodales circulaires  $n$  et radiales  $k$ . On montre aussi l'erreur  $\varepsilon$  en % du système numérique sur chaque fréquence propre :

$$\varepsilon = 100 \frac{f_a - f_n}{f_a}. \quad (7.69)$$

L'erreur moyenne obtenue pour les 6 premières fréquences propres est de 8.96%. Au vu de ces résultats il semble nécessaire de trouver un schéma numérique dont la condition de stabilité soit moins restrictive que pour le schéma (7.46), afin de pouvoir aboutir à un système numérique avec un nombre de ddl similaire à celui du système continu équivalent. On se tourne vers des schémas implicites. L'inconvénient principal de ces schémas est leur coût de calcul. Ils nécessitent la résolution d'un système d'équations à chaque pas de temps, au lieu de la résolution récursive des schémas explicites.

## 7.5 Schéma implicite pour les plaques polaires

On présente ici l'application du schéma implicite proposé pour les barres au §A.4 aux plaques circulaires en coordonnées polaires. Le schéma proposé est donc :

$$(1 + \alpha \kappa k \delta_\Delta + \beta \kappa^2 k^2 \delta_\Delta \delta_\Delta) \delta_{tt} w_{\ell,m}^n + \kappa^2 \delta_\Delta \delta_\Delta w_{\ell,m}^n = 0, \quad (7.70)$$

avec les paramètres  $\alpha \geq 0$  et  $\beta \in [0; 0.5]$ .

Pour l'étude de la stabilité on ne tient pas compte des conditions aux limites. On fait l'étude sur un domaine infini  $\mathcal{A}_\infty$ , i.e.  $R \rightarrow \infty$ , et on suppose que les fonctions s'annulent à l'infini. Le produit scalaire utilisé est donc  $\langle f, rg \rangle_{\mathcal{A}_\infty}$ , qui est défini par (7.27). On fait l'hypothèse que les conditions aux limites conservatives trouvées pour le schéma explicite sont aussi conservatives avec le schéma implicite ici présenté.

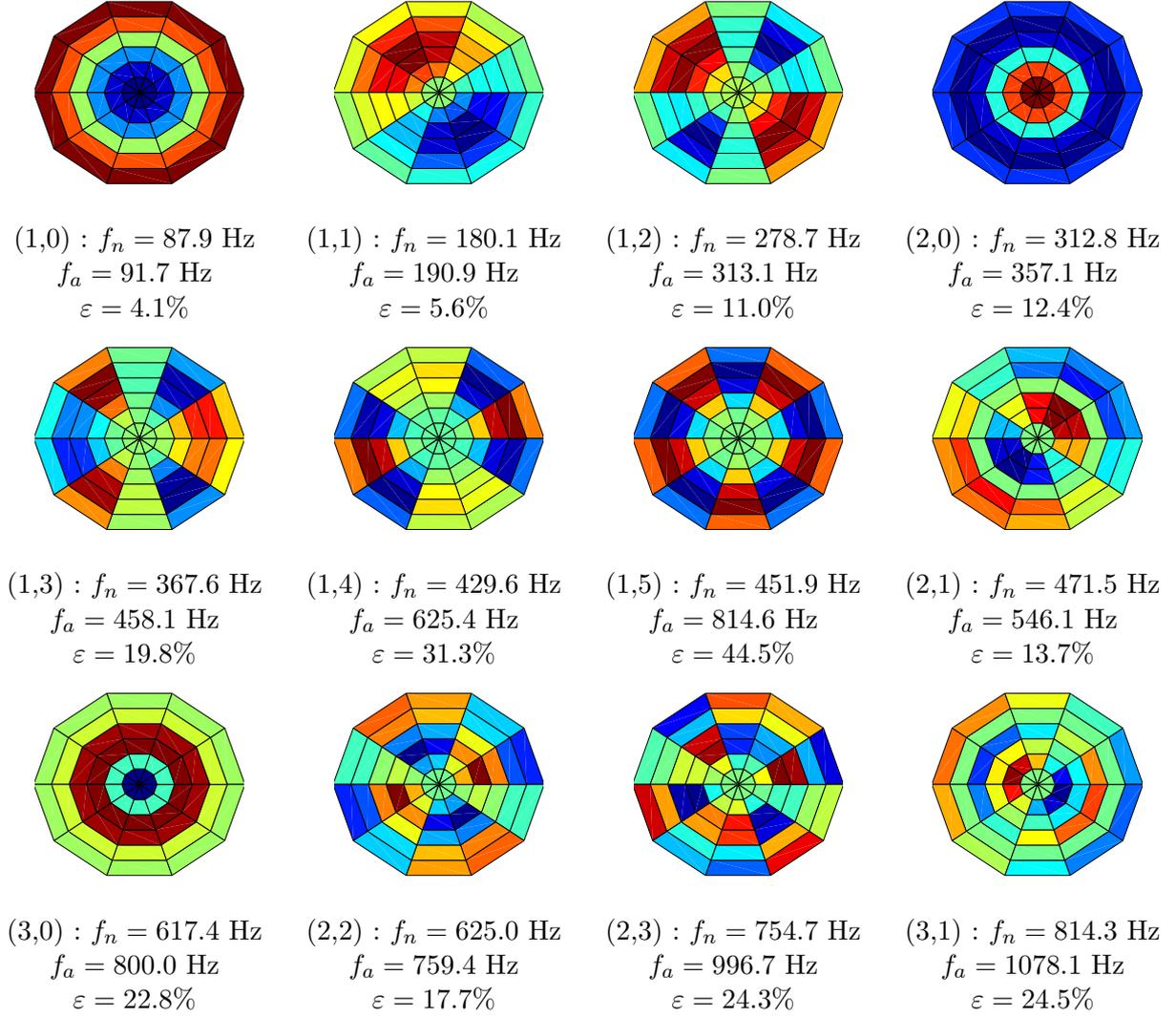


FIG. 7.3: Douze premiers modes numériques obtenus avec le schéma explicite pour l'exemple décrit par le tableau 7.1. Les indices du mode  $(n, k)$  sont donnés pour chaque mode, où  $n$  et  $k$  sont le nombre de lignes nodales circulaires et radiales respectivement.  $f_n = 87.9$  est la fréquence propre numérique obtenue avec la matrice d'amplification avec (7.67),  $f_a$  est la fréquence propre exacte analytique et  $\varepsilon$  est l'erreur entre ces fréquences en %.

### 7.5.1 Analyse de la stabilité en milieu infini

Pour l'analyse de la stabilité de (7.70) il faut déterminer la contribution à l'évolution de l'énergie des termes ajoutés par rapport au schéma explicite. La contribution à l'évolution de l'énergie du terme en  $\alpha$  est :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\alpha\kappa k\delta_{t+} \left( \|\delta_t - \delta_r - w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 + \|\frac{1}{r}\delta_t - \delta_\theta - w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \right. \\
 & \quad \left. - (h_r/2)\langle \delta_t - \delta_r - w_{\ell,m}^n, \delta_t - \delta_r - w_{\ell,m}^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty} \right).
 \end{aligned} \tag{7.71}$$

Les calculs pour arriver à cette dernière expression sont :

$$\begin{aligned}
\langle \delta_t w_{\ell,m}^n, \delta_{tt} \alpha \kappa k r \delta_{\Delta_r} w_{\ell,m}^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty} &= -\alpha \kappa k \langle \delta_t (\mu_{r-} r) \delta_{r-} w_{\ell,m}^n, \delta_{tt} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty} \\
&= -\alpha \kappa k \left\langle \left( r - \frac{h_r}{2} \right) \delta_t \delta_{r-} w_{\ell,m}^n, \delta_{tt} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n \right\rangle_{\mathcal{A}_\infty} \\
&= -\frac{1}{2} \alpha \kappa k \delta_{t+} \left( \|\delta_{t-} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 - (h_r/2) \langle \delta_{t-} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n, \delta_{t-} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty} \right),
\end{aligned} \tag{7.72}$$

$$\langle \delta_t w_{\ell,m}^n, \delta_{tt} \alpha \kappa k r \frac{1}{r^2} \delta_{\Delta_\theta} w_{\ell,m}^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = -\frac{1}{2} \alpha \kappa k \delta_{t+} \left\| \frac{1}{r} \delta_{t-} \delta_{\theta-} w_{\ell,m}^n \right\|_{\mathcal{A}_\infty}^2.$$

Pour développer ce terme on a utilisé l'égalité (7.34). On souligne que le terme multiplié par  $h_r/2$  n'est pas une norme, car il manque la multiplication en  $r$  dans le crochet, mais par contre sa contribution à l'énergie est positive d'après la définition du produit scalaire.

La contribution à l'évolution de l'énergie du terme en  $\beta$  est :

$$\langle \delta_t w_{\ell,m}^n, \delta_{tt} \beta \kappa^2 k^2 \delta_{\Delta} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = \frac{1}{2} \beta \kappa^2 k^2 \delta_{t+} \|\delta_{t-} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2, \tag{7.73}$$

où on a utilisé la propriété d'opérateur formellement auto-adjoint de  $\delta_{\Delta}$ . L'expression de conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\delta_{t+} \mathfrak{h} &= \delta_{t+} \left[ \frac{1}{2} \|\delta_{t-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 - \frac{1}{2} \alpha \kappa k \left( \|\delta_{t-} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\| \frac{1}{r} \delta_{t-} \delta_{\theta-} w_{\ell,m}^n \right\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 - (h_r/2) \langle \delta_{t-} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n, \delta_{t-} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty} \right) \right. \\
&\quad \left. + \kappa^2 \frac{1}{2} \langle \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n, e_{t-} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty} + \frac{1}{2} \beta \kappa^2 k^2 \delta_{t+} \|\delta_{t-} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \right] = 0.
\end{aligned} \tag{7.74}$$

La condition de stabilité du système est donnée par la positivité de l'énergie numérique  $\mathfrak{h}$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} &= \frac{1}{2} \|\delta_{t-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 - \frac{1}{2} \alpha \kappa k \left( \|\delta_{t-} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| \frac{1}{r} \delta_{t-} \delta_{\theta-} w_{\ell,m}^n \right\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 - (h_r/2) \langle \delta_{t-} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n, \delta_{t-} \delta_{r-} w_{\ell,m}^n \rangle_{\mathcal{A}_\infty} \right) + \\
&\quad \frac{\kappa^2}{2} \|\mu_{t-} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 - \frac{\kappa^2 k^2 (1/4 - \beta)}{2} \|\delta_{t-} \delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{7.75}$$

Pour l'étude des conditions de positivité de  $\mathfrak{h}$ , on peut négliger les quatrième et cinquième termes qui sont positifs (termes en  $h_r$  et terme en  $\mu_{t-}$ ). On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} &= \frac{1}{2} \|\delta_{t-}\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \left[ \|w_{\ell,m}^n\|^2 - \alpha \kappa k \left( \|\delta_{r-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\| \frac{1}{r} \delta_{\theta-} w_{\ell,m}^n \right\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \right) - \kappa^2 k^2 (1/4 - \beta) \|\delta_{\Delta} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \right] \geq 0.
\end{aligned} \tag{7.76}$$

Pour le cas où  $\alpha > 0$  et  $0 < \beta < 0.25$ , tous les termes sont négatifs sauf le premier, et on peut borner supérieurement toutes les normes des opérateurs aux différences finies présents, pour ainsi obtenir :

$$1 - \alpha \kappa \left( \frac{4}{h_r^2} \left( 1 + \frac{1}{h_\theta^2} \right) \right) - \kappa^2 k^2 (1/4 - \beta) \left( 1 + \frac{1}{h_\theta^2} \right)^2 \geq 0, \tag{7.77}$$

$$1 - 4\alpha r_p - 16(1/4 - \beta)r_p^2 \geq 0,$$

où on a introduit le coefficient de CFL  $r_p$  (7.72) utilisé dans l'analyse du schéma explicite des plaques en polaires. L'inéquation quadratique obtenue est la même que celle obtenue pour les barres (A.67) mais avec  $r_p$  au lieu de  $r$  comme variable. La solution est similaire à celle des barres (A.68) et est :

$$r_p < \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + (1 - 4\beta)}}{2(1 - 4\beta)} \quad \text{pour } \alpha > 0 \text{ et } \beta \in [0, 0.25] \quad (7.78)$$

Pour analyser la stabilité pour  $\beta > 0.25$  on suit la même démarche que pour la barre. Par contre le terme en  $\delta_{r-}$  pose un peu plus de problèmes que le terme en  $d_{x-}$  de la barre, néanmoins on peut arriver à l'inégalité suivante :

$$\|\delta_{r-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 + \|\frac{1}{r} \delta_{\theta-} w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \leq \mu \|w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 + \frac{1}{4} \mu \|\delta_\Delta w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \quad \forall \mu > 0 \quad (7.79)$$

La démonstration de cette inégalité est la suivante. On part de la relation (7.34) :

$$\langle f, r \delta_{\Delta r} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = -\langle \delta_{r-} f, r \delta_{r-} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty} + \frac{h_r}{2} \langle \delta_{r-} f, \delta_{r-} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty} \quad (7.80)$$

Le premier terme de droite est négatif (en raison de son signe -) et le terme en  $h_r/2$  est positif. La valeur absolue de ce premier terme de droite est plus grande que celle du deuxième terme de droite : en conséquence le terme de gauche est négatif. Alors la valeur absolue de  $\langle \delta_{r-} f, r \delta_{r-} f \rangle$  est plus petite que la valeur absolue de  $\langle f, r \delta_{\Delta r} f \rangle$ , et on a :

$$|\langle \delta_{r-} f, r \delta_{r-} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty}| < |\langle f, r \delta_{\Delta r} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty}| \quad (7.81)$$

On développe la partie en  $\theta$  :

$$\|\frac{1}{r} \delta_{\theta-} f\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 = \langle \frac{1}{r} \delta_{\theta-} f, r \frac{1}{r} \delta_{\theta-} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = \langle f, r \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty} \quad (7.82)$$

Alors, en prenant les contributions de opérateurs  $\delta_{\theta-}$  et  $\delta_{r-}$  on arrive à :

$$\|\frac{1}{r} \delta_{\theta-} f\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 + \|\frac{1}{r} \delta_{r-} f\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \leq |\langle f, r \delta_{\Delta r} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty}| + \langle f, r \frac{1}{r^2} \delta_{\theta\theta} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty} = |\langle f, r \delta_{\Delta} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty}|, \quad (7.83)$$

et grâce à la propriété du produit scalaire (A.32) on peut écrire :

$$|\langle f, r \delta_{\Delta} f \rangle_{\mathcal{A}_\infty}| \leq \mu \|f\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 + \frac{1}{4\mu} \|\delta_{\Delta} f\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \quad (7.84)$$

qui substitué dans (7.83) complète la démonstration de l'inégalité (7.79).

Arrivé à ce point, on écrit l'expression de l'énergie (7.76) qui, pour  $\beta > 0.25$ , peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} = & \frac{1}{2} \|\delta_{t-}\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \left[ 1 - \alpha \kappa k (\|\delta_{r-}\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 + \|\frac{1}{r} \delta_{\theta-}\|_{\mathcal{A}_\infty}^2) \right. \\ & \left. + \kappa^2 k^2 (1/4 - \beta) \|\delta_{\Delta}\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \right] \|w_{\ell,m}^n\|_{\mathcal{A}_\infty}^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (7.85)$$

Le terme en  $\alpha$  peut être borné avec (7.79), et la suite des calculs est identique à ceux effectués pour la barre. D'où l'attention prêtée à la relation (7.79).

On trouve que le schéma aux DF est inconditionnellement stable pour  $\alpha \leq \sqrt{4\beta - 1}$ .

Pour  $\alpha > \sqrt{4\beta - 1}$ , on arrive à la même équation que pour la barre, sauf qu'au lieu d'avoir  $r$  on a  $r_p$ . La stabilité est alors donnée par :

$$r_p < \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - (4\beta - 1)}}{2(4\beta - 1)} \quad \forall \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} < \beta < \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{4}\right) \quad (7.86)$$

Comme pour la barre l'augmentation de la valeur de  $\beta$  rend moins contraignante la condition de stabilité par rapport au schéma explicite, tandis que l'augmentation du paramètre  $\alpha$  rend plus contraignante la condition de stabilité.

### 7.5.2 Exemple de simulation

Afin de comparer le comportement du schéma implicite (7.70) au schéma explicite, on montre ici le même exemple de plaque encastrée que celui montré pour le schéma explicite au §7.4.4. On choisit une valeur  $\alpha = 0.69$  pour diminuer la dispersion numérique et on choisit une valeur de  $\beta$  suffisamment élevée pour avoir une stabilité inconditionnelle, i.e.  $\beta > 0.25(\alpha^2 + 1)$ . Pour cette stabilité inconditionnelle on choisit un nombre de pas de rayon et d'angle tels que le nombre total de ddl du système numérique  $2N_{tot}$  soit le plus proche possible du nombre total de ddl du système continu en dessous de  $Fs/2$ , ici  $2N_{co} = 2 \cdot 199$ , où  $N_{co}$  est le nombre de modes du système continu en dessous de  $Fs/2$ . On obtient alors  $N_{tot} = (N_r - 1)N_\theta + 1 = 201$ . La Figure

$\kappa$ [m <sup>2</sup> /s]	$Fs$ [Hz]	$\sigma$ [ ]	$h_r$ [m]	$R$ [m]	$h_\theta$ [rad]	$N_r$	$N_\theta$	$N_{tot}$	$\alpha$	$\beta$
70	16000	$\pi$	0.1013	1.114	0.3142	11(+1)	20	201	0.69	0.3725

TAB. 7.2: Paramètres de la simulation de la plaque encastrée avec le schéma implicite.

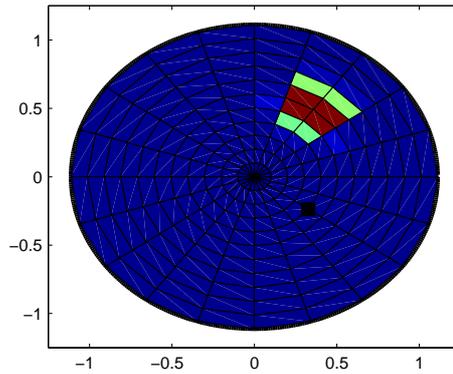


FIG. 7.4: Configuration de la simulation avec le schéma implicite : grille, déplacement initial (code de couleurs) et point d'observation sur la grille  $(x_o, y_o) = (0.3277, -0.2381)$  (carré noir).

7.2 montre le déplacement au point d'observation obtenu. On observe que le spectre du signal de déplacement obtenu avec la simulation est rempli jusqu'à la fréquence de Shannon 8 kHz. Néanmoins on observe qu'à partir d'environ 4 kHz on a des parties du spectre sans énergie. Ce comportement ne se présente pas pour les fréquences propres de la solution continue (cf. Figure 7.6).

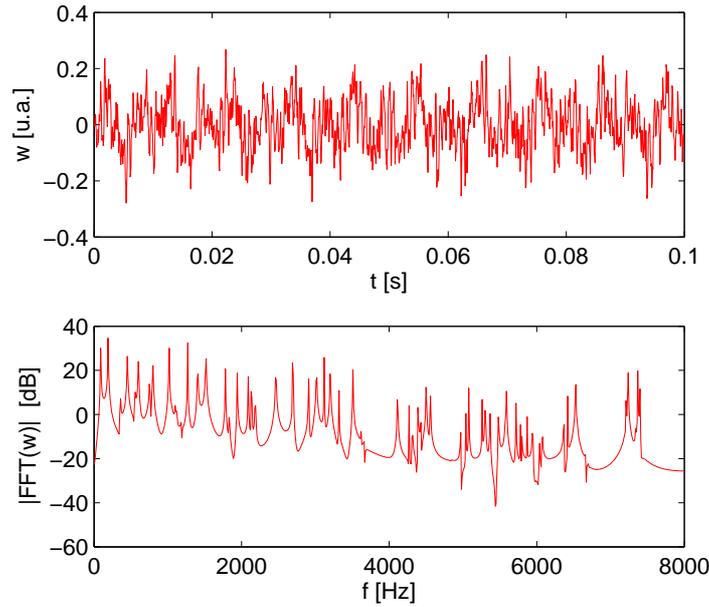


FIG. 7.5: Déplacement au point d'observation  $(x_o, y_o)$  et module de sa Transformée de Fourier.

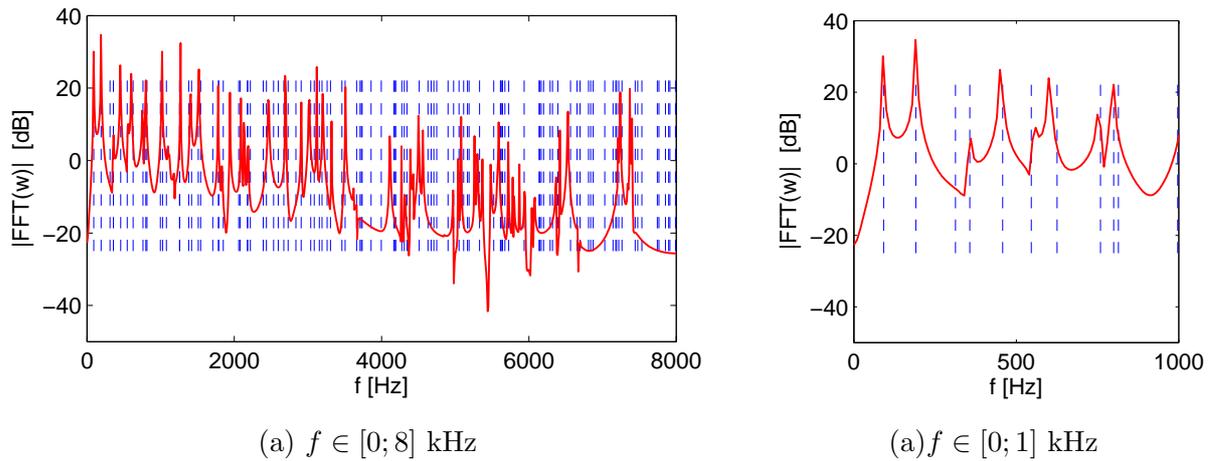


FIG. 7.6: Comparaison entre le spectre de la simulation (—) et les fréquences propres du système continu (traits verticaux - - -). (b) : détail de (a) entre 0 et 1 kHz. L'accord est acceptable jusqu'à 4 kHz, mais au delà on observe l'apparition de parties sans énergie dans le spectre numérique.

L'analyse par comparaison des premiers modes propres (cf. Figure 7.7) montre une amélioration notable de la précision par rapport au schéma explicite. Par exemple, l'erreur moyenne obtenue pour les 6 premières fréquences propres est 0.48%, qui est environ 20 fois est plus petit que l'erreur obtenue avec le schéma explicite (8.96%).

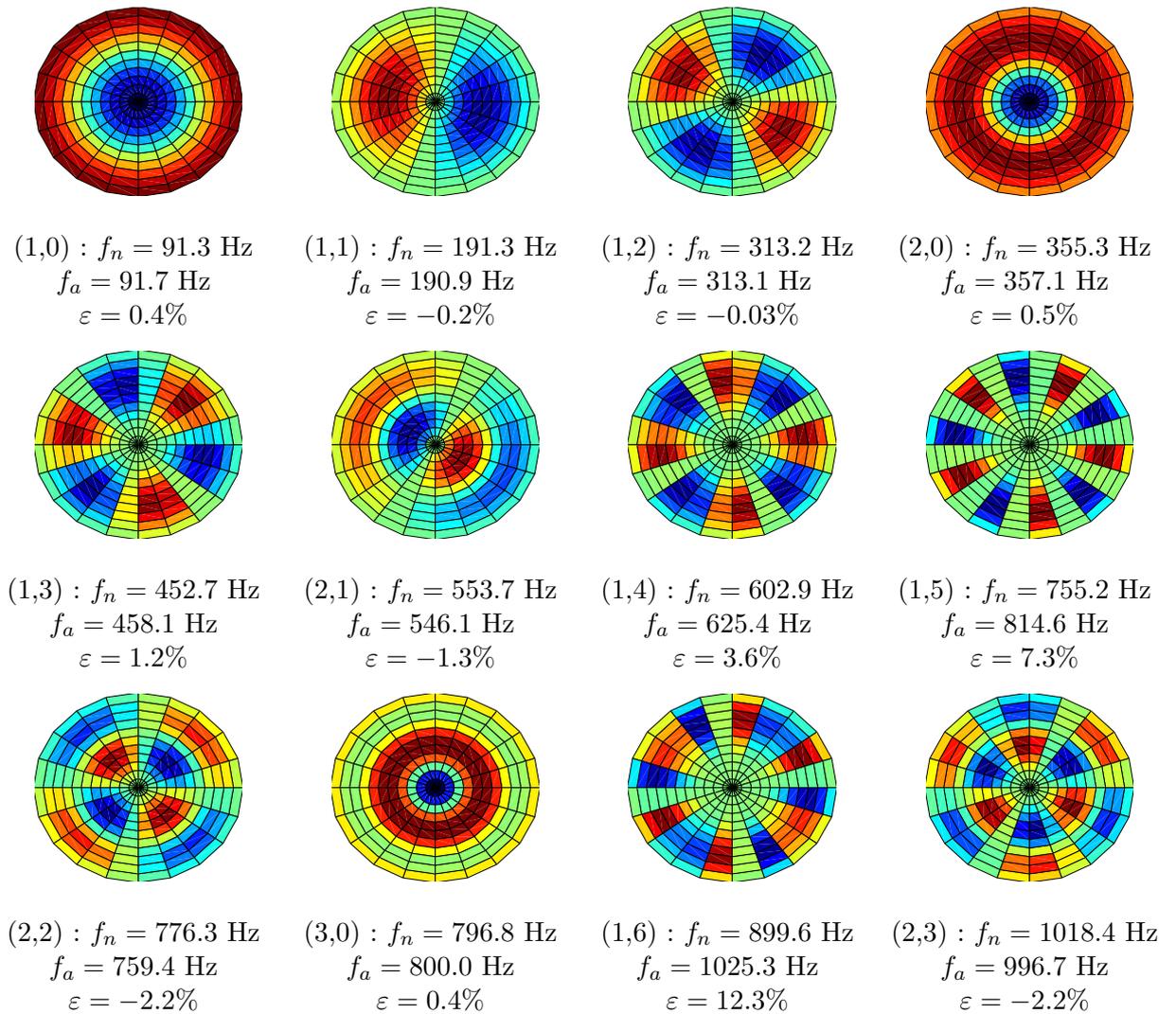


FIG. 7.7: 12 premiers modes numériques obtenus pour l'exemple du tableau 7.2 (schéma implicite).

## 7.6 Remarques sur le choix de $h_r$ et $h_\theta$

Lors de la synthèse sonore d'une plaque circulaire de rayon  $R$  et de constante élastique  $\kappa$ , on fixe au départ la fréquence d'échantillonnage  $F_s$ . La condition de stabilité est alors une condition sur les deux pas de la grille spatiale  $h_r$  et  $h_\theta$ . Dans le choix de ce pas il reste un degré de liberté à fixer qui est le rapport entre le pas d'angle et le pas de rayon  $\sigma = h_\theta/h_r$ . Dans ces travaux la précision des simulations a été étudiée par comparaison des premières fréquences propres numériques aux fréquences propres du problème continu. La valeur optimale du paramètre  $\sigma$  trouvée par ce critère est  $\sigma = \pi$ , mais ce résultat correspond aux valeurs  $\alpha \simeq 0.69$  et  $\beta \simeq 0.3725$  utilisées avec le schéma implicite. Ces valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont les valeurs pour lesquelles :

- le spectre obtenu est rempli jusqu'à la fréquence de Shannon,
- l'erreur des premières fréquences propres numériques est minimisée.

On n'est pas en mesure actuellement d'établir le meilleur critère pour le choix de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$  de manière rigoureuse. Il s'agit d'une voie de recherche ouverte pour laquelle on donne ci-après quelques éléments qui peuvent être utiles.

Une autre façon de trouver le paramètre  $\sigma$  optimal est de chercher la valeur de  $\sigma$  qui permet de représenter le plus de modes du système continu avec une grille des DF polaire. On doit premièrement déterminer la capacité d'une grille à représenter un mode d'indices  $(n, k)$ . La

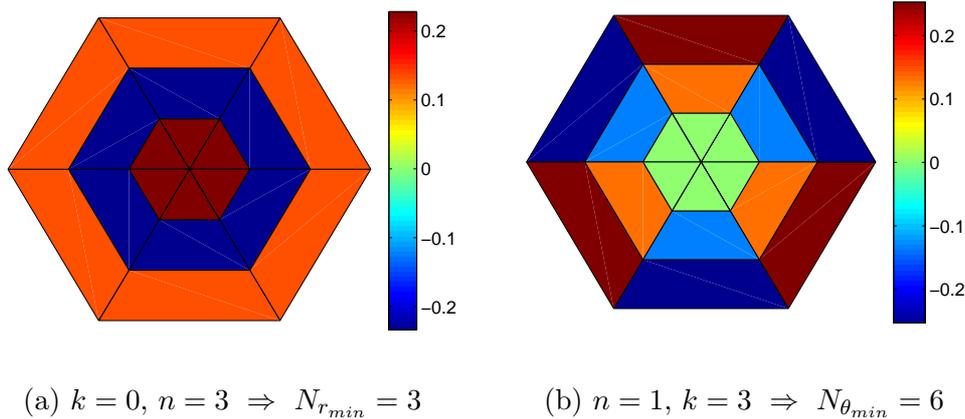


FIG. 7.8: Déformées simples pour une plaque encadrée (a) : pour représenter un mode avec  $n = 3$  cercles nodaux il faut une grille avec au moins  $N_r = 3$  ( $N_r = n$ ). (b) : pour représenter un mode avec  $k = 3$  diamètres nodaux il faut une grille avec au moins  $N_\theta = 6$  ( $N_\theta = 2k$ ).

Figure 7.8 montre le nombre de points de discrétisation en rayon et en angle nécessaires pour représenter une longueur d'onde spatiale avec la grille polaire des DF (sans repliement spatial). On montre qu'une grille avec  $N_r$  et  $N_\theta$  est capable de représenter les modes jusqu'aux indices modaux maximaux  $k_{max} = N_\theta/2$  et  $n_{max} = N_r/2$ .

Il faut maintenant déterminer comment sont répartis les modes du système continu qu'on veut simuler. On suppose que si on prend un nombre suffisant de modes les résultats ne dépendent pas des CL et il suffit de regarder le comportement des fréquences propres de la plaque encadrée (cf. §7.2.3). On note  $E_{F_s}$  l'ensemble des modes du système continu dont la fréquence propre est  $f_{kn} \leq F_s/2$ . La Figure 7.9 montre, pour  $F_s = 16$  kHz, les modes de  $E_{F_s}$  sur le plan des indices  $n$  et  $k$ . On rappelle que chaque mode avec  $k \neq 0$  a un mode compagnon à la même fréquence et il y a donc deux modes indépendants à chaque  $f_{kn}$  pour  $k \neq 0$ . On observe que l'indice d'angle aug-

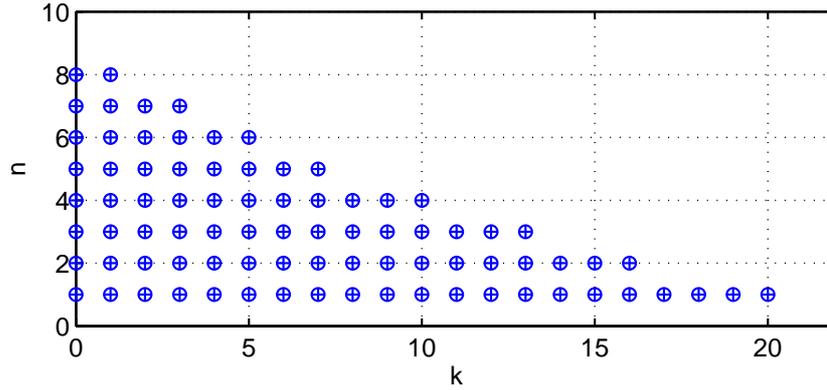


FIG. 7.9: Plaque encadrée de rayon  $R = 1$  m et  $\kappa = 70$  m<sup>2</sup>/s : répartition des modes avec  $f_{kn} < 8$  kHz selon les indices  $n$  et  $k$ . Il y a un total de 158 modes (modes compagnons inclus) qui appartiennent à l'ensemble  $E_{F_s}$  pour  $F_s = 16$  kHz.

mente beaucoup plus rapidement que l'indice de rayon. Avec une grille polaire des DF, pour faire apparaître tous les modes de  $E_{F_s}$  on nécessite  $40 \cdot 16 = 640$  points discrets de grille. C'est-à-dire, qu'on aurait un système numérique avec beaucoup plus de ddl que le système continu, environ 4 fois plus. L'algorithme devient alors très coûteux en calcul et permet la représentation d'autres modes qui ne devraient pas être présents à  $f_{kn} < 8$  kHz. On peut interpréter que l'apparition de ces modes non désirés dans le spectre est provoquée par une dispersion numérique très élevée. La Figure 7.10 montre que la distribution des modes de  $E_{F_s}$  sur le plan des indices  $n$  et  $k$  est similaire indépendamment de la fréquence maximale  $F_s/2$ . On constate qu'il n'existe pas de

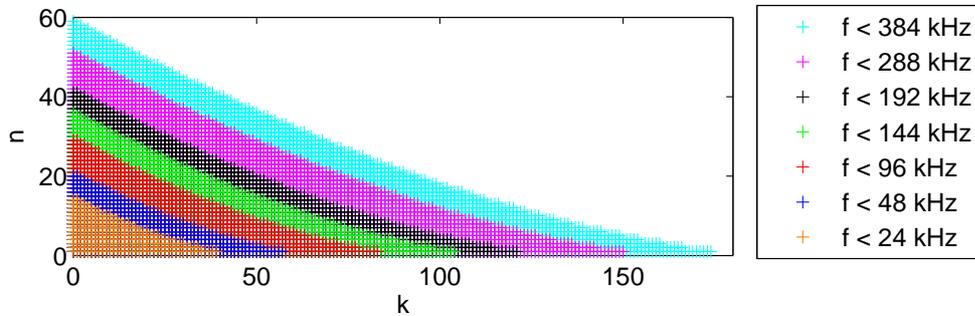


FIG. 7.10: Plaque encadrée de rayon  $R = 1$  m et  $\kappa = 70$  m<sup>2</sup>/s : répartition des modes avec  $f_{kn} < F_s/2$  pour différentes valeurs de  $F_s$  : on observe que la répartition montrée à la Figure 7.9 est conservée pour des valeurs de  $F_s$  supérieures.

solution numérique parfaite au problème. Il semble néanmoins raisonnable de choisir un rapport de pas  $\sigma$  qui permet de représenter le plus grand nombre de modes de  $E_{F_s}$  mais sans augmenter excessivement le nombre total de ddl du système numérique par rapport au cas continu.

On regarde alors en détail la valeur du paramètre  $\sigma$  qui permet de représenter le plus de modes de  $E_{F_s}$  avec la méthode suivante. On calcule, pour une  $F_s$  donnée, les différentes grilles qu'on obtient en faisant varier la valeur de  $\sigma = h_\theta/h_r$ , mais en gardant le nombre total de points de la grille  $N_{tot}$  le plus proche possible de la taille de  $E_{F_s}$ . On peut alors, avec les conditions de représentativité (cf. Figure 7.8), déterminer combien de modes de  $E_{F_s}$  peuvent être pris en

compte avec chaque grille. On montre alors l'évolution du pourcentage de modes pris en compte en fonction de  $\sigma$  dans la Figure 7.11. La valeur optimale trouvée est  $\sigma \simeq 1.1$ , qui permet de

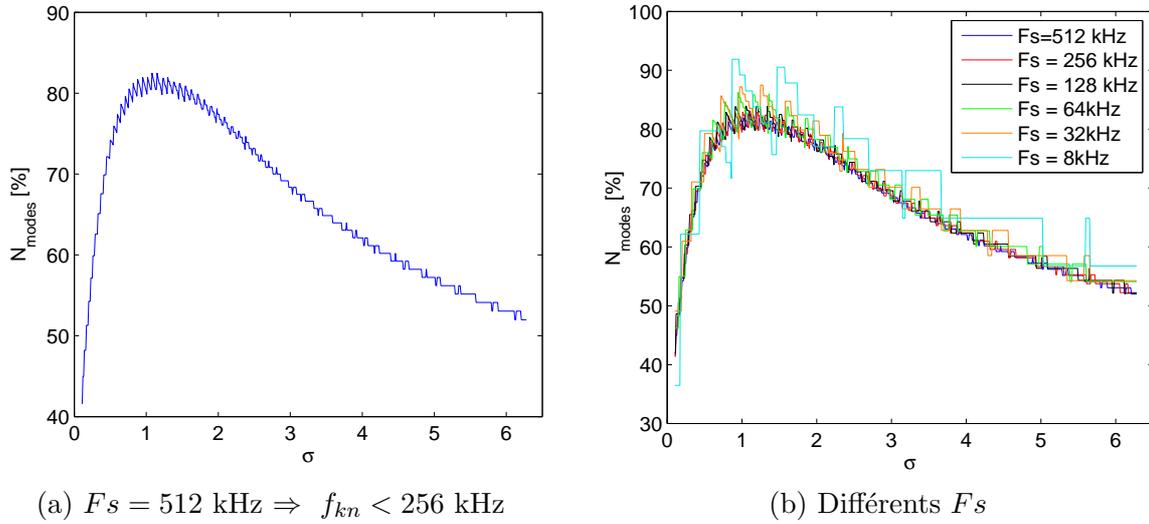


FIG. 7.11: Plaque encastree de rayon  $R = 1$  et  $\kappa = 70$  : pourcentage de modes representables avec une grille dont le nombre de points  $N_{tot}$  est le meme que le nombre de modes avec  $f_{kn} < Fs/2$  du systeme continu. Pour  $\sigma \simeq 1.1$  on obtient la grille qui represente le plus de modes du systeme continu, environ 82%. (a) cas  $Fs = 512 \text{ kHz}$ . (b) differentes valeurs de  $Fs$ . On observe que le comportement est independant de  $Fs$  si on ne tient pas compte des effets de troncature. Ces effets sont importants pour des grilles petites, ici on les remarque pour  $Fs = 8 \text{ kHz}$ .

représenter avec la grille discrète environ 82% des modes de  $E_{Fs}$ . Ces résultats varient peut avec  $Fs$  quand la fréquence d'échantillonnage est suffisamment grande pour que les effets de troncature soient négligeables.

On souligne néanmoins, que l'utilisation de  $\sigma = 1.1$  dans le schéma implicite présenté n'a pas permis d'améliorer la précision obtenue sur les premières fréquences propres avec l'exemple §7.5.2, où  $\sigma = \pi$ ,  $\alpha = 0.69$  et  $\beta = 0.3725$ .

## 7.7 Conclusions

Dans ce chapitre on a présenté la simulation dans le domaine temporel des vibrations de flexion des plaques minces circulaires avec les DF en coordonnées polaires d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace. On a porté une attention particulière à l'analyse de la stabilité, par des méthodes énergétiques qui permettent de déterminer des formes numériques conservatives des CL idéales.

Préalablement, l'analyse a été faite pour l'équation à une dimension, la barre d'Euler-Bernoulli, discrétisée avec un schéma explicite et avec un schéma implicite dépendant de deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Cette analyse, présentée à l'annexe A, introduit la méthode sur un cas simple et permet d'obtenir des résultats utilisés pour l'analyse de la plaque circulaire.

Pour la plaque discrétisée en coordonnées polaires, on a proposé un schéma explicite. Il a fallu aussi établir une façon d'approcher le Laplacien et le bilaplacien au centre, qui est un point singulier du Laplacien en coordonnées polaires. Une condition suffisante de stabilité pour ce schéma est l'utilisation de CL numériques conservatives et le respect d'une condition sur le nombre de

CFL  $r_p$ . Des formes conservatives des CL numériques ont été déterminées pour l'encastrement (7.62), l'appui simple (7.63) et le bord libre (7.64). Néanmoins, pour ce schéma, la contrainte de stabilité est fixée par le plus petit rayon du domaine  $r = h_r$  et elle est très forte. Les DF avec la grille obtenue ont 4 fois moins de degrés de liberté (ddl) que le système continu qu'on veut reproduire et l'erreur des DF par rapport au système continu est très importante. La contrainte de stabilité pour une plaque annulaire est moins restrictive que pour la plaque circulaire, ce qui permettrait d'améliorer la précision pour ce type de géométrie.

On a alors proposé un schéma implicite dépendant de deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , pour lequel la contrainte de stabilité est moins forte. Ce schéma permet d'arriver à des erreurs beaucoup plus faibles qu'avec le schéma explicite. Néanmoins l'inconvénient de ce schéma est que sa résolution nécessite la résolution d'un système d'équations à chaque pas de temps. Ce coût de calcul élevé est le prix à payer pour garantir la précision et la stabilité requises. Il n'est pas envisageable d'appliquer ce schéma pour un réverbérateur à plaque circulaire, où la taille du système d'équations peut arriver facilement à 50000, mais il peut être exploité pour la la synthèse sonore de systèmes avec moins de ddl.

La difficulté pour l'analyse de la précision de ces schémas est due à la dépendance de la vitesse des ondes numériques avec le rayon du point de l'étude. Cette dépendance vient s'ajouter à la dépendance selon la direction de propagation et selon la fréquence déjà présente pour les DF en coordonnées cartésiennes. Pour cette raison, l'analyse de la précision est faite à partir de la comparaison des fréquences propres du système numérique à celles du système continu. Pour les exemples montrés, l'utilisation du schéma implicite permet de réduire d'un facteur 20 l'erreur commise sur les 6 premières fréquences propres par rapport au schéma explicite.

Les perspectives d'amélioration de ces travaux sur la résolution des équation des plaques en coordonnées polaires sont nombreuses.

Des travaux supplémentaires devraient être menés pour trouver une méthodologie plus adaptée à l'étude de la précision de ces schémas en coordonnées polaires. La comparaison des premières fréquences propres faite ici a servi pour orienter grossièrement le choix des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  et du rapport des pas spatiaux  $\sigma$ . L'établissement d'une méthodologie d'analyse de la précision du schéma plus adaptée permettrait de comparer plus rigoureusement le choix des valeurs optimales des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$  afin d'améliorer la précision de la méthode. D'autre part il serait judicieux d'envisager l'étude du comportement dans le domaine temporel par comparaison des simulations avec des résultats analytiques de référence.

Concernant les analyses de stabilité pour les schémas explicite et implicite, il y a deux aspects qui méritent d'être complétés :

- la prise en compte de la forme particulière des opérateurs aux différences Laplacien (7.43) et bilaplacien (7.45) au centre du domaine. Même si on a constaté avec les expériences numériques que la stabilité est préservée, il serait intéressant de montrer rigoureusement ce qui se passe pour l'énergie potentielle numérique au centre du domaine.
- pour la stabilité du schéma implicite on a supposé que les CL conservatives trouvées pour le schéma explicite sont aussi conservatives pour le schéma implicite.

D'autres améliorations possibles de la méthode des DF en coordonnées polaires concernent principalement le choix d'un pas de rayon variable et l'approximation des opérateurs continus en espace à l'ordre 4, comme les opérateurs du cas rectangulaire du chapitre 4. Le problème de

stabilité de la méthode étudiée ici est lié au fait que les distances entre les points adjacents d'un même cercle,  $w_{r_i, \theta_i}$  et  $w_{r_i, \theta_{i+1}}$ , dépendent du rayon du cercle. Plus on s'approche du centre du domaine et plus la distance entre points est petite. Pour cette raison, le premier pas de rayon détermine la condition de stabilité de l'algorithme. Il est probable que la définition d'une grille avec un pas de rayon plus grand au centre et plus petit à l'extérieur permette d'améliorer les propriétés du schéma explicite. Néanmoins ceci peut poser des problèmes à la grille pour représenter les modes avec un nombre important de cercles nodaux, en raison de la ligne nodale près du centre (cf. §7.6 et Figure 7.8).

Une dernière perspective plus générale est l'extension de ces méthodes aux coques circulaires trouées au centre, comme par exemple les cymbales en régime de vibration linéaire.

# Conclusion générale et perspectives

---

L'objectif principal de cette thèse était de réaliser la synthèse par modèles physiques de l'effet audio de la réverbération à plaque. Ce travail s'inscrit dans la continuité des recherches du laboratoire qui ont débuté avec les travaux de thèse de Lambourg [48] soutenus en 1997. Ses travaux portaient sur la simulation numérique des vibrations de plaques rectangulaires libres par la méthode des différences finies d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace. Pour les plaques métalliques, une formulation des modèles de l'amortissement thermoélastique et de l'amortissement par rayonnement avait été proposée à l'aide de rigidités complexes. Ces modèles avaient ensuite été discrétisés grâce à la formulation numérique temporelle des différences finies.

Dans le cadre de la présente thèse, ces algorithmes de synthèse ont été mis à profit pour la simulation des sons d'une plaque métallique, à laquelle ont été ajoutées les particularités nécessaires à la modélisation et à la simulation d'un réverbérateur à plaque générique. Afin de délimiter l'objet de la synthèse, le réverbérateur à plaque générique a été défini comme une plaque métallique mince dont la densité modale est suffisamment importante pour pouvoir s'approcher d'un effet de réverbération.

Un réverbérateur à plaque réel, l'EMT140, qui est le premier dispositif de ce genre et le plus populaire, a été mis à notre disposition par Radio France. Ce dispositif expérimental a permis d'établir et de valider des hypothèses sur le comportement du réverbérateur. Ainsi par exemple, la linéarité des vibrations, la pertinence du modèle de Kirchhoff-Love et l'hypothèse consistant à négliger les effets de la tension mécanique aux bords ont été validées.

La mesure du dispositif réel a permis d'obtenir une réponse impulsionnelle (RI) de référence à laquelle on a pu comparer la RI simulée. Ceci a permis, dans un premier temps, de mettre en évidence l'amortissement par transmission mécanique et l'influence de l'actionneur sur la réponse en fréquence du réverbérateur. Postérieurement, après la prise en compte de ces phénomènes, on a pu valider la méthodologie de synthèse par comparaison des signaux et par l'écoute.

Pour simuler le réverbérateur EMT140, la connaissance de ses paramètres physiques était nécessaire. La mise en place de protocoles de mesures pour l'obtention des paramètres initialement inconnus fait l'objet du chapitre 3. On propose des méthodes pour la mesure de la réponse impulsionnelle électrique de l'ensemble de l'unité de réverbération, de l'amortissement, de la constante de propagation des ondes de flexion  $\kappa$ , de l'admittance au point d'excitation et de la densité modale. On insiste sur le fait que la simulation du réverbérateur EMT140 n'est pas le but ultime de ces travaux, mais un moyen de valider la méthodologie de synthèse proposée en com-

parant la simulation aux résultats expérimentaux. L'objectif de ces travaux reste la simulation d'un réverbérateur générique, qui présente l'avantage de donner accès à une multitude d'effets de réverbération différents. Les paramètres de contrôle de la synthèse sont alors les paramètres physiques et géométriques de la plaque.

Par rapport au modèle générale de plaques [48], la mise en place d'une méthodologie pour la synthèse sonore de réverbérateurs à plaque génériques a requis certains approfondissements pour prendre en compte les spécificités du dispositif. Ces apports concernent principalement l'amortissement des vibrations, la mise en évidence des difficultés inhérentes à la densité modale élevée des réverbérateurs et la prise en compte de particularités telles que le couplage de l'actionneur électrodynamique avec la plaque. Ces particularités sont propres au réverbérateur EMT140 et non à un réverbérateur générique, néanmoins il était nécessaire de les considérer pour l'exploitation des mesures expérimentales. Par exemple, l'amortissement par transmission mécanique du réverbérateur EMT140 peut être déduit par la mesure, mais le phénomène physique qui en constitue l'origine est difficilement modélisable dans le cadre général d'un réverbérateur générique.

## 8.1 Principaux apports de cette thèse

### 8.1.1 Particularités liées à l'amortissement des vibrations

La modélisation et l'implémentation numérique de l'amortissement thermoélastique ont pu être exploitées telles qu'elles étaient présentées dans [48], tant pour la modélisation que pour la simulation numérique. En règle générale, la dissipation thermoélastique d'une plaque aux bords libres dépend de la déformée modale [48], mais cette dépendance est seulement significative pour les premiers modes comme le montre la Figure 2.5. On a donc montré numériquement, que pour les modes d'ordre élevé d'une plaque aux bords libres, l'amortissement dû à ce mécanisme dissipatif est indépendant de la déformée modale et dépend uniquement de la fréquence. L'apport de la présente thèse est l'application de ce modèle à différents types de plaques (matériaux et épaisseurs). Deux paramètres du matériau,  $R_1$  et  $C_1$ , et un paramètre géométrique, l'épaisseur  $h$ , gouvernent l'amortissement thermoélastique. On montre ainsi, dans le chapitre 6, les différentes courbes possibles d'amortissement thermoélastique dans le domaine audible selon le choix des paramètres physiques. En raison de la faible épaisseur des réverbérateurs à plaque, l'amortissement thermoélastique gouverne la décroissance des vibrations en basses et moyennes fréquences. En général, pour une épaisseur de l'ordre du mm, on atteint la valeur asymptotique  $\alpha_\infty$  de l'amortissement thermoélastique à 1 ou 2 kHz. Pour un matériau donné,  $\alpha_\infty$  est proportionnel à  $1/h^2$ . Pour des feuilles, dont l'épaisseur est de l'ordre de 0.018 mm, l'amortissement thermoélastique augmente avec le carré de la fréquence dans tout le domaine audible. D'un point de vue expérimental, la mesure de l'amortissement du réverbérateur EMT140 a permis de valider l'allure fréquentielle de l'amortissement thermoélastique pour cette plaque et le fait qu'il s'agit du principal mécanisme dissipatif en basses fréquences.

L'amortissement par rayonnement issu de [48] a été comparé aux prédictions d'amortissement de plaques rectangulaires trouvées dans la littérature (voir Figure 4.12). Des désaccords importants ont été observés en dessous de la fréquence critique  $f_c$ , qui correspond souvent à la totalité du domaine audible pour les paramètres usuels des réverbérateurs à plaque. On a alors préféré adopter le modèle fréquentiel de Maidanik qui décrit le rayonnement moyen d'une plaque sur des appuis simples dans un écran infini. Du fait de la grande densité modale, on peut négliger l'influence des conditions limites sur le rayonnement. L'hypothèse d'écran infini est plus difficilement justifiable, mais des travaux récents [63] montrent que l'influence de l'écran au delà de

$f_c/2$  est négligeable. La variabilité du rayonnement mode par mode par rapport au rayonnement moyen a été étudiée par le calcul du facteur de rayonnement modal [87] pour le jeu de paramètres de l'EMT140. Cette expérience numérique a confirmé l'accord entre les deux formulations et a rendu possible l'identification des modes de bord et des modes de coin dans l'étude de la distribution des facteurs de rayonnement modaux. Enfin, le modèle physique fournit une courbe en fréquence de l'amortissement par rayonnement à prendre en compte pour les simulations. En règle générale, la plaque doit rester mince pour avoir une fréquence critique en dehors du domaine audible et donc avoir un faible amortissement par rayonnement dans le domaine audible.

Le troisième mécanisme d'amortissement pris en compte est l'amortissement dû à la présence d'une plaque poreuse à proximité de la plaque vibrante. Il s'agit du mécanisme utilisé dans le réverbérateur EMT140, où la variation de la distance entre la plaque poreuse et la plaque vibrante permet de contrôler l'amortissement en basses et moyennes fréquences.

Une étude bibliographique a permis d'identifier un modèle décrivant ce phénomène. Les prédictions de ce modèle ont été comparées aux mesures faites sur le réverbérateur EMT140, ce qui a rendu possible de déterminer le domaine de validité du modèle. A la différence des autres mécanismes dissipatifs, la contribution à l'amortissement de la plaque poreuse peut être mesurée indépendamment des autres mécanismes, car il suffit de comparer les amortissements avec et sans la plaque poreuse. L'accord entre modèle et mesures est très satisfaisant au-delà d'une certaine fréquence, qui est ici de l'ordre de 150 Hz. Pour des fréquences inférieures, les mesures et les prédictions du modèle divergent. Ceci est probablement dû au fait que le modèle suppose une plaque infinie.

Parmi les trois amortissements décrits, l'obtention d'un modèle numérique dans le domaine temporel est uniquement envisageable et satisfaisante pour l'amortissement thermoélastique. Le recours aux développements de Padé pour approcher les courbes d'amortissement fréquentiel des deux autres mécanismes dissipatifs nécessiterait la résolution d'un problème d'optimisation à chaque changement de paramètre. Par ailleurs, on a mis en évidence que le comportement de ces développements de Padé après discrétisation ne suit pas très bien leur comportement continu (cf. Figure 4.13). Pour ces raisons, on a choisi de garder le seul amortissement thermoélastique dans les différences finies. Pour imposer le comportement fréquentiel de l'amortissement obtenu avec les autres modèles physiques, on a proposé un algorithme de post-traitement des réponses impulsionnelles dans le domaine temps-fréquence (cf §4.4.1).

### 8.1.2 Conséquences de la densité modale élevée

Bien que nécessaire pour l'obtention d'un effet de réverbération naturel, le niveau élevé de la densité modale des plaques étudiées pose un certain nombre de difficultés.

Sur le plan pratique, une densité modale élevée se traduit par un nombre important de modes dans le domaine audible. Le nombre de degrés de liberté (deux fois le nombre de modes) du système à simuler devient énorme (plus de 50000 pour le réverbérateur EMT140) et le coût de calcul des simulations devient vite très important. Une façon de limiter les effets de cet inconvénient est de simuler uniquement la réponse impulsionnelle du problème. L'effet de réverbération est appliqué à un signal quelconque par convolution rapide en temps réel. La RI obtenue dépend des paramètres de la plaque, de ses conditions aux limites et des localisations du point d'excitation et du point d'observation. La synthèse de l'effet de la réverbération à plaque par modèles physiques se limite alors à la synthèse de réponses impulsionnelles. Cette approche est rendue possible par la linéarité du système simulé. Si on envisageait la simulation dans un régime de fonctionnement

non linéaire, on serait tout de suite confronté à la problématique, difficilement surmontable, du temps de calcul.

Une densité modale élevée rend également difficile l'identification des modes, et on se heurte à l'impossibilité d'identifier tous les modes présents dans le domaine audible. Il n'est alors pas possible de déterminer les paramètres physiques à partir de l'identification des déformées modales expérimentales. De plus, dans les RI, expérimentales et simulées, il est difficile d'identifier les fréquences propres et leur décroissance, même à l'aide de techniques d'analyse paramétrique telle que la méthode Esprit. Pour pallier ces inconvénients, la description de l'amortissement est faite par bandes de fréquences et non mode par mode. Dans cette même optique, le relief de décroissance de la réponse impulsionnelle [40] s'impose tout naturellement comme la description temps-fréquence la plus adéquate pour l'analyse de ces signaux.

Dans les RI simulées par différences finies, il est difficile d'identifier le décalage de fréquences propres produit par la dispersion numérique en raison de leur densité élevée. Les effets de la dispersion numérique se manifestent comme une modification de la distribution fréquentielle de l'énergie totale. La Figure 4.10 montre que pour éviter ces effets sur l'énergie, il faut suréchantillonner d'un facteur 4, ce qui revient à multiplier par 16 le coût de calcul des DF. Pour une simulation correcte dans le domaine audible, il faut alors une fréquence d'échantillonnage  $F_s = 192$  kHz, et le nombre de degrés de libertés du système numérique est aussi augmenté d'un facteur 4. Si le coût de calcul était déjà important à 48 kHz, il est 16 fois plus important à 192 kHz.

### 8.1.3 Influence de l'excitateur électrodynamique

Le couplage de l'actionneur électrodynamique avec la plaque modifie la distribution fréquentielle de l'énergie totale de la RI par rapport à la réponse d'une plaque à une impulsion de force. Cette modification a des conséquences sur la perception de l'effet de réverbération. Un modèle simple du couplage d'un actionneur électrodynamique avec la plaque a été proposé. Néanmoins, la confrontation avec la mesure du réverbérateur EMT140 montre pour ce cas le modèle est uniquement valable jusqu'à 1.5 kHz (voir Figure 3.31). Pour de plus hautes fréquences, les pertes électromagnétiques influent sur le comportement des circuits et modifient l'égalisation. Ainsi, pour comparer les mesures du réverbérateur EMT140 aux simulations, on préfère recourir à l'égalisation de l'énergie totale de la réponse impulsionnelle simulée à partir de la spécification d'énergie totale donnée par la mesure. Cette égalisation est faite à l'aide d'un filtre à phase linéaire pour ne pas introduire de distorsions de phase.

### 8.1.4 Réverbération à plaque et réverbération acoustique

La modélisation physique de la réverbération à plaque a permis de comparer cet effet audio à la réverbération acoustique qu'elle cherche à reproduire. Les principales différences constatées entre ces deux phénomènes sont les suivantes :

- dans le domaine temporel, les ondes des vibrations de flexion de la plaque sont de nature dispersive, avec comme conséquence la plus directe l'absence de premières réflexions bien définies. Pour cette raison, la distribution d'amplitudes caractéristiques du régime diffus de la réverbération est atteinte presque instantanément dans le cas de la réverbération à plaque. Une autre conséquence de cette dispersion est que l'énergie en hautes fréquences précède celle en basses fréquences.
- dans le domaine fréquentiel, la densité modale des plaques est constante tandis que celle des salles est quadratique en fréquence.

On a également montré que le comportement global des vibrations de la plaque, outre l'amortissement, dépend uniquement du temps caractéristique  $t_0 = S/\kappa$ . Il est le seul paramètre physique de la plaque intervenant dans la densité moyenne d'échos à une fréquence et à un temps donnés ainsi que dans la densité modale. Ce paramètre gouverne la condition de réalisme de la réverbération à plaque, qui s'écrit comme une valeur maximale du temps de réverbération  $T_{60} < 2t_0$ .

### 8.1.5 Application du modèle

L'exploitation des outils élaborés pendant cette thèse a permis, d'une part, de montrer le comportement des amortissements pour différents jeux de paramètres physiques et géométriques. D'autre part, on a pu comparer les trois réponses impulsionnelles simulées d'une même plaque avec les trois types de conditions aux limites suivantes : bords encastrés, bords sur appuis simples ou bords libres. Les signaux résultats des simulations sont différents mais les analyses effectuées semblent indiquer qu'il n'y a pas de différence significative entre les comportements globaux, en temps et en fréquence. À l'écoute, il n'a pas été possible de différencier les trois simulations. La réverbération obtenue semble indépendante des conditions aux limites, mais une démarche de validation perceptive plus rigoureuse semble nécessaire pour valider ce résultat. Si ce résultat est validé, les coûts de calcul des simulations pourraient être très allégés grâce à l'exploitation des résultats analytiques des plaques sur des appuis simples.

### Remarques sur le coût de calcul

Bien que la taille du problème numérique du réverbérateur à plaque est importante en termes de degrés de liberté, on a vu qu'elle reste très petite par rapport à la taille du problème concernant la propagation des ondes acoustiques dans l'espace à trois dimensions (voir fin de §1.2). Pour le réverbérateur à plaque, la taille du problème rend envisageable la résolution des équations de comportement par des techniques numériques dans tout le domaine audible avec un ordinateur actuel (cadencé à 3GHz), ce qui n'est pas le cas pour l'acoustique des salles.

Une autre option consiste à simuler une plaque sur des appuis simples à partir de la forme analytique de sa décomposition modale. Cette simulation peut se faire efficacement à l'aide d'un banc de filtres de second ordre (voir l'annexe C), qui nécessite quelques calculs préalables mais qui fait appel, une fois les filtres spécifiés, à uniquement 3 opérations par mode et par pas de temps, à mettre au regard des 88 opérations nécessaires dans les différences finies 2-4 sans inclure l'amortissement.

La grande taille du problème rend difficile la simulation du comportement non linéaire identifié expérimentalement en très basses fréquences. La résolution par différences finies de l'équation de Von Kármán, qui régit les vibrations des plaques avec des non linéarités géométriques, nécessite l'emploi de schémas implicites [5], dont la résolution pour un système comportant 25000 modes est loin de pouvoir être faite avec les possibilités de calcul actuelles ou dans les années à venir.

### 8.1.6 Simulation de plaques circulaires

Dans le cadre de la simulation numérique des vibrations de flexion des plaques minces, on a également exploré l'adéquation des différences finies pour la résolution dans un domaine circulaire. On s'est limité aux schémas d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace.

L'utilisation d'une grille rectangulaire pour la résolution du problème de géométrie circulaire nécessite la modification des opérateurs près des bords du domaine afin de tenir compte de la géométrie circulaire. Cette approche, similaire à l'interpolation utilisée dans d'autres travaux, peut produire des instabilités difficilement prédictibles et qui dépendent de la configuration particulière du problème.

Une deuxième option consiste à définir une grille spatiale polaire selon un pas de rayon et un pas d'angle. L'étude de la stabilité par des méthodes énergétiques montre que la stabilité dépend des distances entre les points de la grille près du centre du domaine. La contrainte de stabilité est très forte, et la précision des différences finies n'est pas satisfaisante. Pour cette raison, on a proposé un schéma implicite dont la contrainte de stabilité est moins forte. La résolution de ce type de schémas implicites nécessite la résolution d'un système d'équations à chaque pas de temps. Ce coût de calcul élevé est le prix à payer pour garantir la précision et la stabilité requises.

La résolution de ce type de schémas est cependant difficilement envisageable pour la taille de problème d'un réverbérateur à plaque. Néanmoins, ces travaux peuvent mener à des applications intéressantes en acoustique musicale, domaine au sein duquel la géométrie circulaire est souvent présente et la taille des problèmes moins importante que dans le cas du réverbérateur à plaque.

## 8.2 Perspectives

Les perspectives de recherche à l'issue de ces travaux de thèse sont variées. On peut citer, avant de développer :

- l'exploitation du modèle numérique pour la réalisation de tests perceptifs permettant de déterminer les paramètres perceptivement significatifs de cet effet audio, en particulier ceux qui le différencient de la réverbération naturelle,
- des orientations pour réaliser la simulation à partir de modèles de signaux inspirés de la réverbération artificielle [40], qui sont plus efficaces que la modélisation physique complète du phénomène.
- le développement d'un logiciel pouvant s'intégrer dans les environnements d'enregistrement et d'informatique musicale actuels,
- des approfondissements sur la méthode des différences finies en coordonnées polaires pour la résolution de problèmes en géométrie circulaire.

Il semble nécessaire d'avoir une confirmation plus rigoureuse de l'indépendance aux conditions aux limites de la plaque de la réverbération obtenue. Si les différences entre les simulations avec différentes conditions aux limites ne sont pas perçues, on peut envisager de se restreindre à la synthèse de la RI d'une plaque simplement appuyée par décomposition modale et filtrage numérique (annexe C), dont le coût de calcul est très inférieur aux DF.

Il serait intéressant de déterminer si la différence perçue entre une réverbération à plaque et une réverbération acoustique naturelle mesurée avec le même relief de décroissance est significative. Il est probable que la différence dans la perception vienne principalement du transitoire initial, mais aussi d'une plus faible densité modale de la plaque en hautes fréquences. Ces études pourraient aboutir à une méthode plus efficace de synthèse qui combinerait les techniques de calcul numériques présentées (DF, DM) pour le calcul du transitoire initial de la RI et des techniques de traitement du signal inspirées des travaux de Schroeder et de Jot pour le calcul du comportement "plus diffus" qui apparaît après le transitoire. L'utilisation de l'échelle de Bark

pour le traitement des bandes fréquentielles semble aussi une piste à explorer pour la génération d'un modèle de signaux de la réverbération à plaque.

Une étude perceptive rigoureuse sur la validité du critère de densité modale minimale, qui s'exprime comme  $T_{60} < 2t_0$ , semble aussi nécessaire. Il serait ainsi intéressant de mettre en évidence, pour une plaque avec un amortissement donné et remplissant ce critère, quelles différences sont perçues quand on augmente la valeur de  $t_0$ , ce qui équivaut à augmenter sa densité modale.

D'un point de vue pratique, l'intégration dans les applications d'informatique musicale actuelles d'un logiciel de synthèse de la RI de la réverbération à plaque à partir des modèles physiques de comportement permettrait de valoriser ces travaux. Il s'agirait de développer ce logiciel sous forme de plugin VST ou DirectX, formats compatibles avec la majorité des logiciels d'informatique musicale actuels. On peut facilement imaginer un logiciel associé à une base de données de matériaux métalliques et de matériaux poreux, dans lequel l'utilisateur aurait le choix des matériaux, des paramètres géométriques et de la disposition des éléments d'excitation et de lecture de l'accélération. Plusieurs actionneurs simultanés et plusieurs points d'observation pourraient être sélectionnés pour le traitement de signaux multi-phoniques.

Les travaux portant sur la résolution numérique de l'équation de Kirchhoff-Love dans un domaine circulaire pourraient être poursuivis afin d'analyser plus en détail le comportement numérique des solutions et améliorer la précision de la méthode. Dans cette thèse, on s'est concentré sur l'étude de la précision dans le domaine fréquentiel grâce à la comparaison des fréquences propres des simulations avec celles obtenues analytiquement. Il serait judicieux d'envisager l'étude du comportement dans le domaine temporel par comparaison des simulations avec des résultats analytiques de référence.

Des améliorations possibles de la méthode des DF en coordonnées polaires concernent principalement le choix d'un pas de rayon variable et l'approximation spatiale des opérateurs continus à l'ordre 4, comme pour le cas rectangulaire. Le problème de stabilité de la méthode étudiée ici est lié au fait que les distances entre les points adjacents d'un même cercle,  $w_{r_i, \theta_i}$  et  $w_{r_i, \theta_{i+1}}$ , dépendent du rayon du cercle. Plus on s'approche du centre du domaine et plus la distance entre points est petite. Pour cette raison, le premier pas de rayon détermine la condition de stabilité de l'algorithme. Il est probable que la définition d'une grille avec un pas de rayon plus grand au centre et plus petit à l'extérieur permette d'améliorer les propriétés du schéma explicite.

La définition d'approximations à l'ordre 4 ne doit pas présenter de grande difficulté, cependant l'étude de la stabilité par des méthodes énergétiques en tenant compte des conditions aux limites devient un problème complexe. On peut supposer qu'un tel ordre d'approximation devrait améliorer les propriétés de dispersion numérique, mais ne permettrait pas de surmonter la difficulté liée à la condition de stabilité très restrictive imposée par le centre.

Pour conclure, on a vu qu'en prenant comme point de départ des modèles simples de la mécanique on a pu simuler un effet audio et élargir cet effet aux possibilités offertes par l'ensemble de choix des paramètres du modèle. Cette démarche, inspirée de celle de la synthèse sonore d'instruments de musique, est appliquée ici au traitement de signaux audio. On pourrait envisager de suivre la même démarche pour simuler d'autres effets audio analogiques, comme la réverbération à ressorts ou l'enceinte rotative Leslie.



# Bibliographie

---

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2005.
- [2] K. Arcas. *Simulation numérique d'un réverbérateur à plaque*. Rapport de master M2, parcours Atiam. Université Paris 6 - Ircam, 2005.
- [3] S. Bilbao. *Wave and scattering methods for the numerical integration of partial differential equations*. PhD thesis, CCRMA, Stanford University, 2001.
- [4] S. Bilbao. Conservative numerical methods for nonlinear strings. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2005.
- [5] S. Bilbao. A family of conservative finite difference schemes for the dynamical Von Karman plate equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24 :193–216, 2007.
- [6] S. Bilbao. *Numerical Sound Synthesis : Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics*. John Wiley and Sons, Chichester, UK, 2009,, 2009.
- [7] S. Bilbao and J. O. Smith III. Energy-conserving finite difference schemes for nonlinear strings. *Acustica*, 2004. Accepted for publication, revised.
- [8] J. Blauert. *Spatial Hearing*. M. I. T. Press, 1997.
- [9] B. Blesser. An interdisciplinary synthesis of reverberation viewpoints. *J. Audio Eng. Soc.*, 49(10) :867–903, October 2001.
- [10] E.A. Brandes. *Smithells Metals Reference Book, 6th Edition*. Butterworths, 1983.
- [11] P. Chadwick. On the propagation of thermoelastic disturbances in thin plates and rods. *J. Mech. Phys. Solids*, 10 :99–109, 1962.
- [12] A. Chaigne and C. Lambourg. Time-domain simulation of damped impacted plates. Part I. Theory and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(4) :1422–1432, 2001.
- [13] A. Chaigne, C. Lambourg, and D. Matignon. Time domain simulation of damped impacted plates. Part II. Numerical model and results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(4) :1433–1447, 2001.
- [14] B. L. Clarkson. The derivation of modal densities from point impedances. *Journal of Sound and Vibration*, 77 :583–584, 1981.
- [15] B. L. Clarkson and R. J. Pope. Experimental determination of modal densities and loss factors of flat plates and cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, 77 :535–549, 1981.

- [16] G. Cohen, editor. *Ecoles des Ondes Inria : Méthodes numériques d'ordre élevé pour les ondes en régime transitoire*. INRIA, 1994.
- [17] L. Cremer, M. Heckl, and E.E. Ungar. *Structure-Borne Sound*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [18] A. Cummings. Sound radiation from a plate into a porous medium. *Journal of Sound and Vibration*, 247(3) :389–406, 2001.
- [19] A. Cummings, H. J. Rice, and R. Wilson. Radiation damping in plates induced by porous media. *Journal of Sound and Vibration*, 221(1) :143–167, 1999.
- [20] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Collection du CEA, série scientifique. Masson, 1985.
- [21] B. David. *Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée*. PhD thesis, Université Paris 6, 1999.
- [22] G. Defrance and J.-D. Polack. Measurements in the New Salle Pleyel. In *Proceedings of the International Symposium on Room Acoustics (ISRA'2007)*, Sept. 2007.
- [23] G. Defrance and J.-D. Polack. Measuring the mixing time in auditoria. In *Proceedings Acoustics'08, Paris*, July 2008.
- [24] M. Dodd, W. Klippel, and J. Ocle-Brown. Voice coil impedance as a function of frequency and displacement. *117th Convention of the Audio Eng. Soc., San Francisco*, 212 :583–598, 2004.
- [25] V. Doutaut. *Etude expérimentale et simulations numériques d'instruments de percussion à clavier*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 1997.
- [26] O. Doutres, N. Dauchez, J-M Genevaux, and O. Dazel. Validity of the limp model for porous materials : A criterion based on the Biot theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(4) :2038–2048, 2007.
- [27] J. F. Doyle. *Wave Propagation in Structure : Spectral Analysis Using Fast Discret Fourier Transforms*. Springer, 2nd edition, 1997.
- [28] EMT-Franz. *Instruction Manual : EMT240 Reverb Foil*. EMT Franz, 1978.
- [29] W. Kuhl et al. Reverberation device. *U.S. Patent 3,719,905*, 1973.
- [30] A. Farina. Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique. *108th AES Convention, Paris*, 2000.
- [31] A. Farina and R. Ayalon. Recording concert hall acoustics for posterity. In *Proceedings AES 24th Int. Conf. on Multichannel Audio, Banff, Canada*, 2003.
- [32] S. Foster. Impulse response measurements using golay codes. *Proc. ICASSP, Tokyo*, pages 929–932, 1986.
- [33] W. Franz. *Nachhallgerät EMT140 alle Ausführungen (EMT140 user manual)*. EMT Wilhem Franz GmbH, undated.
- [34] L. Daudet G. Defrance and J.-D. Polack. Detecting Arrivals Within Room Impulse Responses Using Matching Pursuit. In *Proceedings of the 11th Conference on Digital Audio Effects (DAFx-08), Espoo, Finland*, September 2008.

- 
- [35] M. G eradin and D. Rixen. *Théorie des Vibrations : Application   la Dynamique des Structures*. Masson, 1992.
- [36] K. F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. "Dover Editions", New York, USA, 1991.
- [37] D. Griesinger. Practical processors and programs for digital reverberation. *Proc. 7th AES Int. Conf.*, pages 187–195, 1989.
- [38] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, and J. Oliger. *Time Dependent Problems and Difference Methods*. Wiley-Interscience, 1995.
- [39] F. Coppens J.-L. Mari, F. Glangeaud. *Traitement du Signal pour Géologues et G ophysiciens*. Editions Technip, 1997.
- [40] J.-M. Jot. *Etude et réalisation d'un spatialisateur de sons par modèles physiques et perceptifs*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 1992.
- [41] P. R. Keswick and M. P. Norton. A comparison of modal densities measurement techniques. *Applied Acoustics*, 20 :137–153, 1987.
- [42] H.-O. Kreiss and N. A. Peterson. A second order accurate embedded boundary method for the wave equation with Dirichlet data. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(4) :1141–1167, 2006.
- [43] H.-O. Kreiss, N. A. Peterson, and J. Ystr m. Difference approximations for the second order wave equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2003.
- [44] H.-O. Kreiss, N. A. Peterson, and J. Ystr m. Difference approximations of the Neumann problem for the second order wave equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(3) :1292–1323, 2005.
- [45] W. Kuhl. The acoustical and technological properties of the reverberation plate. *E.B.U. Review, Part A - Technical*, (49) :8–14, 1958.
- [46] H. Kuttruff. *Room Acoustics*. Applied Science Publishers, London, 2nd edition, 1979.
- [47] J. E. Lagnese and J.-L. Lions. *Modelling Analysis and Control of Thin Plates*. Masson, Paris, 1988.
- [48] C. Lambourg. *Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes - Application   la synthèse sonore*. PhD thesis, Universit  du Maine, 1997.
- [49] J. Laroche. *Traitement des Signaux Audio-Fréquences*. Polycopi . Telecom Paris, 1995.
- [50] A. Leissa. *Vibration of Plates*. Acoustical Society of America, 1993 edition, 1973.
- [51] C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures*. Eyrolles, Paris, 1988.
- [52] J.L. Lions and E. Magenes. *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [53] G. Maidanik. Response of ribbed panels to reverberant acoustics fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 34 :809–826, 1962.
- [54] M. E. McIntyre and J. Woodhouse. On measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials. *Acta Metallurgica*, 36(6) :1397–1416, 1988.

- [55] M.E. McIntyre and J. Woodhouse. The influence of geometry on linear damping. *Acustica*, 39(4) :209–224, 1978.
- [56] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1968.
- [57] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York, 1979.
- [58] J. Necas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, 1967.
- [59] A. Norris. Dynamics of thermoelastic thin plates : A comparison of four theories. *Journal of Thermal Stresses*, 29(2) :169–195, 2006.
- [60] A. N. Norris and D. M. Photiadis. Thermoelastic relaxation in elastic structures, with applications to thin plates. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 58(1) :145–163, 2005.
- [61] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [62] J.D. Polack. *La transmission de l'énergie sonore dans les salles*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, 1988.
- [63] A. Putra and D. J. Thompson. Radiation efficiency from a point-excited rectangular baffled and unbaffled plates. *Proceeding of the Institute of Acoustics*, 2006.
- [64] N. Quaegebeur. *Vibrations non linéaires et rayonnement acoustique de structures minces de type haut-parleur*. PhD thesis, Doctorat de l'École Polytechnique, 2007.
- [65] A. Reilly and D. McGrath. Convolution processing for realistic reverberation. *In Proceedings of the 98th AES Convention, Paris*, 1995.
- [66] K. Renji. Experimental modal densities of honeycomb sandwich panels at high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 237 :66–79, 200.
- [67] R. D. Richtmyer and K. W. Morton. *Difference methods for initial-value problems*. Interscience Publishers, 2nd edition, 1967.
- [68] H. J. Round and A. G. D. West. “Transmission and Reproduction of Sound”, US patent 1,853,286. 1932.
- [69] H. J. Round and A. G. D. West. “Electrical Musical Instrument”, US patent 2,230,836. 1941.
- [70] M. L. Rumerman. The effect of fluid loading on radiation efficiency. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(1) :75–79, 2001.
- [71] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus*. Les Editions de l'École Polytechnique, 2005.
- [72] M. R. Schroeder. New method for measuring reverberation time. *J. Acoust. Soc. Am.*, 37 :409–412, 1965.
- [73] M.R. Schroeder. Die statistischen Parameter der Frequenzkurven von grossen Räumen. *Acustica*, 4 :594–600, 1954.
- [74] M.R. Schroeder. Natural sounding artificial reverberation. *J. Audio. Eng. Soc.*, 10(3) :219–223, 1962.
- [75] M.R. Schroeder. Integrated impulse method for measuring sound decay without using impulses. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66(2) :497–500, 1979.

- 
- [76] M.R. Schroeder and B.F. Logan. Colorless artificial reverberation. *IRE Transactions on Audio*, 9(6) :209–214, 1961.
- [77] J. G. Simmonds. Major simplifications in a current linear model for the motion of a thermoelastic plate. *Quarterly of Applied Mathematics*, 57(4) :673–679, 1999.
- [78] E. Skudrzyk. *Simple and Complex Vibratory Systems*. Pennsylvania State University Press, 1968.
- [79] E. Skudrzyk. The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67(4) :1105–1135, 1980.
- [80] Julius O. Smith. *Introduction to Digital Filters with Audio Applications*. W3K Publishing, 2007.
- [81] O. Thomas. *Vibrations non linéaires de coques minces*. Rapport de stage post-doctoral ENSTA-Convention DGA, 2003.
- [82] O. Thomas, C. Touzé, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part II : experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 265 :1075–1101, 2003.
- [83] D. Thomlinson, R. J. M. Craik, and R. Wilson. Acoustic radiation from a plate into a porous medium. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1), 2004.
- [84] J. Vanderkooy. A model of loudspeaker driver impedance incorporating eddy currents in the pole structure. *J. Audio Eng. Soc.*, 38 :119–128, 1989.
- [85] Jr W. M. Leach. Loudspeaker voice-coil inductance losses : Circuit models, parameter estimation, and effect on frequency response. *J. Audio Eng. Soc.*, 50(6) :442–449, 2002.
- [86] C.E. Wallace. Radiation resistance of a baffled beam. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51 :936–945, 1972.
- [87] C.E. Wallace. Radiation resistance of a rectangular panel. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51 :946–952, 1972.
- [88] C.E. Wallace. The acoustic radiation damping of the modes of a rectangular panel. *J. Acoust. Soc. Am.*, 81 :1787–1794, 1987.
- [89] R.C. Weast. *CRC Handbook of Chemistry and Physics, 60th edition*. CRC Press, 1975.
- [90] R. L. Wegel. “Wave Transmission Device”, US patent 1,852,795. 1932.
- [91] P. White. *Creative Recording I : Effects and Processors*. Sanctuary Publishing, London, 1999.
- [92] R.P. Wildes and W.A. Richards. Recovering material properties from sounds. In W. Richards, editor, *Natural computation*, pages 356–363. MIT Press, 1988.
- [93] E.G. Williams. *Fourier Acoustics : Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. Academic Press, New York, 1999.
- [94] G. Xie, D.J. Thompson, and C.J.C. Jones. Mode count and modal density of structural systems : relationships with boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 274 :621–651, 2004.
- [95] C. Zener. Internal friction in solids. I. Theory of internal friction in reeds. *Phys. Rev.*, 52(3) :230–235, 1937.



# Annexes



# Simulation numérique des vibrations de flexion des barres

---

## A.1 Barre d'Euler-Bernoulli

On présente ici l'analyse de la stabilité de deux schémas aux DF, un explicite et l'autre implicite, pour la résolution de l'équation d'Euler-Bernoulli.

### A.1.1 Modèle continu et énergie

Cette équation décrit les vibrations de flexion des barres minces. Elle s'écrit [36] :

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad \text{où : } I = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{A.1})$$

où  $w$  est le déplacement transversal et  $x$  la variable d'espace longitudinal d'une barre d'épaisseur  $h$  et de largeur  $b$ .  $I$  est le moment d'inertie de la barre, qui pour une section rectangulaire est  $I = bh^3/12$ .  $A = bh$  est la section transversale,  $\rho$  est la densité volumique du matériau et  $E$  est le module d'Young.

Pour l'étude de l'énergie associée à (A.1) il faut définir un produit scalaire. Soient  $f(x, t)$  et  $g(x, t)$  des fonctions à valeurs réelles de l'espace vectoriel normé  $L_2$  des fonctions de carré sommable sur l'intervalle  $\mathcal{D}$ . Le produit scalaire  $\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}}$  et la norme  $\|f\|_{\mathcal{D}}$  associés à cet espace sont :

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} f g \, dx, \quad (\text{A.2})$$

$$\|f\|_{\mathcal{D}} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathcal{D}}}$$

où le domaine  $\mathcal{D}$  correspond à l'intervalle des réels  $x \in [d_+; d_-]$ . L'évolution de l'énergie du système continu défini dans  $\mathcal{D}$  peut s'obtenir comme le produit scalaire de l'équation de la dynamique (A.1) avec la vitesse  $\frac{\partial w}{\partial t}$ , soit :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial w}{\partial t} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx + EI \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = 0. \quad (\text{A.3})$$

L'égalité suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (\text{A.4})$$

permet d'écrire le premier terme de (A.3) comme :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\rho A}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{\rho A}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|w\|_{\mathcal{D}}^2 \quad (\text{A.5})$$

La double intégration par parties du deuxième terme, puis l'application de l'égalité (A.4), donne :

$$\begin{aligned} EI \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= EI \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + \mathcal{B}_1 \\ &= \frac{EI}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \mathcal{B}_1 \quad \text{où :} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{B}_1 = EI \left[ w_t \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right]_{d_-}^{d_+} - EI \left[ \frac{\partial w_t}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{d_-}^{d_+}$$

**Remarque :**

Pour des fonctions  $f, g$  régulières dans  $L_2$ , quand le produit scalaire est défini dans l'ensemble des réels  $\mathbb{R} = [-\infty, \infty]$ , les termes de bord  $\mathcal{B}_1$  sont nuls car l'évaluation est faite à l'infini. L'opérateur dérivée seconde en espace  $\partial_{xx}$  est dit formellement auto-adjoint (par rapport au produit scalaire défini) car il peut être changé de côté sans en altérer le résultat, i.e. :

$$\langle f, \partial_{xx} g \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \partial_{xx} f, g \rangle_{\mathbb{R}}. \quad (\text{A.7})$$

Grâce aux résultats donnés par (A.5) et (A.6), l'équation (A.3) peut s'écrire en faisant intervenir les normes :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{T} + \mathfrak{U}) = \mathcal{B}_1 \quad \text{où : } \mathfrak{T} = \frac{\rho A}{2} \|w\|_{\mathcal{D}}^2, \quad \mathfrak{U} = \frac{EI}{2} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\|_{\mathcal{D}}^2, \quad (\text{A.8})$$

Cette expression décrit l'évolution de l'énergie de la barre au cours du temps, où l'énergie cinétique est  $\mathfrak{T}$  et l'énergie potentielle des forces élastiques est  $\mathfrak{U}$ . Le terme  $\mathcal{B}_1$ , qui fait intervenir l'évaluation du déplacement et ses dérivées spatiales aux bords du domaine,  $d_+$  et  $d_-$ , gouverne la variation temporelle de l'énergie. Si les termes de bord sont nuls, i.e.  $\mathcal{B}_1 = 0$ , l'énergie du système est constante au cours du temps et le système est dit conservatif. On parle alors de conditions aux limites conservatives.

La méthode de l'analyse énergétique se base sur le fait qu'**une condition suffisante pour la stabilité forte de l'algorithme des DF est que l'énergie du système discret soit conservée au cours du temps et qu'elle soit positive** [7; 5; 6]. L'analyse de la stabilité par cette méthode nécessite d'établir l'équation d'évolution de l'énergie du système discrétisé par les DF, de façon similaire à ce qu'on vient de faire pour le système continu. En d'autres termes, on souhaite déterminer l'équivalent numérique de l'évolution de l'énergie (A.8), ce qui permettra de déterminer des conditions aux limites numériques conservatives. Une fois la conservation de l'énergie prouvée, il suffira de voir sous quelles conditions l'énergie numérique est positive.

### A.1.2 Conditions aux limites continues

On étudie ici trois types de conditions aux limites (CL) idéalisées, i.e. conservatives, aux extrémités de la barre : appui simple, encastrement et extrémité libre. La formulation de ces conditions aux limites à une extrémité  $x = d_+$  est [36] :

$$\text{Appui simple (A) :} \quad w(d_+, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(d_+, t) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Encastrement (E) : } \quad w(d_+, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(d_+, t) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Extrémité Libre (L) : } \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(d_+, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(d_+, t) = 0 \quad (\text{A.11})$$

On remarque que, pour une barre dont les extrémités suivent n'importe laquelle de ces trois types de CL, le terme  $\mathcal{B}_1$  de (A.6) s'annule et l'énergie du système continu est conservée.

## A.2 Fonctions discrètes et opérateurs aux différences en une dimension

On présente ici la notation utilisée par la suite. La discrétisation des variables temps  $t$  et espace  $x$  est faite avec le pas de temps  $k$  et le pas d'espace  $h$ . Le déplacement transversal continu  $w(x_i, t_n)$  est approché par la variable discrète  $w_i^n$ , où  $i$  est l'index de discrétisation spatiale et  $n$  l'index de discrétisation temporelle tels que  $x_i = ih$  et  $t_n = nk$ .

Les opérateurs de base des DF sont le décalage en avant et en arrière sur la grille de la variable discrétisée  $w_i^n$  par rapport au temps  $e_{t+}$  et  $e_{t-}$  et par rapport à l'espace  $e_{x+}$  et  $e_{x-}$  :

$$e_{t+}w_i^n = w_i^{n+1} \quad e_{t-}w_i^n = w_i^{n-1} \quad (\text{A.12})$$

$$e_{x+}w_i^n = w_{i+1}^n \quad e_{x-}w_i^n = w_{i-1}^n \quad (\text{A.13})$$

On définit ci-après les opérateurs aux différences en temps :

$$\mu_{t-}w_i^n = \frac{w_i^n + w_i^{n-1}}{2} \quad (\text{A.14})$$

$$\delta_{t+}w_i^n = \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{k} \quad (\text{A.15})$$

$$\delta_{t-}w_i^n = \frac{w_i^n - w_i^{n-1}}{k} \quad (\text{A.16})$$

$$\delta_t.w_i^n = \frac{w_i^{n+1} - w_i^{n-1}}{2k} = \frac{\delta_{t+}w_i^n + \delta_{t-}w_i^n}{2} \quad (\text{A.17})$$

$$\delta_{tt}w_i^n = \frac{w_i^{n+1} - 2w_i^n + w_i^{n-1}}{k^2} = \delta_{t+} \circ \delta_{t-}w_i^n \quad (\text{A.18})$$

où  $\delta_t$ ,  $\delta_{t+}$  et  $\delta_{t-}$  sont trois approximations différentes de l'opérateur continu  $\partial_t$ , et  $\delta_{tt}$  est l'approximation de  $\partial_{tt}$ . L'opérateur  $\mu_{t-}$  correspond à la moyenne retardée du déplacement entre deux instants consécutifs.

Pour l'espace les opérateurs discrets utilisés sont :

$$\delta_{x+}w_i^n = \frac{w_{i+1}^n - w_i^n}{h} \quad (\text{A.19})$$

$$\delta_{x-}w_i^n = \frac{w_i^n - w_{i-1}^n}{h} \quad (\text{A.20})$$

$$\delta_{xx}w_i^n = \delta_{x+} \circ \delta_{x-}w_{i,j}^n = \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{h^2} \quad (\text{A.21})$$

$$\delta_{xxxx}w_i^n = \delta_{xx} \circ \delta_{xx}w_{i,j}^n = \frac{w_{i+2}^n - 4w_{i+1}^n + 8w_i^n - 4w_{i-1}^n + w_{i-2}^n}{h^4} \quad (\text{A.22})$$

où  $\delta_{xxxx}$  approche la dérivée quatrième en espace qui apparaît dans Euler-Bernoulli.

Quelques identités entre ces opérateurs utiles pour la suite sont :

$$(\delta_t.w)(\delta_{tt}w) = \delta_{t+} \left( \frac{1}{2} (\delta_{t-}w)^2 \right) \quad (\text{A.23})$$

$$we_{t-}w = (\mu_{t-}w)^2 - \frac{k^2}{4} (\delta_{t-}w)^2 \quad (\text{A.24})$$

$$(\delta_t.w)w = \delta_{t+} \left( \frac{1}{2} (we_{t-}w)^2 \right) \quad (\text{A.25})$$

### A.2.1 Définition d'un produit scalaire

De la même façon que dans le cas continu, on définit un produit scalaire et une norme, cette fois discrets, pour les opérateurs discrets définis sur une grille spatiale infinie des indices entiers  $i \in \mathbb{Z}$  avec  $\mathbb{Z} = [-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty]$ . Pour deux fonctions discrètes  $f_i$  et  $g_i$ , repérées par l'indice spatial  $i$ , on a :

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{Z}} = h \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i g_i \quad (\text{A.26})$$

$$\|f\|_{\mathbb{Z}} = \langle f, f \rangle_{\mathbb{Z}}^{1/2} \geq 0$$

Comme pour le cas continu, ce produit scalaire est une forme bilinéaire, et il a les propriétés suivantes [38] :

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle g, f \rangle_{\mathbb{Z}} \quad (\text{A.27})$$

$$\langle f + g, h \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle f, h \rangle_{\mathbb{Z}} + \langle g, h \rangle_{\mathbb{Z}} \quad (\text{A.28})$$

$$\langle \lambda f, g \rangle_{\mathbb{Z}} = \lambda \langle f, g \rangle_{\mathbb{Z}} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (\text{A.29})$$

Et les inégalités suivantes :

$$|\langle f, g \rangle_{\mathbb{Z}}| \leq \|f\|_{\mathbb{Z}} \|g\|_{\mathbb{Z}} \quad (\text{A.30})$$

$$\|f + g\|_{\mathbb{Z}} \leq \|f\|_{\mathbb{Z}} + \|g\|_{\mathbb{Z}} \quad (\text{A.31})$$

$$|\langle f, g \rangle_{\mathbb{Z}}| \leq \mu \|f\|_{\mathbb{Z}}^2 + \frac{1}{4\mu} \|g\|_{\mathbb{Z}}^2 \quad \forall \mu > 0 \quad (\text{A.32})$$

Ces propriétés sont aussi valables quand le domaine de définition du produit scalaire est fini.

### A.2.2 Opérateurs formellement adjoints et formellement auto-adjoints

Les opérateurs  $\delta_{x+}$  et  $\delta_{x-}$  ont des propriétés importantes entre eux. Pour des fonctions régulières qui s'annulent à l'infini, l'opérateur  $\delta_{x+}$  et l'**adjoint formel** de l'opérateur  $-\delta_{x-}$ , et également l'opérateur  $\delta_{x-}$  et l'adjoint formel de l'opérateur  $-\delta_{x+}$ . En pratique, quand on déplace un des ces opérateurs d'un côté à l'autre d'un produit scalaire on obtient son opérateur adjoint de l'autre coté, i.e. :

$$\langle \delta_{x+}f, g \rangle_{\mathbb{Z}} = -\langle f, \delta_{x-}g \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad (\text{A.33})$$

$$\langle \delta_{x-}f, g \rangle_{\mathbb{Z}} = -\langle f, \delta_{x+}g \rangle_{\mathbb{Z}}. \quad (\text{A.34})$$

Parce que cette propriété nécessite des fonctions régulières et qui ont le bon comportement aux bornes, i.e. qui s'annulent à l'infini, on parle d'adjoint **formel**.

L'opérateur  $\delta_{xx}$  est l'adjoint formel de lui-même, il est donc un **opérateur formellement auto-adjoint**. Il peut être changé de côté dans le produit scalaire sans en altérer le résultat. Pour l'opérateur discret  $\delta_{xx}$  on a :

$$\langle f, \delta_{xx}g \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \delta_{xx}f, g \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad (\text{A.35})$$

Il s'agit de l'équivalent discret de la propriété d'auto-adjoint de l'opérateur continu  $\partial_{xx}$  (A.6) quand les termes faisant intervenir les bords du domaine sont nuls.

Les propriétés (A.33), (A.34) et (A.35) dépendent des valeurs des fonctions aux bornes du domaine, et donc du domaine sur lequel est défini le produit scalaire. Par exemple, si on restreint le domaine de (A.26) au demi plan infini  $i \in \mathbb{N}$ , où  $\mathbb{N} = [0, 1, \dots, \infty[$ , le nouveau produit scalaire s'écrit :

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{N}} = h \sum_{i=0}^{\infty} f_i g_i \quad (\text{A.36})$$

Les propriétés (A.33) et (A.34) deviennent :

$$\langle \delta_{x+}f, g \rangle_{\mathbb{N}} = -\langle f, \delta_{x-}g \rangle_{\mathbb{N}} - f]_{i=0} \cdot g]_{i=-1}, \quad (\text{A.37})$$

$$\langle \delta_{x-}f, g \rangle_{\mathbb{N}} = -\langle f, \delta_{x+}g \rangle_{\mathbb{N}} - f]_{i=-1} \cdot g]_{i=0}, \quad (\text{A.38})$$

et la propriété (A.35) devient :

$$\langle f, \delta_{xx}g \rangle_{\mathbb{N}} = \langle \delta_{xx}f, g \rangle_{\mathbb{N}} + g_0(\delta_{x-}f_0) - f_0(\delta_{x+}g_0), \quad (\text{A.39})$$

ce qui montre l'importance capitale du domaine où le produit scalaire est défini sur le caractère d'adjoint formel ou auto-adjoints formel des opérateurs. Cette propriété dépend des valeurs des fonctions aux bornes du domaine.

La démonstration de (A.37) et de (A.38) se fait par manipulation algébrique des sommes. On a :

$$\begin{aligned} \langle \delta_{x+}f, g \rangle_{\mathbb{N}} &= \left\langle \left( \frac{e_{x+} - 1}{h} \right) f, g \right\rangle_{\mathbb{N}} = \frac{1}{h} (\langle e_{x+}f, g \rangle_{\mathbb{N}} - \langle f, g \rangle_{\mathbb{N}}) \\ \langle e_{x+}f, g \rangle_{\mathbb{N}} &= h \sum_{i=0}^{\infty} f_{i+1} g_i = h \sum_{i=1}^{\infty} f_i g_{i-1} = h \sum_{i=0}^{\infty} f_i g_{i-1} - f_0 g_{-1} \\ \langle \delta_{x+}f, g \rangle_{\mathbb{N}} &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} f_i g_{i-1} - f_i g_i \right) - f_0 g_{-1} = -\langle f, \delta_{x-}g \rangle_{\mathbb{N}} - f_0 g_{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

A partir des relations (A.37) et (A.38) on peut montrer la relation (A.39).

Si on considère maintenant un domaine fini, comme celui d'une barre finie, où  $i \in \mathcal{D}$  avec  $\mathcal{D} = [0, 1, \dots, N]$ , le produit scalaire est :

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}} = h \sum_{i=0}^N f_i g_i \quad (\text{A.41})$$

$$\|f\|_{\mathcal{D}} = \langle f, f \rangle_{\mathcal{D}}^{1/2} \geq 0$$

Avec ce produit scalaire, les relations montrés précédemment s'écrivent :

$$\begin{aligned}\langle \delta_{x+} f, g \rangle_{\mathcal{D}} &= -\langle f, \delta_{x-} g \rangle_{\mathcal{D}} - f_0 g_{-1} + f_{N+1} g_N \\ \langle \delta_{x-} f, g \rangle_{\mathcal{D}} &= -\langle f, \delta_{x+} g \rangle_{\mathcal{D}} - f_{-1} g_0 + f_N g_{N+1},\end{aligned}\tag{A.42}$$

et pour l'opérateur  $\delta_{xx}$  on a :

$$\langle f, \delta_{xx} g \rangle_{\mathcal{D}} = \langle \delta_{xx} f, g \rangle_{\mathcal{D}} + g_0(\delta_{x-} f_0) - f_0(\delta_{x-} g_0) - (\delta_{x+} f_N) g_N + (\delta_{x+} g_N) f_N.\tag{A.43}$$

Ces opérations sont l'équivalent discret de l'intégration par parties (IPP) du cas continu. Pour  $\delta_{x+}$  il s'agit d'une IPP et pour  $\delta_{xx}$  de deux IPP successives.

### A.2.3 Bornes supérieures des opérateurs discrets

A partir des inégalités triangulaires du produit scalaire, en particulier (A.31), on peut borner supérieurement la norme des opérateurs aux différences. On donne comme exemple le calcul de la borne de l'opérateur  $\delta_{x+}$  :

$$\|\delta_{x+} f\|_{\mathbb{Z}} = \left\| \frac{1}{h}(e_+ + 1)f \right\|_{\mathbb{Z}} = \frac{1}{h} \|e_+ f + f\|_{\mathbb{Z}} \leq \frac{2}{h} \|f\|_{\mathbb{Z}}\tag{A.44}$$

Les bornes des autres opérateurs sont :

$$\begin{aligned}\|\delta_{x+} f\|_{\mathbb{Z}} &\leq \frac{2}{h} \|f\|_{\mathbb{Z}} \quad \Rightarrow \|\delta_{x+}\|_{\mathbb{Z}} \leq \frac{2}{h} \\ \|\delta_{x-} f\|_{\mathbb{Z}} &\leq \frac{2}{h} \|f\|_{\mathbb{Z}} \quad \Rightarrow \|\delta_{x-}\|_{\mathbb{Z}} \leq \frac{2}{h} \\ \|\delta_{xx} f\|_{\mathbb{Z}} &\leq \frac{4}{h^2} \|f\|_{\mathbb{Z}} \quad \Rightarrow \|\delta_{xx}\| \leq \frac{4}{h^2}\end{aligned}\tag{A.45}$$

Ces bornes sont également valides pour le domaine fini  $\mathcal{D}$ .

## A.3 Schéma explicite pour les barres

Le schéma aux DF le plus simple pour la résolution de l'équation d'Euler-Bernoulli fait intervenir l'opérateur spatial  $\delta_{xxxx}$  (A.22) et l'opérateur temporel  $\delta_{tt}$  (A.21). L'équation aux différences qu'on obtient avec ces opérateurs est :

$$\delta_{tt} w_{i,j}^n + \kappa^2 \delta_{xxxx} w_{i,j}^n = 0, \quad \text{avec : } \kappa^2 = \frac{EI}{\rho A}\tag{A.46}$$

### A.3.1 Analyse de la stabilité en milieu infini

Le premier pas dans l'analyse de la stabilité par des méthodes énergétiques et obtenir l'équation d'évolution de l'énergie du système discret. On procède de façon similaire au cas continu, en faisant, sur le domaine semi-infini des nombres entiers  $\mathbb{Z}_+$ , le produit scalaire de (A.46) avec l'approximation discrète de la vitesse  $v = \delta_t w$  :

$$\langle \delta_t w_i^n, \delta_{tt} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} + \kappa^2 \langle \delta_t w_i^n, \delta_{xxxx} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} = 0,\tag{A.47}$$

L'égalité (A.23) permet d'écrire le premier terme de cette équation sous forme quadratique, soit :

$$\langle \delta_t w_i^n, \delta_{tt} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} = \frac{1}{2} \delta_{t+} \langle \delta_{t-} w_i^n, \delta_{t-} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} = \frac{1}{2} \delta_{t+} \|\delta_{t-} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2,\tag{A.48}$$

Grâce à la propriété d'auto-adjoint de l'opérateur  $\delta_{xx}$  et à l'égalité (A.25), le deuxième terme de (A.47) s'écrit :

$$\begin{aligned} \kappa^2 \langle \delta_t w_i^n, \delta_{xxxx} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} &= \kappa^2 \langle \delta_t w_i^n, \delta_{xx} \delta_{xx} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} = \kappa^2 \langle \delta_{xx} (\delta_t w_i^n), \delta_{xx} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} \\ &= \kappa^2 \langle \delta_t (\delta_{xx} w_i^n), \delta_{xx} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} = \kappa^2 \frac{1}{2} \delta_{t+} \langle \delta_{xx} w_i^n, e_{t-} \delta_{xx} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

L'équation (A.47) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\delta_{t+} \mathfrak{h}^n = \delta_{t+} \left[ \frac{1}{2} \|\delta_{t-} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 + \kappa^2 \frac{1}{2} \langle \delta_{xx} w_i^n, e_{t-} \delta_{xx} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} \right] = 0, \quad (\text{A.50})$$

Cette forme montre explicitement l'évolution d'une énergie discrète. La quantité  $\mathfrak{h}^n$  est préservée au cours du temps et correspond à l'énergie du système discret à l'instant  $n$ . Le premier terme de  $\mathfrak{h}$  correspond à l'énergie cinétique discrète et le deuxième à l'énergie potentielle discrète. Une autre façon plus explicite d'écrire (A.50) est :

$$\delta_{t+} \mathfrak{h}^n = \frac{1}{k} (\mathfrak{h}^{n+1} - \mathfrak{h}^n) = 0 \quad \iff \quad \mathfrak{h}^{n+1} = \mathfrak{h}^n \quad (\text{A.51})$$

Si le même calcul est fait sur un domaine fini, on obtient que l'évolution temporelle de  $\mathfrak{h}^n$  dépend des valeurs discrètes aux bords du domaine (comme pour le cas continu). Le système discret est dit conservatif si la contribution de ces termes de bord est nulle. Supposons pour l'instant qu'on se trouve dans cette situation.

Si l'énergie du système discret est conservée, une condition suffisante de stabilité est que l'énergie soit positive. Dans (A.50) le premier terme est toujours positif, mais le deuxième terme n'est pas forcément positif. Si on peut écrire ce terme en fonction de termes quadratiques on pourra juger de la positivité de l'énergie totale. Grâce à la relation (A.24) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle f_i^n, e_{t-} f_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} &= \langle \mu_{t-} f_i^n, \mu_{t-} f_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} - \frac{k^2}{4} \langle \delta_{t-} f_i^n, \delta_{t-} f_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} = \|\mu_{t-} f_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 - \frac{k^2}{4} \|\delta_{t-} f_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2, \quad \text{alors :} \\ \frac{\kappa^2}{2} (\langle \delta_{xx} w_i^n, e_{t-} \delta_{xx} w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}}) &= \frac{\kappa^2}{2} \|\mu_{t-} \delta_{xx} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 - \frac{\kappa^2 k^2}{8} \|\delta_{t-} \delta_{xx} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

L'énergie du système discret à l'instant  $n$  peut alors s'écrire en fonction de termes uniquement quadratiques, et une condition suffisante de stabilité est :

$$\mathfrak{h}^n = \frac{1}{2} \|\delta_{t-} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 + \frac{\kappa^2}{2} \|\mu_{t-} \delta_{xx} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 - \frac{\kappa^2 k^2}{8} \|\delta_{t-} \delta_{xx} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \geq 0, \quad (\text{A.53})$$

Les contributions à l'énergie du premier et du deuxième terme sont positives et celle du troisième terme est négative. Une condition suffisante de stabilité est alors que le premier terme soit toujours supérieur au troisième terme. On a vu que la norme de l'opérateur  $\delta_{xx}$  peut être bornée supérieurement par  $4/h^2$  (A.45). On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\delta_{t-} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 - \frac{\kappa^2 k^2}{8} \|\delta_{t-} \delta_{xx} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 &\geq 0 \\ \text{On sait :} \quad \frac{\kappa^2 k^2}{8} \|\delta_{t-} \delta_{xx} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 &\leq \frac{\kappa^2 k^2}{8} \|\delta_{t-} \frac{16}{h^4} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\text{Alors :} \quad \|\delta_{t-} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\kappa^2 k^2}{8} \frac{16}{h^4} \right) \geq 0,$$

La positivité de l'énergie dépend du signe de la parenthèse qui fait intervenir le pas de temps  $k$ , le pas d'espace  $h$  et le paramètre de la barre  $\kappa$ . La condition suffisante de stabilité obtenue peut s'écrire comme :

$$\frac{\kappa^2 k^2}{h^4} < \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad r < \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad r = \frac{\kappa k}{h^2} \quad (\text{A.55})$$

On obtient que la condition de stabilité est une borne supérieure sur le nombre de Courant  $r$ . Il s'agit de la même condition que celle obtenue avec la méthode de Von Neuman pour les milieux infinis ou périodiques [25].

### A.3.2 Analyse de la stabilité en milieu fini

La condition de stabilité (A.55) est valable pour un milieu infini ou périodique. Pour un domaine fini, pour s'assurer que l'énergie est conservée il faut vérifier que les CL numériques choisies sont conservatives. Même si les CL du problème continu sont conservatives, elles peuvent être approchées numériquement de façons différentes, et on ne peut pas assurer que toutes les approximations discrètes possibles conservent l'énergie discrète. Il faut s'assurer que les CL numériques sont conservatives pour que le système discret soit lui même conservatif. Dans ce cas, la positivité de l'énergie numérique assure la stabilité forte du schéma aux DF.

L'utilisation d'un produit scalaire sur un domaine fini fait apparaître les termes de bord numériques. On se limite ici à l'étude du schéma explicite (A.46). Les termes de bord apparaissent lors du calcul de la contribution à l'énergie du terme correspondant à l'énergie élastique (A.49). Lors du passage de l'opérateur  $\delta_{xx}$  de droite à gauche du produit scalaire il faut tenir compte des termes de bord donnés par la relation (A.39), qui s'écrit :

$$\langle f, \delta_{xx} g \rangle_{\mathcal{D}} = \langle \delta_{xx} f, g \rangle_{\mathcal{D}} + g_0(\delta_x f_0) - f_0(\delta_x g_0) \quad (\text{A.56})$$

Le développement de (A.49), en supposant que la limite du domaine est à  $x = 0$ , i.e.  $i = 0$ , donne :

$$\begin{aligned} \langle v_i, \delta_{xx} \delta_{xx} w_i \rangle_{\mathcal{D}} &= \langle \delta_{xx} v_i, \delta_{xx} w_i \rangle_{\mathcal{D}} + (\delta_{xx} w_0)(\delta_x v_0) - v_0(\delta_x [\delta_{xx} w_0]) = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{t+} \langle \delta_{xx} w_i^n, e_{t-} \delta_{xx} w_i^n \rangle_{\mathcal{D}} + \mathbf{b}'_{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

$$\mathbf{b}'_{\mathbf{v}} = (\delta_{xx} w_0)(\delta_x v_0) - v_0(\delta_x [\delta_{xx} w_0])$$

Pour que le schéma soit conservatif, il faut que la contribution à l'énergie des termes de bord  $\mathbf{b}'_{\mathbf{v}}$  soit nulle. On peut alors choisir d'approcher les CL continues données par (A.9),(A.10),(A.11), par des CL numériques conservatives, i.e. qui rendent  $\mathbf{b}'_{\mathbf{v}}$  nul. Les CL numériques conservatives en  $i = 0$  d'encastrement sont :

$$w_0 = \delta_x w_0 = 0, \quad (\text{A.58})$$

pour l'appui simple on a :

$$w_0 = \delta_{xx} w_0 = 0, \quad (\text{A.59})$$

et pour l'extrémité libre :

$$\delta_{xx} w_0 = \delta_x \delta_{xx} w_0 = 0. \quad (\text{A.60})$$

Pour ces trois CL on a  $\mathbf{b}'_{\mathbf{v}} = 0$  et le schéma (A.46) est alors conservatif.

## A.4 Schéma implicite pour les barres

On se propose d'étudier le schéma implicite suivant :

$$(1 + \alpha\kappa k\delta_{xx} + \beta\kappa^2 k^2 \delta_{xxxx})\delta_{tt}w_{i,j}^n + \kappa^2 \delta_{xxxx}w_{i,j}^n = 0, \quad (\text{A.61})$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  contrôlent la “quantité de partie implicite” ajoutée au schéma explicite de base. On remarque que l'équation discrète est consistante avec l'équation continue car quand le pas de temps  $k$  tend vers zéro on retrouve l'équation des barres. Le paramètre  $\alpha$  sert à améliorer la précision du schéma, car il permet d'accélérer les ondes numériques et compenser ainsi une partie de la dispersion numérique. Le paramètre  $\beta$  permet d'augmenter le nombre de points de discrétisation de la barre. Pour  $\alpha = 0$  le schéma (A.61) peut s'écrire sous la forme :

$$\delta_{tt}w_{i,j}^n + \kappa^2 \left( \beta\delta_{xxxx}w_{i,j}^{n+1} + (1 - 2\beta)\delta_{xxxx}w_{i,j}^n + \beta\delta_{xxxx}w_{i,j}^{n-1} \right) = 0, \quad (\text{A.62})$$

où on reconnaît le  $\theta$ -schéma centrée citée dans [1] pour résoudre l'équation des ondes mais pour l'équation des barres, c'est à dire avec  $\delta_{xxxx}$  au lieu de  $\delta_{xx}$ .

### A.4.1 Analyse de la stabilité en milieu infini

L'analyse de la stabilité de ce schéma reprend une partie des calculs déjà faits pour le schéma explicite. Par rapport au schéma explicite on a en plus le terme en  $\alpha$  et le terme en  $\beta$ . Si on fait le produit scalaire de (A.61) avec la vitesse  $\delta_t w_i^n$ , la contribution à l'énergie du terme en  $\alpha$  est :

$$\begin{aligned} \langle \delta_t w_i^n, \delta_{tt}\alpha\kappa k\delta_{x+}\delta_{x-}w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} &= -\alpha\kappa k \langle \delta_t \delta_{x-}w_i^n, \delta_{tt}\delta_{x-}w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} = \\ \frac{1}{2}\alpha\kappa k\delta_{t+} \langle \delta_{t-}\delta_{x-}w_i^n, \delta_{t-}\delta_{x-}w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} &= \frac{1}{2}\alpha\kappa k\delta_{t+} \|\delta_{t-}\delta_{x-}\|_{\mathbb{Z}}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

et la contribution à l'énergie du terme en  $\beta$  est :

$$\begin{aligned} \langle \delta_t w_i^n, \delta_{tt}\beta\kappa^2 k^2 \delta_{xx}\delta_{xx}w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} &= \beta\kappa^2 k^2 \langle \delta_t \delta_{xx}w_i^n, \delta_{tt}\delta_{xx}w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} = \\ \frac{1}{2}\beta\kappa^2 k^2\delta_{t+} \langle \delta_{t-}\delta_{xx}w_i^n, \delta_{t-}\delta_{xx}w_i^n \rangle_{\mathbb{Z}} &= \frac{1}{2}\beta\kappa^2 k^2\delta_{t+} \|\delta_{t-}\delta_{xx}w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Si on ajoute la contribution de ces deux termes aux résultats obtenus pour le schéma explicite on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_{t+} \left[ \frac{1}{2}\|\delta_{t-}w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 - \frac{1}{2}\alpha\kappa k\|\delta_{t-}\delta_{x-}\|_{\mathbb{Z}}^2 + \frac{1}{2}\beta\kappa^2 k^2\|\delta_{t-}\delta_{xx}\|_{\mathbb{Z}}^2 + \right. \\ \left. \frac{\kappa^2}{2}\|\mu_{t-}\delta_{xx}w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 - \frac{\kappa^2 k^2}{8}\|\delta_{t-}\delta_{xx}w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Ce schéma conserve aussi l'énergie. La condition suffisante de stabilité est alors (on néglige encore une fois le terme en  $\mu_{t-}$  qui est toujours positif) :

$$\left[ 1 - \alpha\kappa k\|\delta_{x-}\|_{\mathbb{Z}}^2 - \left( \frac{1}{4} - \beta \right) \kappa^2 k^2 \|\delta_{xx}\|_{\mathbb{Z}}^2 \right] \|\delta_{t-}w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \geq 0, \quad (\text{A.66})$$

Si on suppose  $\beta < 1/4$  et  $\alpha > 0$ , on peut borner supérieurement les normes des opérateurs par  $\|\delta_{x-}\|_{\mathbb{Z}}^2 \leq 4/h^2$  et  $\|\delta_{xx}\|_{\mathbb{Z}}^2 \leq 16/h^4$ . On obtient alors la condition :

$$\begin{aligned} 1 - \alpha\kappa k\frac{4}{h^2} - \left( \frac{1}{4} - \beta \right) \kappa^2 k^2 \frac{16}{h^4} \geq 0, \\ 1 - 4\alpha r - \left( \frac{1}{4} - \beta \right) 16r^2 \geq 0 \quad \text{avec} \quad r = \frac{\kappa k}{h^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

La résolution de cette inégalité donne une condition sur  $r$  qui dépend de la valeur des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$r < \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + (1 - 4\beta)}}{2(1 - 4\beta)} \quad \text{pour } \alpha \geq 0 \text{ et } \beta \in [0, 0.25] \quad (\text{A.68})$$

Pour  $\alpha$  et  $\beta$  nuls on retrouve la condition de stabilité déjà trouvée pour le schéma explicite.

Pour le cas  $\beta \geq 0.25$  et  $\alpha > 0$  on a :

$$\|\delta_{t-}\|_{\mathbb{Z}}^2 \left[ \|w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 - \alpha\kappa k \|\delta_{x-} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 + \left(\beta - \frac{1}{4}\right) \kappa^2 k^2 \|\delta_{xx} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \right] \geq 0, \quad (\text{A.69})$$

Pour le terme en  $\alpha$ , l'inégalité (A.32) conduit à :

$$\alpha\kappa k |(-1)|\delta_{x-} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \leq \mu \|w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 + \frac{1}{4} \mu \|\delta_{xx} w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \quad \forall \mu > 0 \quad (\text{A.70})$$

On peut alors écrire (A.69) comme :

$$\|\delta_{t-}\|_{\mathbb{Z}}^2 \left( \left[ 1 - \alpha\kappa k \mu + \left( \frac{-\alpha\kappa k}{4\mu} + \left(\beta - \frac{1}{4}\right) \kappa^2 k^2 \right) \|\delta_{xx}\|_{\mathbb{Z}}^2 \right] \|w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \geq 0, \quad (\text{A.71}) \right.$$

La suite dépend du signe du terme qui multiplie  $\|\delta_{xx}\|^2$ . Comme l'inégalité (A.32) est vraie pour tout  $\mu$  positif, on choisit  $\mu$  tel que le terme multipliant  $\|\delta_{xx}\|$  soit nul, c'est à dire :

$$\frac{-\alpha\kappa k}{4\mu} + \left(\beta - \frac{1}{4}\right) \kappa^2 k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\alpha}{4(\beta - 1/4)\kappa k} \quad (\text{A.72})$$

Pour cette valeur de  $\mu$  la condition (A.71) devient :

$$\|\delta_{t-}\|_{\mathbb{Z}}^2 \left[ 1 - \alpha\kappa k \frac{\alpha}{4(\beta - 1/4)\kappa k} \right] \|w_i^n\|_{\mathbb{Z}}^2 \geq 0, \quad (\text{A.73})$$

et on obtient la condition de stabilité :

$$1 - \frac{\alpha^2}{4(\beta - 1/4)} \geq 0, \quad \text{avec } \alpha \geq 0 \quad \text{et } \beta \geq 0.25 \quad \text{ou :} \quad (\text{A.74})$$

$$\beta \geq \frac{\alpha^2 + 1}{4} \quad \text{et } \alpha \geq 0, \quad \text{ou :}$$

$$\alpha \leq \sqrt{4\beta - 1} \quad \text{et } \beta \geq 0.25,$$

Cette condition est indépendante de  $r$  et des pas de discrétisation  $k$  et  $h$ . On parle alors de stabilité inconditionnelle.

Pour trouver une condition de stabilité quand  $\beta \leq \frac{\alpha^2 + 1}{4}$  on fait l'hypothèse que le terme qui multiplie  $\|\delta_{xx}\|^2$  dans (A.71) est négatif. Puisqu'on peut choisir  $\mu$ , on écrit  $\mu = \tau/h^2$  avec  $\tau > 0$ . Si ce terme est négatif, comme on en a fait l'hypothèse,  $\tau$  doit satisfaire la condition :

$$\frac{-\alpha\kappa k h^2}{4\tau} + \left(\beta - \frac{1}{4}\right) \kappa^2 k^2 < 0, \quad \tau < \frac{\alpha}{r(4\beta - 1)} \quad (\text{A.75})$$

L'hypothèse (A.75) doit être vérifiée à la fin de la démonstration. Comme le terme qui multiplie  $\|\delta_{xx}\|^2$  dans (A.71) est négatif, on peut substituer  $\|\delta_{xx}\|^2$  par sa borne supérieure  $16/h^4$ . Et avec  $\tau$ , l'inégalité (A.71) devient :

$$1 - \alpha \kappa k \frac{\tau}{h^2} + \left( \frac{-\alpha \kappa k h^2}{4\tau} + \left( \beta - \frac{1}{4} \right) \kappa^2 k^2 \right) \frac{16}{h^4} \geq 0, \quad (\text{A.76})$$

$$1 - \alpha r \left( \tau + \frac{4}{\tau} \right) + 16 \left( \beta - \frac{1}{4} \right) r^2 \geq 0,$$

Cette inégalité, qui fait intervenir  $r$ , est valable pour n'importe quelle valeur de  $\tau$  strictement positive. On choisit la valeur de  $\tau$  qui minimise le seul terme négatif de (A.76) (le terme en  $r$ ), afin d'obtenir la meilleure borne sur  $r$ . La valeur  $\tau = 2$  minimise l'expression  $\tau + 4/\tau$ . Pour cette valeur l'inégalité qui assure la stabilité est :

$$1 - 4\alpha r + 16 \left( \beta - \frac{1}{4} \right) r^2 \geq 0, \quad (\text{A.77})$$

et la solution de cette inégalité donne la condition de stabilité suivante :

$$r < \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - (4\beta - 1)}}{2(4\beta - 1)} \quad \forall \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} < \beta < \left( \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{4} \right) \quad (\text{A.78})$$

Pour ces valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  la stabilité s'écrit comme une borne sur  $r$ . Cependant, afin de compléter cette preuve, il faut vérifier l'hypothèse de départ : "le terme qui multiplie  $\|\delta_{xx}\|$  dans (A.71) est négatif". Cette hypothèse est donnée comme une condition sur  $\tau$  par (A.75). Il faut donc vérifier que la valeur  $\tau = 2$  choisie respecte cette inégalité. L'équation (A.75) avec  $\tau = 2$  peut s'écrire comme une condition sur  $r$  :

$$r < \frac{\alpha}{2(4\beta - 1)}, \quad (\text{A.79})$$

La valeur de  $r$  peut être alors bornée par la valeur qui assure la stabilité, donnée par (A.78), puisqu'on ne s'intéresse pas aux valeurs supérieures de  $r$ . Pour que l'hypothèse soit respectée, il faut alors vérifier que l'inégalité suivante est toujours vraie :

$$\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - (4\beta - 1)}}{2(4\beta - 1)} < \frac{\alpha}{2(4\beta - 1)}, \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{\alpha^2 - (4\beta - 1)} < 0, \quad (\text{A.80})$$

Ce qui est toujours vrai pour le cas qu'on a étudié car le résultat de la racine est toujours réel.

### Récapitulatif des conditions de stabilité :

Pour le schéma (A.61), on se restreint aux intervalles de valeurs des paramètres  $\alpha \geq 0$  et  $\beta \in [0; 0.5]$ . Les conditions de stabilité trouvées s'écrivent comme une condition sur le nombre de Courant-Friedrichs-Levy (CFL),  $r = \kappa k/h^2$ , et sont :

$$\begin{aligned} \text{Si : } \beta \in [0; 0.25] \quad \text{et} \quad \alpha > 0 & \quad \Rightarrow \quad r < \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + (1 - 4\beta)}}{2(1 - 4\beta)} \\ \text{Si : } \beta \in [0.25; 0.5] \quad \text{et} \quad \alpha \leq \sqrt{4\beta - 1} & \quad \Rightarrow \quad \text{stabilité inconditionnelle} \\ \text{Si : } \beta \in [0.25; 0.5] \quad \text{et} \quad \alpha > \sqrt{4\beta - 1} & \quad \Rightarrow \quad r < \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - (4\beta - 1)}}{2(4\beta - 1)} \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

On note que le schéma explicite (A.46) est un cas particulier de (A.61) où  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$ .



# Le feuille d'or EMT240

Cette annexe décrit le réverbérateur à plaque EMT240, pour lequel la plaque vibrante est une feuille d'or rectangulaire de dimensions 0.27 m x 0.29 m et d'épaisseur 18  $\mu\text{m}$ . La réponse impulsionnelle (RI) de ce réverbérateur a été mesurée pour 5 configurations différentes, chacune correspondant à un temps de réverbération différent. On montre ici les principaux résultats issus de l'analyse des RI mesurées : les courbes d'amortissement en fonction de la fréquence et les reliefs de décroissance pour les 5 configurations.

## B.1 Description de l'EMT240

Le réverbérateur EMT240 a été commercialisé par la société EMT à partir des années 70. Son principal avantage par rapport au réverbérateur à plaque EMT140 est son faible encombrement.

	Matériau	Épaisseur $h$ [m]	Surface $S$ [m <sup>2</sup> ]
EMT240	or	$18 \cdot 10^{-6}$	0.0719

TAB. B.1: Matériau, épaisseur et surface du réverbérateur à plaque EMT240 (feuille d'or).

La Figure B.1 montre les différents éléments du réverbérateur EMT240. Son élément principal est une feuille d'or très mince d'épaisseur  $h = 18 \mu\text{m}$  et dont la surface,  $S = 0.0719 \text{ m}^2$ , est environ 20 fois plus petite que celle de l'EMT140. En raison de sa faible épaisseur, les vibrations de la feuille d'or sont très sensibles aux bruits acoustiques extérieurs. La feuille est donc doublement protégée par une enceinte de confinement qui est elle-même à l'intérieur du bâti de l'unité de réverbération. Dans l'enceinte, la feuille d'or est suspendue et soumise à des forces de tension appliquées par les 12 ressorts qui la relie à un cadre de support rectangulaire. Le cadre est lui-même tenu par 4 ressorts dans l'enceinte qui sert d'isolation par rapport aux perturbations acoustiques extérieures. L'enceinte, qui est très lourde, est suspendue au bâti par des ressorts assez souples, permettant ainsi d'obtenir une faible fréquence de résonance du système masse ressort (2 Hz d'après [28]). Ce système, schématisé à la Figure B.2, permet d'isoler la feuille d'or du bruit induit par les vibrations et les ondes de pression acoustique extérieures.

La feuille d'or est excitée par deux actionneurs piézoélectriques collés directement sur sa surface et alimenté chacun par un signal électrique auquel on veut appliquer l'effet de réverbération. Deux signaux réverbérés sont obtenus par la mesure des vibrations en deux endroits de la feuille à l'aide de deux transducteurs électrodynamiques. Chacun de ces capteurs est composé d'un aimant permanent fixe et d'une bobine mobile. Il s'agit donc d'un système similaire à celui utilisé

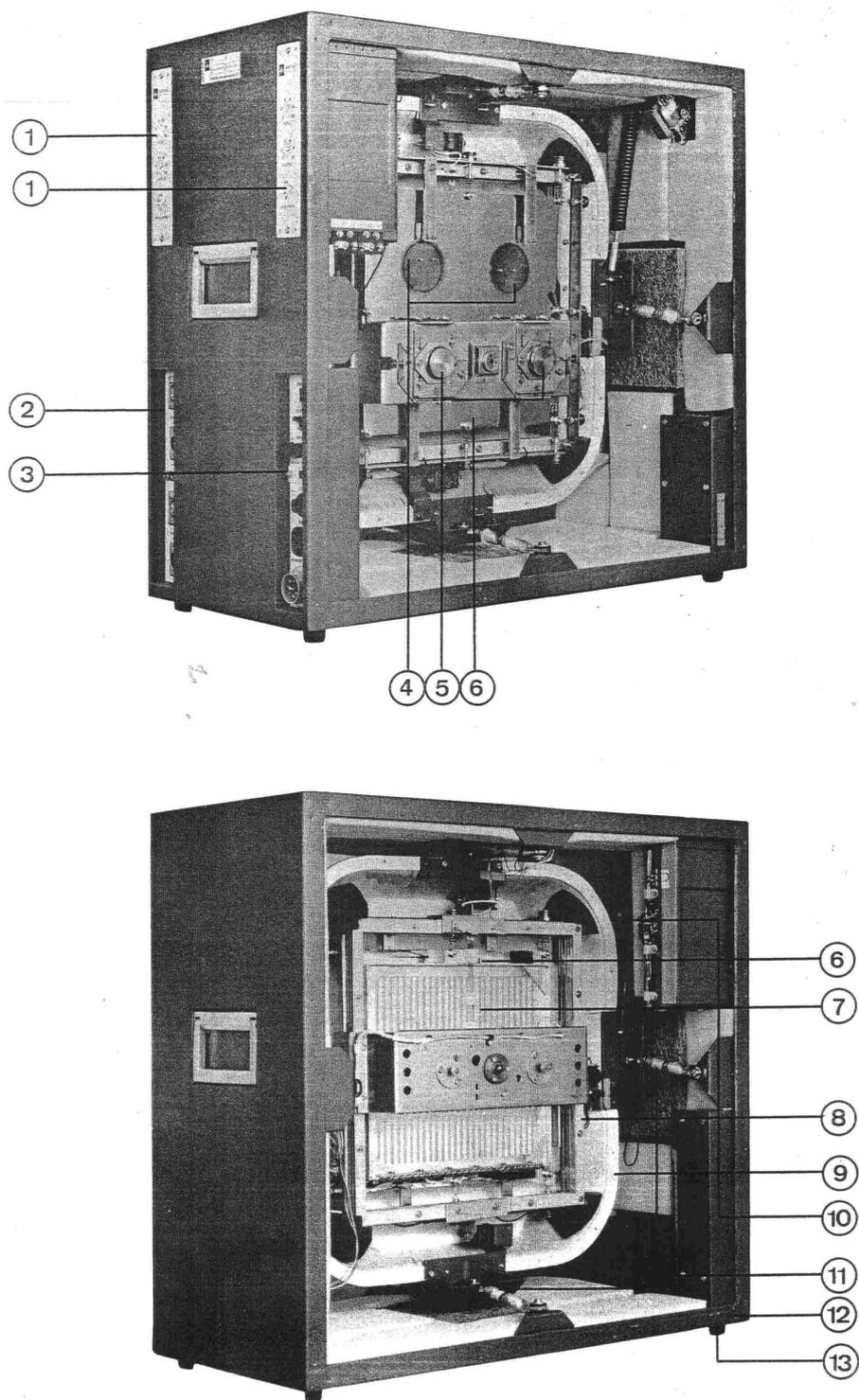


FIG. B.1: Les éléments du réverbérateur EMT240 peuvent se regrouper en 3 catégories selon leur fonction. La partie électronique : les amplificateurs d'excitation et de reproduction (1), le panneau de connexion des entrées et sorties (2), le panneau de contrôle du temps de réverbération (3). La partie de génération de la réverbération : les transducteurs d'excitation piézoélectriques (4), les capteurs des vibrations à bobine mobile (5), la feuille d'or (6) et le panneau d'amortissement (7). La partie d'isolation mécanique et acoustique : le cadre de la feuille d'or (8), l'enceinte de confinement (9), les ressorts qui relient l'enceinte au bâti (10), les ressorts de stabilisation (11), le bâti (12) et les supports du bâti (13) [28].

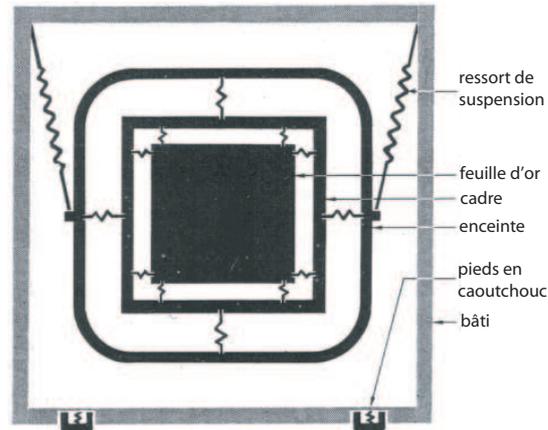


FIG. B.2: Schéma du réverbérateur EMT240 qui montre le système d'isolation acoustique et vibratoire de la feuille d'or par rapport à l'environnement extérieur. [28].

dans les microphones électrodynamiques.

Comme pour le réverbérateur ETM140, le contrôle du temps de réverbération est fait grâce à une plaque poreuse. Le fait d'approcher la plaque augmente l'amortissement par rayonnement en basses et moyennes fréquences, et diminue donc le temps de réverbération. La Figure B.3 montre cette plaque d'amortissement. La plaque poreuse est composée de bandes absorbantes parallèles

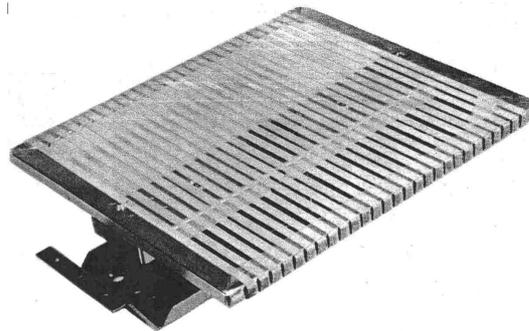


FIG. B.3: Plaque d'amortissement du réverbérateur EMT240 [28].

qui sont séparées entre elles par des ouvertures d'une largeur donnée. Ces bandes sont attachées à un cadre rectangulaire et tendues. D'après le fabricant, la largeur des ouvertures de séparation des bandes a été choisie pour obtenir un comportement fréquentiel satisfaisant du temps de réverbération de la feuille d'or [28]. Le déplacement de la plaque amortissante est motorisé et contrôlé depuis l'extérieur du bâti, ce qui permet d'obtenir rapidement une large palette d'effets de réverbération. Le couplage de la feuille d'or avec cette plaque d'amortissement n'a pas été étudié en détail car la modélisation du couplage avec une plaque poreuse non homogène est bien plus complexe que celle faite pour la plaque poreuse homogène de l'EMT140. On se limite ici à la mesure du comportement fréquentiel de l'amortissement pour différentes distances de séparation entre la feuille d'or et la plaque poreuse, ce qui permet d'observer l'amortissement induit par la plaque poreuse. Des détails supplémentaires sur la construction de l'EMT240 sont donnés dans son mode d'emploi [28].

D'un point de vue utilisateur, l'EMT240 est un système avec deux entrées et deux sorties, qui sont des signaux électriques audio. La feuille d'or ne pouvant pas être mesurée séparément des autres éléments, on se limite aux mesures de la réponse impulsionnelle de l'ensemble du dispositif. Les grandeurs d'entrée et de sortie de la mesure sont les signaux électriques entrée et sortie du système formé par l'amplificateur d'entrée, l'actionneur, la feuille d'or, l'accéléromètre et l'amplificateur de sortie. Pour simplifier on étudie le système avec une entrée et une sortie.

## B.2 Mesures

Les mesures de RI suffisent à caractériser le comportement de l'ensemble du système de réverbération. Ces mesures sont faites pour différentes distances entre la feuille d'or et la plaque d'amortissement et avec la méthodologie proposée au chapitre 3. L'analyse des RI mesurées a permis de déterminer le comportement fréquentiel de l'amortissement pour les différentes configurations et d'en représenter le relief de décroissance.

### B.2.1 Amortissement

La Figure B.4 montre l'amortissement obtenu pour les différentes distances entre feuille d'or et plaque d'amortissement. On constate que l'amortissement est plus important que celui obtenu par

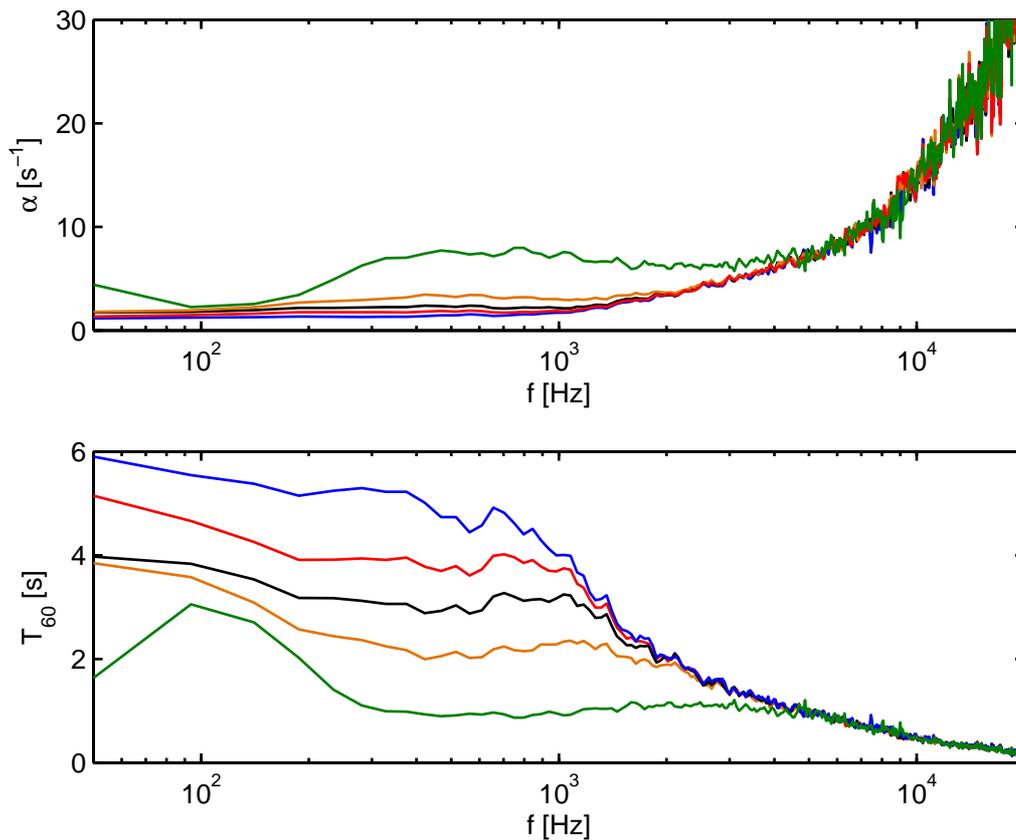


FIG. B.4: Amortissements  $\alpha$  et temps de réverbération  $T_{60}$  de la feuille d'or EMT240 obtenus par les mesures.

les modèles d'amortissement thermoélastique et de rayonnement. Il est probable que les raisons

de cette différence d'amortissement soient la transmission d'énergie mécanique de la feuille vers le cadre à travers les points d'attache et le couplage de la feuille avec les deux actionneurs et avec les deux capteurs. Du fait de sa faible masse, environ  $25 \cdot 10^{-3}$  kg, la feuille d'or est très sensible à ces phénomènes.

### B.2.2 Relief de décroissance

Les Figures B.6 et B.7 fournissent les représentations des reliefs de décroissance des RI mesurées. Ces représentations donnent accès à la distribution d'énergie totale et à la décroissance temporelle en fonction de la fréquence. On observe qu'il y a une égalisation produite par les systèmes d'excitation, de mesure et probablement par les amplificateurs de l'unité.

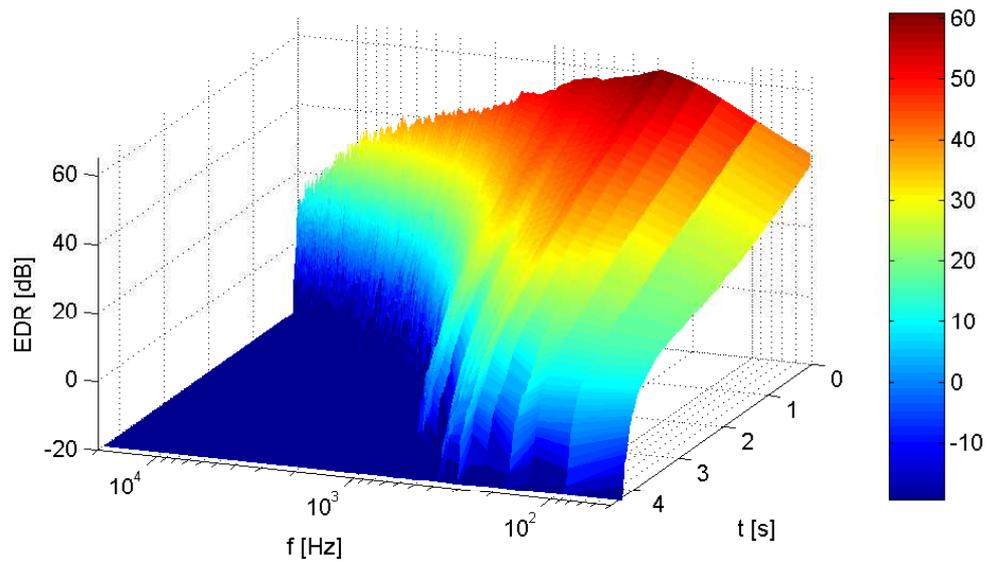


FIG. B.5: Relief de décroissance de la RI mesurée de la feuille d'or EMT240 pour la configuration  $T_{60} = 5$  s.

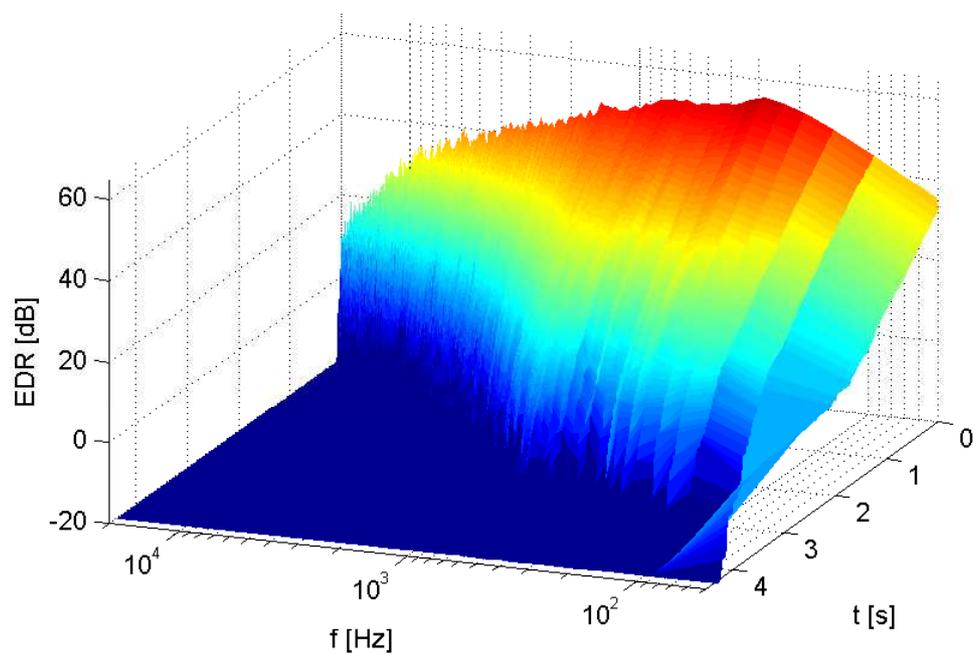
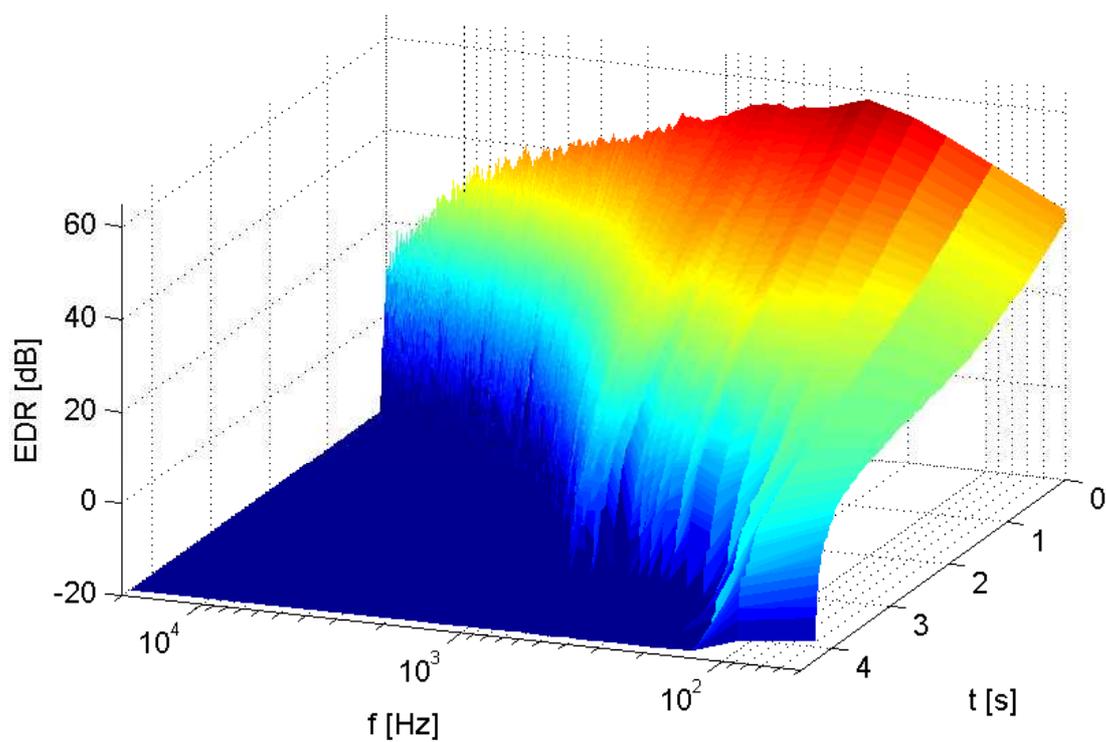


FIG. B.6: Relief de décroissance des RI mesurées de la feuille d'or EMT240 pour les configurations  $T_{60} = 4$  s et  $T_{60} = 3$  s.

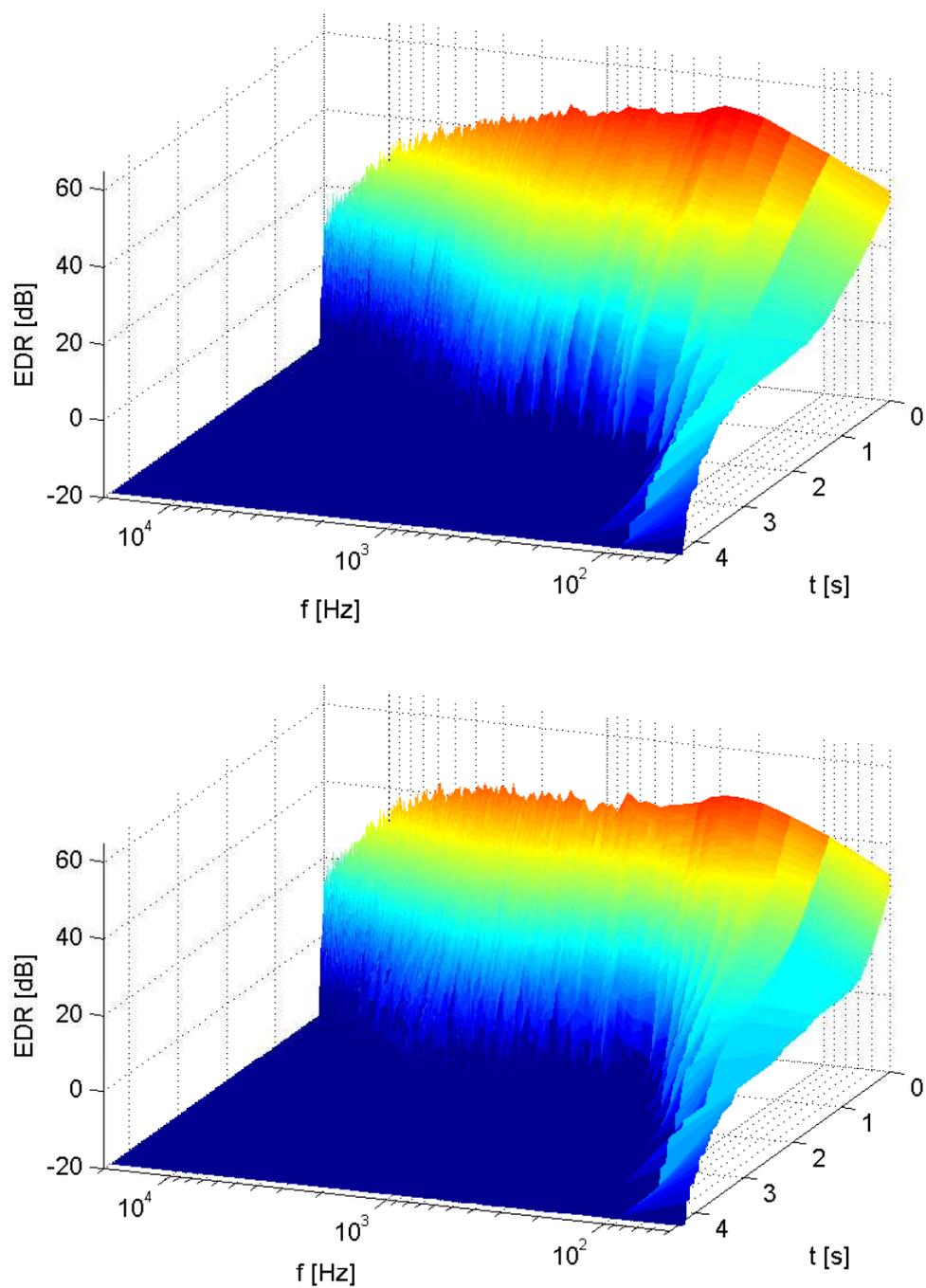


FIG. B.7: Relief de décroissance des RI mesurées de la feuille d'or EMT240 pour les configurations  $T_{60} = 2$  s,  $T_{60} = 1$  s.



# La transformation bilinéaire

On rappelle l'équation (2.30) qui, pour le cas de la plaque simplement supportée et faiblement amortie, permet de calculer la réponse à une impulsion de force ponctuelle. Elle s'écrit :

$$w(x, y, t) = \frac{4F}{M} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_m x_e) \sin(k_n y_e) \sin(k_m x) \sin(k_n y)}{\omega_{mn}} \sin(\omega_{mn} t) e^{-\alpha_{mn} t}, \quad (\text{C.1})$$

Pour le calcul de la solution numérique, on définit le vecteur des temps discrets  $[0, T_s, 2T_s, \dots]$ , où le pas de temps  $T_s = 1/Fs$  est l'inverse de la fréquence d'échantillonnage  $Fs$ . En raison du théorème de Shannon, on peut conserver dans la somme (2.30) uniquement les modes dont la fréquence propre est inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage  $0.5Fs$ . D'autre part, on s'intéresse uniquement aux modes présents dans le spectre audible, c'est-à-dire ceux dont la pulsation propre est inférieure à 20 kHz. En pratique on doit choisir  $Fs \geq 40$  kHz, et souvent on utilise  $Fs = 44.1$  kHz ou  $Fs = 48$  kHz car ce sont les valeurs qu'on retrouve dans les signaux audio.

Pour chaque pas de temps et chaque mode, l'équation (C.1) nécessite l'évaluation des fonctions  $\sin(\omega_{mn} t)$  et  $e^{-\alpha_{mn} t}$ . Le coût de calcul de ces fonctions est élevé par rapport aux multiplications et sommes, qui sont déjà intégrées dans les processeurs.

Dans le domaine de Laplace, le déplacement est obtenu par la somme des contributions de chaque mode données par (2.28). L'accélération dans le domaine de Laplace s'obtient en multipliant par  $s^2$  le déplacement, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(x, y, s) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s^2 \widetilde{Q}_{mn}(s) \phi_{mn}(x, y), \\ \widetilde{Q}_{mn}(s) &= \frac{F \phi_{mn}(x_e, y_e)}{s^2 + 2\zeta_{mn} \omega_{mn} s + \omega_{mn}^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Pour un point d'observation donné, c'est à dire  $x$  et  $y$  donnés, l'accélération est donnée par une somme de fonctions de transfert ou filtres continus définis dans le domaine de Laplace. L'objectif de cette annexe est de présenter une approche pour la discrétisation de chacun de ces filtres modaux continus basée sur la transformation bilinéaire, qui permet ainsi le calcul de la réponse impulsionnelle comme une somme de filtres discrets.

La transformation bilinéaire permet de construire la fonction de transfert du filtre numérique  $H(z)$  à partir du filtre continu  $H(s)$ . Si le filtre  $H(s)$  est stable et causal, le filtre numérique

obtenu avec cette transformation est également stable et causal. Pour obtenir  $H(z)$  il suffit de remplacer la variable de Laplace  $s$  de  $H(s)$  par l'expression

$$s = 2Fs \left( \frac{z-1}{z+1} \right), \quad (\text{C.3})$$

où  $F_s$  désigne la fréquence d'échantillonnage du filtre numérique construit. On remarque que

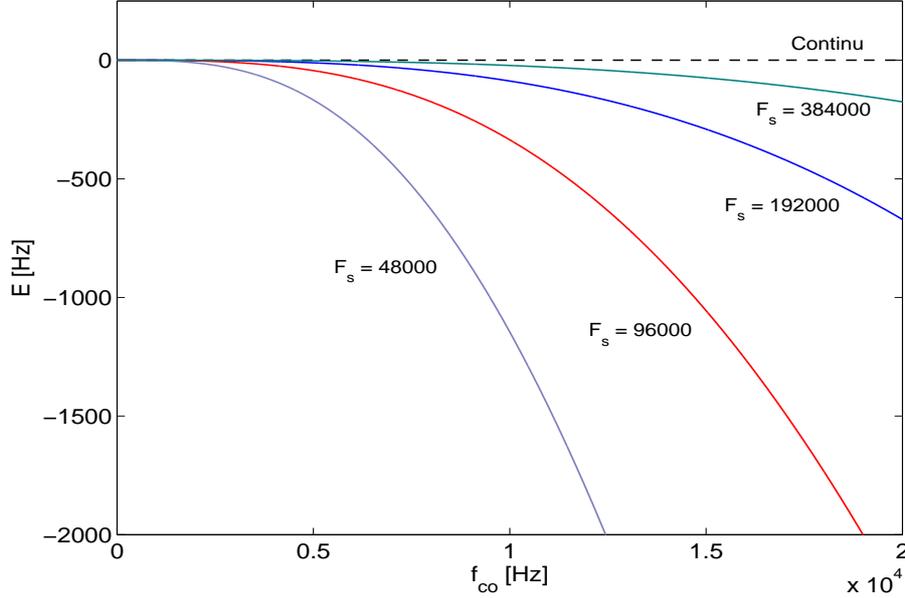


FIG. C.1: Transformation bilinéaire (C.3) : erreur  $E = f_{num} - f_{co}$  lors de l'estimation de la fréquence dans le spectre audible à différentes  $F_s$  [Hz].

cette formulation de la transformation bilinéaire produit des erreurs qui deviennent importantes en hautes fréquences. Plus la fréquence réduite est grande, plus l'erreur commise est importante. La Figure C.1 montre l'erreur  $E = f_{num} - f_{co}$  de cette formulation pour différentes valeurs de la fréquence d'échantillonnage et dans le domaine audible.

Afin de supprimer l'erreur introduite par (C.3), nous utilisons la formulation de la transformation bilinéaire présentée dans [80] :

$$s = C \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = jC \tan \left( \frac{\omega_{num}}{2} \right), \quad \text{avec : } \omega_{num} = 2\pi \frac{f_{num}}{F_s}, \quad (\text{C.4})$$

où  $C$  est une constante quelconque. Avec cette formulation, il est possible d'ajuster la constante  $C$  afin d'avoir une erreur nulle à une fréquence donnée. On utilise alors une transformation bilinéaire avec une valeur de la constante  $C$  différente pour chacun des filtres modaux  $H_i(s)$  telle que l'erreur est nulle à la fréquence de résonance de chacun des filtres modaux. Pour le filtre  $H_i(s)$  décrivant le mode  $i$  de fréquence de résonance  $f_{co_i}$ , l'égalité (C.4) s'écrit :

$$2\pi f_{co_i} = C_i \tan \left( \frac{\pi f_{num_i}}{F_s} \right). \quad (\text{C.5})$$

On impose alors  $f_{num_i} = f_{co_i} \triangleq f_i$  dans (C.5) afin d'obtenir la valeur de  $C_i$  qui définit une transformation bilinéaire avec une erreur nulle à la fréquence  $f_{num_i}$  :

$$C_i = 2\pi f_i \cot \left( \frac{\pi f_i}{F_s} \right). \quad (\text{C.6})$$

Comme exemple on montre la discrétisation du filtre continu  $H_i(s)$  dont la fréquence de résonance

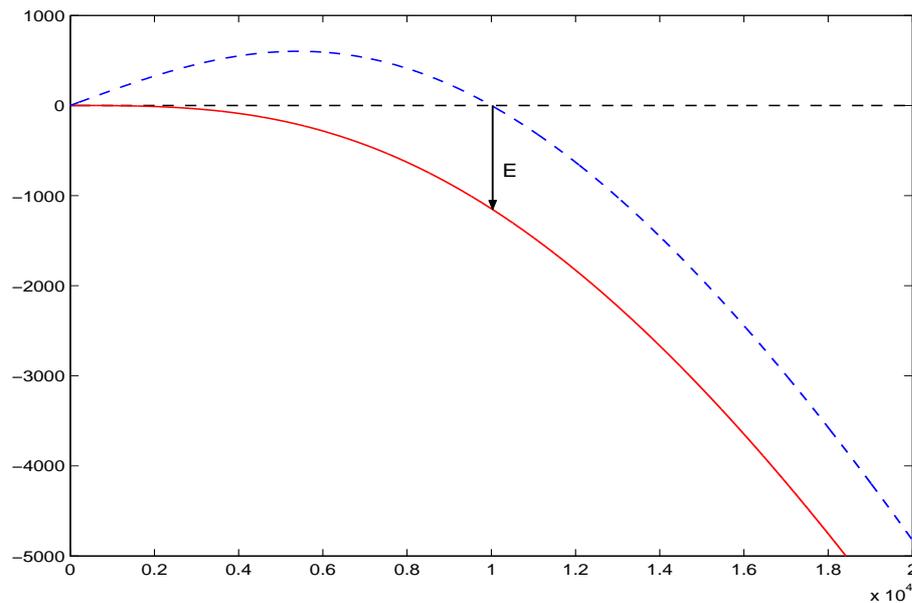


FIG. C.2: Transformation bilinéaire (C.4) avec la constante  $C_i$  ajustée (- - -) permettant une erreur nulle à  $f_{co} = 10000$  Hz. Comparaison avec la transformation (C.3) (—).  $F_s = 48000$  Hz.

est 10000 Hz, à une fréquence d'échantillonnage  $F_s = 48000$  Hz. La Figure C.2 montre la comparaison des deux méthodes présentées. Avec la transformée (C.3), la fréquence de résonance du filtre discret synthétisé est de moins de 9000 Hz : l'erreur commise est importante. Avec la transformée (C.4), l'erreur à 10000 Hz est nulle si on calcule  $C_i$  avec (C.6) (pour cet exemple  $C_i = 81884$ ). On peut supposer négligeable l'erreur en dehors de la fréquence de résonance.

On a vu que chaque filtre continu peut être discrétisé avec une forme de la transformation bilinéaire définie par la constante  $C_i$  obtenue avec (C.6). Si chaque filtre continu est donné par :

$$H_{mn}(s) = \frac{s^2 F \phi_{mn}(x_e, y_e) \phi_{mn}(x_o, y_o)}{s^2 + 2\zeta_{mn} \omega_{mn} s + \omega_{mn}^2}, \quad (\text{C.7})$$

où  $(x_e, y_e)$  est la position d'excitation et  $(x_o, y_o)$  est la position d'observation, le filtre numérique obtenu par la méthode détaillée s'écrit :

$$H_{mn}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 - b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad \text{avec :} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} b_0 &= F \phi_{mn}(x_e, y_e) \phi_{mn}(x_o, y_o) C_i^2 / A, & b_1 &= -2b_0, & b_2 &= b_0, \\ a_1 &= 2(\omega_m n^2 - C_i^2) / A, & a_2 &= B / A, & \text{où :} \\ A &= C_i^2 + 2\zeta_{mn} \omega_{mn} C_i + \omega_m n^2, & B &= C_i^2 - 2\zeta_{mn} \omega_{mn} C_i + \omega_m n^2. \end{aligned}$$

Ce filtre récursif est à réponse impulsionnelle infinie (RII). La réponse impulsionnelle peut être obtenue comme  $H(z)X(z)$  avec l'entrée impulsionnelle  $X(z) = 1$ . Les trois premiers pas de temps font intervenir le terme non nul de  $X(z)$  qui multiplie  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  respectivement. Pour les instants postérieurs, l'entrée est nulle et le calcul de chaque pas de temps utilise uniquement la valeur de la sortie dans les deux pas de temps antérieurs :  $y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$ . Cette

réurrence correspond à trois opérations élémentaires (2 multiplications et 1 somme) par mode et par pas de temps, ce qui est un schéma de calcul beaucoup plus efficace que celui de départ (C.1).

# Approximations numériques de $\partial_{tt}$

---

La simulation d'un réverbérateur à plaque proposée ici est basée sur la résolution de l'équation de Kirchhoff-Love par différences finies. Cette résolution donne en sortie le déplacement temporel d'un point de la plaque, tandis que la sortie d'un réverbérateur à plaque est proportionnelle à l'accélération. A partir du signal numérique de déplacement on peut estimer l'accélération par double dérivation numérique temporelle. L'objet de cette annexe est de présenter les schémas de dérivation temporelle et d'en analyser les propriétés.

Pour un signal périodique continu  $w(t) = Ae^{j\omega t}$ , l'accélération en fonction du déplacement s'écrit :

$$\ddot{w}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(Ae^{j\omega t}) = -\omega^2 Ae^{j\omega t} = -\omega^2 w(t) \quad (\text{D.1})$$

En discret, on calcule souvent l'accélération avec l'opérateur numérique dérivée seconde  $D_{tt}^{(2)}$ , qui est une approximation à l'ordre 2 de l'opérateur continu, et est défini par :

$$(D_{tt}^{(2)} f)^n = \frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (\text{D.2})$$

où  $\Delta t = 1/Fs$  est le pas de discrétisation temporelle. Pour un déplacement périodique discret  $w^n = Ae^{j\omega(n\Delta t)}$ , l'amplitude de l'accélération obtenue avec  $D_{tt}^{(2)}$  est :

$$\begin{aligned} (D_{tt}^{(2)} w)^n &= \frac{w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{w^n(e^{j\omega\Delta t} - 2 + e^{-j\omega\Delta t})}{\Delta t^2} \\ &= -\frac{2[1 - \cos(\omega\Delta t)]}{\Delta t^2} w^n = -\frac{4 \sin^2(\omega\Delta t/2)}{\Delta t^2} w^n \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

L'amplitude de l'opérateur discret  $D_{tt}^{(2)}$  est différente de celle de l'opérateur continu. En basses fréquences,  $\sin(\omega\Delta t) \approx \omega\Delta t$  et l'amplitude est alors proche de  $-\omega^2$ , comme pour l'opérateur continu. La Figure D.1 montre le comportement de ces opérateurs dans toute la largeur de bande utile  $[0; Fs/2]$ . La partie de droite représente le pourcentage d'erreur sur l'amplitude de l'opérateur discret, égal au rapport de la différence d'amplitudes sur l'amplitude de l'opérateur continu. L'erreur devient importante au delà de  $Fs/8$ . La précision sur l'amplitude obtenue peut s'améliorer avec des approximations d'ordre supérieur.

Pour construire l'opérateur d'ordre  $N$ , on écrit les développements de Taylor jusqu'à l'ordre  $N + 2$  et on prend une molécule de taille  $N + 1$ . C'est la même démarche que celle utilisée pour obtenir  $D_{tt}^{(2)}$  avec l'équation (4.3). La résolution du système d'équations obtenu permet de

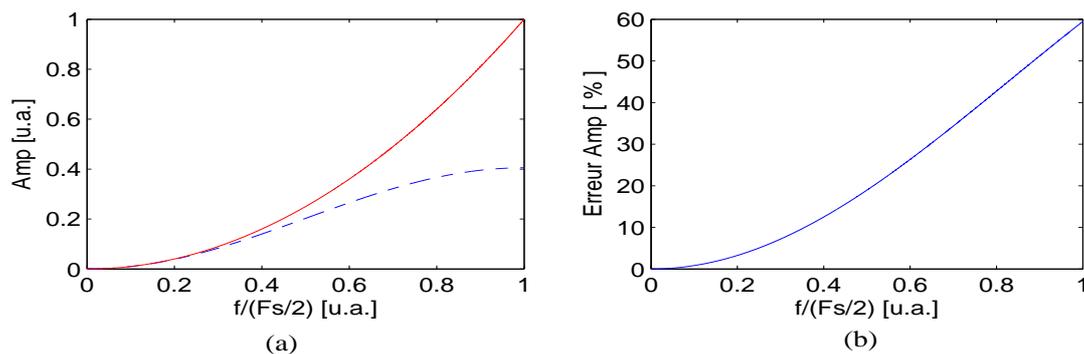


FIG. D.1: (a) : comparaison de l'amplitude de l'opérateur dérivée seconde continu (—) avec celle de l'opérateur discret d'ordre 2 (- - -). Axes en unités adimensionnées (u.a.). (b) : erreur d'amplitude de l'opérateur discret en pourcentage.

connaître les coefficients multiplicatifs de chaque point de la grille. Cette résolution est faite avec le logiciel de calcul formel Maple. Le Tableau donne les valeurs des coefficients des approximations de la dérivée seconde pour les ordres 2, 4, 8, 16 et 24.

$O(\Delta t^p)$	$O(\Delta t^2)$	$O(\Delta t^4)$	$O(\Delta t^8)$	$O(\Delta t^{16})$	$O(\Delta t^{24})$
$n$	-2	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{205}{72}$	$-\frac{1077749}{352800}$	$-\frac{240505109}{76839840}$
$n \pm 1$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{24}{13}$
$n \pm 2$		$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{14}{45}$	$-\frac{33}{91}$
$n \pm 3$			$\frac{8}{315}$	$\frac{112}{1485}$	$\frac{88}{819}$
$n \pm 4$			$-\frac{1}{560}$	$-\frac{7}{396}$	$-\frac{99}{2912}$
$n \pm 5$				$\frac{112}{32175}$	$\frac{396}{38675}$
$n \pm 6$				$-\frac{2}{3861}$	$-\frac{11}{3978}$
$n \pm 7$				$\frac{16}{315315}$	$\frac{132}{205751}$
$n \pm 8$				$-\frac{1}{411840}$	$-\frac{33}{268736}$
$n \pm 9$					$\frac{44}{2380833}$
$n \pm 10$					$-\frac{3}{1469650}$
$n \pm 11$					$\frac{12}{81800719}$
$n \pm 12$					$-\frac{1}{194699232}$

TAB. D.1: Valeurs des coefficients des schémas de dérivation numérique  $D_{tt}^{(p)}$  d'ordre  $p = 2, 4, 8, 16$  et  $24$ .

La Figure D.2 montre le comportement des opérateurs d'ordre 4, 8, 16 et 24 ainsi obtenus. La précision des opérateurs augmente avec l'ordre de l'approximation. Selon le type d'application, on peut se contenter d'une approximation plus ou moins précise. Le choix de l'opérateur dépend alors du but visé dans l'application.

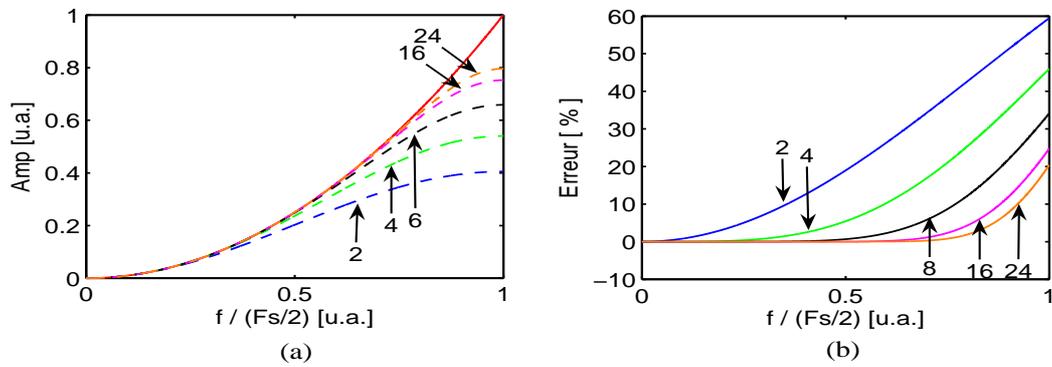


FIG. D.2: (a) : comparaison de l'amplitude de l'opérateur dérivée seconde continu (—) avec celles des opérateurs discrets d'ordre 2, 4, 8, 16 et 24 (- - -). Axes en unités adimensionnées (u.a.). (b) : erreur d'amplitude des opérateurs discrets en %.



## Résumé

Le réverbérateur à plaque est un dispositif électromécanique de réverbération artificielle utilisé dans les studios d'enregistrement pour traiter les signaux audio enregistrés dépourvus d'effet de salle. Ce dispositif simule la réverbération à partir des vibrations de flexion d'une plaque mince. L'objectif de cette thèse est la simulation par modèles physiques d'un réverbérateur à plaque générique permettant à l'utilisateur le choix des principaux paramètres : caractéristiques géométriques et physiques du matériau de la plaque, conditions aux limites, positions de l'excitateur et des accéléromètres, et l'influence d'une plaque poreuse à proximité. Outre la compréhension des phénomènes entrant en jeu dans de tels dispositifs, cette approche permet la simulation de réverbérateurs à plaque existants comme l'EMT-140 ou l'EMT-240, mais aussi de réverbérateurs avec d'autres jeux de paramètres réels ou fictifs. La démarche entreprise s'articule en trois points : la modélisation du dispositif, les mesures sur un réverbérateur EMT-140 et la définition des outils numériques pour la synthèse sonore dans le domaine audible. La modélisation développée relève de la dynamique et de la vibroacoustique, et porte une attention particulière sur les mécanismes d'amortissement en raison de leur grande influence dans la perception de l'effet de réverbération. La démarche expérimentale, effectuée sur un réverbérateur EMT-140, permet l'identification des paramètres d'un dispositif réel et l'identification des limites de validité de la modélisation. L'outil de simulation dans le domaine temporel repose sur la méthode des différences finies.

**Mots-clés :** réverbération à plaque, EMT140, vibrations de flexion des plaques métalliques, mécanismes d'amortissement, différences finies, synthèse sonore, plaques circulaires

## Abstract

A plate reverberation unit is an electromechanical device used in sound studios in order to add artificial reverberation to audio signals. This device uses the vibrations of a thin plate to simulate the reverberation effect. The present thesis aims to simulate by physical models a generic plate reverberation. Thus, the user can choose the parameters of the virtual device : geometrical (lengths and thickness) and material physical parameters of the plate, boundary conditions, locations of exciting and sensing elements, influence of the presence of a porous plate. In addition to the comprehension of the phenomena involved in these devices, this approach permits the sound synthesis of existing plate reverberation units as the EMT-140 or the EMT-240, but also of other units with other real or fictive parameters sets. The approach followed is divided in three main parts : modelling a generic plate reverberation, measuring a real EMT-140 unit and defining the numerical methods for the sound synthesis on the audible frequency range. The physical models are based on structural dynamics and vibroacoustics theories, taking into account the physics of the involved vibration damping mechanisms, which are of great influence on the reverberation effect perception. The experimental work has been done on an EMT-140 plate reverberation unit. It identifies the whole set of parameters of this real unit and gives information about the limits of validity of the models. Finally, the time-domain numerical simulations are based on the finite differences method.

**Keywords :** plate reverberation, EMT140, flexural vibrations of metallic plate, damping mechanisms, finite differences, sound synthesis, circular plates

