



Stabilité des systèmes de particules en interaction gravitationnelle

Jérôme Perez

► To cite this version:

Jérôme Perez. Stabilité des systèmes de particules en interaction gravitationnelle. Physique [physics]. Université Paris 7, 1995. Français. NNT : . tel-01141418

HAL Id: tel-01141418

<https://hal.science/tel-01141418>

Submitted on 13 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS VII

Spécialité :

Astrophysique et techniques spatiales

Présentée par

Jérôme PEREZ

pour obtenir

Le titre de Docteur de l' Université Paris VII

**Stabilité des systèmes de particules
en interaction gravitationnelle**

Soutenue le 11 Mai 1995 devant le jury composé de :

M. André	BRAHIC	Président du Jury
Mme Françoise	COMBES	Rapporteur
M. Richard	HENRIKSEN	Rapporteur
M. Herwig	DEJONGHE	Rapporteur
M. Jean-Michel	ALIMI	Examineur
M. Michel	TAGGER	Examineur
M. Jean-Jacques	ALY	Directeur de thèse

*à Emmanuelle, Justine et Florent ...
... les trois acteurs de ma trilogie*

à mon grand-père Adrien ...

*On ne pourra bien dessiner le simple
qu'après une étude approfondie du complexe*

G. Bachelard, Le nouvel esprit scientifique

Remerciements

Mon itinéraire fût long, agréable, continu mais non dérivable ...

Merci Alain, Hervé, Thierry et les autres ...

Après mon passage au Conservatoire National des Arts et Métiers, et pour avoir guidé mes premiers pas en physique, je remercie Victor Mastrangelo.

Après mon passage au Service Technique de l'Electronique et de l'Informatique, je remercie Paul Tousten, Dominique Combasson, Stéphane Janichewski et Joël Chenêt qui m'ont permis de poursuivre mon chemin.

Lors de mon arrivée au Laboratoire Systèmes de Perception du Centre de Recherche et d'Etudes d'Arcueil, je remercie Alain Bohec et Bertrand Zavidovique pour leur compréhension et leur confiance.

Je remercie Dominique Luzeaux et Eric Martin pour les longues discussions de l'après-midi et les marques d'amitiés qu'ils me témoignèrent.

Je remercie tout particulièrement Jean Heyvaerts sans la confiance duquel je n'en serai pas là aujourd'hui.

Pour son immense disponibilité, sa franchise, son soutien de tous les instants, je suis infiniment reconnaissant à Jean-Jacques Aly. La rigueur de sa démarche scientifique associée à son grand esprit de synthèse furent pour moi un exemple que je tenterai de suivre.

Pour son amitié et son esprit d'homme de science, je remercie Jean-Michel Alimi. A son contact tout au long de ma thèse, j'ai pu apprendre des notions aussi bien matérielles que philosophiques.

Je remercie Françoise Combes, Dick Henriksen et Herwig Dejonghe d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Je tiens aussi à remercier sans les énumérer, tous les membres du Service d'Astrophysique du Centre d'Etude de Saclay, pour la qualité de leur accueil tout au long de ces quatre années.

Je remercie mes parents de m'avoir laissé vivre ma vie tout en m'apportant leur confiance et leur soutien.

Je remercie enfin et par dessus tout, Nours, Juju et Florent qui ont su en m'épaulant, m'indiquer la voie vers l'équilibre.

M.

Table des Matières

I	Introduction	17
1	Modélisation physique d'un système auto-gravitant	19
1.1	Les échelles de temps	19
1.1.1	Le temps dynamique et le temps de croisement	19
1.1.2	Le temps de relaxation par collisions	20
1.2	Equations d'évolution	23
1.3	Equilibre Cinétique des systèmes auto-gravitants	26
1.4	La fonction de distribution d'équilibre	28
1.4.1	L'orbite des étoiles dans un système auto-gravitant	28
1.4.2	Intégrales du mouvement	32
1.4.3	Fonction de distribution d'équilibre d'un système sphérique	34
2	Principes et Critères de stabilité classiques	39
2.1	Principe général de stabilité	40
2.2	Méthodes d'énergies	40
2.3	Application des méthodes d'énergie	41
2.3.1	Stabilité contre les perturbations non radiales	43
2.3.2	Stabilité contre les perturbations radiales	43
2.4	Méthodes spectrales	44
2.4.1	Le cas homogène	44
2.4.2	Le cas isotrope	45
2.4.3	Le cas anisotrope	45
II	Modélisation analytique	47
3	Une vision globale de la physique non dissipative	49
3.1	Systèmes à 6 (ou $6N$) degrés de liberté	49
3.2	Systèmes possédant une infinité de degrés de liberté	53
3.3	Exemple fondamental : Le système Vlasov-Poisson	55
4	Unification des résultats classiques	59
4.1	Les travaux de pionnier de Victor Antonov	59
4.2	Le critère en variable Angle action de Jeremy Goodman	59
4.3	Le critère en variables Lagrangiennes de Paul Vandervoort	61
4.4	L'instabilité d'orbite radiale	62

5	Stabilité des systèmes inhomogènes et anisotropes	65
5.1	Généralisation du théorème d'Antonov-Lebovitz	66
5.1.1	Perturbations préservantes	66
5.1.2	Système hydrodynamique associé	67
5.1.3	Réduction du problème	68
5.1.4	Etude particulière de B	70
5.2	Stabilité des systèmes sphériques anisotropes	71
5.3	Stabilité des systèmes proches de l'isotropie	73
5.3.1	Systèmes quasi-isotropiques	73
5.3.2	Systèmes en faible rotation solide	75
III	Modélisation numérique	77
6	Conditions initiales	81
6.1	L'algorithme Ossipkov-Merritt	81
6.2	Le modèle utilisé	83
6.2.1	Calcul de la fonction de distribution dans le cas $n=5$	84
6.3	Genèse de N corps suivant une fonction de distribution $f(Q)$	85
6.3.1	Génération de la position des particules	85
6.3.2	Génération de la vitesse des particules	88
6.4	Caractéristiques physiques des modèles utilisés	90
7	Evolution dynamique	93
7.1	Le problème et sa résolution numérique	93
7.2	La Connection Machine	95
7.2.1	Le parallélisme	95
7.2.2	La programmation parallèle	95
7.3	Le code dynamique Alimi-Scholl	96
8	Résultats numériques	99
8.1	(In)stabilité morphologique	99
8.1.1	Origine physique de l'instabilité	99
8.1.2	La notion de rapports d'axes et leurs évolution	100
8.1.3	De l'utilisation du rapport du viriel	101
8.1.4	Contenu physique de l'évolution	104
8.2	Propriétés du générateur de perturbation et stabilité	106
8.2.1	Perturbations Euleriennes	106
8.2.2	Le message analytique	107
8.2.3	Analyse des conditions initiales	110
8.2.4	Contenu physique des conditions initiales	113
8.2.5	Universalité des prédictions	113
IV	Annexes	119
A	Origine des équations de la théorie cinétique	121

B	Les fonctionnelles et leurs dérivées	127
B.1	Définitions	127
B.2	Exemples	128
B.2.1	L'énergie	128
B.2.2	Les F dépendant de ∇f	129
B.3	La dérivée fonctionnelle de $M_3[G, H]$	129
C	Structures, formes et crochets de Lie	131
C.1	Crochets de Lie	131
C.2	Crochets de Poisson	132
C.2.1	Définition et propriétés générales	132
C.2.2	Produit scalaire et crochet de Poisson	132
D	Statistiques de simulations	135
V	Articles publiés dans des revues soumises à arbitrage	139
E	On the stability of a gaseous sphere against non-radial perturbations	141
E.1	Introduction	142
E.2	Statement of the problem	142
E.2.1	The equilibrium	142
E.2.2	Chandrasekhar's energy principle	143
E.3	A new proof of the Antonov-Lebovitz Theorem	146
E.4	An alternative approach	148
E.5	Conclusion	149
E.6	Appendix A ; Wirtinger Inequality	149
E.7	Appendix B : Barotropic condition	150
F	Stability of spherical stellar systems I : Analytical results	153
F.1	Introduction	153
F.2	Equilibrium	154
F.2.1	Notations and equations	154
F.2.2	Spherically symmetric steady states	155
F.2.3	Symmetry of f_0 : Converse theorems	157
F.3	Symplectic energy functional and linear stability	158
F.3.1	Symplectic perturbations	158
F.3.2	Linear stability criteria	158
F.3.3	Decomposition of $H^{(2)}$	159
F.4	Stability with respect to spherical perturbations	160
F.4.1	A further decomposition	160
F.4.2	The sign of $H^{(2)}[\overline{g}_1^-]$	160
F.4.3	Consequences for stability	162
F.4.4	Comparison with previous works	162
F.5	Stability with respect to aspherical perturbations	163
F.5.1	A further decomposition	163
F.5.2	Sign of $H_1^{(2)}[\delta g_1]$	163
F.5.3	Sign of $H_2^{(2)}[\delta g_1]$	165
F.5.4	Consequences for stability	166

F.5.5	Comparison with previous works	166
F.6	Extension to other systems	167
F.6.1	Rotating spherical systems	167
F.6.2	Systems with a nondecreasing distribution function	168
F.7	Conclusion	168
G	On the stability of collisionless self gravitating spherical systems	171
G.1	Introduction	172
G.2	Theoretical context and Analytical results	173
G.3	Numerical Methods	175
G.3.1	Initial Conditions	175
G.3.2	Numerical Integrations	178
G.4	Numerical results	178
G.4.1	Morphological (In)stability	178
G.4.2	Physical interpretation in terms of $\{g_1, E\}$ and $\{g_1, L^2\}$	182
G.5	Universality of our predictions and Conclusions	184
G.6	Appendix : Statistics of simulations	187
H	A symplectic approach to gravitational instability	189
H.1	Introduction	190
H.2	The symplectic approach of non dissipative physics	190
H.2.1	Systems with N degrees of freedom	191
H.2.2	Evolution equation for any function	192
H.2.3	Systems with an infinity of freedom's degree	194
H.3	Gravitational instability	196
H.3.1	Dynamical equations	196
H.3.2	The Vlasov–Poisson system	197
H.3.3	Hamiltonian formulation of gravitational instability	198
H.3.4	Time derivatives	199
H.4	Conclusion	202
H.5	Appendix A : Integration by parts and surface terms	203
I	Bounds on the H-functions of a self-gravitating system	205
I.1	Introduction	206
I.2	Statement of the problem	207
I.3	Two-dimensional systems: Upper bound on Boltzmann's entropy	209
I.3.1	Systems confined in a bounded domain	209
I.3.2	Systems occupying the whole plane	209
I.4	Upper bounds on general H -functions	211
I.4.1	Upper bounds on H_q	211
I.4.2	Generalization to a larger class of H -functions	211
I.5	Three-dimensional systems: Bounds on H_q	211
I.5.1	Upper bounds on $H_q[f]$ when $E < 0$ and $9/7 \leq q \leq \infty$	211
I.5.2	Nonexistence of a strictly negative upper bound on $H_q[f]$ when $1 < q < 9/7$ or $E \geq 0$	212
I.6	Generalization to other H -functions ($d = 3$)	213
I.6.1	Renyi's and Tsallis's q -entropies	213
I.6.2	Extension to a larger class of H -functions	213

I.7	Conclusion	214
.1	The “relative entropy” inequality	214

Liste des figures

- Figure 1 : Notre vision de la collision : Page 21
- Figure 2 : Système auto-gravitant : Page 26
- Figure 3 : Evolution schématique de la fonction de distribution : Page 28
- Figure 4 : Stabilité et énergie d'un système : Page 39
- Figure 5 : Fonction de distribution analytique $n=5$: Page 84
- Figure 6 : Potentiels de Lane-Emden : Page 86
- Figure 7 : Densité des modèles anisotropes générés : Page 87
- Figure 8 : Masse normalisée de nos systèmes : Page 88
- Figure 9 : Fonctions de distribution anisotropes : Page 91
- Figure 10 : Test de la génération des conditions initiales : Page 91
- Figure 11 : Algorithme Orreri : Page 97
- Figure 12 : Evolution des rapports d'axes et des rapports du viriel pour $n = 3.5$ et $r_a = 0.75, 1, 2, 5, 10, 100$: Page 102
- Figure 13 : Evolution des rapports d'axes et des rapports du viriel pour $n = 4$ et $r_a = 0.75, 1, 2, 5, 10, 100$: Page 103
- Figure 14 : Evolution des rapports d'axes et des rapports du viriel pour $n = 4.5$ et $r_a = 0.75, 1, 2, 5, 10, 100$: Page 104
- Figure 15 : Visualisation de l'instabilité : Page 105
- Figure 16 : Distribution de $\mathcal{C}^{gl}$ pour une perturbation préservante ou non : Page 110
- Figure 17 : Distribution de $\mathcal{C}^{ge}$ pour $n=4.5$ et $r_a = 0.75, 100$: Page 111
- Figure 18 : Distribution de $\mathcal{C}^{gl}$ pour $n=4.5$ et $r_a = 0.75, 100$: Page 111
- Figure 19 : $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ et $P(\mathcal{C}^{ge} < 0)$ en fonction de r_a pour $n = 3.5$: Page 112
- Figure 20 : $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ et $P(\mathcal{C}^{ge} < 0)$ en fonction de r_a pour $n = 4$: Page 112
- Figure 21 : $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ et $P(\mathcal{C}^{ge} < 0)$ en fonction de r_a pour $n = 4.5$: Page 113
- Figure 22 : Diagramme de Lindblad de modèles sphériques anisotropes Ossipkov-Merritt : Page 115
- Figure 23 : Diagramme de Lindblad de modèles sphériques anisotropes non Ossipkov-Merritt : Page 115
- Figure 24 : Evolution des rapports d'axes et du rapport du viriel en fonction du temps dynamique pour des modèles non Ossipkov-Merritt : Page 116

Préambule

Depuis que les hommes de bonne volonté se sont intéressés aux lois de la nature, ils se sont aperçus que le comportement des systèmes physiques dépendait des interactions qui liaient ses systèmes entre eux. Cependant, ce n'est que très récemment qu'ils ont pu mettre en évidence qu'il n'existait que 4 types d'interactions fondamentales qui ne dépendent principalement que de l'échelle sur laquelle se produit cette interaction. Si les échelles microscopiques de la mécanique quantique sont le domaine des interactions fortes et faibles, le domaine mésoscopique de la vie courante est quant à lui le règne de l'interaction électromagnétique. Sur les grandes échelles de l'astronomie par contre, seule domine la gravitation. Les systèmes auto-gravitants, liés par l'intermédiaire de la seule interaction gravitationnelle, ont de ce fait une position toute particulière dans l'univers de la physique.

Tout d'abord, comme nous venons de le dire, de tels systèmes possèdent une extension spatiale que l'on ne rencontre qu'en astrophysique, il existe donc fort peu de types de systèmes auto-gravitants, il est même possible de les séparer en deux classes distinctes : les systèmes possédant une ou quelques composantes tels qu'une étoile isolée ou un couple d'étoiles, et les systèmes possédant un grand nombre de composantes tels que les amas globulaires, les galaxies ou les amas de galaxies.

D'un autre côté, en tant que partie prenante de l'astrophysique l'étude des systèmes auto-gravitants possède une caractéristique unique dans le domaine des sciences exactes : il s'agit du seul domaine qui ne permet pas de faire des expériences en laboratoires comme cela est le cas en physique en biologie ou en chimie. L'expérience a eu lieu une fois pour toutes il y a environ 15 milliards d'années. Nous ne pouvons pas concocter des étoiles ou des galaxies dans des éprouvettes. Faute de pouvoir expérimenter en laboratoire, l'astrophysicien ne peut alors compenser sa frustration que par trois attitudes complémentaires : il peut tout d'abord sans intervenir, observer les objets que l'univers met sous sa lunette. Il peut aussi effectuer des expériences numériques avec un ordinateur puissant qui permet de simuler et d'étudier la formation, l'évolution ou la stabilité des structures de l'univers astrophysique. Il peut enfin modéliser mathématiquement le comportement de ces objets afin de pouvoir mettre en évidence les rouages du scénario qui est en train de se dérouler sous ses yeux.

Dans ce contexte, le travail que nous avons tenté de mener à bien semble bien dérisoire : l'étude de la stabilité d'un système composé d'un grand nombre de particules en interaction gravitationnelle. Ce problème n'est pas nouveau en astrophysique, dès le début de ce siècle Lord Jeans en posait les principales bases. Le lien étroit existant entre la forme du potentiel gravitationnel liant les galaxies, et celui électromagnétique unissant les particules d'un gaz, ont conduit les physiciens à utiliser le contexte de la physique statistique pour étudier les systèmes auto-gravitants dont le nombre de composantes est élevé (amas globulaire $\simeq 10^6$ étoiles, galaxies $\simeq 10^{10}$ étoiles). Toutefois un certain nombre de distinctions fondamentales apparurent bien vite. Alors qu'il existe deux types de charges électriques (+ et -) qui se repoussent mutuellement, il n'existe qu'une seule catégorie de charge gravitationnelle. Ainsi donc, lorsque l'effet d'écran

viendra dans un plasma électromagnétique privilégier les phénomènes individuels entre groupes de particules et tendre à uniformiser le système aux grandes échelles, l'effondrement gravitationnel viendra quant à lui contribuer à l'inhomogénéité des systèmes auto-gravitants. Cette seule remarque est pratiquement à la base de la compréhension de la physique des systèmes gravitationnels. En effet, alors que le principal mécanisme de thermalisation d'un gaz est la collision entre les particules, le processus de relaxation d'un système gravitationnel est collectif et conduit vers un état de pseudo équilibre non collisionnel, radicalement différent de celui prévu par une statistique de Maxwell-Boltzmann.

Malgré tout, la formulation mathématique du problème de l'équilibre et de la stabilité d'un système auto-gravitant reste tout de même possible dans le cadre de la physique statistique, les différences que nous venons d'évoquer ne viennent en fait que compliquer sa résolution par rapport au problème standard des plasmas électromagnétiques.

Deux types d'approches sont classiquement utilisées pour étudier le problème de la stabilité d'un système en physique statistique. La première consiste à étudier le spectre de la perturbation subie par le système afin de mettre ou non en évidence des modes croissants synonymes d'instabilités. Cette approche est très puissante et très générale, cependant elle fait souvent appel à des mathématiques complexes et contraignantes. Dans le cadre de la stabilité des plasmas gravitationnels elle s'est montrée très fructueuse pour l'étude des systèmes homogènes, pour lesquels Jeans a pu mettre en évidence une longueur caractéristique de stabilité (la fameuse longueur de Jeans). Toutefois dans le cadre plus réaliste des systèmes auto-gravitants inhomogènes, seuls quelques exploits ponctuels dans le cas particulier de la symétrie sphérique ont pu être réalisés par différents auteurs en utilisant ces méthodes spectrales. Un deuxième type d'approche est connu sous le nom de méthodes d'énergie. Plus globales, ces techniques consistent à ramener le problème de la stabilité à celui de l'étude du signe de la variation d'énergie issue de la perturbation. Très en vogue dans le domaine de la dynamique stellaire, ces méthodes ont permis depuis les années 1960 d'obtenir un grand nombre de résultats généraux, concernant principalement les systèmes sphériques inhomogènes et isotropes. Toutefois ce type d'approche requiert un certain nombre de conditions d'applications qui ne sont plus vérifiées dès que le système n'est plus sphérique ou devient anisotrope dans l'espace des vitesses.

Face à ce manque de méthode d'investigation nous avons dû reprendre le problème à sa base. Après une reformulation des principes et des équations de la physique non dissipative sous le jour nouveau de la mécanique symplectique, nous avons pu réécrire les équations du problème de la stabilité d'un système auto-gravitant non collisionnel. Cette reformulation nous a ensuite permis d'obtenir un principe variationnel de stabilité indépendant du type de géométrie présenté par le problème. Dans un premier temps, en se plaçant dans chacun des cas particuliers déjà étudiés nous montrerons comment ce principe permet d'unifier l'ensemble des approches classiques de la stabilité d'un système sphérique isotrope. Dans un deuxième temps, nous montrerons comment certains de ces résultats fondamentaux peuvent être généralisés tant en introduisant l'anisotropie dans nos systèmes qu'en se plaçant dans le cadre de géométries non sphériques.

Dans le but de confirmer et de compléter cette approche analytique du problème, nous avons entrepris une étude numérique de la stabilité des systèmes auto-gravitants non collisionnels sphériques anisotropes. Nous montrerons tout d'abord comment il est possible de générer un ensemble de conditions initiales correspondant à un système physique présentant de telles caractéristiques. Nous expliquerons alors comment simuler l'évolution dynamique d'un objet auto-gravitant. L'option choisie pour la résolution de ce problème est la méthode de sommation directe qui prend en compte à chaque instant le potentiel gravitationnel formé par tous les particules du système. La mise en œuvre de cette technique a été rendue possible par l'utilisation d'une machine massivement parallèle (CM5).

L'évolution de plusieurs familles de conditions initiales nous permettra de retrouver un certain nombre de résultats numériques concernant la stabilité des systèmes sphériques présentant une anisotropie radiale dans l'espace des vitesses. Nous montrerons enfin, comment la confrontation entre nos résultats analytiques et numériques permettent de mettre en évidence un paramètre permettant de prévoir la stabilité ou l'instabilité d'une configuration d'équilibre sphérique anisotrope.

Partie I

Introduction

Chapitre 1

Modélisation physique d'un système auto-gravitant

1.1 Les échelles de temps

1.1.1 Le temps dynamique et le temps de croisement

La plus petite des échelles de temps que nous allons considérer correspond au temps nécessaire pour le transport de l'information dynamique à travers le système. Cette durée est généralement modélisée par le temps dynamique T_d ou le temps de croisement T_c . Ces deux paramètres sont du même ordre de grandeur, le temps dynamique possédant une définition rigoureuse, il est souvent difficile à calculer explicitement et, dans le cas général d'un système quelconque, on utilise souvent le temps de croisement dont la définition est beaucoup plus empirique.

Afin de fixer les idées, plaçons-nous dans un cas académique.

Nous considérons un système sphérique homogène de densité ρ_o constante et constitué de N particules massives. On appelle ψ le potentiel gravitationnel du système, il est clair que dans notre cas simpliste ψ ne dépend que de la distance r entre un corps et le centre du système.

Le carré de la vitesse circulaire v_c d'une particule test en orbite circulaire autour du centre du système est donnée par la projection du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel de Frenet

$$v_c^2 = r \frac{d\psi}{dr} = r | \mathbf{F} | = \frac{GM(r)}{r} \quad (1.1)$$

Cette vitesse est donc un estimateur de la masse $M(r)$ contenue dans une sphère de rayon r . Dans le cas de la sphère homogène, il vient

$$v_c^2 = \frac{G}{r} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_o = \frac{4\pi G r^2 \rho_o}{3} \quad \text{soit} \quad v_c = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_o}{3}} r \quad (1.2)$$

La vitesse circulaire croît donc linéairement avec le rayon.

La période orbitale d'une particule en orbite circulaire à une distance r du centre de ce système

$$T_o \triangleq 2\pi \frac{r}{v_c} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_o}} \quad (1.3)$$

est donc indépendante de la distance r .

Le Principe fondamental de la dynamique donne l'équation d'évolution de r

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2} = \frac{4\pi G\rho_o}{3} r = \left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2 r \quad (1.4)$$

qui n'est autre que l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de fréquence $2\pi/T_o$. Le temps dynamique d'un système est le temps mis par une particule test pour se déplacer du centre au bord du système. Dans notre cas nous aurons donc

$$T_d = \frac{T_o}{4} = \sqrt{\frac{3\pi}{16G\rho_o}} \quad (1.5)$$

Dans le cas général le potentiel gravitationnel n'est pas analytique, le calcul exact de T_d n'est donc pas possible. Nous prendrons alors pour convention de remplacer le ρ_o de (1.5) par la densité moyenne du système (et même dans les cas pathologiques par une approximation de la densité moyenne).

Ce temps dynamique est à comparer au temps de croisement T_c qui représente le temps mis par une particule de vitesse moyenne pour traverser le système. Cette définition est assez vague pour obtenir la relation

$$T_c \approx \frac{\sqrt{\langle r^2 \rangle}}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}} \quad (1.6)$$

ainsi en prenant les ordres de grandeur raisonnables $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx R$ et $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx R/T_d$, nous obtenons $T_c \approx T_d$.

En faisant l'approximation

$$\rho_o = \langle \rho \rangle = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (1.7)$$

Nous pouvons donc calculer le temps dynamique de quelques objets auto-gravitants

	Masse($M_\odot$)	Rayon Moyen(Pc)	Temps Dynamique(<i>Année</i>)
Amas ouvert	250	2	4,31 10 ⁶
Amas globulaire	6 10 ⁵	10	0,99 10 ⁶
Galaxie SO	6 10 ¹⁰	1 10 ⁴	98,5 10 ⁶
Groupe de galaxies	2 10 ¹³	0,7 10 ⁶	3,16 10 ⁹
Amas de galaxies	1 10 ¹⁵	3 10 ⁶	3,96 10 ⁹

Nous constatons donc qu'une étoile moyenne dans une galaxie normale n'a effectué que quelques demi-douzaines de tours depuis qu'elle a été formée.

1.1.2 Le temps de relaxation par collisions

Le processus principal de relaxation d'un gaz moléculaire est la relaxation par collisions. A chaque choc, un échange d'énergie se produit entre les deux particules, la répétition de ce processus conduisant à la thermalisation du gaz, ou en d'autres termes à une 'Maxwellisation' de la distribution des vitesses des particules gazeuses. La gravitation étant un champ dont les propriétés analytiques sont semblables au champ électrostatique mis en jeu lors du processus de thermalisation d'un gaz, il est de bonne guerre d'étudier un tel processus dans le cadre de la

gravitation. Nous allons donc évaluer le temps mis par les collisions binaires pour changer de façon significative la distribution des vitesses dans un objet auto-gravitant.

Dans le but de présenter un calcul analytique non effrayant, nous allons nous placer dans un contexte simplifié mais assez réaliste. Nous considérons un système auto-gravitant formé de N particules possédant toutes une masse m . Nous étudions le mouvement d'une particule test à travers le système. On appelle collision le passage de la particule test dans le champ gravitationnel d'une autre particule. Nous supposons que le système est diffus, les rencontres impliquant plus de deux particules sont alors extrêmement rares. Nous supposons finalement que lors d'une collision, le changement de vitesse perçu par la particule test est très petit devant sa propre vitesse. La trajectoire de cette particule pendant la collision est donc pratiquement une droite.

Figure 1 : Notre vision de la collision

La constante b , minimum de r pendant ce processus, est appelée paramètre d'impact. La composante perpendiculaire au mouvement de la force subie par la particule test se calcule aisément dans notre approximation

$$F_{\perp} = \frac{Gbm^2}{(b^2 + (vt)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Gm^2}{b^2} \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (1.8)$$

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe perpendiculaire au mouvement s'écrit

$$m\dot{v}_{\perp} = F_{\perp} \quad (1.9)$$

qui s'intègre donc en utilisant (1.8), pour donner

$$\delta v_{\perp} = \frac{Gm}{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{2Gm}{bv} \quad (1.10)$$

Une relation plus exacte tenant notamment compte de la déflexion de la trajectoire peut être trouvée dans [Chandrasekhar 1942]. La teneur globale du résultat reste néanmoins inchangée.

Le nombre de collisions δn subies par la particule test avec un paramètre d'impact compris entre b et $b + db$ est proportionnel à la densité de surface du système $\sigma \approx N/\pi R^2$, nous avons

$$\delta n = \sigma \cdot 2\pi b db = \frac{2N}{R^2} b db \quad (1.11)$$

Nous avons calculé $\delta v_{\perp}$, mais l'isotropie du processus de collisions rend l'axe du vecteur $\delta \mathbf{v}_{\perp}$ aléatoire, le vecteur moyen est donc nul. Pour estimer l'amplitude du changement de vitesse subi par la particule test lors des collisions avec un paramètre d'impact compris entre b et $b + db$, nous utilisons donc le carré de $\delta v_{\perp}$

$$\delta v_{\perp}^2 = \delta n \cdot (\delta v_{\perp})^2 = 8N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \frac{db}{b} \quad (1.12)$$

Pour avoir la variation totale $\Delta v_{\perp}^2$ subie par la vitesse de la particule test provoquée par les collisions effectuées pendant une traversée du système, il suffit de sommer $\delta v_{\perp}^2$ sur toutes les

valeurs possibles de b . Cela paraît donc simple; pourtant une sommation directe, autorisant des valeurs de b arbitrairement petites ou grandes fait diverger l'intégrale qui dépend de $\log b$. Il faut donc choisir des bornes d'intégration plus réalistes.

La valeur maximale B_s de b ne pose pas de problème fondamental, en effet on conçoit difficilement une collision avec un paramètre d'impact plus grand que la taille du système. Nous prendrons donc $B_s = R$. La valeur minimale B_i de b fait quant à elle l'objet de controverses. Certains auteurs invoquent le lien qui existe entre B_i et l'angle de déviation maximum lors d'une collision quasi-frontale. Pour rester dans l'esprit de notre calcul approché, nous préférons rattacher B_i à la taille caractéristique d'une particule. Nous prendrons donc

$$B_i = \left[\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{N} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad B_s = R \quad (1.13)$$

Ainsi en imposant $b \in [B_i, B_s]$, nous pouvons intégrer (1.12), il vient

$$\Delta v_{\perp}^2 = \frac{8N}{3} \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \log \frac{3N}{4\pi} \quad (1.14)$$

Une dernière hypothèse consiste à supposer que le système est globalement dans un état d'équilibre, le théorème du viriel (cf. [Binney & Tremaine 1987]) nous permet d'évaluer le module de la vitesse moyenne

$$v^2 \approx \frac{GM}{R} = \frac{GNm}{R} \quad (1.15)$$

En injectant (1.15) dans (1.14), nous obtenons la variation relative de vitesse

$$k \triangleq \frac{\Delta v_{\perp}^2}{v^2} \approx \frac{8}{3N} \log \frac{3N}{4\pi} \quad (1.16)$$

A chaque traversée du système, v^2 est donc modifiée de $v_{\perp}^2$ à cause des collisions. Il faut donc attendre k^{-1} passages pour que ces dernières aient un effet important, et parviennent à relaxer le système. Nous avons précédemment calculé le temps de croisement et montré qu'il était comparable au temps dynamique du système, nous pouvons donc calculer le temps de relaxation par collision T_{rc}

$$T_{rc} = \frac{T_d}{k} = \frac{3N}{8 \log \frac{3N}{4\pi}} T_d \quad (1.17)$$

Les systèmes que nous étudierons possèdent un très grand nombre de corps, (un amas globulaire renferme environ 10^6 étoiles et l'ordre de grandeur du nombre de composantes d'une galaxie est environ 10^{10}). Ils peuvent donc être traités comme des systèmes non collisionnels sur des échelles de temps de quelques centaines de T_d . Cela ne signifie pas que leurs composantes ne subissent pas de collisions, cela indique simplement que les collisions n'ont pas d'influence sur la dynamique globale du système sur ces échelles de temps.

L'hypothèse non collisionnelle ou non dissipative est le pilier fondamental de toute l'approche analytique de ce problème. Il faudra donc la respecter et par exemple, lors de nos escapades numériques, ne pas faire de simulations qui permettraient au système de dissiper son énergie.

1.2 Equations d'évolution

Le nombre de degrés de liberté d'un système physique est égal au nombre de paramètres nécessaires pour fixer la position de l'ensemble des composants de ce système. Par exemple, un système tridimensionnel contraint d'évoluer sur un plan possède deux degrés de libertés.

L'intégration de toutes ces équations permet en principe d'obtenir toutes les données relatives au mouvement du système. Toutefois, si ce dernier comporte un grand nombre de degrés de libertés, la mise en œuvre des méthodes de la mécanique classique conduit à écrire, donc à résoudre, un nombre égal d'équations différentielles, ce qui est pratiquement irréalisable. Notons encore que, même si l'on arrivait à effectuer cette intégration, il serait absolument impossible de substituer dans la solution générale les conditions initiales relatives aux vitesses et aux positions de toutes les particules.

Il semble à première vue que les propriétés d'un système deviennent de plus en plus compliquées au fur et à mesure qu'augmente le nombre de particules qui le composent. Nous savons bien qu'il n'en est rien et que d'autres lois, statistiques celles-ci, prennent le relais pour la description des systèmes dont le nombre de degrés de libertés est très grand, et même dans une limite continue tend vers l'infini.

Supposons que le système que nous considérons possède $3N$ degrés de libertés. Cela signifie que les positions des différents points du système sont définies par N tri-vecteurs $\mathbf{q}_\alpha$, l'indice α prenant toutes les valeurs $1, 2, \dots, N$. A un instant donné, l'état du système sera complètement déterminé par les N vecteurs position et les N vecteurs vitesse $\dot{\mathbf{q}}_\alpha$ correspondants. Pour un certain nombre de raisons pratiques, il est d'usage lors d'une description statistique de caractériser l'état d'un système par les positions et les impulsions $\mathbf{p}_\alpha$ au lieu des vitesses. Dans la majeure partie des cas, l'impulsion (ou moment linéaire) d'une particule est le produit de sa masse par sa vitesse. Nous verrons plus loin comment définir l'impulsion de façon plus efficace. On peut représenter mathématiquement les différents états d'un système par des points dans un espace à $6N$ dimensions appelé espace des phases. La trajectoire, ou le lieu de ces points permet de représenter de manière univoque l'évolution du système.

En s'intéressant à un volume infinitésimal $d\Gamma$ de cet espace des phases

$$d\Gamma \triangleq d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \cdots d\mathbf{q}_N d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \cdots d\mathbf{p}_N \quad (1.18)$$

on peut introduire la probabilité dw des états représentés par des points contenus dans ce volume à l'instant t . C'est-à-dire, la probabilité pour qu'à cet instant les positions $\mathbf{q}_\alpha$ et les impulsions $\mathbf{p}_\alpha$ soient comprises dans les intervalles infinitésimaux $[\mathbf{q}_\alpha + d\mathbf{q}_\alpha]$ et $[\mathbf{p}_\alpha + d\mathbf{p}_\alpha]$. Cette probabilité se laisse exprimer par

$$d\Omega = f^{(N)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_s, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s, t) d\Gamma \quad (1.19)$$

où la quantité $f^{(N)}(\dots, \mathbf{q}_\alpha, \dots, \mathbf{p}_\alpha, \dots, t)$ est appelée fonction de distribution du système. Cette fonction est clairement positive et de norme unité, elle représente la densité, au sens probabiliste, de points $\mathbf{w}_\alpha = (\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$ dans l'espace des phases. Si le nombre de particules est conservé au cours de l'évolution, cette densité obéit à une équation de continuité

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{w}}(f^{(N)} \dot{\mathbf{w}}) = 0 \quad (1.20)$$

où $\dot{\mathbf{w}} = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$ représente la vitesse du flot des points dans l'espace des phases. En explicitant le produit scalaire de la divergence de (1.20), il vient

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\nabla_{\mathbf{q}_\alpha} (f^{(N)} \dot{\mathbf{q}}_\alpha) + \nabla_{\mathbf{p}_\alpha} (f^{(N)} \dot{\mathbf{p}}_\alpha) \right] = 0 \quad (1.21)$$

Après dérivation, nous obtenons

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\dot{\mathbf{q}}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{q}_{\alpha}} \left(f^{(N)} \right) + \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_{\alpha}} \left(f^{(N)} \right) \right] + f^{(N)} \sum_{\alpha=1}^N \left[\nabla_{\mathbf{q}_{\alpha}} (\dot{\mathbf{q}}_{\alpha}) + \nabla_{\mathbf{p}_{\alpha}} (\dot{\mathbf{p}}_{\alpha}) \right] = 0 \quad (1.22)$$

En écrivant les équations de Hamilton pour chaque particule,

$$\forall 1 \leq \alpha \leq N \quad \dot{\mathbf{q}}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_{\alpha}} \quad (1.23)$$

où H est le Hamiltonien du système, on constate que

$$\forall 1 \leq \alpha \leq N \quad \nabla_{\mathbf{q}_{\alpha}} \dot{\mathbf{q}}_{\alpha} = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}_{\alpha} \partial \mathbf{q}_{\alpha}} = - \nabla_{\mathbf{p}_{\alpha}} \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \quad (1.24)$$

Ainsi donc la deuxième somme de (1.22) est nulle et nous avons

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\dot{\mathbf{q}}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{q}_{\alpha}} f^{(N)} + \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_{\alpha}} f^{(N)} \right] = 0 \quad (1.25)$$

cette équation est connue sous le nom d'équation de Liouville et correspond donc à l'équation d'évolution du système en terme de la variable $f^{(N)}$.

En pratique, lorsque le système devient plus grand qu'une paire, cette équation s'avère inutilisable, et nous devons faire des approximations. A partir de la fonction de distribution à N particules $f^{(N)}$, nous pouvons construire une fonction de distribution à une particule :

$$f_{\alpha}^{(1)} = f^{(1)}(\mathbf{q}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\alpha}, t) = \int \cdots \int f^{(N)} d\Gamma_1 \cdots d\Gamma_{\alpha-1} d\Gamma_{\alpha+1} \cdots d\Gamma_N \quad (1.26)$$

(avec $d\Gamma_{\alpha} = d^3\mathbf{q}_{\alpha} d^3\mathbf{p}_{\alpha}$), puis une fonction de distribution à deux particules :

$$f_{\alpha\beta}^{(2)} = f^{(2)}(\mathbf{q}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\alpha}, \mathbf{q}_{\beta}, \mathbf{p}_{\beta}, t) \quad (1.27)$$

$$= \int f^{(N)} d\Gamma_1 \cdots d\Gamma_{\alpha-1} d\Gamma_{\alpha+1} \cdots d\Gamma_{\beta-1} d\Gamma_{\beta+1} \cdots d\Gamma_N \quad (1.28)$$

et ainsi de suite ...

Une description parfaitement exacte du système est possible si l'on possède $f^{(N)}$, ou bien la collection de toutes les fonctions $f^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq N-1$, cette structuration du problème est généralement connue sous le nom de hiérarchie BBGKY.

En introduisant la fonction de corrélation $C_{\alpha\beta}$ entre paires de particules définie par

$$f_{\alpha\beta}^{(2)} = f_{\alpha}^{(1)} \cdot f_{\beta}^{(1)} + C_{\alpha\beta}, \quad (1.29)$$

et les fonctions de corrélation entre triplets, quadruplets, etc., il est possible de décomposer $f^{(N)}$ en une somme de produits de $f_{\alpha}^{(1)}$ uniquement. En négligeant ces corrélations entres particules (c'est-à-dire $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma} = \cdots = 0$), toute notre connaissance sur le système est contenue dans les fonctions $f_{\alpha}^{(1)}$. Si nous supposons de plus que toutes les particules sont indiscernables, nous obtenons une fonction de distribution simplifiée

$$\forall 1 \leq \alpha \leq N \quad f_{\alpha}^{(1)} = f^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (1.30)$$

Le fait de négliger toutes les corrélations revient à supposer que le système est purement non-collisionnel, c'est-à-dire que les collisions entre particules n'ont aucune influence sur la dynamique

du système. Ainsi donc à la lueur des enseignements de la section précédente concernant les échelles de temps, nous pouvons tout à fait décrire un système auto-gravitant par cette fonction de distribution simplifiée $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. L'équation régissant l'évolution de f est obtenue à partir de l'équation de Liouville en négligeant les corrélations et en introduisant l'indiscernabilité des particules. Cette équation est connue sous le nom d'équation de Boltzmann sans collisions, elle s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0 \quad (1.31)$$

Dans le cas d'un système auto-gravitant, la seule force vue par une particule située en $\mathbf{q}$ avec une impulsion $\mathbf{p}$ est issue du potentiel gravitationnel créé par toutes les autres particules. La moyenne de ce potentiel sur l'ensemble des particules permet d'obtenir un champ moyen ψ dont est issue la force appliquée à chaque particule. Nous avons donc

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{q}}(\psi) \quad (1.32)$$

Ce champ ψ obéit à l'équation de Poisson $\Delta\psi = 4\pi G\rho$, Δ étant l'opérateur laplacien à trois dimensions, G , la constante de gravitation et ρ la densité du système. Dans notre description moyenne, cette densité s'obtient par une intégration sur les impulsions de la fonction de distribution dans l'espace des phases. ainsi nous aurons

$$\Delta\psi(\mathbf{q}, t) = 4\pi G\rho = 4\pi G \int f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} \quad (1.33)$$

En utilisant la fonction de Green de l'opérateur laplacien nous pouvons obtenir ψ en fonction de f

$$\psi(\mathbf{q}, t) = -Gm \int \frac{f(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d^3\mathbf{q}' d^3\mathbf{p}', \quad (1.34)$$

Dans cette hypothèse de champ moyen et de forces conservatives, l'équation de Boltzmann sans collisions prend une nouvelle forme appelée équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \nabla_{\mathbf{q}}(\psi) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (1.35)$$

En introduisant l'énergie moyenne par particule $E = \mathbf{p}^2/2m + \psi$, et le crochet de Poisson (cf annexe 2) entre deux fonctions $x(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ et $y(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$

$$\mathcal{P}_3[x, y] \triangleq \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial p_i} - \frac{\partial x}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_i} \right), \quad (1.36)$$

il est facile de constater que l'équation de Vlasov s'écrit simplement

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{P}_3[E, f] \quad (1.37)$$

Cette équation est l'équation d'évolution dynamique du système exprimée en fonction de la variable f . Il s'agit donc de l'équation fondamentale, point de départ de toutes nos investigations. La notation particulière utilisée pour le crochet de Poisson sera justifiée lors de l'approche analytique développée dans la deuxième partie de cette thèse.

Nous avons présenté ici une vision physique de la dérivation de l'équation de Vlasov, une démarche beaucoup plus globale est aussi possible et permet une vision complète de la théorie

cinétique à partir d'un minimum d'hypothèses fondamentales. Toutefois, notre propos n'est pas ici de reformuler la théorie cinétique et nous renvoyons donc le lecteur curieux vers l'annexe 1, dans laquelle tout est expliqué avec force détails concernant la modélisation d'un système physique quelconque par la théorie cinétique.

Nous savons à présent comment décrire un système auto-gravitant. Pour pouvoir étudier la stabilité de tels systèmes nous devons avant tout parler de leurs éventuels états d'équilibre, point de départ de leur évolution.

1.3 Equilibre Cinétique des systèmes auto-gravitants

Un système physique est dans un état d'équilibre lorsque sa fonction de distribution dans l'espace des phases est telle que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (1.38)$$

Ainsi donc, si ce système est non collisionnel (ou non dissipatif) (1.37) nous indique clairement que sa fonction de distribution d'équilibre au sens de Vlasov est de la forme générale $f_o = f_o(E)$. Il existe donc une infinité d'états d'équilibres.

Toutefois, nous avons vu dans le chapitre concernant les échelles de temps des systèmes gravitationnels que l'état non collisionnel n'était envisageable que durant une certaine période dépendant du nombre de composantes du système. Lorsque les collisions interviennent il est alors facile de montrer (compte tenu de la forme de l'interaction gravitationnelle) que le seul état d'équilibre envisageable est celui décrit par une fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann (cf [Diu *et al.* 1989]).

Malheureusement, si l'on considère une telle fonction de distribution la masse du système diverge ! Pour remédier à ce petit problème Lynden-Bell eut donc l'idée d'imposer au système une masse finie M , et de caractériser l'équilibre par l'état d'entropie maximum. Ces deux contraintes, augmentées de la conservation de l'énergie totale du système, permettent donc de définir une nouvelle statistique, dite de Lynden-Bell (cf [Saslaw 1985]), et intermédiaire entre la statistique de Maxwell-Boltzmann et celle de Fermi-Dirac.

Cette modélisation pourrait être tout a fait valide si l'entropie des systèmes auto-gravitants ne souffrait pas comme nous l'allons voir d'une fâcheuse propriété.

L'entropie est définie en physique statistique par la relation de Schannon :

$$S = - \int f \ln(f) d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} \quad (1.39)$$

où f est la fonction de distribution du système auto-gravitant que nous modélisons de la façon suivante

Figure 2 : Système auto-gravitant

Nous avons arbitrairement découpé notre système en deux régions. La masse M_1 de la région I (bleu clair) étant supposée très supérieure à la masse M_2 de la région II (rouge). Les “rayons” r_1 et r_2 sont des quantités moyennes si, comme sur la figure 2, le système n’est pas sphérique. L’énergie potentielle gravitationnelle contenue dans chacune des deux régions s’écrit alors

$$|E_1| = \frac{GM_1^2}{r_1} \quad \text{et} \quad |E_2| = \frac{GM_1M_2}{r_2} \quad (1.40)$$

Le potentiel gravitationnel est attractif, ainsi, l’évolution vers l’équilibre va se traduire par une concentration de la région centrale dont l’énergie totale va décroître vers un état d’équilibre.

Nous allons donc transférer une partie de l’énergie de la région I vers la région II pour simuler l’évolution vers l’équilibre. Cette quantité d’énergie potentielle ΔE , correspondant à une région d’épaisseur moyenne ϵr_1 , s’écrit donc

$$\Delta E = \frac{G.M_1^2}{r_1} - \frac{G.M_1^2}{r_1.(1-\epsilon)} = -\epsilon \frac{G.M_1^2}{r_1}$$

Cela revient donc en fait à augmenter r_2 jusqu’à r'_2 tel que :

$$E_2 \implies E'_2 = E_2 + \Delta E \approx \frac{G.M_1.M_2}{r'_2}$$

Etudions l’effet induit par cette transformation sur l’entropie de la région II. Pour cela, calculons le volume $\mathcal{V}_2$ occupé par cette région dans l’espace des phases.

Le théorème du Viriel nous dit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_2\bar{v}_2^2 &\approx \frac{G.M_1.M_2}{r'_2} \\ \implies \bar{v}_2 &\approx \left(\frac{G.M_1}{r'_2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$\mathcal{V}_2 \approx \bar{v}_2^3 \cdot r'^3_2 \approx (G.M_1.r'_2)^{\frac{3}{2}}$$

Dans l’hypothèse d’une répartition uniforme, la probabilité de présence dans l’espace des phases est inversement proportionnelle au volume occupé dans cet espace.

Ainsi pour la région II, nous aurons :

$$p \approx \frac{N_2}{\mathcal{V}_2}$$

ou N_2 est une constante de normalisation positive de p . Ainsi, en reportant ce résultat dans (1.39) et en prenant la valeur de $\mathcal{V}_2$, il vient :

$$\begin{aligned} S_2 &\gtrsim -\frac{N_2}{\mathcal{V}_2} \ln\left(\frac{N_2}{\mathcal{V}_2}\right) \cdot \mathcal{V}_2 + Cste \\ \implies S_2 &\approx -N_2 \ln\left(\frac{N_2}{\mathcal{V}_2}\right) + Cste \\ \implies S_2 &\approx \frac{3}{2} \cdot N_2 \cdot \ln(r'_2) + Cste \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_2 \approx -\frac{3}{2} N_2 \ln |E_2 + \Delta E| + Cste \quad (1.41)$$

Dans cette transformation, on peut aussi montrer que l'entropie de la région I reste bornée, mais rien n'empêche ΔE de tendre vers $-E_2$ et donc de faire diverger l'entropie totale du système.

Dans ces conditions, il devient difficile d'atteindre un état d'équilibre caractérisé par une entropie maximale, et la statistique de Lynden-Bell semble contenir dans ses hypothèses des propriétés impossibles à réaliser pour les systèmes dont elle veut rendre compte.

C'est la Catastrophe Gravothermale.

Le devenir de particules jetées au hasard dans leur propre champ de gravitation peut donc se résumer ainsi : sur de faibles échelles de temps (quelques demi-douzaines de dizaines de temps dynamique), le système est non collisionnel, il se relaxe très rapidement (Relaxation violente [Lynden-Bell 1967]) pour atteindre un état d'équilibre décrit par la statistique de Lynden-Bell, et une fonction de distribution du type $f \approx f_o(E)$. Sur de plus longues échelles de temps, cet état va évoluer très lentement pour atteindre un état dont on sait peu de chose si ce n'est qu'il doit être très dense.

Figure 3 : Evolution schématique de la fonction de distribution

Sur une échelle de temps faible devant T_{rc} (cf. (1.17)), le système est dans un état de proche équilibre "local" dans le temps. Il est non collisionnel et décrit par une équation de Vlasov car le terme B_{ij} de diffusion de l'équation de Focker-Planck est négligeable (cf. appendice A).

Sur des échelles de temps beaucoup plus grandes, comme la durée de vie du système, il faut absolument prendre en compte les collisions mais l'étude devient alors très complexe et en pratique uniquement numérique. Dans toute la suite de notre propos, nous étudierons la stabilité de l'état de pseudo-équilibre atteint après la phase de relaxation violente, sur de faibles échelles de temps ($< 100T_d$), nous demeurerons ainsi non collisionnel.

1.4 La fonction de distribution d'équilibre

1.4.1 L'orbite des étoiles dans un système auto-gravitant

Dans cette partie, nous allons étudier la nature des orbites des étoiles évoluant dans le potentiel moyen d'un système auto-gravitant. Cette étude est à la fois simple et fructueuse. Elle est simple grâce à la nature des approximations que nous pouvons effectuer, et fructueuse car

elle contient dans ses conclusions la naissance de la réponse à de nombreux problèmes de la dynamique stellaire.

Nous supposons dans toute cette section que le mouvement d'une étoile est le fruit du champ gravitationnel moyen créé par l'ensemble des autres étoiles. Nous négligeons donc les forces à petite échelle pour ne conserver que les phénomènes collectifs à grande échelle.

De plus, nous limiterons notre étude aux systèmes possédant la symétrie sphérique. La majeure partie de ces résultats est fort bien connue mais ils demeurent fondamentaux, et sont présentés dans de nombreux ouvrages avec plus ou moins de détails.

Orbite dans un potentiel sphérique stationnaire

Nous considérons le mouvement d'une étoile dans un champ de force centrale.

Si $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ représente le vecteur position d'une étoile par rapport au centre du système, alors cette étoile subit une force $\mathbf{F}$ dont le module est uniquement dépendant du module r de sa distance au centre et dont le support est la droite liant le centre à l'étoile

$$\mathbf{F} = f(r)\mathbf{e}_r \quad (1.42)$$

Dans ces conditions, le principe fondamental de la dynamique nous donne les équations du mouvement :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\mathbf{e}_r \quad (1.43)$$

Utilisant (1.43), il est facile de voir que le moment cinétique par unité de masse, $\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$, est conservé au cours du mouvement, la trajectoire de l'étoile est donc contenue dans un plan : Le plan orbital.

Nous nous plaçons donc dans ce plan et utilisons les coordonnées polaires, $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$ telles que

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\phi} = \mathbf{e}_\phi \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{e}_\phi}{d\phi} = -\mathbf{e}_r \quad (1.44)$$

dans ces conditions la vitesse et l'accélération de l'étoile sont données par :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (1.45)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi \quad (1.46)$$

l'équation vectorielle du mouvement (1.43) fournit donc un système d'équations

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = f(r) \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0 \iff \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

L'équation du bas de (1.47) n'apporte pas grand chose car nous savions que le vecteur moment cinétique $\mathbf{L}$ était un invariant dynamique, et cette équation traduit la conservation de son module $L = |\mathbf{L}| = r^2\dot{\phi}$, nous pouvons toutefois nous en servir pour éliminer le temps dans (1.47), en effet

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = L \iff \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{r^2} \iff \frac{d}{dt} = \frac{L}{r^2} \frac{d}{d\phi} \quad (1.48)$$

en injectant ce résultat dans (1.47), nous obtenons

$$\frac{L^2}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right) - \frac{L^2}{r^3} = f(r) \quad (1.49)$$

en utilisant la variable $u = 1/r$, cette équation se simplifie finalement pour donner

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = -\frac{f(1/u)}{L^2 u^2} \quad (1.50)$$

Il est alors clair que cette équation possède deux familles de solutions. La première correspondant à des problèmes pour lesquels r peut croître indéfiniment et même tendre vers l'infini (si le système est en équilibre), les orbites correspondantes seront donc non bornées. Les systèmes stellaires que nous étudions étant supposés isolés et d'extension finie ne possèdent donc pas d'étoiles sur de telles orbites. Une deuxième famille de solutions de l'équation (1.50) correspond aux orbites bornées pour lesquelles $r_{min} \leq r \leq r_{max}$.

Pour aller plus loin dans la résolution analytique de ce problème, il faut se donner l'expression de $f(r)$. Par exemple, pour un potentiel Képlerien nous aurons $f(r) = GM/r^2$, et une solution exacte est calculable. Toutefois, dans un cadre plus général, seule une approche numérique est possible.

Malgré tout, une petite remarque supplémentaire permet de compléter notre étude.

En effet, en multipliant les deux membres de (1.50) par $du/d\phi$ et en intégrant sur ϕ nous obtenons

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 = - \int \frac{du}{d\phi} \frac{f(1/u)}{L^2 u^2} d\phi \quad (1.51)$$

Dans notre cas gravitationnel, on peut toujours supposer que la force $\mathbf{F}$ dérive d'un potentiel $\psi(r)$ nous avons donc

$$f(r) = -\frac{d\psi}{dr} = u^2 \frac{d\psi}{du} \quad (1.52)$$

le second membre de (1.51) s'intègre directement, il vient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{2\psi}{L^2} = k \quad (1.53)$$

Compte-tenu de l'hypothèse conservative que nous avons effectuée, la constante d'intégration k est forcément reliée à une autre constante : L'énergie du système par unité de masse. Il est facile de le vérifier en posant $k = 2E/L^2$. Dans ces conditions on a

$$E = \frac{L^2}{2} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{u^2 L^2}{2} + \psi \quad (1.54)$$

soit en utilisant (1.48)

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(r \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \psi \quad (1.55)$$

Compte-tenu de la relation (1.45) donnant la vitesse en coordonnées polaires, nous retrouvons bien

$$E = \frac{v^2}{2} + \psi \quad (1.56)$$

La relation (1.53) s'écrit donc en fonction des deux grandeurs conservées E et L^2

$$u^2 + \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{2(\psi - E)}{L^2} = 0 \quad (1.57)$$

Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous nous intéressons ici aux systèmes d'extension finie dont les orbites sont bornées. L'étoile peut se déplacer à l'intérieur d'une région de l'espace. Il est d'ailleurs assez simple de trouver ces deux bornes, en effet, en ces points la vitesse angulaire $du/d\phi$ est nulle, ainsi (1.57) devient

$$u^2 + \frac{2(\psi(1/u) - E)}{L^2} = 0 \quad (1.58)$$

qui possède en général deux racines, $r_1 = u_1^{-1}$ et $r_2 = u_2^{-1}$. La période radiale, ou le temps mis pour l'aller-retour entre ces deux point, s'obtient à partir d'une intégration. En injectant la loi des aires (1.47) dans la relation donnant l'énergie (1.55) nous obtenons

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{r}\right)^2 + \psi \quad (1.59)$$

ainsi

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2(E - \psi(r)) - \frac{L^2}{r^2}} \quad (1.60)$$

les signes plus et moins correspondant à l'aller et au retour. La période radiale s'écrit

$$\tau_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(E - \psi(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (1.61)$$

Dans ce voyage, l'angle azimuthal ϕ est augmenté de $\Delta\phi$ tel que

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\phi}{dr} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{r^2} \frac{dt}{dr} dr \quad (1.62)$$

Le rapport de la fréquence azimuthale ν_r à la fréquence radiale ν_ϕ s'écrit donc

$$\frac{1}{K_\nu} \triangleq \frac{\nu_\phi}{\nu_r} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{dt} dr}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(E - \psi(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}} \quad (1.63)$$

Ce rapport n'est en général pas un multiple rationnel de $1/\pi$, l'orbite d'une étoile dans un tel système n'est donc généralement pas fermée. La trajectoire remplit un anneau compris entre les cercles de rayon r_1 et r_2 . On parle alors de trajectoire ergodique.

Lorsque le potentiel est fixé, r_1 et r_2 , ν_r, ν_ϕ et donc K_ν ne dépendent *que* de E et L^2 . C'est aussi la principale raison pour laquelle, la fonction de distribution d'un tel système dans l'espace des phases ne dépend que de ces deux quantités.

Pour achever cette étude, il est intéressant de mettre en évidence le domaine de variation de K_ν . Il n'est en général pas possible d'explicitier analytiquement le potentiel $\psi(r)$ vu par chaque étoile, il en est donc de même pour toutes les quantités qui en découlent. Nous pouvons toutefois remarquer que quelle que soit la nature de ce potentiel, il doit forcément occuper un état

intermédiaire entre le potentiel d'un système homogène et le potentiel d'un système Képlerien dans lequel toute la masse est contenue dans un point unique.

Pour un système homogène dont la densité en tout point est égale à ρ_o , le potentiel se calcule aisément grâce à l'équation de Poisson $\Delta\psi = 4\pi G\rho_o$, ainsi

$$\psi_{hom}(r) = \psi_o + \frac{1}{2}\nu_o^2 r^2 \quad (1.64)$$

ψ_o étant le potentiel central, et $\nu_o^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho_o$. Le calcul des fréquences est donc possible, il vient

$$\nu_r^{hom} = \nu_o \quad \text{et} \quad \nu_\phi^{hom} = \frac{\nu_r^{hom}}{2} \quad (1.65)$$

ces deux fréquences sont donc indépendantes de r et le rapport $K_\nu = 2$. A l'opposé, pour un système Képlerien dont le potentiel est défini par

$$\psi_{kep}(r) = -\frac{GM}{r} \quad (1.66)$$

le calcul est encore possible et fournit

$$\nu_r^{kep} = \frac{(-2E)^{\frac{3}{2}}}{GM} \quad \text{et} \quad \nu_\phi^{kep} = \nu_r \quad (1.67)$$

les fréquences sont toujours constantes mais ici $K_\nu = 1$.

Tout système réaliste se situant entre ces deux cas limites, verra donc son K_ν compris entre 1 et 2, ses fréquences seront donc telles que

$$\nu_\phi < \nu_r \leq 2\nu_\phi \quad (1.68)$$

La force gravitationnelle moyenne au centre du système est toujours nulle, le profil de densité (intégrale de cette force) au cœur du système est donc constant. Cela revient donc à supposer que les régions centrales des systèmes auto-gravitants sont homogènes, ce qui est assez réaliste si l'on retire l'éventuel trou noir.

Les étoiles de faible énergie ($E \approx 0$), et donc par là même confinées dans ces régions centrales possèdent donc un $K_\nu = 2$. Il en va de même pour les étoiles possédant un faible moment cinétique ($L^2 \approx 0$) qui ne font pourtant que passer dans ces régions. En effet, ce rapport 2 signifie que pendant le temps d'une révolution, l'étoile effectue deux oscillations radiales. Les étoiles possédant un faible moment cinétique sont sur des orbites quasiment radiales ($L^2 = r^2 v_t^2 \approx 0 \iff v_t \approx 0$). Elles démarrent de leur apocentre aux confins de la galaxie, et plongent vers le centre où elles font un quasi demi-tour pour repartir vers l'extérieur où elles refont demi-tour... Elles accomplissent donc 2 oscillations radiales pour une azimuthale, et donc leur $K_\nu = 2$.

Ce raisonnement assez simple est à la base de la compréhension du principal mécanisme d'instabilité subi par de tels systèmes.

Nous en savons à présent assez sur la nature des orbites des étoiles dans les systèmes que nous allons étudier et lors de nombreuses occasions nous reviendrons saisir dans ce paragraphe de petits résultats aux conséquences insoupçonnables.

1.4.2 Intégrales du mouvement

Une constante du mouvement dans un potentiel donné est une fonction $C(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ de la position, du moment linéaire et du temps qui demeure constante le long de l'orbite de chaque particule du système. Ainsi quels que soient les instants t_1 et t_2 , nous aurons

$$C(\mathbf{q}_{t_1}, \mathbf{p}_{t_1}, t_1) = C(\mathbf{q}_{t_2}, \mathbf{p}_{t_2}, t_2) \quad (1.69)$$

Une intégrale du mouvement $I(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est une fonction de la position et du moment linéaire seulement, dont la valeur est conservée le long de chaque orbite

$$I(\mathbf{q}_{t_1}, \mathbf{p}_{t_1}) = I(\mathbf{q}_{t_2}, \mathbf{p}_{t_2}) \quad (1.70)$$

Bien que toute intégrale du mouvement soit une constante du mouvement, l'inverse n'est pas obligatoire. Par exemple, dans un potentiel sphérique, la coordonnée azimuthale ϕ d'une particule en orbite circulaire à la vitesse angulaire Ω est donnée par $\phi = \Omega t + \phi_0$. L'azimuth initial ϕ_0 étant fixé, $C = t - \phi/\Omega$ est une constante du mouvement, toutefois C n'est pas une intégrale du mouvement car elle dépend explicitement du temps. Le contre-exemple précédent nous permet de plus de remarquer que chaque orbite dans un potentiel quelconque possède 6 constantes du mouvement indépendantes. En effet, les conditions initiales $\mathbf{q}_0$ et $\mathbf{p}_0$ déterminées à partir de $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$ en intégrant les équations du mouvement sont bien 6 constantes du mouvement.

Les équations du mouvements dans le cas d'un système soumis à des forces dérivant d'un potentiel stationnaire $\psi(\mathbf{q})$ ne sont autres que les équations de Hamilton qui s'écrivent

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{p} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{q}} \quad (1.71)$$

ces équations se réécrivent sous la forme d'un système différentiel, en coordonnées cartésiennes nous avons par exemple

$$\frac{dx}{p_x} = \frac{dp_x}{-\frac{\partial\psi}{\partial x}} = \frac{dy}{p_y} = \frac{dp_y}{-\frac{\partial\psi}{\partial y}} = \frac{dz}{p_z} = \frac{dp_z}{-\frac{\partial\psi}{\partial z}} = dt \quad (1.72)$$

Il est donc clair que ce système possède 6 constantes du mouvement indépendantes dont 5 ne contiennent pas de dépendance temporelle explicite, pour chaque particule il existe donc 5 intégrales du mouvement.

Dans certains cas importants, quelques unes de ces intégrales peuvent être mises en évidence. Par exemple, l'intégration des équations de (1.72) couplées deux par deux consécutivement montre que pour tout potentiel stationnaire $\psi(\mathbf{q})$, l'énergie, $E(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + \psi(\mathbf{q})$ est une intégrale du mouvement. Si le potentiel possède des symétries particulières, d'autres intégrales évidentes apparaissent. Dans le cas sphérique, nous avons vu lors du paragraphe précédent que le moment cinétique $\mathbf{L}$ était conservé, $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, les trois composantes de ce vecteur constituent donc trois intégrales du mouvement. Dans le cas d'un potentiel symétrique autour d'un axe z , la composante $\mathbf{L}_z$ du moment cinétique est conservée et forme une intégrale du mouvement. Il est toutefois impossible dans le cas général d'obtenir une expression simple de l'ensemble des intégrales du mouvement d'un système.

Le concept d'intégrale du mouvement et sa signification physique permettent d'obtenir une vision simplifiée des propriétés du mouvement. En effet, reprenons par exemple le cas sphérique évoqué plus haut, la conservation du support et du sens du vecteur $\mathbf{L}$ implique que le mouvement s'effectue dans un plan. La connaissance de 4 grandeurs, $r, \phi, v_r = \dot{r}$ et $v_\phi = r\dot{\phi}$ est donc suffisante pour caractériser de façon univoque la trajectoire d'une particule. La conservation de E et du module L de $\mathbf{L}$ permettent alors de réduire cette région quadri-dimensionnelle à une surface bi-dimensionnelle de l'espace des phases, telle que

$$v_r = \pm \sqrt{2(E - \psi(r)) - \frac{L^2}{r^2}} \quad \text{et} \quad v_\phi = \frac{L}{r} \quad (1.73)$$

dans laquelle l'œil d'un expert saura reconnaître un tore. Ainsi en pratique, si l'on connaît l'énergie et le moment cinétique d'une particule dans un potentiel sphérique, la position et la

vitesse de cette particule sont spécifiées par uniquement deux quantités, par exemple r et ϕ . Le problème est donc considérablement simplifié.

Est-il possible de le simplifier davantage en trouvant par exemple la cinquième intégrale du mouvement ?

Afin de répondre à cette question considérons le mouvement d'une particule dans le potentiel

$$\psi(r) = -GM \left(\frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \right) \quad (1.74)$$

dont l'intérêt est de permettre une intégration des équations du mouvement (1.47) en fonction de a . Il vient

$$\frac{1}{r} = \alpha \cos \left(\frac{\phi - \phi_o}{K} \right) + \frac{GMK^2}{L^2} \quad (1.75)$$

avec

$$K = \left(1 - \frac{2GMa}{L^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{2} \frac{C^2 L^2}{K^2} - \left(\frac{GMK}{L} \right)^2 \quad (1.76)$$

La condition initiale ϕ_o peut ainsi s'exprimer en fonction de r et ϕ

$$\phi_o = \phi - \alpha \arccos \left[\frac{1}{C} \left(\frac{1}{r} - \frac{GMK^2}{L^2} \right) \right] \quad (1.77)$$

cette relation ne faisant pas intervenir le temps de manière explicite, ϕ_o est donc une intégrale du mouvement.

La variable azimuthale ϕ est définie modulo 2π , toutefois, la relation (1.75), indique clairement que toute transformation de ϕ en $\phi + 2nK\pi$ laisse r et ϕ_o invariants. Ainsi donc si K est irrationnel, la donnée des 5 intégrales du mouvement que sont E , $\mathbf{L}$, ϕ_o et de la coordonnée radiale r ne sont pas suffisantes pour définir de manière univoque ϕ . En fait ϕ_o est une intégrale du mouvement mais elle ne permet pas de réduire la dimension du problème comme l'ont si bien fait E et $\mathbf{L}$, elle ne permet pas d'isoler une des dimensions de l'espace des phases : ϕ_o est une intégrale du mouvement non isolante.

D'un autre côté, si K est rationnel, $\phi + 2nK\pi$ est égal à ϕ modulo 2π , la donnée de E , $\mathbf{L}$, ϕ_o et r résout exactement le problème en permettant de déterminer exactement ϕ . L'intégrale du mouvement ϕ_o a dans ce cas permis d'isoler une des deux dimensions de l'espace des phases restant à isoler. ϕ_o , comme E et $\mathbf{L}$, est une intégrale isolante du mouvement. (Le cas $a = 0$ et donc $K = 1$ est celui d'un potentiel Képlerien, il est donc possible de décrire un tel système uniquement à travers ces 5 intégrales isolantes).

Dans un cadre plus général il existe une définition plus précise de la notion d'intégrale isolante du mouvement (cf. [Arnold 1978] par exemple) . Notre but est simplement de comprendre par quels moyens il est possible de simplifier la modélisation d'un système physique auto-gravitant.

1.4.3 Fonction de distribution d'équilibre d'un système sphérique

Nous avons vu qu'il était en général impossible de résoudre exactement le problème de l'étude du mouvement d'une particule test dans le champ gravitationnel moyen d'une assemblée d'autres particules.

De manière générale, il est en effet impossible de trouver l'ensemble de toutes les intégrales du mouvement. Toutefois, certains états du système se dévoilent en nous indiquant les propriétés de la fonction de distribution de Vlasov qui les caractérise.

Les théorèmes de Jeans

Nous avons introduit au paragraphe précédent la notion d'intégrale du mouvement $I(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. La définition (1.70) indique que la dérivée de I le long de toutes les orbites est nulle. En explicitant cette condition, il vient

$$\frac{dI}{dt} = \nabla_{\mathbf{q}} I \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \nabla_{\mathbf{p}} I \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (1.78)$$

Soit en injectant les équations de Hamilton,

$$\frac{dI}{dt} = \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} I - \nabla_{\mathbf{q}} \Psi \cdot \nabla_{\mathbf{p}} I = 0 \quad (1.79)$$

Nous constatons que la condition pour que I soit une intégrale du mouvement est équivalente à celle pour que I soit une solution stationnaire de l'équation de Vlasov (1.35). Ainsi, toute fonction f positive et intégrable des n intégrales du mouvement du système I_k , $1 \leq k \leq n$, sera telle que

$$\frac{d}{dt} f(I_1, \dots, I_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial I_k} \frac{dI_k}{dt} = 0 \quad (1.80)$$

et par conséquent f est une fonction de distribution qui décrit un état d'équilibre du système. Ce résultat est connu sous le nom de premier Théorème de Jeans [Jeans 1929].

Nous avons expliqué sur un exemple que les intégrales du mouvement ne possèdent pas toutes la même importance. Certaines sont bien définies (intégrales isolantes) et permettent de simplifier l'étude du système et d'autres possèdent une liberté de phase qui les rend pratiquement impropres. Le premier théorème de Jeans se doit alors d'être aménagé. La fonction de distribution d'équilibre étant définie de façon univoque elle ne dépend que des intégrales isolantes du mouvement. Ce résultat est connu sous le nom de second Théorème de Jeans. Bien qu'intuitive, cette propriété n'est pas immédiate à démontrer et nous renvoyons nos fidèles lecteurs vers l'annexe 4-A de [Binney & Tremaine 1987] pour plus de détails.

Le problème étant à présent réduit à sa plus simple expression, nous pouvons étudier divers cas particuliers classiques de ce théorème simplificateur.

Les systèmes avec $f_o = f_o(E)$

Nous avons montré lors du paragraphe précédent que dans le cas d'un potentiel stationnaire, l'énergie de toutes les particules est une intégrale isolante du mouvement. En passant à une description statistique Vlasovienne du système, l'intégrale isolante correspondante sera donc l'énergie moyenne par particule, $E = p^2/2m + \psi(\mathbf{q})$.

Quelle est la nature d'un système dont la fonction de distribution stationnaire ne dépend que de E ?

Cette question aux allures simples est passée sous silence dans de nombreux ouvrages (sauf [Chandrasekhar 1957] qui s'avoue vaincu) car elle relève en fait de mathématiques complexes. La réponse est maintenant bien connue grâce au travail de plusieurs spécialistes [Gidas *et al.* 1981], rappelons en les points principaux.

Nous supposons donc que la fonction de distribution d'équilibre f_o d'un système donné ne dépend que de l'énergie moyenne par particule E . La densité $\rho(\mathbf{q})$ de ce système est donnée par

$$\rho(\mathbf{q}) = \int f_o \left(\frac{p^2}{2m} + \psi(\mathbf{q}) \right) d^3\mathbf{p} \quad (1.81)$$

en utilisant la variable E en lieu et place de $\mathbf{p}$, cette relation se réécrit

$$\rho(\mathbf{q}) = \int_0^{\psi(0)-\psi} f_o(E) \sqrt{2(E-\psi)} dE \quad (1.82)$$

la densité ρ du système ne dépend que de son potentiel ψ , $\rho = \rho(\psi)$. L'équation de Poisson s'écrit donc

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho(\psi) \quad (1.83)$$

Δ désignant l'opérateur laplacien. De plus, le potentiel est une fonction strictement négative qui tend vers 0 lorsque sa variable tend vers l'infini. Si nous supposons de plus que ρ s'annule à la surface du système, nous sommes donc exactement dans les conditions d'application du théorème Gidas-Ni-Nirenberg (GiNiS) [Gidas *et al.* 1981]

Théorème 1 *Si u est une fonction C^2 de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad u(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \lim_{x_i \rightarrow \infty} u(x_i) = 0 \quad (1.84)$$

et si il existe une fonction f continue de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\Delta u = f(u) \quad (1.85)$$

alors, pour un choix convenable de l'origine O de $\mathbf{x}$,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad u(\mathbf{x}) = u(|\mathbf{x}|) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial |\mathbf{x}|} > 0 \quad (1.86)$$

u est une fonction symétrique monotone croissante de $|\mathbf{x}|$.

Ce puissant théorème nous permet donc d'affirmer qu'un système dont la fonction de distribution ne dépend que de l'énergie E est sphérique.

Le système est donc isotrope dans l'espace des positions. Il est facile de démontrer que cette isotropie se conserve dans l'espace des vitesses, en effet, la dispersion de vitesse dans chaque direction s'écrit

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \overline{p_i^2} \triangleq \int dp_1 dp_2 dp_3 p_i^2 f_o \left[\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + \psi \right] \quad (1.87)$$

ψ ne dépend que des coordonnées spatiales, ainsi $\overline{p_1^2} = \overline{p_2^2} = \overline{p_3^2}$ et le système est aussi isotrope dans l'espace des vitesses.

Globalement, tout système dont la fonction de distribution d'équilibre ne dépend que de l'énergie moyenne par particule E est sphérique et isotrope dans l'espace des phases.

Les systèmes avec $f_o = f_o(E, \mathbf{L})$

Nous savons, pour l'avoir traité en détail, que le mouvement d'une particule massive dans un champ gravitationnel stationnaire sphérique conserve l'énergie de cette particule mais aussi son moment cinétique. Ces deux grandeurs forment même deux intégrales isolantes du mouvement dans de tels systèmes. Que dire du problème inverse : quelles sont les propriétés d'un système dont la fonction de distribution ne dépend que de E et L^2 ? Le problème est encore plus redoutable que précédemment, en effet, dans ce cas, la définition de la densité

$$\rho(\mathbf{q}) = \int f_o(E, \mathbf{L}) d^3\mathbf{p} \quad (1.88)$$

est impossible à inverser dans le cas général. Dans certains cas particuliers il est toutefois possible d'obtenir des renseignements sur le système.

Distributions d'équilibre dépendant de E et L^2

Dans ce cas particulier, il est facile de voir à partir de (1.88) que $\rho = \rho(|\mathbf{q}|, \psi)$, une extension du théorème GiNis permet alors de montrer que $\psi(\mathbf{q}) = \psi(|\mathbf{q}|)$ si $\partial\rho/\partial|\mathbf{q}| < 0$. Si nous ne prenons en considération que les systèmes dont la densité est strictement décroissante en fonction du rayon, un ensemble de particules modélisé par une fonction de distribution qui ne dépend que de E et L^2 est sphérique.

Par ailleurs, il est alors facile de montrer que le tenseur de dispersion des vitesses est alors anisotrope. En effet, en coordonnées sphériques $L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2/\sin^2\theta$, ainsi nous aurons $\overline{p_\theta^2} = \overline{p_\phi^2} \neq \overline{p_r^2}$. Un système dont la fonction de distribution ne dépend que de E et L^2 est sphérique et anisotrope dans l'espace des vitesses.

Distributions d'équilibre dépendant de E et L_z

Dans ce cas particulier il est possible d'obtenir la densité du système à partir de la fonction de distribution (cf. [Lynden-Bell 1962], [Hunter 1975] et [Dejonghe 1986]), mais les conditions d'utilisation du théorème GiNis ne sont pas satisfaites, toutefois la forme de ρ permet de montrer que le système est symétrique par rapport au plan xy . Ainsi donc, un système z -axi-symétrique stationnaire est décrit par une fonction de distribution du type $f_o(E, L_z)$, mais la réciproque n'est pas obligatoire.

Les systèmes avec $f_o = f_o(E, X, Y)$

La fonction de distribution de Vlasov est une fonction à 6+1 variables, la dernière étant le temps. Dans le cas stationnaire il nous faut donc 5 intégrales isolantes pour spécifier le mouvement.

Si le système est en équilibre, sa fonction de distribution ne dépend pas du temps, le potentiel issu de cette dernière par (1.34) est donc lui aussi stationnaire. L'énergie par particule E est donc toujours une intégrale isolante. Il reste donc 4 intégrales isolantes à trouver.

Dans le cas sphérique, les trois composantes de $\mathbf{L}$ réduisent encore ce problème, mais la dernière reste en général cachée. Dans le cas axi-symétrique $\mathbf{L}_z$ ramène à deux le nombre d'inconnues. Toutefois dans le cas général, il n'est pas possible, à cause de la forme du potentiel, de trouver des intégrales isolantes différentes de E . Il faut donc traiter chaque cas particulier de façon isolée.

Chapitre 2

Principes et Critères de stabilité classiques

Après avoir discuté l'équilibre d'un système de particules en interaction gravitationnelle, nous allons à présent étudier la question de leur stabilité. Cette étude est fondamentale à plusieurs titres.

Elle permet tout d'abord de sélectionner parmi le vaste choix d'équilibres possibles (toute fonction positive sommable des intégrales isolantes définit un équilibre), ceux qui sont suffisamment stables et possèdent donc une réalité de système physique.

Par ailleurs, l'étude des mécanismes physiques de la stabilité permet de comprendre le contenu physique de l'évolution d'un système, et par exemple, de mettre en évidence des classes de systèmes évoluant de manière semblable. Dans le cadre des systèmes auto-gravitants, il pourrait s'agir de d'expliquer les différences morphologiques entre les galaxies et donc fournir une tentative d'explication de la séquence de Hubble, ou bien d'expliquer pourquoi les amas globulaires sont sphériques etc.

Enfin, l'étude de la stabilité d'un système auto-gravitant permet de prévoir l'évolution de tels systèmes. Bien entendu une telle étude est prédictive sur des échelles de temps compatibles avec celles mises en évidence au début de cette partie et sont donc de l'ordre du million, voir du milliard d'années. Il n'en demeure pas moins vrai que ces prédictions restent intéressantes sur le plan conceptuel.

La stabilité d'un système s'étudie en physique par deux approches générales assez distinctes. La première est fondée sur une constatation quasiment empirique : un système dont l'énergie potentielle croît lorsqu'il est perturbé est stable.

Figure 4 : Stabilité et énergie d'un système

Cette constatation à même donné lieu à un théorème [Arnold 1978] qui en substance qu'un système dont la variation d'énergie est positive sous l'effet d'une perturbation donnée est stable contre cette perturbation. Ce théorème très général ne nous dit rien cependant dans le cas inverse d'une variation d'énergie négative. Dans certaines situations que nous étudierons, il est malgré tout possible d'obtenir des critères nécessaires et suffisants de stabilité.

Une approche différente est possible pour étudier le problème de la stabilité d'un système : il s'agit de l'étude du spectre d'une grandeur dynamique associée au système dont on veut étudier la stabilité, la mise en évidence de modes croissants permettant de conclure à l'instabilité. Bien que plus directe cette approche conduit en général à la mise en œuvre d'outils compliqués et fortement contraints par la physique. C'est pourquoi ces méthodes dites spectrales sont souvent utilisées pour obtenir des résultats concernant des systèmes très particuliers possédant de nombreuses propriétés, et sont dans ce contexte très puissantes. Toutefois, une approche globale du problème de la stabilité d'une vaste classe de système se fera plutôt par une méthode d'énergie.

Nous allons dans un premier temps étudier en détail un Principe général d'énergie permettant d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Puis, présenter succinctement les résultats classiques obtenus par l'une et l'autre des deux approches possibles concernant le problème de la stabilité d'un système de particules en interaction gravitationnelle.

2.1 Principe général de stabilité

Considérons un système dynamique avec un continuum de degrés de liberté.

Soit F une fonction caractérisant l'état de ce système à un instant t .

Soit F_0 une fonction caractérisant l'état d'équilibre de ce système.

Soit f une fonction caractérisant une perturbation de cet état d'équilibre.

Nous avons donc : $F = F_0 + f$. Soit à présent $\mathcal{E}$ l'ensemble tel que :

$$f \in \mathcal{E} \implies \frac{d^2 f}{dt^2} = H f \quad (2.1)$$

Dans $\mathcal{E}$, il est toujours possible de décomposer f en série de la manière suivante

$$f = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \quad (2.2)$$

Pour un mode α , la relation (2.1) devient alors

$$-\omega_\alpha^2 \tilde{f}_\alpha = H \tilde{f}_\alpha \quad (2.3)$$

Ce qui signifie donc que $-\omega_\alpha^2$ est valeur propre de l'opérateur H associée à la fonction propre $\tilde{f}_\alpha$. Deux approches classiques sont alors possibles pour étudier la stabilité du système, la première dite méthode d'énergie, va s'intéresser à des propriétés de H pour en déduire des propriétés de son spectre. La deuxième, dite méthode spectrale, va s'intéresser directement au spectre de H .

2.2 Méthodes d'énergies

Nous allons ici reprendre une méthode initialement introduite en physique des plasmas par [Laval *et al.* 1965], reprise dans le cadre de la dynamique stellaire par [Kulsrud & Mark 1970].

En se donnant un produit scalaire entre deux fonctions, il est toujours possible d'écrire la relation (2.3) sous la forme suivante

$$-\omega_\alpha^2 \langle \tilde{f}_\alpha | \tilde{f}_\alpha \rangle = \langle H \tilde{f}_\alpha | \tilde{f}_\alpha \rangle \quad (2.4)$$

Deux cas sont alors possibles :

1. On peut trouver un produit scalaire tel que $\langle H \tilde{f}_\alpha | \tilde{f}_\alpha \rangle = \langle \tilde{f}_\alpha | H \tilde{f}_\alpha \rangle$, l'opérateur H est dit hermitien, et toutes ses valeurs propres sont réelles, et donc : $\forall \alpha$, $\omega_\alpha^2 \in \mathbb{R}$. De plus le signe de ω_α^2 est le même que celui du scalaire $W(\tilde{f}_\alpha, \tilde{f}_\alpha) \triangleq -\frac{1}{2} \langle H \tilde{f}_\alpha | \tilde{f}_\alpha \rangle$. Nous avons donc deux situations à envisager :

- Si $\exists \alpha$, $W < 0$ alors pour cette ou ces valeurs de α , $\omega_\alpha^2 < 0$, et par conséquent $\omega_\alpha \in i\mathbb{R}$
La perturbation évolue dans le temps comme $e^{-\omega_\alpha t} + e^{\omega_\alpha t}$ le système est donc instable exponentiellement.
- Si $\forall \alpha$ on a $W \geq 0$ alors $\forall \alpha$, $\omega_\alpha^2 \geq 0$, c'est-à-dire $\omega_\alpha \in \mathbb{R}$.
 - si $W = 0$ Le système est linéairement instable.
 - si $W > 0$ La perturbation oscille au cours du temps, le système est stable.

L'étude de la stabilité du système est donc ramenée à celle du signe de la quantité W qui s'interprète comme la variation d'énergie subie par le système.

2. On ne peut pas trouver un produit scalaire tel que H soit hermitien. On ne sait a priori pas grand chose du spectre de H , ce dernier est en général complexe et continu. L'étude de la stabilité du système doit être effectuée par une approche plus générale.

2.3 Application des méthodes d'énergie

Maintenant que nous savons comment formuler la question de la stabilité pour pouvoir lui appliquer une méthode d'énergie, nous pouvons brièvement rappeler les principaux résultats qu'elles ont permis d'obtenir.

Nous avons vu que si l'on décrirait un système auto-gravitant par une fonction de distribution à une particule $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, alors l'évolution de f était donnée par la résolution du système de Vlasov-Poisson

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f - \nabla_{\mathbf{q}} \psi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \\ \Delta \psi = 4\pi G \int f d^3 \mathbf{p} \end{cases} \quad (2.5)$$

Supposons qu'il existe f_o et ψ_o , une fonction de distribution et un potentiel d'équilibre.

Une perturbation de cet équilibre peut toujours se mettre sous la forme

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = f_o(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad \text{et} \quad \psi(\mathbf{q}, t) = \psi_o(\mathbf{q}) + \psi_1(\mathbf{q}, t)$$

En ne gardant que les termes du premier ordre, le système (2.5) se linéarise donc en

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f_1 - \nabla_{\mathbf{q}} \psi_o \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} - \nabla_{\mathbf{q}} \psi_1 \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} = 0 \\ \Delta \psi_1 = 4\pi G \int f_1 d^3 \mathbf{p} \end{cases} \quad (2.6)$$

En introduisant l'opérateur de Green associé au Laplacien dans $\mathbb{R}^3$, nous pouvons exprimer ψ_1 en fonction de f_1

$$\psi_1(\mathbf{q}, t) = -4\pi G \int \frac{f_1(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d^3 \mathbf{q}' d^3 \mathbf{p}' \triangleq -K f_1 \quad (2.7)$$

En faisant apparaître l'opérateur $D = \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} - \nabla_{\mathbf{q}} \psi \nabla_{\mathbf{p}}$, de dérivée Lagrangienne, le système linéarisé (2.6) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + D f_1 - \nabla_{\mathbf{q}} \psi_1 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \\ \psi_1 = -K F_1 \end{cases} \quad (2.8)$$

L'idée principale qui va maintenant gouverner la résolution de ce système est la décomposition de f_1 en une partie symétrique et une partie antisymétrique en $\mathbf{p}$. Cette idée a initialement été introduite par [Antonov 1962] qui posa

$$f_1 \triangleq f_{1+} + f_{1-} \quad \text{telles que} \quad \begin{cases} f_{1+}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \triangleq \frac{1}{2} [f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + f_1(\mathbf{q}, -\mathbf{p}, t)] \\ \text{et} \\ f_{1-}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \triangleq \frac{1}{2} [f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - f_1(\mathbf{q}, -\mathbf{p}, t)] \end{cases} \quad (2.9)$$

Nous devons faire à présent un certain nombre de remarques sur la symétrie des opérateurs et des fonctions intervenant dans (2.8) :

- $K(f_{1+} + f_{1-}) = K f_{1+}$ car K est un opérateur intégral sur un domaine symétrique et f_{1-} est antisymétrique ;
- f_o est symétrique, par hypothèse ;
- D est un opérateur qui transforme une fonction symétrique en $\mathbf{p}$, en une fonction antisymétrique en $\mathbf{p}$, et réciproquement ;
- $\mathbf{p} \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} K f_{1+}$ est antisymétrique en $\mathbf{p}$.

Nous pouvons donc séparer (2.8) en deux parties de symétrie opposée :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{1+}}{\partial t} + D f_{1-} = 0 \\ \frac{\partial f_{1-}}{\partial t} + D f_{1+} + \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} \nabla_{\mathbf{q}} K f_{1+} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

On obtient donc une équation du second ordre pour f_{1+} , en regroupant les deux équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_{1+}}{\partial t^2} = -D \frac{\partial f_{1-}}{\partial t} \\ \frac{\partial f_{1-}}{\partial t} = -D f_{1+} - \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} \nabla_{\mathbf{q}} K f_{1+} \end{cases} \quad (2.11)$$

Soit finalement

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_{1+}}{\partial t^2} = D(D f_{1+} + \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} \nabla_{\mathbf{q}} K f_{1+}) = D(D + \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} \nabla_{\mathbf{q}} K) f_{1+} \triangleq H f_{1+} \\ f_{1-} = -D^{-1} \frac{\partial f_{1+}}{\partial t} \end{cases} \quad (2.12)$$

Le système est sous la forme adéquate pour une utilisation des méthodes d'énergie. Il faut toutefois que H soit auto-adjoint pour un certain produit scalaire. Il faut de plus être en mesure de

définir l'opérateur D^{-1} . Nous avons enfin supposé que la fonction de distribution d'équilibre est symétrique en $\mathbf{p}$.

L'ensemble de ces conditions sont vérifiées si l'on considère un système sphérique isotrope et le produit scalaire entre deux fonctions sommables défini par

$$\forall x(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). y(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad < x | y > \triangleq \int x.y.d\Gamma \quad (2.13)$$

Dans ce contexte, nous pouvons rappeler les résultats classiques suivants

2.3.1 Stabilité contre les perturbations non radiales

Dans le cas sphérique isotrope, nous avons vu que la fonction de distribution ne dépendait que de l'énergie par particule E , $f_o = f_o(E)$. Ainsi donc

$$\frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f_o}{\partial E} \mathbf{p} \triangleq f_E \mathbf{p} \quad (2.14)$$

Si nous supposons que f_o est une fonction monotone décroissante de E , l'opérateur D prend une forme plus explicite et la forme quadratique $W(f_{1+}, f_{1+}) = < f_{1+} | H f_{1+} >$ s'écrit (voir [Binney & Tremaine 1987] pour plus de détails)

$$W(f_{1+}, f_{1+}) = \frac{1}{2} \int d\Gamma. \frac{|Df_{1+}|^2}{|F_E|} - G \int d\Gamma d\Gamma' \frac{Df_{1+}.Df'_{1+}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (2.15)$$

En considérant la fonction

$$\rho_1(\mathbf{q}) \triangleq \int Df_{1+} d^3\mathbf{p} \quad (2.16)$$

qui n'est autre que la perturbation de densité totale associée à la perturbation (car l'intégration de f_{1-} sur tous les $\mathbf{p}$ s'annule), Antonov a su montrer (en utilisant l'inégalité de Schwarz) que

$$W(f_{1+}, f_{1+}) \geq \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{q} \left| \frac{d\psi}{d\rho} \right|_o \rho_1^2 - G \int d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{q}' \frac{\rho_1(\mathbf{q})\rho_1(\mathbf{q}')}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (2.17)$$

avec

$$\left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)_o = \int \frac{\partial f_o}{\partial E} d^3\mathbf{p} = - \int \left| \frac{\partial f_o}{\partial E} \right| d^3\mathbf{p} \quad (2.18)$$

En ramenant l'intégration à trois dimensions, mais surtout en portant le problème dans le contexte de l'hydrodynamique seule, Antonov a permis d'utiliser un résultat bien connu en hydrodynamique stellaire : toute étoile barotrope sphérique dont la densité décroît avec le rayon et s'annule sur le bord de l'étoile est stable contre toute perturbation radiale. Ainsi le second membre de (2.17) est positif et tout système auto-gravitant sphérique isotrope est stable contre les perturbations radiales si $f_E < 0$. Ce résultat est connu sous le nom de deuxième loi d'Antonov.

2.3.2 Stabilité contre les perturbations radiales

Pour traiter les perturbations radiales, il faut adopter une démarche différente. En partant de la forme stellaire du principe variationnel d'énergie (2.15), [Doremus *et al.* 1971] en rivalisant d'astuces ont pu au prix d'énormes efforts démontrer la stabilité dans le cas radial pour les systèmes sphériques isotropes. Cette démonstration a été considérablement simplifiée par [Sygnet *et al.* 1984] dans le cas isotrope, et par [Kandrup & Sygnet 1985] dans le cas sphérique anisotrope.

Dans ce cas anisotrope nous savons que $f_o = f_o(E, L^2)$, il est alors facile de montrer que l'opérateur H du principe général d'énergie n'est en général pas auto-adjoint (sauf dans le cas de perturbations radiales, c'est d'ailleurs ce qui a permis à Kandrup et Sygnet d'en faire usage), les méthodes d'énergies classiques (au sens [Kulsrud & Mark 1970]) cessent donc d'être applicables. Il faudra comme nous le verrons reformuler le problème.

2.4 Méthodes spectrales

La technique de résolution d'un problème de stabilité par des méthodes spectrales est basée sur un concept très simple. En effet, en supposant que la perturbation subie par le système se décompose sur une base de fonctions orthogonales adaptée à la symétrie du problème, il est formellement possible de mettre en évidence le spectre de la perturbation. En étudiant l'évolution de ce spectre au cours du temps, il est tout aussi formellement possible d'étudier la stabilité du système. Tout n'est pas pour le mieux dans le meilleur des mondes, les systèmes auto-gravitants sont en général inhomogènes dans l'espace des positions et anisotropes dans l'espace des vitesses, le spectre des perturbations qu'ils subissent s'en trouve grandement affecté, et il n'est en général pas possible de le mettre en évidence pour un système quelconque. Dans certains cas particuliers, ces méthodes ont cependant permis d'obtenir des résultats de stabilité ou d'instabilités assez importants comme nous allons le voir à présent.

2.4.1 Le cas homogène

En supposant que le système auto-gravitant que nous étudions est homogène, sa fonction de distribution d'équilibre ne dépend que de $\mathbf{p}$, on a $f_o = f_o(\mathbf{p})$. Il est alors possible de développer une éventuelle perturbation $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ engendrant un potentiel $\psi_1(\mathbf{q}, t)$, en onde plane de la forme suivante

$$f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \triangleq f_a(\mathbf{p})e^{[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t)]} \quad \text{et} \quad \psi_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \triangleq \psi_a(\mathbf{q})e^{[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t)]} \quad (2.19)$$

Le système de Vlasov Poisson perturbé (2.6) s'écrit alors

$$\begin{cases} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} - \omega)f_a - \psi_a \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} = 0 \\ -\mathbf{k}^2 \psi_a = 4\pi G \int f_a d^3 \mathbf{p} \end{cases} \quad (2.20)$$

En combinant ces deux équations, on obtient facilement

$$1 + \frac{4\pi G}{\mathbf{k}^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} - \omega} d^3 \mathbf{p} = 0 \quad (2.21)$$

Cette équation qui relie $\mathbf{k}$ et ω est une relation de dispersion. Pour un système homogène en équilibre donné (c'est-à-dire pour un $f_o(\mathbf{p})$ donné), les modes $\mathbf{k}$ qui rendront la partie imaginaire de ω négative correspondront à une instabilité,

Si nous considérons que f_o est une distribution normale,

$$f_o(\mathbf{p}) = \frac{\rho_o}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{2\sigma^2}} \quad (2.22)$$

il est alors aisé de montrer que toute perturbation dont la longueur d'onde λ est supérieure à

$$\lambda_j = \frac{2\pi}{k_j} = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_o}{\sigma^2}} \quad (2.23)$$

déstabilise le système. Ce résultat a été obtenu par [Jeans 1929], et fut complété par [Landau 1946] (voir [Ter Haar 1969]).

Ce résultat est d'une importance colossale en astrophysique car il indique que tout système homogène dont la taille caractéristique est plus grande que la longueur de Jeans λ_j s'effondre sous son propre poids, pour se stabiliser enfin lorsqu'il atteint cette taille caractéristique.

2.4.2 Le cas isotrope

Dans le cas général sphérique isotrope la fonction de distribution d'équilibre dépend de E , le système est inhomogène et il n'est pas possible d'explicitier une relation de dispersion générale. Dans certains cas particuliers, il est cependant possible de retrouver certains résultats, que les méthodes d'énergie permettent d'obtenir dans un contexte plus général.

2.4.3 Le cas anisotrope

Comme nous l'avons évoqué plus haut, dans le cas sphérique anisotrope l'opérateur H des méthodes d'énergie perd sa propriété d'hermiticité si les perturbations sont non radiales. L'approche énergétique classique n'est donc plus valable. Les principales approches concernant la stabilité mettent donc en œuvre de lourdes et pénibles méthodes spectrales qui ont tout de même permis de mettre en évidence deux résultats importants (voir [Fridman & Polyachenko 1984]) :

- Les systèmes sphériques dont toutes les composantes sont sur des trajectoires circulaires sont stables contre toutes les perturbations.
- Les systèmes sphériques dont toutes les composantes sont sur des trajectoires radiales sont instables et se déstabilisent en un ellipsoïde aplati aux pôles¹. Cette instabilité morphologique est connue sous le nom d'instabilité d'orbites radiales.

Les cas intermédiaires restent non traités par ces deux types de méthodes. Citons enfin deux approches apparemment indépendantes, [Vandervoort 1989] qui présente un critère de stabilité des systèmes sphériques utilisant des variables lagrangiennes (position, vitesse, accélération) qui n'a jusqu'à présent jamais été utilisé. Mais aussi [Goodman 1988], qui présente un critère d'instabilité des systèmes symétriques dans l'espace des vitesses.

Dans le cas général d'un système non sphérique, seuls quelques cas très particuliers ont pu être approchés par des méthodes spectrales non recommandables pour tout public (voir [Fridman & Polyachenko 1984]).

¹Les anglo-saxons diraient oblate, mais en français ce mot désigne une personne laïque qui s'agrége à un monastère sans prononcer de vœux.

Partie II

Modélisation analytique

Chapitre 3

Une vision globale de la physique non dissipative

L'objet de cette section est de présenter la physique non dissipative de manière globale. Cet objectif peut paraître surprenant dans un travail sur la stabilité des systèmes en interaction gravitationnelle, mais il est à la base de notre contribution dans ce domaine. De plus, il permet de mieux comprendre l'intérêt de cette vaste méthode que l'on appelle mécanique symplectique. Cette approche est en fait un mode de raisonnement qui cherche à entrevoir les rouages et les symétries cachées dans telle ou telle architecture apparemment complexe.

Le travail que nous allons présenter est une généralisation de différents travaux sur ce sujet ([Marsden *et al.* 1986]). Pour faciliter la compréhension des débats, nous séparerons la physique non dissipative en deux parties. Les systèmes ayant la possibilité d'évoluer suivant $6N$ degrés de liberté (nous étudierons le cas $N = 1$, les autres cas s'en déduisant par sommation), il s'agit donc de la mécanique du point. Nous nous pencherons ensuite sur les systèmes possédant une infinité de degrés de libertés, il s'agira alors de la physique statistique non dissipative.

Nous verrons comment ces deux domaines obéissent à la même équation, issue du même principe de moindre action. Nous proposons de plus la solution de cette équation sous la forme d'un développement.

3.1 Systèmes à 6 (ou $6N$) degrés de liberté

Dans ce contexte, les variables du système sont la position $\mathbf{q}$, et le moment linéaire $\mathbf{p}$. Ce dernier se réduit en général à la quantité de mouvement, mais de manière formelle, il s'agit de la quantité conjuguée de la position telle que

$$\forall i \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_i} = 0 \quad (3.1)$$

$\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$ sont des vecteurs possédant trois composantes variables.

Le fondement de notre analyse repose sur la possibilité d'associer un générateur $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, à toute transformation physique qu'est susceptible de recevoir le système.

Nous allons tout d'abord définir une nouvelle quantité fondamentale.

Définition 1 On appelle *Méta-Action* d'un système, la fonction $\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ telle que

$$\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \triangleq \int \left(\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - g \right) d\lambda \quad (3.2)$$

où la fonction $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est appelée le *générateur* de la λ -transformation subie par le système.

Pour fixer les idées prenons par exemple le cas du mouvement. Il est bien connu que le mouvement est une transformation temporelle engendrée par l'énergie. Nous avons donc $g = E$ et $\lambda = t$. La Méta-Action n'est autre que l'action habituelle, solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, obéissant au principe de moindre action.

Dans le cadre du mouvement, E est indépendant du temps, cela signifie que l'énergie est conservée au cours du mouvement ou bien que le système est isolé. De la même manière, nous supposons que g est une grandeur conservée dans la transformation, et donc explicitement indépendante de λ .

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous allons rappeler la définition du crochet de Poisson (cf. annexe C) qui pour deux fonctions s'écrit

$$\forall x(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda), y(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda), \quad \mathcal{P}_3[x, y] \triangleq \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial p_i} - \frac{\partial x}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_i} \right) \quad (3.3)$$

Ce préambule posé, nous sommes à présent en mesure d'énoncer la première loi.

Théorème 2 *Lors d'une λ -transformation, engendrée par g , l'évolution de $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$ est donnée par la résolution de l'équation*

$$\forall k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad , \quad \mathcal{L}_3[k, \sigma](\mathbf{q}, \mathbf{p}) \triangleq \int \mathcal{P}_3[k, \sigma] d\lambda = 0 \quad (3.4)$$

L'opérateur $\mathcal{L}_3$ ainsi défini possède toutes les propriétés d'un crochet de Lie (cf. annexe C). Ce théorème a été démontré dans le cas particulier du mouvement par ([Marsden *et al.* 1986]).

La fonction k étant quelconque, (3.4) implique deux relations à satisfaire simultanément :

- $\forall i \quad \partial \sigma / \partial p_i = 0$

$$\begin{aligned} \forall i \quad \frac{\partial \sigma}{\partial p_i} = 0 &\iff \frac{\partial}{\partial p_i} \int \left(\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - g \right) d\lambda = 0 \\ &\iff \int \left(\frac{dq_i}{d\lambda} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) d\lambda = 0. \end{aligned}$$

$\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$ étant explicitement indépendants et le produit $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ s'annulant au bord du système, une intégration par partie donne alors

$$\int \left(\frac{dq_i}{d\lambda} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) d\lambda = 0$$

relation équivalente à

$$\frac{dq_i}{d\lambda} = \frac{\partial g}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \iff \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} = \mathcal{P}_3[\mathbf{q}, g] \quad (3.5)$$

qui n'est autre que l'équation d'évolution de $\mathbf{q}$ lors de la transformation engendrée par g .

- $\forall i \quad \partial \sigma / \partial q_i = 0$

$$\begin{aligned} \forall i \quad \frac{\partial \sigma}{\partial q_i} = 0 &\iff \frac{\partial}{\partial q_i} \int \left(\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - g \right) d\lambda = 0 \\ &\iff \int \left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) d\lambda = 0 \end{aligned}$$

une nouvelle intégration par partie donne à présent

$$\frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial g}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \iff \frac{d\mathbf{p}}{d\lambda} = \mathcal{P}_3[\mathbf{p}, g] \quad (3.6)$$

équation d'évolution de $\mathbf{p}$ lors de la transformation engendrée par g . ■

Nous remarquons directement que le cas du mouvement $g = E$ et $\lambda = t$, nous permet de retrouver les équations de Hamilton.

Plus généralement, nous sommes en mesure d'obtenir un résultat global, en effet, pour toute fonction $k(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ on peut écrire (le fait que k ne soit pas explicitement dépendante de λ est ici fondamental)

$$\frac{dk}{d\lambda} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial k}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\lambda} + \frac{\partial k}{\partial p_i} \frac{dp_i}{d\lambda} \right) \quad (3.7)$$

Ainsi, en utilisant les premières équations de (3.5) et (3.6), nous avons

$$\frac{dk}{d\lambda} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial k}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} + \frac{\partial k}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \right) \quad (3.8)$$

nous obtenons l'équation d'évolution pour k

$$\frac{dk}{d\lambda} = \mathcal{P}_3[k, g] \quad (3.9)$$

Nous pouvons résoudre cette équation quels que soient soit k , g et λ car il s'agit tout simplement d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont la solution s'écrit (car g est aussi indépendant de λ)

$$k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = e^{\lambda \mathcal{P}_3[\cdot, g]} k(\mathbf{q}_{\lambda=\lambda_o}, \mathbf{p}_{\lambda=\lambda_o}) \quad (3.10)$$

$$k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = k(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o) - \lambda \mathcal{P}_3[g, k] |_{\lambda=\lambda_o} + \frac{\lambda^2}{2} \mathcal{P}_3[g, \mathcal{P}_3[g, k]] |_{\lambda=\lambda_o} + \dots \quad (3.11)$$

Comme exemple d'application trivial mais convainquant, nous pouvons essayer cette technique pour résoudre le redoutable problème du mouvement d'un oscillateur harmonique libre à une dimension.

Nous étudions le mouvement donc $\lambda = t$ et $g = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$, en utilisant (3.11) avec $k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = |\mathbf{q}| \triangleq q$ nous avons

$$\begin{aligned} q(t) = q(t_o) - t \mathcal{P}_3[E, q] |_{t=t_o} + \frac{t^2}{2} \mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, q]] |_{t=t_o} \\ - \frac{t^3}{3!} \mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, q]]] |_{t=t_o} + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Chaque crochet se calcule aisément

$$\mathcal{P}_3[E, q] = \frac{\partial E}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial q} = -\frac{p}{m}$$

$$\mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, q]] = \mathcal{P}_3[E, -\frac{p}{m}] = -\frac{q\omega^2}{m}$$

$$\mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, q]]] = \mathcal{P}_3[E, -\frac{q\omega^2}{m}] = \frac{p\omega^2}{m^2}$$

et ainsi de suite... Il est même possible d'obtenir une relation de récurrence. En injectant ces résultats dans (3.12), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 q(t) &= q_o + \frac{p_o}{m}t - \frac{1}{2}\frac{q_o\omega^2}{m}t^2 - \frac{1}{3!}\frac{p_o\omega^2}{m^2}t^3 + \frac{1}{4!}\frac{q_o\omega^4}{m^2}t^4 + \frac{1}{5!}\frac{p_o\omega^4}{m^2}t^5 + \dots \\
 &= q_o \left(1 - \frac{(\theta t)^2}{2!} + \frac{(\theta t)^4}{4!} + \dots\right) + \frac{p_o}{m\theta} \left(\theta t - \frac{(\theta t)^3}{3!} + \frac{(\theta t)^5}{5!} + \dots\right) \\
 &= q_o \cos \theta t + \frac{p_o}{m\theta} \sin \theta t \quad \text{avec } \theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{m}}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

qui est fort heureusement, l'équation du mouvement d'un point mobile de masse m irrémédiablement fixé à un ressort. La simplicité de ce problème est bien connue. Il est d'ailleurs préférable de le résoudre par des méthodes plus classiques, les équations de Hamilton permettant une approche plus directe. Si à présent nous désirons connaître l'évolution temporelle du rapport q/p sachant que si $t = 0$, $q = 0$ et $p = p_o$, la méthodes classiques (Hamilton) restent valables mais nécessitent la résolution de deux équations, une pour $\mathbf{q}$ et une pour $\mathbf{p}$. Notre approche est plus directe.

$$\begin{aligned}
 \frac{q}{p}(t) &= \frac{q}{p}(0) - \mathcal{P}_3[E, \frac{q}{p}]|_{t=0} t + \frac{1}{2}\mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, \frac{q}{p}]]|_{t=0} t^2 \\
 &\quad - \frac{1}{3!}\mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, \frac{q}{p}]]]|_{t=0} t^3 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

les calculs sont toujours aussi simples

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_3[E, \frac{q}{p}] &= -\frac{q^2\omega^2}{p^2} - \frac{1}{m} \\
 \mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, \frac{q}{p}]] &= \frac{2q^3\omega^2}{p^3} + \frac{2q\omega^2}{mp} \\
 \mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, \mathcal{P}_3[E, q]]] &= -\frac{6q^4\omega^4}{p^4} - \frac{4q^2\omega^4}{mp^2} - \frac{6q^2\omega^2}{mp^2} - \frac{2\omega^2}{m^2}
 \end{aligned}$$

Le fait que $q_o = 0$ simplifie grandement le résultat, en conservant $\theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{m}}$ il vient

$$\begin{aligned}
 \frac{q}{p}(t) &= 0 + \frac{t}{m} + \frac{0}{2!}t^2 + \frac{2\omega^2}{3!m^2}t^3 + \dots \\
 &= \frac{1}{\theta m} \left(\theta t + \frac{1}{3}\theta^3 t^3 + \dots\right) = \frac{\tan \theta t}{\theta m}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Toute fonction de $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$ peut être ainsi traitée sans passer par les équations du mouvement qui sont dans certains cas compliquées et qui peuvent donc rendre le problème plus difficile qu'il ne l'est en réalité.

De plus, dans certaines études le développement opportun ne se fait pas en fonction du temps, il est alors délicat d'y apporter une réponse par des méthodes classiques. Le meilleur exemple pourrait être la résolution du problème de la stabilité d'un système. La quasi totalité des méthodes utilisées ont pour point de départ les équations d'évolution dynamique du système (opérateurs de petits mouvement, opérateurs de dispersion sont directement issus de la dynamique). Pourquoi ne pas écrire directement une équation portant sur LA quantité reliée à

la stabilité ? C'est ce que nous aurons l'occasion de regarder un peu plus loin.

Enfin, nous pouvons aussi utiliser ce genre de méthodes afin de traiter des problèmes plus généraux, comme celui de l'intégrabilité des systèmes dynamiques (en étudiant la convergence de la série que nous proposons), ou celui de la recherche de grandeurs conservées lors d'une évolution.

3.2 Systèmes possédant une infinité de degrés de liberté

L'étude précédente a été menée dans le cadre d'un système constitué d'une seule particule ($N = 1$), néanmoins la généralisation à un nombre de particules quelconques est tout à fait directe. Etudions à présent le cas où $N \longrightarrow \infty$, c'est-à-dire le cas de la physique statistique.

Dans cette limite continue, et comme nous l'avons précisé lors de notre introduction, un système dynamique n'est plus décrit par la donnée d'une collection finie de $\{\mathbf{q}_\alpha(\lambda), \mathbf{p}_\alpha(\lambda)\}$ avec $1 \geq \alpha \geq 0$, mais à travers une fonction de distribution $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda)$ dans l'espace des phases.

Nous traitons ici un problème non dissipatif dans le sens introduit en annexe A, c'est-à-dire que le coefficient de diffusion B_{ij} de l'équation de Focker-Planck est considéré nul.

Remarquons enfin que la variable est à présent f elle-même, et que, contrairement à $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$, cette dernière ne possède pas de quantité conjuguée : Il s'agit donc d'un problème non-local.

Dans ce contexte, nous pouvons définir une Méta-Action.

Définition 2 *On appelle Méta-Action d'un système défini par sa fonction de distribution dans l'espace des phases, la fonctionnelle $\Sigma[f]$ telle que*

$$\Sigma[f] \triangleq \int f.g \, d^3\mathbf{q} \, d^3\mathbf{p} \, d\lambda. \quad (3.16)$$

Comme f est une fonction de la variable $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda\}$, Σ est une fonctionnelle (voir annexe B) définie sur l'espace des fonctions de la variable $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda\}$. Sa dérivée fonctionnelle dans cet espace est d'après (3.16) : $\delta\Sigma/\delta f = g$. Tant que le générateur g est indépendant de λ , il est possible de construire une autre fonctionnelle G , définie sur l'espace des fonctions de la variable $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ à λ constant par

$$G[f] \triangleq \int f.g. \, d^3\mathbf{q} \, d^3\mathbf{p}, \quad (3.17)$$

dans cet espace la dérivée fonctionnelle de G est encore g . Ainsi donc, suivant l'élément de volume ($d^3\mathbf{q} \, d^3\mathbf{p} \, d\lambda$ ou $d^3\mathbf{q} \, d^3\mathbf{p}$) de l'intégration que nous aurons à effectuer, nous utiliserons soit $g = \delta\Sigma/\delta f$, soit $g = \delta G/\delta f$.

Le crochet de Poisson doit être à présent aménagé pour prendre en compte la "quatrième" dimension introduite par f . Nous prendrons pour notation

$$\forall x(\mathbf{q}, \mathbf{p}), y(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad \mathcal{P}_4[x, y] \triangleq \mathcal{P}_3[x, y] + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial g} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial g} \quad (3.18)$$

Comme nous l'avons fait pour les systèmes possédant un nombre fini de degrés de liberté, nous pouvons à présent formuler un principe de moindre action généralisé.

Théorème 3 *Lors d'une λ -transformation, engendrée par g , l'évolution de f est donnée par la résolution de l'équation*

$$\forall K[f] \quad \mathcal{L}_4[K, \Sigma](f) \triangleq \int f.\mathcal{P}_4\left[\frac{\delta K}{\delta f}, \frac{\delta \Sigma}{\delta f}\right] d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} d\lambda = 0 \quad (3.19)$$

La démonstration de ce théorème ne présente aucune difficulté, en effet, nous avons ici $g = \delta\Sigma/\delta f$ il vient donc

$$\forall K[f] \quad \mathcal{L}_4[K, \Sigma](f) = 0 \iff \int f \mathcal{P}_4\left[\frac{\delta K}{\delta f}, g\right] d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} d\lambda = 0 \quad (3.20)$$

une intégration par partie (e.g.[Morrison 1980],[Marsden & Weinstein 1982]) donne alors

$$\int \frac{\delta K}{\delta f} \cdot \mathcal{P}_4[g, f] d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} d\lambda = 0 \quad (3.21)$$

K étant une fonctionnelle quelconque, cette dernière relation équivaut à $\mathcal{P}_4[g, f] = 0$ qui s'écrit

$$\mathcal{P}_4[g, f] = \mathcal{P}_3[g, f] + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial g} - \frac{\partial g}{\partial g} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.22)$$

mais comme nous avons choisi g explicitement indépendant de λ , (3.22) équivaut à

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \mathcal{P}_3[g, f] \quad (3.23)$$

cette équation est exactement l'équation d'évolution de la fonction de distribution d'un système non dissipatif décrit par la physique statistique. Dans le cas particulier du mouvement elle n'est autre que l'équation de Boltzmann sans collisions que nous avons déjà rencontrée sous cette forme (voir Chapitre 1, eq.(1.37)).

Cette équation peut aussi se généraliser au cas d'une fonctionnelle quelconque de f , en effet

$$\forall f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda) \quad , \quad \forall K[f] \quad \frac{\partial K[f]}{\partial \lambda} \triangleq \int \frac{\delta K}{\delta f} \frac{\partial f}{\partial \lambda} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} \quad (3.24)$$

En injectant ce résultat dans (3.23) on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} K[f] \triangleq \int \frac{\delta K}{\delta f} \mathcal{P}_3[g, f] d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} \quad (3.25)$$

l'intégration portant ici uniquement sur $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$, nous utilisons $g = \delta G/\delta f$, une intégration par partie donne alors

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} K[f] = \int f \mathcal{P}_3\left[\frac{\delta K}{\delta f}, \frac{\delta G}{\delta f}\right] d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} \triangleq \mathcal{M}_3[K, G](f) \quad (3.26)$$

Comme dans le cas N -dimensionnel, la solution de cette équation est évidente car g est explicitement indépendant de λ

$$K[f] = K[f_o] - \lambda \mathcal{M}_3[G, K] \big|_{\lambda=\lambda_o} + \frac{\lambda^2}{2} \mathcal{M}_3[G, \mathcal{M}_3[G, K]] \big|_{\lambda=\lambda_o} + \dots \quad (3.27)$$

Dans le cas particulier du mouvement, le générateur fonctionnel $G[f]$ est le Hamiltonien $H[f]$, représentant l'énergie totale du système, et nous obtenons pour tout F

$$K[f] = K[f_o] - t \mathcal{M}_3[H, K] \big|_{t=t_o} + \frac{t^2}{2} \mathcal{M}_3[H, \mathcal{M}_3[H, K]] \big|_{t=t_o} + \dots \quad (3.28)$$

Nous pouvons utiliser ce dernier résultat dans de nombreux problèmes car en physique statistique toutes les grandeurs observables sont des fonctionnelles de la fonction de distribution (moments statistiques).

Nous pouvons donc 'résumer' le formalisme de la physique non dissipative dans un tableau

<u>N degrés de liberté</u>	
Variables : $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda$	
Meta-Action : $s(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \int (\mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - g) d\lambda$	
Evolution	$\left\{ \begin{array}{l} \forall k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad L_3[k, s](\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0 \\ \Leftrightarrow \\ \frac{dk}{d\lambda} = P_3[k, g] \end{array} \right.$
Solution : $k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = e^{\lambda P_3[\cdot, g]} k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) _{\lambda=\lambda_0}$	
<u>Infinité de degrés de liberté</u>	
Variable : $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda)$	
Meta-Action : $\mathcal{S}[f] := \int f \cdot g \cdot d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} d\lambda$	
Evolution	$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{K}[f] \quad L_4[\mathcal{F}, \mathcal{S}]_{(f)} = 0 \\ \Leftrightarrow \\ \frac{d\mathcal{K}}{d\lambda} = M_3[\mathcal{K}, \mathcal{G}] \end{array} \right.$
Solution : $\mathcal{K}[f] = e^{\lambda M_3[\cdot, \mathcal{G}]} \mathcal{K}[f] _{\lambda=\lambda_0}$	

3.3 Exemple fondamental : Le système Vlasov-Poisson

Nous avons vu dans quelle mesure le système de Vlasov-Poisson pouvait rendre compte de l'évolution dynamique d'un système de particules en interaction gravitationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f - \nabla_{\mathbf{q}} \psi \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0 \\ \psi(\mathbf{q}, t) = -G \int \frac{f(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d^3\mathbf{q}' d^3\mathbf{p}' \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Ces deux équations sont de nature fort différente. L'équation de Vlasov, nous permet de connaître l'évolution dynamique de la fonction de distribution, il s'agit d'une équation de conservation. L'équation de Poisson nous renseigne sur la nature de l'interaction entre les corps, il s'agit d'une équation de champ. Notre formulation des équations de la physique non dissipative

ne va agir que sur l'équation d'évolution, l'équation de champ ne sera utile que pour calculer les termes des développements que nous obtiendrons.

Les méthodes classiques d'étude de la stabilité de tels systèmes sont fondées sur des propriétés dynamiques (Croissance de modes, Opérateur des petits mouvements, etc.), nous proposons ici une méthode d'investigation directe de la stabilité.

Nous avons, dans la section précédente, vu de quelle façon il était possible d'obtenir le développement d'une grandeur quelconque en fonction d'une transformation définie. Le mouvement était dans ces conditions réduit au cas particulier d'une transformation engendrée par l'énergie. Nous savons (e.g. [Arnold 1978]) que la stabilité linéaire d'un système donné face à une perturbation est reliée au signe de la variation d'énergie engendrée par cette perturbation.

Pour étudier la stabilité de notre système, il suffit de se placer dans un cas particulier du développement (3.27). En choisissant pour F , le hamiltonien H du système, pour g le générateur de la perturbation reçue par le système, et pour f_o , la fonction de distribution du système dont nous voulons étudier la stabilité, nous obtenons

$$H[f] = H[f_o] + H^1[f_o] + H^2[f_o] + \dots \quad (3.30)$$

Terme du premier ordre

Si f_o est un état stationnaire, le terme de premier ordre doit être nul, mais le calcul standard pour le voir est non trivial (hydrodynamique par exemple) ici nous avons ($d\Gamma \triangleq d^3\mathbf{q}d^3\mathbf{q}$):

$$\begin{aligned} H^1[f_o] &= -\mathcal{M}_3[G, H](f_o) = -\int f_o \mathcal{P}_3\left[\frac{\delta G}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f}\right] d\Gamma \\ &= \int g \mathcal{P}_3[E, f_o] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.31)$$

qui est évidemment nul car $\mathcal{P}_3[E, f_o] = 0$ si f_o est stationnaire.

Terme du second ordre

$$H^2[f_o] = \frac{1}{2} \mathcal{M}_3[G, \mathcal{M}_3[G, H]] = \int f_o \mathcal{P}_3\left[g, \frac{\delta}{\delta f} \mathcal{M}_3[G, H](f_o)\right] d\Gamma \quad (3.32)$$

Nous devons donc calculer

$$K[f] \triangleq \frac{\delta}{\delta f} \int f \mathcal{P}_3\left[\frac{\delta G}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f}\right] d\Gamma \quad (3.33)$$

On a

$$dK[f] = \int df \mathcal{P}_3\left[\frac{\delta G}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f}\right] d\Gamma + \int f \mathcal{P}_3\left[d\frac{\delta G}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f}\right] d\Gamma + \int f \mathcal{P}_3\left[\frac{\delta G}{\delta f}, d\frac{\delta H}{\delta f}\right] d\Gamma \quad (3.34)$$

la définition de la dérivée fonctionnelle (cf. annexe B), permet alors d'obtenir

$$dK[f] = \int df \mathcal{P}_3\left[\frac{\delta G}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f}\right] d\Gamma - \int f \mathcal{P}_3\left[\frac{\delta H}{\delta f}, \frac{\delta^2 G}{\delta f \delta f'}\right] d\Gamma + \int f \mathcal{P}_3\left[\frac{\delta G}{\delta f}, \frac{\delta^2 H}{\delta f \delta f'}\right] d\Gamma \quad (3.35)$$

une intégration par partie nous permet donc de finir ce calcul

$$\frac{\delta K}{\delta f} = \mathcal{P}_3[g, E] - \int g \mathcal{P}_3\left[f, \frac{\delta^2 H}{\delta f \delta f'}\right] d\Gamma' \quad (3.36)$$

Comme prévu, nous avons besoin de l'équation de Poisson pour calculer $\delta^2 H / \delta f \delta f'$, il vient (cf. annexe B)

$$\frac{\delta^2 H}{\delta f \delta f'} = - \frac{\delta(f - f')}{|q - q'|} \quad (3.37)$$

En injectant ces résultats dans (3.32), nous obtenons finalement pour la variation d'énergie à l'ordre 2

$$H^2[f_0] = \frac{1}{2} \int f_0 \mathcal{P}_3[g, \mathcal{P}_3[g, E]] d\Gamma - \frac{1}{2} \iint f_0 \mathcal{P}_3[g, \frac{\mathcal{P}_3[g', f'_0]}{|q - q'|}] d\Gamma d\Gamma' \quad (3.38)$$

une dernière intégration par partie donne

$$H^2[f_0] = -\frac{1}{2} \int \mathcal{P}_3[g, E] \mathcal{P}_3[g, f_0] d\Gamma - \frac{1}{2} \iint \frac{\mathcal{P}_3[g, f_0] \mathcal{P}_3[g', f'_0]}{|q - q'|} d\Gamma d\Gamma' \quad (3.39)$$

Nous sommes à présent parvenus à nos fins, nous avons le moyen d'étudier la stabilité d'un système gravitationnel non collisionnel non homogène et non isotrope grâce au Théorème d'Arnold :

Théorème 4 *Pour qu'un système soit linéairement stable, il suffit que la variation seconde de son énergie lors d'une perturbation soit positive.*

Dans notre cas, l'étude de la stabilité sera donc celle du signe de $H^2[f_0]$, en se donnant un état d'équilibre défini par f_0 et en le modifiant avec des perturbations engendrées par g .

Toutefois il ne s'agit là que d'une condition nécessaire et non suffisante de stabilité, nous n'avons donc pas de critère d'instabilité. Si $H^2[f_0]$ est négatif nous ne pouvons rien conclure.

Malgré tout il faudra nous en contenter car comme nous l'avons vu, il n'existe pas d'autre méthode globale d'étude de tels systèmes non homogènes et non isotropes.

Sur un plan technique enfin, nous pouvons constater que la formulation même de ce critère possède un nombre certain d'avantages.

En effet, une propriété simple du crochet de Poisson, permet de le décomposer suivant les variables des fonctions sur lesquelles il agit.

En d'autres termes, compte-tenu du théorème de Jeans sur la forme de la Fonction de Distribution d'équilibre, nous aurons

$$\text{si } f_0 = f(E, \dots I_i, \dots) \text{ alors } [g, f_0] = f_E[g, E] + \sum_i f_{I_i}[g, I_i] \quad (3.40)$$

où les I_i sont autant d'intégrales premières isolantes qu'en compte le système. Nous avons dans cette relation utilisé une notation condensée du crochet de Poisson, $\mathcal{P}[,] = [,]$, nous recommandons cet abus tant qu'il n'y aura pas d'ambiguïtés.

Nous présentons dans le papier 2, une utilisation dynamique de cette méthode symplectique dans le cadre de l'instabilité gravitationnelle en cosmologie newtonienne.

Chapitre 4

Unification des résultats classiques

Nous allons à présent voir comment le critère précédemment énoncé permet de généraliser la totalité des résultats classiques que différents auteurs ont pu obtenir dans un passé plus ou moins proche.

4.1 Les travaux de pionnier de Victor Antonov

Dans le cas particulier isotrope, $f_0 = f_0(E)$, nous retrouvons le critère de stabilité du premier chapitre, en effet, on a

$$[g, f_0] = f_E[g, E] = f_E Dg \quad (4.1)$$

où D est l'opérateur de dérivée Lagrangienne utilisé au premier chapitre, ainsi en posant $h = f_E Dg$ et en se restreignant à la partie anti-symétrique de h , on retrouve bien le critère d'Antonov des systèmes isotropes

$$H^2[f_0] = W(h, h) = -\frac{1}{2} \int \frac{h^2}{f_E} d\Gamma - \frac{1}{2} \int d\Gamma \int d\Gamma' \frac{h \cdot h'}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (4.2)$$

qui vient donc reconforter celui qui, dans un élan d'antisymplectisme primaire, aurait pu faire montre de zététisme¹ quant aux allégories utilisées dans ce chapitre jusqu'à présent.

4.2 Le critère en variable Angle action de Jeremy Goodman

En suivant la méthode introduite par ([Larsson 1991]) nous pouvons définir pour toute fonction ψ , l'opérateur H tel que

$$H\psi \triangleq -i[f, E] - i\phi(\psi) \quad (4.3)$$

avec

$$\phi(\psi) \triangleq \frac{1}{4\pi} \int \frac{[f_o(\mathbf{q}', \mathbf{p}'), \psi(\mathbf{q}', \mathbf{p}')] }{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma' \quad (4.4)$$

f_o étant la fonction de distribution du système, l'équation d'évolution temporelle en ψ est donnée par

$$H\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (4.5)$$

¹Le zététisme est l'art du doute tel qu'il était pratiqué chez les grecs

Définissons à présent le produit scalaire de deux fonctions ψ_1 et ψ_2 comme

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle \triangleq i \int [\psi_1^*, \psi_2] \cdot f_o d\Gamma \quad (4.6)$$

Dans ces conditions, H est hermitien, c'est-à-dire que $\langle \psi_1, H\psi_2 \rangle = \langle H\psi_1, \psi_2 \rangle$, le seul petit inconvénient, mis en évidence par ([Larsson 1991]), réside dans le fait que ce produit scalaire (4.6) est indéfini. Ainsi donc, les valeurs propres de H ne sont pas nécessairement réelles, nous pouvons seulement affirmer (e.g. [Azizov & Iokhvidov 1989]) que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre, alors $-\lambda, \lambda^*$ and $-\lambda^*$ le sont aussi.

En utilisant (4.5), nous pouvons obtenir l'équation d'évolution du générateur des perturbations $\tilde{g}$, abondamment utilisé précédemment

$$is\tilde{g} = i[\tilde{g}, E] + i\phi(\tilde{g}) \quad (4.7)$$

équation dans laquelle nous avons supposé que $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \tilde{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p})e^{st}$, le paramètre s étant en général un nombre complexe.

Il faut maintenant trouver le moyen de calculer de manière efficace les crochets de Poisson dans ce contexte. La principale astuce introduite dans le formalisme de [Goodman 1988]) consiste à utiliser les variables Angle-Action pour développer les fonctions dont nous aurons à calculer les crochets. Ceci est possible lorsque le système est intégrable, ce que nous supposons avec Goodmann. Dans ces conditions nous avons

$$\Theta(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad \text{et} \quad I(\iota_1, \iota_2, \iota_3) \quad (4.8)$$

$$E = E(I), \quad f_o = f_o(I) \quad (4.9)$$

$$[X, Y] = \frac{\partial X}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial Y}{\partial I} - \frac{\partial X}{\partial I} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \Theta} \quad (4.10)$$

Une propriété fondamentale de ces variables est contenue dans le fait qu'elles se séparent dans une transformation de Fourier, ainsi

$$X(\theta, I) = \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{+\infty} X_{\mathbf{n}}(I)e^{i\mathbf{n} \cdot \Theta} \quad (4.11)$$

où $\mathbf{n}$ est un tri-vecteur à valeur entières. Ainsi donc le crochet de Poisson entre E ou f_o et une fonction quelconque X s'écrit

$$[X, E] = \sum_{\mathbf{n}} i\mathbf{n} \cdot \frac{\partial E}{\partial I} X_{\mathbf{n}}(I)e^{i\mathbf{n} \cdot \Theta} \quad (4.12)$$

En utilisant cette décomposition pour un mode $\mathbf{n}$ dans (4.7), et notant Ω pour $\partial E / \partial I$, il vient

$$\tilde{g}_{\mathbf{n}} = \frac{\tilde{\phi}_{\mathbf{n}}}{s + i(\mathbf{n} \cdot \Omega)} \quad (4.13)$$

dans cette relation $\tilde{\phi}_{\mathbf{n}} = \tilde{\phi}_{\mathbf{n}}(I)$ est tel que

$$\phi(\tilde{g}) \triangleq \sum_{\mathbf{n}} \tilde{\phi}_{\mathbf{n}}(I)e^{i\mathbf{n} \cdot \Theta} \quad (4.14)$$

Il ne reste plus qu'à injecter ces notations et résultats dans le critère de stabilité symplectique (3.39) obtenu par notre méthode pour avoir

$$H^{(2)}[f_o] = -\frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{\mathbf{n}} \int dI(\mathbf{n}, \Omega) (\mathbf{n} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{I}}) |\tilde{g}_{\mathbf{n}}|^2 - i \frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{\mathbf{n}} \int dI(\mathbf{n}, \Omega) \tilde{g}_{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\phi}_{\mathbf{n}}^* \quad (4.15)$$

car $d\Theta dI = d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p}$, le facteur $(2\pi)^3$ provenant de l'intégration sur Θ . s est un nombre complexe, ainsi $s = s_r + is_i$ et l'injection de (4.13) dans (4.15) donne finalement

$$H^{(2)}[f_o] = -\frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{\mathbf{n}} \int dI \frac{(\mathbf{n}, \Omega) (\mathbf{n} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{I}}) |\tilde{\phi}_{\mathbf{n}}|^2}{s_r^2 + [s_i + (\mathbf{n}, \Omega)]^2} - i \frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{\mathbf{n}} \int dI \frac{(\mathbf{n}, \Omega) |\tilde{\phi}_{\mathbf{n}}^*|^2}{s_r + i[s_i + (\mathbf{n}, \Omega)]} \quad (4.16)$$

qui est exactement le résultat obtenu par ([Goodman 1988]), pour la partie cinétique tout au moins car la partie potentielle n'est pas explicitée dans son calcul.

4.3 Le critère en variables Lagrangiennes de Paul Vandervoort

Plaçons-nous comme le souhaite [Vandervoort 1989] en variables lagrangiennes $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$. Les variations de ces variables correspondant à une perturbation du système de générateur g s'écrivent

$$\delta \mathbf{q} = [\mathbf{q}, g] = \nabla_{\mathbf{p}} g \quad (4.17)$$

$$\delta \mathbf{p} = [\mathbf{p}, g] = -\nabla_{\mathbf{q}} g \quad (4.18)$$

Nous allons à présent écrire la variation seconde d'énergie que nous avons exhibé au chapitre précédent en faisant intervenir $\delta \mathbf{q}$ et $\delta \mathbf{p}$.

Tous calculs effectués, nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta^2 H_p &= -\frac{G}{2} \int \frac{[g, f_o][g, f_o']}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma d\Gamma' \\ &= \frac{G}{2} \int f_o \delta \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \left(\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \int f_o' \frac{\delta \mathbf{q}'}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma' \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.19)$$

pour la partie potentielle, et

$$\begin{aligned} \delta^2 H_c &= -\frac{1}{2} \int [g, f_o][g, E] d\Gamma \\ &= \frac{1}{2} \int f_o \left[(\delta \mathbf{q})^2 - \delta \mathbf{p} \cdot D \Delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \nabla_{\mathbf{q}} \psi \cdot \delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{q} \cdot D \delta \mathbf{p} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.20)$$

pour la partie cinétique (D est l'opérateur de dérivée Lagrangienne dont nous avons déjà parlé dans la première partie). En introduisant l'opérateur représentant la variation d'accélération (e.g. [Vandervoort 1989]),

$$\Delta \mathbf{a}(\cdot) = \nabla_{\mathbf{q}} \nabla_{\mathbf{q}} \psi(\cdot) + \frac{G}{2} \nabla_{\mathbf{q}} \left(\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \int f_o' \frac{(\cdot)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma' \right) \quad (4.21)$$

la variation d'énergie totale $\delta^2 H = \delta^2 H_c + \delta^2 H_p$ s'écrit matriciellement

$$\delta^2 H = -\frac{1}{2} \int d\Gamma f_o [-\delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{q}] \begin{bmatrix} -D & 1 \\ \Delta \mathbf{a}(\cdot) & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Il ne reste plus qu'à utiliser les notations de [Vandervoort 1989]

$$\nu = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} -D & 1 \\ \Delta \mathbf{a}(\cdot) & -D \end{bmatrix} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

pour voir que le paramètre $E = -\frac{1}{2} < S\nu \mid P\nu >$ de [Vandervoort 1989] n'est autre que la variation seconde d'énergie $\delta^2 H$, ainsi donc comme pour Antonov et Goodman, le critère de Vandervoort, est un cas particulier (écrit en variables lagrangiennes) du critère issu de la mécanique symplectique.

4.4 L'instabilité d'orbite radiale

Un grand nombre d'approches, principalement numériques, ont permis de mettre en évidence l'existence d'une instabilité, dite d'orbites radiales, dans l'évolution des systèmes sphériques anisotropes. Nous allons tenter de montrer, sur le plan purement analytique, dans quelle mesure le critère de stabilité que nous avons énoncé permet de statuer sur ce problème.

La fonction de distribution d'un système dont toutes les composantes sont sur des trajectoires radiales s'écrit (e.g. [Fridman & Polyachenko 1984])

$$f_o(E, l^2) = \phi(E) \delta(L^2) \quad (4.24)$$

Dans cette relation ϕ est une fonction intégrable quelconque et δ représente la distribution de Dirac.

Les perturbations linéaires engendrées par g subies par un tel système s'écrivent donc

$$[g, f_0] = \phi_E(E) \delta(L^2) [g, E] + \phi(E) \delta'(L^2) [g, L^2] \quad (4.25)$$

Il est bien connu que pour tout x

$$\delta(x) = -\frac{1}{x} \delta'(x) \quad (4.26)$$

en reportant (4.26) dans (4.25) le critère de stabilité (3.39) devient

$$\begin{aligned} H^{(2)}[f_o] = & -\frac{1}{2} \int \left\{ \phi_E \delta(L^2) [g, E]^2 - \frac{f_o[g, E][g, L^2]}{L^2} \right\} d\Gamma \\ & -\frac{1}{2} \int \left\{ \phi_E \delta(L^2) \phi_{E'} \delta(L'^2) [g, E][g', E'] - \frac{\phi_E \delta(L^2) f'_o[g, E][g', L'^2]}{L'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \right\} d\Gamma d\Gamma' \\ & -\frac{1}{2} \int \left\{ \frac{f_o \phi_{E'} \delta(L'^2) [g, L^2][g', E']}{L^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} + \frac{f_o[g, L^2] f'_o[g', L'^2]}{L^2 L'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \right\} d\Gamma d\Gamma' \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$(4.28)$$

la présence de la distribution de Dirac δ dans cette relation impose l'évaluation de $H^{(2)}$ en $L^2 = L'^2 = 0$, le terme en L^4 sera donc dominant et cette longue relation s'éclaircit en

$$H^{(2)}[f_o] = -\frac{1}{2} \int d\Gamma \int d\Gamma' \frac{1}{L^2 L'^2} \frac{f_o[g, L^2] f'_o[g', L'^2]}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (4.29)$$

qui peut encore se simplifier, en posant

$$\mu(E, L^2) \triangleq \int \frac{f_o[g, L^2]}{L^2} d^3 \mathbf{p} \quad (4.30)$$

nous avons finalement

$$H^{(2)}[f_o] = \frac{1}{2} \int \mu \cdot \nabla^{-2}(\mu) d^3 \mathbf{q} \quad (4.31)$$

L'opérateur ∇^{-2} étant défini négatif, la variation d'énergie subie par le système est négative. De plus, comme le montre (4.31), la variation d'énergie est essentiellement une variation d'énergie potentielle.

Tous les symptômes sont donc présents pour diagnostiquer une instabilité. Toutefois, le critère d'Arnold n'est pas un critère d'instabilité, nous ne pouvons rien affirmer lorsque nous sommes en présence d'une variation d'énergie négative. Malgré tout, si le système est en mesure de dissiper cette énergie, il ne s'en privera pas et développera une instabilité dite séculaire [Kandrup 1991a].

Ce petit constat d'échec, concernant la non-prédictabilité de notre critère est à la base de nos investigations numériques et sera par ailleurs effacé par ces dernières.

Chapitre 5

Stabilité des systèmes inhomogènes et anisotropes

Comme souvent dans l'étude de la stabilité d'un système nous devons étudier le signe de quantités dépendant de fonctions.

Ce problème n'est pas nouveau en physique, c'est pourquoi depuis fort longtemps les mathématiciens ont tenté de le résoudre sous diverses formes. Une théorie a même été édifée, il s'agit de la théorie des méthodes variationnelles. Dans le cadre de ces théories, deux voies se sont dégagées pour l'étude des inégalités à étudier, et nous les utiliserons tour à tour.

D'une part se trouvent les inégalités isopérimétriques, basées sur les réarrangements symétriques, elles fournissent de rapides et excellents résultats dans certains domaines. Nous les avons d'ailleurs utilisées avec profit pour redémontrer simplement la quasi-totalité des résultats laborieusement établis dans le cadre des systèmes isotropes. Nous verrons donc dans quelle mesure ces inégalités sont utilisables dans le cas anisotrope.

D'autre part, nous utiliserons les inégalités de type Poincaré ou Hölder, dans divers cas particuliers. Beaucoup plus puissantes, ces méthodes permettent d'établir nombre de résultats, mais leur généralité impose de grossières minoration et il est souvent nécessaire de les affiner en se plaçant dans des cas particuliers. Toutefois, dans de nombreux cas, nous pourrions apprécier leur efficacité et diagnostiquer la stabilité avec aisance.

Afin de ne pas alourdir en espaces de Sobolev un texte que d'aucuns pourraient trouver indigeste, nous avons préféré renvoyer le lecteur assidu et avide de curiosité vers des ouvrages spécialisés ([Dautray & Lyons 1984] par exemple) afin qu'il puisse contempler dans son ensemble les prémices d'un domaine dont la maïeutique laisse entrevoir toute la perversité.

Comme nous l'avons vu dans notre introduction, l'étude de la stabilité d'un système en interaction gravitationnelle est délicate en grande partie à cause de deux facteurs. Tout d'abord la gravité, et le fait que le potentiel qui la représente soit purement attractif, nous conduit à minimiser des fonctionnelles concaves, en d'autres termes dans toutes nos équations nous nous attendons à trouver un signe moins toujours mal placé.

D'autre part, et contrairement au problème hydrodynamique associé, nous travaillons dans l'espace des phases, et par conséquent, intégrons sur des éléments de volume du type $d^3\mathbf{q}d^3\mathbf{p}$, de plus, hormis les cas simples déjà étudiés, les fonctions sont rarement à variables séparables (en grande partie à cause de l'inhomogénéité du système). Ainsi donc les factorisations nécessaires à l'étude d'un signe sont délicates voire impossibles.

Devant un tel bilan, il nous fallait bien agir, et nous avons adopté une attitude qui allait nous permettre de nous placer dans une situation intermédiaire quant aux deux difficultés inhérentes au problème.

En effet, en restreignant la classe des perturbations, ou la structure du système à l'équilibre, nous avons pu généraliser des méthodes employées pour des systèmes inhomogènes isotropes et obtenir ainsi nombre de résultats, dont on soupçonnait bien l'existence, mais qui, faute de critères, n'avaient pu être démontrés.

5.1 Généralisation du théorème d'Antonov-Lebovitz

Le Théorème d'Antonov et Lebovitz [Binney & Tremaine 1987] montre comment il est possible de minorer le paramètre de stabilité d'un système d'étoiles par celui d'une sphère barotropique de gaz. Cette méthode d'investigation permet de se placer d'emblée dans le cas hydrodynamique "associé", ce qui évacue la variable $\mathbf{p}$ du système le rendant ainsi propice aux factorisations.

Ce théorème bien que fondamental demeure limité dans son champ d'application car il ne concerne que les systèmes sphériques et isotropes. Après avoir simplifié sa démonstration [Aly & Perez 1992], nous allons voir dans quelle mesure ce théorème et la méthode qu'il utilise se généralisent dans le cadre des systèmes anisotropes ne possédant pas forcément la symétrie sphérique.

5.1.1 Perturbations préservantes

Les crochets de Poisson de (3.39) se décomposent comme nous l'avons vu en fonction des intégrales premières isolantes du système. Une classe de générateurs simplifie donc particulièrement le critère, nous les avons appelés générateurs préservants, car ils sont à l'origine de perturbations qui préservent certaines symétries du problème.

Définition 3 *On appelle perturbation préservante toute perturbation générée par g telle que*

$$\delta f \simeq [g, f_o] = f_E[g, E] \quad (5.1)$$

Bien que cette définition soit parfaitement utilisable dans un cadre plus général, intéressons-nous pour fixer les idées aux perturbations préservantes sphériques.

Dans ce cas particulier, $f_o = f_o(E, L^2)$, ainsi les perturbations préservantes sphériques sont engendrées par g tel que $[g, L^2] = 0$. Cette condition introduit une équation qui n'est pas difficile à résoudre pour peu que l'on se place en coordonnées sphériques ($r, \theta, \phi, p_r = \dot{r}, p_\theta = r\dot{\theta}, p_\phi = r \sin \theta \dot{\phi}$). Dans ce contexte en effet, $L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2 / \sin^2 \theta$ et l'équation s'écrit

$$[g, L^2] = 2p_\theta \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{2p_\phi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial g}{\partial \phi} + \frac{2p_\phi^2}{\sin^3 \theta} \frac{\partial g}{\partial p_\theta} = 0 \quad (5.2)$$

Pour résoudre une telle équation aux dérivées partielles, il suffit de trouver 2 intégrales premières indépendantes. En formant le système différentiel associé,

$$\frac{d\theta}{2p_\theta} = \frac{d\phi}{\frac{2p_\phi}{\sin^2 \theta}} = \frac{dp_\theta}{\frac{2p_\phi^2}{\sin^3 \theta}} = dg \quad (5.3)$$

ces deux intégrales apparaissent clairement : la première et la troisième équation s'intègrent et montrent que $L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2 / \sin^2 \theta$ est constant, puis la première et la deuxième équation montrent à leur tour que la grandeur $I \triangleq 2\phi p_\theta + 2p_\phi / \tan \theta$ est aussi constante.

Les variables r , p_r et p_ϕ n'intervenant pas dans (5.2), toute fonction $g(r, p_r, p_\phi, L^2, I)$ engendre donc des perturbations présevantes sphériques.

Une première remarque s'impose alors : toutes les perturbations radiales (qui ne dépendent par définition que de r , p_r et du temps) sont engendrée par $g = g(r, p_r)$, et sont donc préservantes. Toutefois, le fait que dans le cas général, g puisse aussi dépendre d'autres variables, indique clairement qu'il peut exister des perturbations préservantes non radiales.

Dans le cas non sphérique d'un système dont la fonction de distribution dépend de E et L_z (système axi-symétrique par exemple), les perturbations préservantes sont engendrées par tout g tel que $[g, L_z] = 0$, la résolution de cette équation en coordonnées cylindriques montre alors que $g = g(r, z, p_r, p_\phi, \phi + p_r/p_\phi)$. Cette fois-ci encore nous voyons que les perturbations axi-symétriques (ici aussi engendrées par $g(r, p_r)$) sont préservantes.

Nous pourrions ainsi multiplier les exemples et résoudre pour chaque classe de fonction de distribution, l'équation aux dérivées partielles à la base de la propriétés préservante, mais là n'est pas notre but qui va consister en fait à étudier la stabilité d'un système soumis à des perturbations préservantes.

5.1.2 Système hydrodynamique associé

Nous supposons dorénavant que le système ne reçoit que des perturbations préservantes, le paramètre de stabilité (3.39) s'écrit donc

$$H^2[f_0] = -\frac{1}{2} \int f_E[g, E]^2 d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} - \frac{G}{2} \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{p}' d^3\mathbf{q}' \frac{f_E[g, E] \cdot f'_E[g', E']}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (5.4)$$

Bien que cette expression soit tout à fait similaire à celle que l'on pourrait obtenir dans le cas isotrope, il convient toutefois de noter qu'elle recèle une anisotropie cachée à la fois dans g et dans f_E . Cette remarque étant faite, nous pouvons sur cette expression, appliquer un traitement similaire à celui appliqué par Antonov sur le paramètre isotrope, et qui lui valut tant de gloire.

En effet, en posant

$$\rho_1(\mathbf{q}) = \int [g, f_0] d^3\mathbf{p} = \int f_E[g, E] d^3\mathbf{p}, \quad (5.5)$$

l'inégalité de Schwartz appliquée à (5.4) fournit la minoration

$$H^2[f_0] \geq \frac{1}{2} \int \frac{\rho_1^2(\mathbf{q})}{\int |f_E| d^3\mathbf{p}} d^3\mathbf{q} - \frac{G}{2} \int d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{q}' \frac{\rho_1(\mathbf{q}) \cdot \rho_1(\mathbf{q}')}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (5.6)$$

dans laquelle nous avons supposé comme de coutume que f_0 était une fonction monotone décroissante de sa variable E .

La définition de la densité d'équilibre ρ_0 nous donne

$$\rho_0 \triangleq \int f_0(E, I) d^3\mathbf{p}. \quad (5.7)$$

Dans cette relation I regroupe les intégrales premières distinctes de l'énergie dont peut dépendre la fonction de distribution. Dans le cas sphérique anisotrope, nous aurons par exemple $I = L^2$, dans des symétries plus complexes I peut même représenter un couple de constantes du mouvement. La dérivée de la densité d'équilibre par rapport au potentiel d'équilibre nous donne

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \psi_0} = \int f_E d^3\mathbf{p} + \int f_I \frac{\partial I}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \psi_0} d^3\mathbf{p}. \quad (5.8)$$

En complétant la condition de la théorie isotrope $\partial \rho_0 / \partial \psi_0$ strictement négatif, par $f_I < 0$, on obtient donc

$$\int |f_E| d^3\mathbf{p} \triangleq |\mathcal{Q}| = \left| \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi_0} \right| - \int |f_I| \frac{\partial I}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \psi_0} d^3\mathbf{p} \quad (5.9)$$

Dans cette relation, nous retrouvons dans $\mathcal{Q}$ deux parties aisément interprétables. En effet, le premier terme, $(\rho_\psi)_0$, est le seul présent dans le cas isotrope, c'est un terme d'enthalpie isotrope (cf. [Binney & Tremaine 1987]), le second vient donc rendre compte de l'anisotropie du système. Le potentiel ψ_0 est une fonction croissante de la variable $|\mathbf{q}|$, ainsi $\partial\mathbf{q}/\partial\psi_0 > 0$. Si nous supposons que $\partial I/\partial\mathbf{q} > 0$, ce qui est vrai dans les cas classiques (sphère et ellipse), le terme anisotrope intervenant dans $\mathcal{Q}$ est positif, en appelant $k(\mathbf{q})$ sa racine nous avons donc

$$\int |\mathbf{f}_E| d^3\mathbf{p} \triangleq |\mathcal{Q}| = \left| \frac{\partial\rho_0}{\partial\psi_0} \right| - k^2(\mathbf{q}) \quad (5.10)$$

L'inégalité (5.6), s'écrit donc

$$H^2[f_0] \geq W[\rho_1] \triangleq \frac{1}{2} \int \frac{\rho_1^2(\mathbf{q})}{|\mathcal{Q}|} d^3\mathbf{q} - \frac{G}{2} \int d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{q}' \frac{\rho_1(\mathbf{q}) \cdot \rho_1(\mathbf{q}')}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (5.11)$$

en utilisant la notation habituelle pour le potentiel gravitationnel, issue de la forme intégrale de l'équation de Poisson,

$$\psi[\rho] = -G \int d^3\mathbf{q}' \frac{\rho(\mathbf{q}')}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (5.12)$$

Nous avons finalement

$$H^2[f_0] \geq W[\rho_1] = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\rho_1^2(\mathbf{q})}{|\mathcal{Q}|} + \rho_1 \cdot \psi[\rho_1] \right\} d^3\mathbf{q} \quad (5.13)$$

5.1.3 Réduction du problème

De la même manière que dans le cas sphérique, nous pouvons décomposer les perturbations en deux familles.

En effet, soit S , les surfaces fermées sur lesquelles le potentiel gravitationnel d'équilibre est constant, et $\mathbf{n}$, le vecteur unitaire orthogonal à $d\sigma$ élément de surface de S . Nous pouvons toujours écrire

$$\rho_1 = \bar{\rho}_1 + \delta\rho_1 \quad \text{avec} \quad \bar{\rho}_1 \triangleq \int_S \rho_1 d\sigma \quad (5.14)$$

ainsi nous aurons

$$\int_S \delta\rho_1 d\sigma = 0 \quad (5.15)$$

La linéarité de la relation donnant $\psi[\rho]$, permet de séparer le critère de stabilité en une partie symétrique et une partie 'non symétrique'

$$W[\rho_1] = W[\bar{\rho}_1] + W[\delta\rho_1] \quad (5.16)$$

La généralisation du Théorème d'Antonov-Lebovitz consistant à démontrer la stabilité pour des perturbations non symétriques, c'est-à-dire $W[\delta\rho_1] > 0$.

Pour ce faire nous remarquons qu'une utilisation couplée de l'équation de Poisson pour la perturbation et de l'inégalité de Schwartz, permettent d'avoir (cf. [Aly & Perez 1992]- papier 1)

$$\left\{ \int \frac{|\nabla\delta\psi_1|^2}{4\pi G} d^3\mathbf{q} \right\}^2 = \left\{ \int \delta\psi_1 \delta\rho_1 d^3\mathbf{q} \right\}^2 \leq \int \frac{|\delta\rho_1|^2}{|\mathcal{Q}|} d^3\mathbf{q} \cdot \int |\delta\rho_1|^2 \cdot |\mathcal{Q}| d^3\mathbf{q} \quad (5.17)$$

ou nous avons posé $\delta\psi_1 = \psi[\delta\rho_1]$. Ainsi, en injectant (5.17) dans $W[\delta\rho_1]$, il vient

$$W[\delta\rho_1] \geq \frac{\int \frac{|\nabla\delta\psi_1|^2}{4\pi G} d^3\mathbf{q}}{\int \frac{|\delta\rho_1|^2}{|\mathcal{Q}|} d^3\mathbf{q}} \left\{ \int \frac{|\nabla\delta\psi_1|^2}{4\pi G} d^3\mathbf{q} - \int \frac{|\delta\rho_1|^2}{|\mathcal{Q}|} d^3\mathbf{q} \right\} \quad (5.18)$$

On pose alors $\delta\psi_1 \triangleq (\partial\psi_0/\partial n).h \triangleq \psi'_0.h$, ψ'_0 est donc la dérivée de ψ_0 dans la direction de $\mathbf{n}$. La fonction h étant à support compact compte-tenu des propriétés de $\delta\psi_1$, on a donc

$$\begin{aligned} \int |\nabla\delta\psi_1|^2 d^3\mathbf{q} &= \int (\psi'_0 \nabla h + h \nabla \psi'_0)^2 d^3\mathbf{q} \\ &= \int (\psi'^2_0 |\nabla h|^2 + h^2 |\nabla \psi'_0|^2 + 2h\psi'_0 \nabla h \nabla \psi'_0) d^3\mathbf{q} \\ &= \int (\psi'^2_0 |\nabla h|^2 + h^2 |\nabla \psi'_0|^2 + \psi'_0 \nabla(h^2) \nabla \psi'_0) d^3\mathbf{q} \\ &= \int (\psi'^2_0 |\nabla h|^2 + h^2 |\nabla \psi'_0|^2 + \nabla \cdot (\psi'_0 h^2 \nabla(\psi'_0)) - h^2 \nabla \cdot (\psi'_0 \nabla \psi'_0)) d^3\mathbf{q} \\ &= \int (\psi'^2_0 |\nabla h|^2 - h^2 \psi'_0 \nabla^2 \psi'_0) d^3\mathbf{q} \end{aligned} \quad (5.19)$$

L'astuce consiste maintenant à faire de l'analyse vectorielle sur les surfaces S iso- ψ_0 .

Nous savons que $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta$, ainsi, en utilisant le fait que $\nabla = \nabla_S + \mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial n}$, on obtient la relation

$$\forall \phi \in C^2 \quad , \quad \Delta\phi = \Delta_S\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial n^2} + \frac{\partial\phi}{\partial n}(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) \quad (5.20)$$

quelques notions de géométrie suffisant pour se convaincre que le scalaire $\nabla_S \cdot \mathbf{n}$ n'est autre que la courbure totale de la surface S . En appliquant ce résultat au potentiel d'équilibre, et prenant en compte le fait que $\Delta_S\psi_0 = 0$ car ψ_0 est constant sur S l'équation de Poisson s'écrit

$$\Delta\psi_0 = \frac{\partial^2\psi_0}{\partial n^2} + \frac{\partial\psi_0}{\partial n}(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) = 4\pi G\rho_0 \quad (5.21)$$

Nous pouvons aussi appliquer le résultat (5.20) à ψ'_0 , il vient

$$\Delta\psi'_0 = \Delta_S\psi'_0 + \frac{\partial^3\psi_0}{\partial n^3} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial n^2}(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) \quad (5.22)$$

dans cette dernière relation, et malheureusement pour nous, $\Delta_S\psi'_0$ n'est en général pas nul (sauf si S est une sphère), ainsi donc, ce terme gênant devra rester dans nos équations.

En dérivant (5.21), nous obtenons une relation pour $\partial^3\psi_0/\partial n^3$ que nous injectons dans (5.22) pour obtenir

$$\Delta\psi'_0 = \Delta_S\psi'_0 - \psi'_0 \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) + 4\pi G \frac{\partial\rho_0}{\partial n} \quad (5.23)$$

mais comme

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial n} = \frac{\partial\rho_0}{\partial\psi_0} \frac{\partial\psi_0}{\partial n} = -|\rho_\psi|_0 \psi'_0 \quad (5.24)$$

en utilisant (5.10), nous avons donc

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial n} = -\psi'_0(|\mathcal{Q}| + k^2(\mathbf{q})) \quad (5.25)$$

en injectant ce résultat dans (5.23), nous avons finalement

$$\Delta\psi'_0 = \Delta_S\psi'_0 - \psi'_0 \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) - 4\pi G\psi'_0(|\mathcal{Q}| + k^2(\mathbf{q})) \quad (5.26)$$

En revenant aux origines de nos calculs, nous pouvons donc réécrire (5.19) sous la forme développée suivante

$$\int |\nabla\delta\psi_1|^2 d^3\mathbf{q} = \int \left\{ \psi_0'^2 |\nabla h|^2 - h^2\psi'_0 \left[\Delta_S\psi'_0 - \psi'_0 \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) - 4\pi G\psi'_0(|\mathcal{Q}| + k^2(\mathbf{q})) \right] \right\} d^3\mathbf{q} \quad (5.27)$$

en décomposant $|\nabla h|^2$, et en injectant (5.27) dans (5.18) nous avons finalement

$$W[\delta\rho_1] \geq \frac{\left\{ \int \frac{|\nabla\delta\psi_1|^2}{4\pi G} d^3\mathbf{q} \right\}^2}{\int |\delta\rho_1|^2 \cdot |\mathcal{Q}| d^3\mathbf{q}} \{A + B + C\} \quad (5.28)$$

avec

$$A = \int \psi_0'^2 \left| \frac{\partial h}{\partial n} \right|^2 d^3\mathbf{q} \geq 0 \quad (5.29)$$

$$B = \int \left\{ \psi_0'^2 |\nabla_S h|^2 - h^2\psi'_0 \Delta_S\psi'_0 + h^2\psi_0'^2 \frac{\partial}{\partial n}(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) \right\} d^3\mathbf{q} \quad (5.30)$$

$$C = 4\pi G \int k^2(\mathbf{q}) \delta\psi_1^2 d^3\mathbf{q} \geq 0 \quad (5.31)$$

Le problème est maintenant bien posé, en effet, $\delta_{n_s}^2 W[\delta\rho_1]$ sera positif quand $B \geq 0$.

Ainsi dans notre cas de perturbations préservantes non symétriques, une condition suffisante de stabilité est ramenée à l'étude du signe de B . Malgré son allure féroce, B ne dépend pratiquement plus que de S et de h , le problème posé est alors bien connu des mathématiciens, il s'agit, je cite, de *trouver la solution minimale d'un problème de Neumann sur une surface*, il ne reste plus qu'à faire appel aux méthodes variationnelles pour savoir pour quels S et h , ce minimum est positif.

5.1.4 Etude particulière de B

Avant d'essayer de résoudre le problème, explicitons le critère de stabilité correspondant sous une forme généralisant celui obtenu par [Antonov 1962] et [Lebovitz 1965].

Le théorème de Gauss nous permet d'écrire B sous la forme

$$B = \int d\psi_0 \int \left\{ \psi_0' |\nabla_S h|^2 - h^2 \Delta_S \psi_0' + h^2 \psi_0' \frac{\partial}{\partial n}(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) \right\} d\sigma \quad (5.32)$$

le signe de B est donc celui de

$$\int \xi \cdot |\nabla_S h|^2 d\sigma - \int \eta \cdot h^2 d\sigma \quad (5.33)$$

avec

$$\xi = \psi_0' \quad \text{et} \quad \eta = \Delta_S \psi_0' - \psi_0' \frac{\partial}{\partial n}(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) \quad (5.34)$$

En supposant S connue, la variable du problème est donc h . Comme Antonov et Lebovitz, cherchons le maximum de $\int \eta h^2 d\sigma$ avec la contrainte $\int \xi |\nabla_S h|^2 d\sigma = 1$. C'est un problème de multiplicateurs de Lagrange qui veut que

$$\delta\left(\int \eta h^2 d\sigma\right) - \lambda \delta\left(\int \xi |\nabla_S h|^2 d\sigma\right) = 0 \quad (5.35)$$

avec $\lambda = \text{cste}$, soit

$$\int 2h\delta h \eta d\sigma - \lambda \int 2\xi \nabla_S \delta h \nabla_S h d\sigma = 0 \quad (5.36)$$

soit enfin

$$\eta h + \lambda \nabla_S \cdot (\xi \nabla_S h) = 0 \quad (5.37)$$

En injectant ce résultat dans (5.33), nous constatons donc que B est positif si $\lambda < 1$. Nous avons donc établi le résultat général suivant qui vient généraliser le critère d'Antonov-Lebovitz.

Théorème 5 *Tout système en interaction gravitationnelle, dont la fonction de distribution est monotone décroissante pour toutes ses variables, est stable pour des perturbations préservantes non symétriques si pour toute fonction h à support compact, la plus grande valeur possible $\lambda_{max}^{(S)}$ de λ telle que*

$$\eta h + \lambda \nabla_S \cdot (\xi \nabla_S h) = 0 \quad (5.38)$$

satisfait la condition $\lambda_{max}^{(S)} \geq 1$

Comme tous les résultats généraux, ce critère ne peut être utilisé dans son cadre le plus vaste. Toutefois nous allons voir qu'il donne la possibilité de diagnostiquer la stabilité dans le cas particulier fondamental des systèmes sphériques anisotropes.

5.2 Stabilité des systèmes sphériques anisotropes

La fonction de distribution de tels systèmes est une fonction des deux paramètres que sont E et L^2 . L'anisotropie se manifestant par un rapport $2 < v_r^2 > / < v_t^2 >$ différent de l'unité. Bien peu de résultats généraux ont pu être démontrés à ce jour. En effet, l'opérateur des petits mouvements cesse d'être hermitien dès lors que les perturbations cessent d'être radiales, il n'y a donc plus de méthodes classiques pour l'étude de la stabilité de tels systèmes.

Dans le cas hermitien des perturbations radiales, un résultat a d'ailleurs été obtenu par [Kandrup & Sygnet 1985], nous en avons précisé les grandes lignes lors de l'introduction.

Grâce à notre critère, et à la simplicité géométrique de la sphère inhérente à ce cas particulier, nous allons voir qu'il est possible d'étendre le résultat de Kandrup et Sygnet aux perturbations non-radiales préservantes.

Nous avons vu, lors du paragraphe les concernant, comment définir les perturbations préservantes dans le cas sphérique

Séparons les parties symétrique et non symétrique de ces perturbations. Dans le cas sphérique, la partie symétrique est simplement obtenue en prenant la moyenne sur toutes les rotations de la perturbation.

Montrons donc que $H^2[f_0]$ se sépare bien en deux parties dont l'une, invariante par rotation, constituera la contribution des perturbations radiales, et que nous savons donc positive (cf. [Kandrup & Sygnet 1985]).

Nous avons selon (5.4)

$$H^2[f_0] = -\frac{1}{2} \int f_E[g, E]^2 d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} - \frac{G}{2} \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{p}' d^3\mathbf{q}' \frac{f_E[g, E] \cdot f'_E[g', E']}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (5.39)$$

posons $e(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = [g, E]$, e se décompose en une partie radiale

$$\bar{e}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int e(R(\mathbf{q}), R(\mathbf{p})) dR \quad (5.40)$$

où l'intégration se fait sur toutes les rotations, et une partie non radiale δe telle que

$$\int \delta e(R(\mathbf{q}), R(\mathbf{p})) dR = 0 \quad (5.41)$$

Cette décomposition $e = \bar{e} + \delta e$, permet de décomposer (5.39) en

$$H^2[f_0] = \overline{H^2}[f_0] + \delta H^2[f_0] + \text{tm} \quad (5.42)$$

Les termes mixtes (tm) sont de la forme

$$\text{tm} = \int \bar{e}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \cdot \delta e \cdot j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \cdot d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \quad (5.43)$$

où j représente les termes du type f_E , et sont donc invariants par rotation (car issus de l'état d'équilibre sphérique). $\bar{e}$ et j étant invariants par rotation, on a donc (en utilisant un changement de variable de Jacobien unité car la transformation est une rotation)

$$\begin{aligned} \text{tm} &= \int \bar{e}(R(\mathbf{q}), R(\mathbf{p})) \cdot \delta e(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \cdot j(R(\mathbf{q}), R(\mathbf{p})) \cdot d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} dR \\ &= \int dR \int \bar{e}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \delta e(R(\mathbf{q}), R(\mathbf{p})) j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \\ &= \int \delta e(R(\mathbf{q}), R(\mathbf{p})) dR \int \bar{e}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

ainsi donc $H^2[f_0]$ s'écrit simplement

$$H^2[f_0] = \overline{H^2}[f_0] + \delta H^2[f_0] \quad (5.45)$$

avec $\overline{H^2}[f_0]$ positif comme le montrent Kandrup et Sygnet.

Le signe de $\delta H^2[f_0]$ est donné quant à lui par la résolution du problème du paragraphe précédent dans le cas simple de la sphère.

Comme nous l'avons signalé au passage, dans ce cas particulier uniquement, si ψ_0 est constant sur des sphères. alors $\psi'_0 = \partial\psi_0/\partial r$ l'est aussi, ce qui évacue son Laplacien de surface du critère.

De plus, le terme de courbure se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial r} (\nabla_{\text{sphere}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}) = -\frac{2}{r^2} \quad (5.46)$$

Dans ces conditions, nous avons

$$\lambda_{\text{sphere}} = \frac{\int \frac{2}{r^2} |h|^2 d\sigma}{\int |\nabla_{\text{sphere}} h|^2 d\sigma} \quad (5.47)$$

et c'est à ce moment précis que les fidèles lecteurs qui ont compulsé les ouvrages sur les inégalités de type Hölder ou Poincaré jubilent. En effet, ils ont reconnu du premier coup d'œil l'inégalité de Wirtinger, qui implique ici d'une manière éclatante que $\lambda_{\text{sphere}} < 1$, pour ce cas non-radial.

Nous pouvons donc parachever le résultat de Kandrup et Sygnet, en formulant :

Théorème 6 *Tous les systèmes sphériques anisotropes dont la fonction de distribution est monotone décroissante pour ses deux variables E et L^2 sont stables pour toutes les perturbations préservantes.*

Le seul type de perturbations restant à étudier pour la stabilité de tels systèmes à f_0 monotone, sont donc les perturbations non préservantes et non radiales, mais compte-tenu de la forme du critère dans ce cas trop général, une étude analytique semble compromise.

5.3 Stabilité des systèmes proches de l'isotropie

Après avoir visité la famille des perturbations préservantes nous allons à présent retourner le problème en limitant à présent la classe des familles d'équilibres et en considérant des perturbations assez générales. Les systèmes étudiés seront ceux pour lesquels la fonction de distribution dans l'espace des phases est celle d'un système isotrope, $f(E)$, plus une déviation anisotrope infinitésimale. Il s'agit donc dans ce paragraphe d'étudier les conséquences pour la stabilité de la transition isotrope $\longrightarrow$ non-isotrope.

5.3.1 Systèmes quasi-isotropiques

Considérons donc un système gravitationnel sans collision dont la fonction de distribution d'équilibre s'écrit $f(E, I_i)$ telle que $f(E, I_i) = f_0 + \epsilon f_1(E, I_i)$, le paramètre ϵ étant arbitrairement petit. Cette fonction de distribution décrit bien tous les systèmes quasi-isotropiques. Dans cette situation nous avons, pour une perturbation de générateur g

$$[g, E] = \frac{[g, f_0]}{f_E} + O(\epsilon) \quad (5.48)$$

En injectant (5.48) dans le critère de stabilité (3.39) il vient

$$H^2[f_0] = -\frac{1}{2} \int \frac{[g, f_0]^2}{f_E} d\Gamma - \frac{1}{2} \int d\Gamma \int d\Gamma' \frac{[g, f_0] \cdot [g', f_0']}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} - \frac{G}{2} \int d\Gamma \epsilon [g, f_0] \quad (5.49)$$

en utilisant le fait que la moyenne de la perturbation sur tout l'espace des phases est nulle, on a

$$-\frac{1}{2} \int d\Gamma \epsilon [g, f_0] = -\frac{1}{2} \epsilon \int d\Gamma [g, f_0] = 0 \quad (5.50)$$

Ainsi, l'inégalité de Schwartz et le changement de variable habituel fournissent

$$H^2[f_0] \geq \delta^2[\rho_1] \triangleq \frac{1}{2} \int \frac{\rho_1^2}{\int |f_E| d^3\mathbf{p}} d^3\mathbf{q} - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{q}' \frac{\rho_1 \rho_1'}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (5.51)$$

avec $\rho_1 \triangleq \int [g, f_0] d^3\mathbf{p}$, nous considérons toujours que f_0 a toutes ses dérivées partielles et premières négatives. Ainsi,

$$\int |f_E| d^3\mathbf{p} = \left| \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right|_0 - \sum_i \int |f_{I_i}| \frac{\partial I_i}{\partial r} \frac{1}{\psi_0'} d^3\mathbf{p} \quad (5.52)$$

nous pouvons donc écrire

$$\delta^2[\rho_1] = \frac{1}{2} \int \frac{\rho_1^2}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right|_0} \frac{1}{1 - \Xi(q)} d^3\mathbf{q} - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{q}' \frac{\rho_1 \rho_1'}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (5.53)$$

avec

$$0 \leq \Xi(q) \triangleq \frac{\sum_i \int |f_{I_i}| \frac{\partial I_i}{\partial r} \cdot \frac{1}{\psi_0} d^3 \mathbf{p}}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right|_0} = O(\epsilon)$$

utilisant le fait que $\Xi(q)$ est petit, nous pouvons prendre son développement pour avoir (en négligeant $O(\epsilon^2)$)

$$\delta^2[\rho_1] = \frac{1}{2} \int \frac{\rho_1^2}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right|_0} d^3 \mathbf{q} - \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{q} \int d^3 \mathbf{q}' \frac{\rho_1 \rho_1'}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} + \frac{1}{2} \int \Xi(q) \cdot \rho_1^2 d^3 \mathbf{q} \quad (5.54)$$

compte-tenu du fait que $\Xi(q)$ est positif nous aurons toujours

$$\delta^2[\rho_1] \geq \frac{1}{2} \int \frac{\rho_1^2}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right|_0} d^3 \mathbf{q} - \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{q} \int d^3 \mathbf{q}' \frac{\rho_1 \rho_1'}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (5.55)$$

Le point important de cette analyse réside dans le fait que nous tronquons les développements à l'ordre ϵ eu égard à la petitesse de I_i . En effet, la quasi-isotropie de ces systèmes oblige les surfaces isopotentielles de tels systèmes à demeurer quasi-sphériques. Dans ces conditions et dans notre cas de fonctions s'annulant sur les bords des surfaces mises en jeu on peut montrer (e.g. [Clement 1965]) qu'à l'ordre ϵ qui nous concerne, notre problème est sphérique et que nous pouvons donc profiter de la simplicité de ces surfaces comme nous l'avons déjà lâchement fait lors du paragraphe précédent.

Rappelons toutefois les grandes lignes de cette heureuse propriété.

Soit $F(r)$ une fonction, calculons l'intégrale de F sur un volume V de surface S tel que $V = V_0 + dV$ où V_0 est une boule de rayon R_0 et dV la petite correction qu'il faut apporter à cette boule pour obtenir V . Le "rayon" de V s'écrit donc $R = R_0 + \Omega^2 \epsilon(\mu) + O(\epsilon^2)$, ainsi

$$\begin{aligned} \int_V F(r) dr &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} d\phi d\mu \int_0^{R(\mu)} F(r) r^2 dr \\ &= \int_{V_0} F(r) dr + \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} d\phi d\mu \int_{R_0}^{R(\mu)} F(r) r^2 dr \\ &= \int_{V_0} F(r) dr + \omega^2 \int_S F_0(r) r^2 \epsilon(\mu) dS + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.56)$$

Par conséquent si F_0 s'annule sur S (ce qui est bien entendu le cas pour toutes nos variables) le premier terme perturbatif est d'ordre ϵ^2 , c'est donc un terme négligeable dans notre calcul qui peut donc en toute rigueur se faire sur une boule en considérant les surfaces isopotentielles sphériques.

Plus aucun calcul n'est à présent à effectuer dans ce cas sphérique et comme nous l'avons vu précédemment l'inégalité de Wirtinger assure la stabilité contre les perturbations non radiales. Le cas radial recèle quant à lui un peu plus d'attention, en effet, si I_i est indépendant de la vitesse radiale v_r (comme le sont L^2 , L_x , L_y ou L_z par exemple) nous pouvons reprendre mot pour mot la démonstration de [Kandrup & Sygnet 1985] pour assurer la stabilité contre les perturbations radiales, toutefois si I_i dépend de v_r nous ne pouvons rien dire !

Ainsi donc nous pouvons assurer que la stabilité est une propriété qui franchit en général sans dommage la frontière de l'isotropie pour les systèmes autogravitants sans collisions. Il demeure toutefois clair, que cette démonstration n'est vraie que pour un voisinage très proche de la frontière isotrope, les excursions trop lointaines, dans le domaine des rotations par exemple, rendant physiquement le système instable, mais encore faut-il le montrer.

5.3.2 Systèmes en faible rotation solide

Comme le signalent Binney et Tremaine, dans un repère en rotation solide, les équations de Jeans pour un système stellaire sont identiques à celles d'un milieu hydrostatique ayant la géométrie des ellipsoïdes de Jacobi (eg BT), ainsi l'existence de systèmes stellaires analogues, dont la fonction de distribution aurait pour variable $E_j = p^2/2m + \psi - 1/2\Omega^2 r^2$, semble envisageable pour représenter les systèmes quelconques en rotation solide.

En fait, les modèles $f(E_j)$ ne peuvent pas représenter correctement les systèmes triaxiaux qui ne supportent qu'une formalisation $f(E, L_{z1}, L_{z2})$. Néanmoins, de bonnes raisons physiques laissent supposer que les modèles $f(E_j)$ rendent compte de l'essentiel de la physique des barres des galaxies spirales. De plus, de nombreux auteurs tels que [Lynden-Bell & Wood 1969], et le groupe de Chicago dirigé par Chandrasekhar dans les années 1965-1975, avaient établi la stabilité des systèmes hydrodynamiques en faible rotation conjecturant qu'une généralisation aux systèmes stellaires analogues était sans doute possible. Le problème résidait dans l'absence de méthodes d'étude de la stabilité de tels systèmes "Vlasoviens" inhomogènes et anisotropes, le traitement symplectique établi, nous pouvons donc à présent démontrer la conjecture de nos illustres prédécesseurs.

Nous considérons donc un système dont la fonction de distribution dans l'espace des phases dépend de manière monotone et décroissante de $E_j = p^2/2m + \psi - 1/2\Omega^2 r^2$, de plus nous supposons la rotation solide ($\Omega = \text{constante}$) et faible, nous avons donc

$$\forall h(p, q) \in L^1 \quad \Omega^2 \cdot h(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \ll 1 \quad (5.57)$$

En remarquant que $E_j = E - 1/2\Omega^2 r^2$, la perturbation se décompose en

$$[g, E] = \frac{[g, f_0]}{f_{E_j}} + [g, \frac{1}{2}\Omega^2 r^2] \quad (5.58)$$

comme précédemment $[g, 1/2\Omega^2 r^2]$ est d'ordre ϵ à cause de (5.57), ainsi en utilisant rigoureusement la même méthode, nous obtenons pour la variation seconde d'énergie

$$H^2[f_0] \geq \frac{1}{2} \int \frac{\rho_1^2}{\int |f_{E_j}| d^3\mathbf{p}} d^3\mathbf{q} - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{q}' \frac{\rho_1 \rho'_1}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (5.59)$$

une utilisation combinée de la petitesse et de la positivité de Ω^2 , il vient

$$\int |f_{E_j}| d^3\mathbf{p} = \frac{|\frac{\partial \rho}{\partial \psi}|_0}{1 - \frac{\Omega^2 r}{\psi'_0}} = |\frac{\partial \rho}{\partial \psi}|_0 \left\{ 1 + \frac{\Omega^2 r}{\psi'_0} \right\} \geq |\frac{\partial \rho}{\partial \psi}|_0 \quad (5.60)$$

En négligeant toujours les termes d'ordre ϵ^2 , le problème reste sphérique et nous pouvons conclure que

$$H^2[f_0] \geq \frac{1}{2} \int \frac{\rho_1^2}{|\frac{\partial \rho}{\partial \psi}|_0} d^3\mathbf{q} - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{q}' \frac{\rho_1 \rho'_1}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (5.61)$$

est positif non seulement pour les perturbations non radiales grâce à l'inégalité de Wirtinger, mais aussi pour les perturbations non radiales car $1/2\Omega^2 r^2$ ne contient pas v_r et donc que la méthode employée par Kandrup et Sygnet peut être entièrement reconduite.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui vient démontrer la conjecture de Lynden-Bell et Chandrasekhar :

Théorème 7 *Tous les systèmes en interaction gravitationnelle sans collisions dont la fonction de distribution dépend de façon monotone décroissante de $E_j = E - 1/2\Omega^2 r^2$ sont stables si $\Omega^2 \ll 1$.*

Partie III

Modélisation numérique

Nous avons abordé l'étude de la stabilité des systèmes auto-gravitants sous un nouvel angle. En effet, en lieu et place du système de Vlasov-Poisson, équations d'évolution dynamique du système habituellement étudiées, nous proposons une équation portant directement sur la stabilité du système. Nous sommes donc, dans une certaine mesure, affranchis de toutes les conditions d'utilisation des méthodes classiques.

Nous avons vu lors du chapitre précédent de quelle manière le résultat symplectique permettait de généraliser toutes les approches connues de ce problème. Dans le cas sphérique nous avons pu retrouver les principaux critères de stabilité [Antonov 1962], [Palmer & Papaloizou 1986], [Goodman 1988] et [Vandervoort 1989]. Dans le cas sphérique anisotrope, nous avons pu étendre le Théorème d'Antonov-Lebovitz en proposant la nouvelle classe des perturbations préservantes qui vient généraliser la notion de perturbation radiale. Nous avons aussi remarqué la correspondance qu'il pouvait exister entre une variation d'énergie négative et une instabilité. Ce dernier résultat demeure au stade de la remarque car aucun théorème n'est là pour affirmer cette relation dans ce contexte anisotrope. Enfin dans le cas général de la symétrie quelconque nous avons de la même manière donné un critère de stabilité, mais cet ultime effort semble bien inutilisable en pratique. Dans le cas sphérique, plusieurs problèmes restent ouverts dont le plus important est sans conteste celui de l'obtention d'un véritable paramètre de stabilité fiable et efficace. C'est dans cet objectif que nous avons entrepris une étude numérique des résultats analytiques que nous avons obtenus. Il est de fait de constater que les systèmes susceptibles de recevoir des perturbations préservantes demeurent stables contre toute perturbation (cf. chapitre 5), et par opposition que les systèmes pour lesquels il est impossible de générer des perturbations préservantes non nulles (système purement radial) souffrent d'instabilité d'orbites radiales. Il est donc clair que cette "susceptibilité à recevoir des perturbations préservantes" est reliée à la stabilité du système. C'est dans le but de lever toute ou partie du mystère concernant la nature de ce lien que nous nous sommes lancés dans nos simulations.

Nous avons besoin pour cela de trois outils distincts :

- Un générateur de conditions initiales. Cet outil fournira la position et la vitesse de N particules massives. Les propriétés statistiques de ces particules, fonction de distribution, grandeurs caractéristiques, etc. devront être ajustables.
- Un code d'évolution dynamique. Ce programme fera évoluer les corps sous l'effet de leur propre poids. Il devra être aussi précis qu'ajustable car les propriétés de stabilité de tels systèmes sont sensibles.
- Des outils d'analyse. Un premier code devra répondre à la question : le système a-t-il été stable lors de son évolution dynamique. Un deuxième code tentera de dire avant évolution dynamique si le système va rester stable ou non. Ces deux outils sont donc fondamentaux et permettront donc de faire une analyse a priori et a posteriori de la stabilité du système.

Chapitre 6

Conditions initiales

6.1 L'algorithme Ossipkov-Merritt

Le but de cette partie est d'expliquer, avec un souci du détail correspondant aux difficultés que nous avons rencontrées, le code numérique qu'il a fallu mettre en œuvre afin d'obtenir N particules massives dans une configuration donnée.

La configuration que nous avons choisie est la suivante : l'état initial de notre système est à géométrie sphérique, les corps seront distribués dans l'espace en suivant une fonction de distribution donnée, qui sera celle d'un système inhomogène pour les positions (densité monotone décroissante) et anisotrope pour les vitesses (anisotropie radiale ou circulaire). Afin d'étudier les véritables propriétés de stabilité du système, les conditions initiales devront correspondre à un état virialisé dans lequel le rapport $2E_c/E_p = -1$ (quantités moyennes), c'est-à-dire que nous nous plaçons tout de suite après la phase de relaxation violente.

Compte-tenu de ces contraintes que nous nous imposons, plusieurs choix étaient possibles. Le premier aspect important concerne la forme de la fonction de distribution. Afin d'obtenir un système virialisé, les propriétés sphériques anisotropes du système imposent, conformément au théorème de Jeans, $f_o = f_o(E, L^2)$, $E = p^2/2 + \psi(r)$ est l'énergie d'une particule et $L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2/\sin^2\theta$ le carré du moment cinétique total d'une particule. Il n'était pas question ici d'inventer un nouvel algorithme de genèse de tels systèmes, mais plutôt de construire un outil malléable qui tout en fournissant des conditions initiales dont nous connaissons les paramètres physiques (taille, masse, temps dynamique, densité) de manière assez précise et ajustables. Cet outil nous permettra aussi de varier les paramètres concernant sa stabilité (degré d'anisotropie). La solution la plus simple consiste à imposer une fonction de distribution de la forme $f_o = E^\alpha L^{2\beta}$. Ces modèles (polytropes étendus) sont souvent utilisés dans les simulations car ils permettent une anisotropie immodérée en prenant β très négatif. Ainsi, les premières simulations concernant les instabilités radiales ([Henon 1973],[Merritt & Aguilar 1985],[Barnes 1986],[Barnes *et al.* 1986]), voir [de Zeeuw & Franx 1991] pour une revue) utilisaient ce type de fonctions. Notre problème est quelque peu différent, en effet, nous souhaitons obtenir des modèles dont l'anisotropie est moins forte mais plus contrôlable. D'autre part, nous voulons privilégier l'aspect réaliste de nos simulations car il ne s'agit pas d'obtenir des résultats sur des systèmes dans des conditions extrêmes et non physiques (comme le serait une galaxie dont toutes les composantes seraient sur des trajectoires radiales), mais plutôt d'obtenir une large gamme de conditions initiales ayant des caractéristiques différentes et conformes à la réalité.

L'algorithme que nous avons choisi de mettre en œuvre est connu sous le nom d'Ossipkov-Merritt ([Merritt 1985b],[Merritt 1985a], [Ossipkov 1979] ou [Binney & Tremaine 1987]), son idée de base est très simple et provient de la méthode utilisée pour produire des modèles isotropes.

En se donnant un profil de densité on parvient à reconstruire la fonction de distribution isotrope correspondante. En effet, la densité n'est autre que la moyenne de la fonction de distribution sur les vitesses

$$\rho_{iso}(r) = 4\pi \int f_{iso}(\mathcal{E}) d\mathbf{p} = 4\pi \int_0^\Psi f_{iso}(\mathcal{E}) \sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})} d\mathcal{E} \quad (6.1)$$

où, pour des facilités de calcul, $\mathcal{E}$ l'énergie relative et Ψ le potentiel relatif sont tels que

$$\Psi(r) \triangleq -\psi(r) + \psi(r_{max}) \text{ et } \mathcal{E} = -E + \psi(r_{max}) - p^2/2 \quad (6.2)$$

dans ces conditions, on obtient la fonction de distribution par une inversion d'Abel, due à Edington

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \frac{d}{d\mathcal{E}} \int_0^\mathcal{E} \frac{d\rho}{d\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E} - \Psi}} \quad (6.3)$$

Malheureusement, dans le cas anisotrope, la fonction de distribution dépend de deux variables et cette inversion n'est en général pas possible. Il existe cependant une classe de fonctions pour lesquelles une méthode similaire peut être utilisée.

En effet, si l'on considère la variable $Q > 0$;

$$Q \triangleq \mathcal{E} - \frac{L^2}{2r_a^2} = \Psi - \frac{p^2}{2} \left(1 + \frac{r^2}{r_a^2} \sin^2 \eta \right) , \quad (6.4)$$

correspondant à la variable physique $q = -Q + \psi(r_{max})$ dans laquelle r_a , le rayon d'anisotropie, possède les dimensions d'une longueur. Nous avons exprimé ici les vitesses en coordonnées polaires

$$p_r = |p| \cos \eta \quad , \quad p_\theta = |p| \sin \eta \cos \xi \quad , \quad p_\phi = |p| \sin \eta \sin \xi \quad (6.5)$$

dans ce contexte la densité s'écrit

$$\rho(r) = \int f(\mathcal{E}, L^2) d\mathbf{p} = 2\pi \int_0^\pi \sin \eta d\eta \int_0^\infty f\left(\Psi - \frac{p^2}{2}, r^2 p^2 \sin^2 \eta\right) p^2 dp \quad (6.6)$$

En intégrant sur Q plutôt que sur p , cette relation devient (à r constant)

$$\rho_{ani} \triangleq \left(1 + \frac{r^2}{r_a^2} \right) \rho_{iso}(r) = 4\pi \int_0^\Psi f(Q) \sqrt{2(\Psi - Q)} dQ \quad (6.7)$$

qui s'inverse donc en

$$f(Q) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \frac{d}{dQ} \int_0^Q \frac{d\rho_{ani}}{d\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{Q - \Psi}} \quad (6.8)$$

qui est bien la fonction de distribution d'un système sphérique anisotrope. Le mécanisme de synthèse est assez simple, on se donne un potentiel gravitationnel sphérique, on en déduit le profil de densité qui lui correspond grâce à l'équation de Poisson, on "anisotropise" la densité en la multipliant par $(1 + r^2/r_a^2)$ et on obtient la fonction de distribution.

Cette méthode est très intéressante pour nous, car le potentiel gravitationnel, qui est ici un paramètre d'entrée, conditionne toutes les caractéristiques physiques du système.

6.2 Le modèle utilisé

Notre objectif à ce niveau était de choisir un profil de densité paramétrable permettant d'avoir une grande diversité dans les caractéristiques des systèmes générés, mais aussi un modèle assez simple pour permettre l'obtention de conditions initiales dans un temps de calcul raisonnable.

Ce compromis est tout à fait possible en considérant la famille des polytropes.

La fonction de distribution isotrope de tels systèmes s'écrit

$$f_{iso}(\mathcal{E}) = \lambda \mathcal{E}^{n-\frac{3}{2}} \quad (6.9)$$

où λ est une constante de normalisation et n l'indice du polytrope. Dans ces conditions, la formule d'Eddington (6.1) nous donne :

$$\rho_{iso}(r) = c_n \Psi^n \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{\lambda(2\pi)^{\frac{3}{2}}\Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)} \quad (6.10)$$

la fonction Γ étant définie par la relation classique

$$n \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad \Gamma(n + 1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \quad (6.11)$$

pour assurer la convergence du calcul de c_n on doit avoir $n > \frac{1}{2}$. La relation (6.10) permet d'obtenir le potentiel gravitationnel en résolvant l'équation de Poisson, $\Delta\Psi = 4\pi\rho$, (nous avons choisi un système d'unités tel que $G = 1$), ρ et Ψ ne dépendant que de r on a alors

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + 4\pi c_n \Psi^n = 0 \quad (6.12)$$

en passant aux variables sans dimension $s = r / \sqrt{4\pi\Psi_o^{n-1}c_n}$ et $\phi = \Psi/\Psi_o$ on obtient l'équation dite de Lane-Emden

$$\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{d\phi}{ds} \right) = \begin{cases} -\phi^n & \text{si } \phi > 0 \\ 0 & \text{si } \phi < 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

les conditions initiales à utiliser sont $\phi(0) = \Psi_o/\Psi_o = 1$, Ψ_o est donc un paramètre du modèle, et $d\Psi/ds = 0$, car il n'y a pas de force gravitationnelle au centre du système.

Dans le cas général, et pour un n quelconque, on ne sait pas résoudre cette équation. Dans certains cas particuliers, la solution est analytique. Pour $n = 1$, elle devient l'équation linéaire de Helmholtz. Pour $n=5$, [Schuster 1883] obtint la solution connue sous le nom de Modèle de Plummer.

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{3}}} \quad (6.14)$$

la densité correspondante,

$$\rho = \frac{c_5 \Psi_o^5}{(1 + \frac{s^2}{3})^{\frac{5}{2}}} \quad (6.15)$$

ne s'annule pas, le rayon du système correspondant est donc illimité. Toutefois, sa masse totale $M_\infty = \frac{\sqrt{3}\Psi_o}{\sqrt{4\pi\Psi_o^4 c_5}}$ est finie.

En résumé on peut montrer les propriétés suivantes :

- Si $n \in \mathbb{R}$ tel que $0.5 \leq n < 5$, la densité s'annule pour un rayon donné.
- Pour des valeurs de n plus grandes que 5, la masse diverge.

6.2.1 Calcul de la fonction de distribution dans le cas $n=5$

Dans le cas $n = 5$, la solution de l'équation de Lane-Emden est analytique et s'écrit en variables Ψ et r

$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{3b^2}}} \quad (6.16)$$

Nous avons donc $\Psi(0) = 1$ et $b^2 = 4\pi c_5 = 7\pi^3\sqrt{2}/16$. La densité et le rayon s'expriment donc en fonction du potentiel

$$\rho_{iso} = c_5 \Psi^5 = \frac{7\pi^2\sqrt{2}}{64} \Psi^5 \quad \text{et} \quad r = b\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{\Psi} - 1} \quad (6.17)$$

L'algorithme Ossipkov-Merritt nous indique alors la marche à suivre. La densité du système anisotrope correspondant est définie par

$$\rho_{ani} \triangleq \left(1 + \frac{r^2}{r_a^2}\right) \rho_{iso} = \frac{b^2}{r_a^2} \Psi^3 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3b^2}{r_a^2}\right) \Psi^5 \quad (6.18)$$

Le calcul de la fonction de distribution est un peu plus compliqué mais ne pose aucun problème de principe

$$f(Q) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} \frac{d}{dQ} \int_0^Q \frac{1}{\sqrt{Q - \Psi}} \frac{d\rho_{ani}}{d\Psi} d\Psi \quad (6.19)$$

Dans cette intégrale, Q varie de 0 à $-\Psi(0) = -1$. Le changement de variable $x = \sqrt{Q - \Psi}$ permet l'intégration

$$f(Q) = \frac{7\pi}{4r_a^2} Q^{3/2} + \left[\sqrt{2} - \frac{21\pi^3}{8r_a^2} \right] \frac{32}{21\pi^2} Q^{7/2} \quad (6.20)$$

Nous avons représenté ci-dessous cette fonction pour $r_a = 4, 5, 6, 7$ et 8, en utilisant la variable $|Q|$.

Figure 5 : Fonction de distribution analytique $n=5$

Pour des valeurs du rayon d'anisotropie $r_a > \pi^{3/2} [\frac{35721}{32768}]^{1/4} \approx 5.7$, la fonction de distribution est strictement positive pour tout $Q \in [0, 1]$. Mais si $r_a < 5.7$, $f(Q)$ devient négative pour Q proche de 1. En fait, cela signifie qu'en toute rigueur on ne doit pas dépasser un certain état d'anisotropie maximum : un système physique décrit par une telle fonction de distribution ne peut pas avoir toutes ses composantes sur des trajectoires radiales. Ce petit problème se pose dans les mêmes conditions pour d'autres valeurs de n .

Notons aussi que cette famille de courbes présente un point fixe, commun à toutes les fonctions de distribution quelle que soit la valeur de r_a . En effet, la relation (6.20) peut aussi s'écrire :

$$f(Q) = \frac{\pi(7 - 16Q^2)}{4r_a^2} Q^{3/2} + \frac{32\sqrt{2}}{21\pi^2} Q^{7/2} \quad (6.21)$$

ainsi lorsque $Q = \sqrt{7/16} \approx 0.66$, $f(Q) \approx 0.061$ et ce quelle que soit la valeur de r_a .

Comme nous l'avons déjà remarqué, dans le cas général l'équation de Lane-Emden n'admet pas de solution analytique. Il n'est donc en général pas possible d'obtenir r en fonction de Ψ comme dans le cas que nous venons de traiter. Une étude approfondie de la solution permet néanmoins de montrer que cette dernière est toujours monotone décroissante.

La relation polytropique liant ρ_{iso} à Ψ choisie dans notre algorithme d'une part, et cette propriété de monotonie d'autre part, nous indique clairement que le point fixe mis en évidence dans le modèle analytique est en fait un propriété générale de ces fonctions de distribution. Ainsi pour chaque valeur de n , un point fixe devrait pouvoir être mis en évidence.

6.3 Genèse de N corps suivant une fonction de distribution $f(Q)$

Après avoir décrit les divers algorithmes utilisés, nous allons nous intéresser à présent aux moyens qu'il faut mettre en jeu pour obtenir N particules suivant une certaine fonction de distribution dans l'espace des phases. Ce travail s'effectuera en deux étapes : dans un premier temps, nous allons distribuer les N particules dans l'espace des positions suivant la loi de densité fournie, puis attribuer à chacun de ces points une vitesse conforme à la fonction de distribution.

6.3.1 Génération de la position des particules

Pour obtenir la loi de densité du système en suivant l'algorithme Ossipkov-Merritt, nous devons fournir une loi isotrope. Comme nous l'avons expliqué, notre choix s'est porté sur les polytropes et nous devons donc résoudre l'équation de Lane-Emden(6.13). La solution n'étant pas analytique, nous avons entrepris une résolution numérique. Compte-tenu de la relative simplicité du problème à résoudre (Problème non linéaire mais à une seule dimension), nous l'avons résolu de proche en proche par une méthode dite d'Euler explicite.

L'équation (6.13) se développe en :

$$s\phi'' + 2\phi' + s\phi^n = 0 \quad (6.22)$$

La définition de la dérivée est la suivante :

$$\begin{aligned} \phi'(s + \epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(s + \epsilon) - \phi(s)}{\epsilon} \\ \phi''(s + \epsilon) &= (\phi'(s + \epsilon))' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(s + \epsilon) - \phi(s) - \epsilon\phi'(s)}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

En prenant un ϵ très petit devant les dimensions du système, on peut injecter ces définitions dans (6.22) on obtient 2 équations de récurrence :

$$\phi(s + \epsilon) = \frac{(s + 2\epsilon)\phi(s) + \epsilon s\phi'(s) - \epsilon^2 s\phi^n(s)}{s + 2\epsilon} \quad (6.23)$$

$$\phi'(s + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(s + \epsilon) - \phi(s)}{\epsilon} \quad (6.24)$$

On connaît $\phi(0) = 1$ et $\phi'(0) = 0$, on peut calculer $\phi(\epsilon)$ puis $\phi'(\epsilon)$ et continuer cet algorithme tant que $\phi(k\epsilon) > 0$. $k \in \mathbb{N}$.

La véritable fonction potentiel est $\Psi(r)$, il faut donc multiplier en chaque point, $\phi(s) = \phi(r.(4\pi\Psi_o^{n-1}c_n)^{-1})$, par le paramètre Ψ_o dont dépend donc la taille du système (rayon maximum tel que $\Psi(r) > 0$) .

Le potentiel étant calculé, on obtient, grâce à (6.10) et (6.7), le profil de densité du modèle anisotrope, ainsi que la fonction de distribution du système.

L'obtention de la position de chacun des corps est à présent possible, car la densité n'est autre que la loi de probabilité de la distance des corps par rapport au centre du système. On calcule alors la fonction génératrice de la densité, c'est-à-dire la masse du système en fonction de son rayon $M(r)$. La position d'un corps suivant cette loi est donc obtenue en inversant $M(r)$ et en l'appliquant à une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. Bien entendu nous avons au préalable pris soin de normaliser la distribution de telle manière que $M(r_{max}) = 1$. Les deux autres coordonnées polaires sont aléatoires, $\sin \theta$ est uniforme sur $[0, 1]$ et ϕ est uniforme sur $[0, 2\pi]$. Pour chacun des corps nous avons donc le schéma suivant :

$$\begin{aligned} r_i &= r_{max}.M^{-1}(x) \\ \theta_i &= 2 \sin^{-1}(\sqrt{x}) \\ \phi_i &= 2\pi.x \end{aligned}$$

x étant une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Nous avons tracé ci-dessous les diverses fonctions calculées dans les cas $n = 3, 5$, $n = 4$ et $n = 4, 5$.

Figures 6 : Potentiels de Lane-Emden

Figures 7 : Densité des modèles anisotropes générés

Figures 8 : Masse normalisée de nos systèmes

Figures 9 : Fonctions de distribution anisotropes

Les figures 6 à 8 portent en abscisse le rayon du système. La figure 9 porte la variable $|Q|$ en abscisse. Chacune de ces figures, comporte 3 graphiques représentant chacun une valeur de l'indice polytropique n , (3.5, 4 et 4.5 au dessous). Sur chacun de ces graphiques le rayon d'anisotropie prend les valeurs $r_a = 0.75$ (courbe la plus bleue), 1, 2, 5, 10 et 100(courbe la plus rouge).

6.3.2 Génération de la vitesse des particules

Plaçons-nous en coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses. On a donc

$$v_r = \sin \theta \cos \phi v_x + \sin \theta \sin \phi v_y + \cos \theta v_z$$

$$\begin{aligned}
 v_\theta &= \cos \theta \cos \phi v_x + \cos \theta \sin \phi v_y - \sin \theta v_z \\
 v_\phi &= -\sin \phi v_x + \cos \phi v_y \\
 \text{et} \\
 v_t &= \sqrt{v_\theta^2 + v_\phi^2} \\
 \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{v_\theta}{v_\phi} \right)
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

La probabilité de présence d'une particule dans une région de l'espace des phases de volume $d\Gamma \triangleq dr d\theta d\phi dv_r dv_\theta d\alpha$ est proportionnelle à la fonction de distribution du système dans cet espace.

$$p(\Gamma)d\Gamma = \frac{1}{N} f(r, v_r, v_t) r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi v_t dv_t dv_r d\alpha \tag{6.26}$$

Les variables α , ϕ et $\sin \theta$ sont dans notre cas sphérique, uniformément réparties sur $[0, 1]$. Il est donc possible d'intégrer (6.26) sur ces variables pour obtenir

$$\int p(\Gamma)d\Gamma = \int \frac{8\pi^2 r^2 v_t}{N} f(r, v_r, v_t) dr dv_t dv_r \tag{6.27}$$

Dans notre modèle, la fonction de distribution ne dépend même que de Q

$$f = f(Q) \quad \text{avec} \quad Q = \frac{1}{2}v_r^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{r_a^2} \right) v_t^2 + \psi(r) \tag{6.28}$$

r , v_r et v_t sont donc des variables aléatoires liées, il est toutefois possible de procéder à un changement de variables qui aura pour but de les séparer. On pose

$$\begin{aligned}
 v_r &= R \cos \beta \\
 v_t \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_a^2}} &= R \sin \beta
 \end{aligned}$$

ainsi nous avons $Q = R^2/2 + \psi(r)$. Le jacobien de la transformation se calcule aisément

$$\frac{D(r, v_r, v_t)}{D(r, R, \beta)} = \frac{R}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r_a^2}}} \tag{6.29}$$

Ainsi, la fonction de distribution sépare ses variables en

$$f(r, v_r, v_t) \frac{8\pi r^2 v_t}{N} = f \left(\frac{R^2}{2} + \psi(r) \right) \frac{8\pi^2 r^2 R^2 \sin \beta}{N \left(1 + \frac{r^2}{r_a^2} \right)} dr dR d\beta \tag{6.30}$$

La variable β est indépendante de R et r , (6.30) nous fournit donc les fonctions de distribution marginales

$$\begin{aligned}
 p(\beta)d\beta &= \frac{\sin \beta}{2} d\beta \\
 p(r, R)drdR &= \frac{16\pi^2 r^2 R^2}{1 + \frac{r^2}{r_a^2}} f \left(\frac{R^2}{2} + \psi(r) \right) drdR
 \end{aligned}$$

Nous obtenons, par une intégration directe, la fonction de répartition de β

$$P(\beta) = \int_0^\beta \frac{\sin \beta'}{2} d\beta' = \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (6.31)$$

Pour la variable R , il faut se donner une position r et utiliser la formule des probabilités conditionnelles, sachant que la loi de r n'est autre que la masse d'une coquille sphérique d'épaisseur dr

$$p(R | r) = \frac{p(r, R)}{p(r)} \quad \text{avec} \quad p(r) = \frac{4\pi r^2 \rho(r)}{M = 1} \quad (6.32)$$

Nous obtenons donc la fonction de répartition de R à $r = r_o$ fixé.

$$\begin{aligned} P(R | r = r_o) &= \frac{4\pi}{\rho(r_o) \left(1 + \frac{r_o^2}{r_a^2}\right)} \int_0^R R'^2 f\left(\frac{R'^2}{2} + \psi(r_o)\right) dR' \\ &= \frac{2\pi}{\rho(r_o) \left(1 + \frac{r_o^2}{r_a^2}\right)} \int_{\psi(r_o)}^{\psi(r_o) + \frac{R^2}{2}} \frac{f(Q) dQ}{\sqrt{2(Q - \psi(r_o))}} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Avant de calculer la vitesse de chacun des corps, il faudra donc les positionner dans l'espace afin de permettre le calcul de $P(R | r = r_o)$. Ce faisant, il vient pour un x aléatoire et uniformément réparti sur $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} R_i &= P^{-1}(x | r = r_o) \\ \beta_i &= 2 \sin^{-1}(\sqrt{x}) \\ \alpha_i &= 2\pi \cdot x \\ \text{puis} \\ v_{r\ i} &= R_i \cdot \cos \beta_i \\ v_{\theta\ i} &= \sqrt{1 + \frac{r_o^2}{r_a^2}} \cdot R_i \cdot \sin \beta_i \cos \alpha_i \\ v_{\phi\ i} &= \sqrt{1 + \frac{r_o^2}{r_a^2}} \cdot R_i \cdot \sin \beta_i \sin \alpha_i \end{aligned}$$

En règle générale, nos systèmes sont constitués de $N = 8192 = 2^{13}$ corps. Comme nous le verrons lors de l'étude du code dynamique, nous sommes peu limités par ce paramètre et pouvons aller jusqu'à 2^{14} ou 2^{15} sans trop pénaliser notre temps de calcul.

6.4 Caractéristiques physiques des modèles utilisés

Comme nous l'avons déjà précisé nos systèmes possèdent une masse totale $M = 1$, leur rayon maximum est fixé par la contrainte $\psi(0) = 1$, les unités sont alors définies telles que $G = 1$. En ajustant n et r_a nous pouvons donc faire varier deux quantités physiques importantes de nos systèmes : le rayon et le temps dynamique. A r_a fixé, le rayon augmente avec n , et, pour un n donné, le temps dynamique augmente avec l'anisotropie du système.

Tous nos systèmes sont relaxés, leur rapport du viriel ($2E_{cin}/E_{pot}$) vaut -1 . Il s'agit donc de systèmes en équilibre, ayant subi la phase de relaxation violente.

Nous avons représenté sur les figures 9 la fonction de distribution de nos modèles. Contrairement, au cas $n = 5$ précédemment traité, elle ne présente pas de point fixe. Nous avons en effet choisi de ne pas imposer le rayon de nos systèmes, celui-ci dépend donc de r_a lorsque n est fixé (comme on peut le voir sur les figures 6 représentant le potentiel)

Afin d'obtenir nos conditions initiales, nous avons généré conformément aux préceptes des deux sections précédentes, la position et la vitesse de 8192 particules pour chaque couple (n, r_a) . Nous avons testé sur les figures 10, le bon accord entre le profil de densité (à gauche) et les dispersions de vitesses (à droite) prévus par l'algorithme et les mêmes quantités calculées à partir des particules pour un modèle $n = 4$ et $r_a = 2$.

Figure 10 : Test de la génération des conditions initiales

L'algorithme Ossipkov-Merrit admet une limitation fondamentale. En effet, pour chaque valeur de n , il existe, comme le montrent les figures 9, une valeur critique pour le rayon d'anisotropie en deçà de laquelle la fonction de distribution devient négative dans une certaine région de l'espace des phases. Il s'agit là d'une simple illustration du fait qu'une distribution sphérique arbitraire de particules massives ne peut pas toujours être représentée par des orbites radiales. Nous avons toutefois considéré des modèles avec $r_a = 0,75$ ou $r_a = 1$, qui sont sujets à de tels problèmes. Dans ces deux cas, nous avons arbitrairement mis à zéro la fonction de distribution dans la région où elle était négative et seulement alors déduit la position et la vitesse des particules. Comme nous le verrons, dans nos discussions futures, nos conclusions concernant la stabilité de tels systèmes fortement anisotropes ne diffèrent pas de celles obtenues pour de véritables modèles issus de l'algorithme Ossipkov-Merrit.

De plus, il est important de noter que bien qu'elles soient toutes issues de la même variable aléatoire uniforme x , nos particules ont été initialisées indépendamment les unes des autres. La fonction de distribution effective (issue des particules) est donc légèrement perturbée par rapport à une pure distribution d'équilibre. Cette perturbation est due à une fluctuation Poissonienne que notre mécanisme de synthèse introduit dans la densité du système. L'évolution dynamique de chacune de nos conditions initiales représente donc la réponse d'un système auto-gravitant sphérique anisotrope en équilibre soumis à une perturbation.

Chapitre 7

Evolution dynamique

La genèse de conditions initiales n'est pas un travail dynamique. Il s'agissait de représenter au mieux un profil de densité et une dispersion de vitesse correspondant à un objet auto-gravitant sphérique. Cet objet se trouve lorsque nous le créons numériquement dans un état d'équilibre virialisé. Si cet état est strictement atteint et si ce système ne subit rigoureusement aucune perturbation, il demeurera dans cet état jusqu'à la fin des temps.

Ces deux conditions ne peuvent évidemment pas être réalisées. Pour des raisons aussi nombreuses que variées, il devra faire face à toutes sortes de problèmes. Il est par exemple impossible de générer un système dont le rapport du viriel est exactement -1.

L'un des buts avoués de notre étude est de prédire et comprendre la stabilité de tels systèmes. Il s'agit donc de savoir quand, comment et pourquoi les systèmes que nous avons engendrés à un moment que nous choisissons comme origine du temps, vont évoluer dynamiquement.

Pour cela il faut se doter d'un outil permettant à ces conditions initiales de se mouvoir sous l'action de leur propre gravité.

7.1 Le problème et sa résolution numérique

Tant que l'on néglige les processus dissipatifs, notre étude se ramène essentiellement à un problème à N corps auto-gravitant. Sur ces échelles, la dynamique est purement newtonienne, la démarche numérique est alors la suivante : les conditions initiales sont définies par la donnée de positions et de vitesses de particules massives qui permettent de reproduire un champ de vitesse ou de densité observé, ou, comme c'est le cas dans notre approche, considéré théoriquement.

L'évolution de ces particules est alors supposée se faire uniquement par l'intermédiaire de la gravitation. Le champ de force étant connu, les particules sont déplacées, la résolution des équations du mouvement peut être faite en considérant plusieurs schémas d'intégration temporelle.

Un schéma très souvent utilisé pour sa stabilité, sa précision et sa vitesse est le schéma "saute-mouton" qui consiste à estimer par exemple les positions et les vitesses à un demi-pas de temps (δt) de différence. Ce schéma est exact à l'ordre deux en δt . Lorsque l'évolution l'exige nous devons être capable de modifier le pas de temps. Dans ce cas, d'autres schémas sont préférables comme le schéma "predictor-corrector". Récemment il a même été proposé un schéma "saute mouton" d'ordre quatre en δt permettant une modification du pas de temps en cours de simulation. Le code que nous avons mis en œuvre est de type "saute-mouton" classique, les processus physiques en jeu dans le cadre de nos simulations ne présentant pas de violentes variations temporelles.

Plusieurs algorithmes sont possibles pour calculer le terme d'interaction gravitationnelle.

Le potentiel gravitationnel engendré par N particules massives est donné par la relation

$$\Psi(r_j) = \sum_{i \neq j}^N \frac{Gm_i}{|r_i - r_j|} \quad (7.1)$$

La méthode la plus intuitive consiste à calculer exactement ce potentiel à chaque pas de temps. Pour reproduire une dynamique non collisionnelle, il est alors nécessaire de tenir compte d'un très grand nombre de particules. Afin de supprimer au mieux les effets de relaxation à deux corps, le potentiel gravitationnel est également lissé aux petites échelles de distance, ce qui signifie en fait que les particules ne sont pas ponctuelles, mais possèdent une extension finie ϵ . Le potentiel "adouci" s'écrit donc

$$\Psi(r) = \sum_{i \neq j}^N \frac{Gm_i}{\sqrt{|r_i - r_j|^2 + \epsilon^2}} \quad (7.2)$$

Les programmes correspondant sont rassemblés dans l'appellation code "Particule-Particule" (PP) ou tout simplement code N corps direct. Cependant, sur des machines scalaires ou vectorielles, le nombre de distances à calculer (d'ordre N^2) devient vite prohibitif. En définitive, il n'est pas possible alors sur ce type de machines de dépasser quelques milliers de particules.

Une première approximation au calcul direct de l'interaction gravitationnelle est envisagée dans les codes en arbre. Cette fois, l'espace est divisé en cellules cubiques hiérarchiques, chaque cellule contient une ou plusieurs particules. Si une cellule de taille σ et située à une distance d satisfait le critère $\sigma/d < \theta$, θ étant un paramètre donné, les particules de cette cellule sont traitées comme une seule "pseudo-particule" localisée au centre de masse de la cellule. θ est choisi inférieur à un pour diminuer les erreurs, et le nombre d'opérations croît cette fois comme $N \log N$ par évaluation de potentiel. L'architecture d'un tel algorithme est semblable à celle d'un arbre avec le tronc, les branches et les feuilles correspondant aux particules les plus éloignées. Cependant cet arbre est très différent à chaque pas de temps, c'est pourquoi le développement d'un programme efficace utilisant cette stratégie (tree-code) est très complexe, notamment sur machine parallèle. De plus, à grande distance les particules n'interagissent qu'avec la composante monopolaire ou quadripolaire du champ réel, ce qui ne suffit pas dans certains contextes.

Les termes d'interaction peuvent aussi être approximés en développant le potentiel gravitationnel sur une base tronquée de fonctions orthogonales adaptées à la géométrie du problème considéré. Il s'agit alors de l'approximation de type champ moyen. Lorsque le système considéré est essentiellement sphérique comme un amas globulaire par exemple, le potentiel est développé en harmoniques sphériques. Lorsque le système ne présente aucune symétrie particulière autre que la symétrie cartésienne, le potentiel est alors développé sur une base d'ondes planes, c'est à dire développé en série de Fourier. Ce type de stratégie fournit des programmes dit "particule-grille" (PM) a été très utilisé pour la formation des grandes structures de l'univers.

Une amélioration de l'approximation de champ moyen, uniquement développée en astrophysique consiste à corriger la dynamique à petite échelle d'un code PM par la dynamique calculée avec un code PP, on obtient alors un code "particule-particule, particule-grille" (P3M). Certains auteurs ont également développé des codes PM avec la possibilité de redéfinir localement la grille. Malheureusement, l'effondrement intrinsèque à la gravitation est fortement inhomogène voire chaotique pour les grandes structures, on ne sait donc pas a priori où et quand la grille doit être redéfinie.

La situation n'est donc pas très encourageante, sauf si l'on dispose comme c'est notre cas d'un super-ordinateur massivement parallèle : la Connection Machine sur laquelle nous avons pu utiliser la stratégie PP des codes N corps directs.

7.2 La Connection Machine

Deux des codes principaux que nous avons développés et mis en œuvre fonctionnent sur une Connection Machine (CM5). C'est en partie grâce à la puissance de calcul et à la souplesse d'utilisation de telles machines que nous avons pu mener à bien dans un temps raisonnable l'ensemble de nos investigations numériques.

Devant les spécificités inhérentes à de telles machines nous avons jugé bon de faire une petite présentation des architectures informatiques massivement parallèles et plus spécialement de la CM5 que nous avons utilisé.

La première Connection Machine, CM2 (puis CM200), était constituée d'un réseau de petits microprocesseurs 1 bit peu performants mais en très grand nombre (de 8192 à 65536 par CM2). La nouvelle génération CM5 est formée quant à elle, de microprocesseurs plus évolués (SPARC) en nombre plus restreint (de 16 à 128 par CM5).

Il existe à l'heure actuelle trois CM5 implantées en France, sur le Site expérimental en Hyper-parallélisme d'Arcueil (SEH), à l'Institut de Physique du Globe de Paris, et à l'INRIA de Sophia Antipolis. La totalité de nos simulations ont été effectuées au SEH.

7.2.1 Le parallélisme

L'une des avancées les plus notables de ces dernières années, dans la technologie des ordinateurs, est sans conteste, l'utilisation d'architectures de type parallèle dans l'organisation interne des machines. Il existe plusieurs types de structures parallèles mais deux seulement sont principalement utilisées.

- Le parallélisme de Contrôle (Control Parallelism : CP). Il s'agit d'effectuer plusieurs opérations simultanément sous le contrôle d'un superviseur qui gère le temps et les tâches dans le but de mener à bien l'exécution globale.
- Le parallélisme de données (Data Parallelism : DP). Il s'agit ici de faire effectuer plus ou moins la même opération en même temps par tous les microprocesseurs .

Ces deux modes d'utilisation des machines parallèles sont bien sûr disponibles sur CM5 et peuvent même être combinés. Dans la pratique, c'est le problème à résoudre qui conditionne l'utilisation de l'un de ces deux modes, mais bien souvent le parallélisme de données est préféré à son concurrent pour des raisons d'efficacité d'une part, mais surtout parce que les codes DP sont plus faciles à écrire et à mettre en œuvre que leur équivalent CP. Nos codes ont été développés en CM-FORTRAN et utilisent le parallélisme de données.

7.2.2 La programmation parallèle

Avant l'avènement de la CM5, la principale implémentation du parallélisme de données s'effectuait sous une architecture SIMD (Simple Instruction, Multiple Data). A la base de la CM2, l'architecture SIMD s'est révélée d'une puissance insoupçonnée. Des objets parallèles (vecteurs, matrices, ...) comprenant des centaines ou des milliers d'éléments sont répartis sur les microprocesseurs de la machine, un élément par processeur, qui effectuent alors tous la même opération. La différence avec une machine classique (non parallèle) est alors évidente, alors qu'il fallait écrire

```
real A(100,100)
real B(100,100)
real C(100,100)
integer i,j
```

```

Do i = 1,100
  Do j = 1,100
    A(i,j) = 1.
    B(i,j) = 2.
    C(i,j) = A(i,j) + B(i,j)
  End do
End do

```

et attendre 100x100 cycles d'une machine série, il suffira d'écrire

```

real ARRAY(100,100) : A,B,C
integer i,j
A(:, :) = 1.
B(:, :) = 2.
C(:, :) = A(:, :) + B(:, :)

```

et attendre 1 cycle de CM2 ... Toutefois, architecture SIMD et programmation en parallélisme de données ne sont pas synonymes, et, il est possible d'imaginer une architecture plus évoluée à la base d'une machine plus performante.

Imaginons la procédure données parallèle suivante,

```

real ARRAY(100,100) : A,B,C
...
Where ( A(:, :) = 0.)
  A(:, :) = B(:, :)
Else Where
  A(:, :) = C(:, :)
End Where

```

dans laquelle, et en si peu de temps, les composants nuls (resp. non nuls) de la matrice A sont remplacés par les composants correspondants de la matrice B (resp. C).

Dans le cadre d'une architecture SIMD, un tel code exécute la branche *Where* pour les éléments nuls de A lors d'une première phase, puis, dans un deuxième temps exécute la branche *ElseWhere* pour les éléments non nuls. Une architecture MIMD (Multiple Instruction Multiple Data), à la base de la CM5 notamment, effectue quant à elle les deux branches de la boucle simultanément. Il est remarquable de noter que ces modifications de fonctionnement sont transparentes vis-à-vis de l'écriture du programme elle-même, seules sont modifiées la structure interne et les performances de la machine.

Bien d'autres exemples permettraient de montrer les avantages et finesses de la programmation parallèle mais là n'est pas notre but.

Nantis de ces quelques rudiments nous pouvons à présent exposer le schéma du code d'évolution dynamique que nous avons utilisé.

7.3 Le code dynamique Alimi-Scholl

Ce code a été développé par Jean-Michel Alimi et Hans Scholl dans le cadre de la formation des grandes structures de l'univers, il est donc capable de prendre en compte l'expansion cosmologique. Dans notre étude de la stabilité d'un système auto-gravitant, cette expansion est strictement négligeable car nous ne nous intéressons qu'à des objets déjà évolués tels que les galaxies ou les amas globulaires. Toutefois, la nature gravitationnelle du problème reste identique.

Le code a initialement été développé sur une machine SIMD, comme la CM2 ou la CM200, mais il est resté très performant lors de notre utilisation sur la CM5. L'algorithme simple utilisé

dans ce code est le suivant : la position de la particule (i) est associée au processeur (Pi), nous répliquons ensuite le contenu de chaque processeur. Les positions dupliquées sont alors commutées vers le processeur voisin, chaque processeur contient donc dans sa mémoire la position de deux particules différentes, le module de la différence de ces deux données fournit la distance de ces particules, on décale d'un cran supplémentaire les positions dupliquées pour avoir un nouveau jeu de distances... en N étapes on obtient la distance entre toutes les particules. Par analogie on peut penser à une roue mobile de positions, concentrique avec une roue fixe de positions, chaque décalage entre les processeurs correspondant à un tour de roue de $360/N$ degrés. Cet algorithme est aussi connu sous le nom d'Orreri.

Figure 11 : Algorithme Orreri

La distance entre tous les corps ainsi calculée, on en déduit le potentiel gravitationnel vu par chaque corps grâce à la relation (7.2). Le gradient de ce potentiel fournit la force subie par chaque particule causée par l'interaction gravitationnelle de toutes les autres. Le principe fondamental de la dynamique newtonienne vient alors nous donner l'accélération reçue par chaque particule, ce qui permet de déplacer les particules en position et en vitesse. En effet si δt est un intervalle de temps très faible devant les caractéristiques temporelles du système (typiquement $\delta t = T_d/20$) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(t_o + \frac{\delta t}{2}) &= \mathbf{r}_i(t_o) + \frac{\delta t}{2} \mathbf{v}_i(t_o) \\ \mathbf{v}_i(t_o + \delta t) &= \mathbf{v}_i(t_o) + \delta t \cdot \mathbf{a}_i(t_o) \\ \mathbf{r}_i(t_o + \delta t) &= \mathbf{r}_i(t_o + \frac{\delta t}{2}) + \frac{\delta t}{2} \mathbf{v}_i(t_o + \delta t) \end{aligned}$$

où $\mathbf{r}_i(t)$, $\mathbf{v}_i(t)$ et $\mathbf{a}_i(t)$ représentent respectivement la position, la vitesse et l'accélération de la particule i à l'instant t . Cet algorithme revient donc à négliger les corrections en δt^2 . En répétant cet algorithme k fois, nous faisons évoluer le système sous l'effet de sa propre gravitation pendant un temps de $k \cdot \delta t$.

Le contrôle du système est assuré par une vérification de la bonne conservation de l'énergie. Les performances atteintes par le code et la machine se sont montrées à la hauteur de nos espérances : nous avons fait évoluer chacune de nos conditions initiales pendant sur une période équivalente à 20 temps dynamiques (du système initial) résolus en 10000 pas de temps. Chaque pas de temps prenant moins de 4 secondes sur la Connection Machine 5 (32 nœuds) à notre disposition, une évolution complète dure en moyenne environ 10 heures. La conservation de l'énergie est vérifiée en deçà de 0,01%.

L'ensemble de ces performances font de nos expériences les simulations les plus précises réalisées à ce jour, que ce soit pour l'algorithme utilisé (somme directe) ou pour la résolution choisie.

Chapitre 8

Résultats numériques

La première série de résultats que nous allons présenter consiste principalement à mettre en évidence l'instabilité dite d'orbites radiales. Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, ce phénomène a déjà longuement été évoqué par de nombreux auteurs, aussi bien sur le plan analytique [Antonov 1973] que sur le plan numérique [Barnes *et al.* 1986], [Palmer & Papaloizou 1986] et bien d'autres. Nous avons toutefois choisi de refaire ce type de simulations dans deux buts distincts : tout d'abord cette instabilité est le principal fait dynamique intervenant ou non dans la vie d'un système auto-gravitant sphérique anisotrope, il est donc fondamental de la comprendre et surtout de la prévoir, nous avons donc décidé d'effectuer des simulations numériques de ce phénomène en utilisant le schéma le plus adapté et une très grande résolution afin d'obtenir les résultats les plus fiables possibles.

Sur un autre plan, un effort tout particulier a été effectué pour le respect des hypothèses physiques que ce problème recèle en son sein. Pour cela, nous avons tout d'abord pris grand soin de veiller à la conservation de l'énergie totale de tous nos systèmes pendant leur évolution dynamique. Cette condition est en effet à la base de l'hypothèse non dissipative qui simplifie grandement les équations d'évolution de nos systèmes (Vlasov au lieu de Fock-Planck). C'est aussi pour cela que nous n'avons effectué qu'un "voyage" correspondant à un vingtaine de temps dynamiques, et non pas plusieurs centaines de ce même temps comme [Palmer & Papaloizou 1986] par exemple. Enfin, nous avons choisi de limiter l'anisotropie de nos modèles en utilisant un r_a minimum de 0,75, il est en effet clair qu'un système presque purement radial est forcément collisionnel en son centre, si les particules possèdent une extension finie. Ainsi, les modèles construits à partir de la donnée de leur fonction de distribution uniquement (par exemple $f_o(E, L^2) = E^\alpha L^{2\beta}$ pour [Barnes *et al.* 1986]) sont évidemment non réalistes pour β arbitrairement petit. Cette limitation n'apparaissant pas explicitement (comme c'est le cas pour nos systèmes) nous ne sommes pas en mesure d'interpréter l'évolution dynamique de tels modèles.

8.1 (In)stabilité morphologique

8.1.1 Origine physique de l'instabilité

Considérons une particule d'un système auto-gravitant sphérique, possédant un très faible moment angulaire ($L \simeq 0$). Dans la limite où $L = 0$, nous avons vu lors du premier chapitre (1.4.1) que le rapport K_ν de sa fréquence radiale à sa fréquence azimuthale prenait alors la valeur extrême 2. Ainsi donc l'orbite de cette particule se referme en une révolution autour du centre du système. Si la particule possède un très faible moment cinétique, nous aurons alors $K_\nu \lesssim 2$, l'orbite précède dans un plan.

Supposons à présent que dans ce plan orbital, il existe une direction privilégiée par une certaine perturbation (petit contraste de densité, écart à la sphéricité, nature de la perturbation,...). Etant donné que la particule précède doucement vers cette perturbation, elle ressent un couple qui vient augmenter son moment cinétique et la faire précéder plus rapidement. Lorsque la particule traverse la barre formée par la direction privilégiée, elle voudrait continuer sa précession en s'éloignant de cette région mais le couple issu de la perturbation du potentiel a maintenant changé de signe et contribue au ralentissement de la particule.

Supposons à présent que l'amplitude de cette perturbation croît au cours du temps, le couple qui augmente la vitesse de précession est donc de plus faible amplitude que celui qui la ralentit. La particule ayant traversé la région sensible ressent alors une nette perte de moment cinétique, si ce dernier est initialement très faible, cette perte peut même inverser le sens de l'orbite, et la particule, au lieu de continuer son chemin, revient sur ses pas. Si l'amplitude continue à croître, la particule se retrouve donc piégée dans cette région.

Le piégeage de telles particules à très faible moment cinétique dans cette région contribue lui-même à l'augmentation de l'amplitude de la perturbation qui augmente le pouvoir d'attraction du piège...

L'amplitude de la perturbation déstabilisante est initialement très faible (car le système est sphérique et il n'existe pas de direction privilégiée), pour souffrir d'une telle instabilité, un système doit donc posséder des particules sur des orbites quasiment radiales ($\mathbf{L} \simeq 0$) uniformément réparties pour que celles-ci puissent interagir avec le faible piège initialement mis en place en un endroit arbitraire du système.

Un système initialement sphérique présentant une forte proportion de particules sur des orbites radiales va donc se déformer morphologiquement pour devenir allongé dans une certaine direction, c'est-à-dire elliptique.

8.1.2 La notion de rapports d'axes et leurs évolution

A la lueur des considérations physiques précédentes, nous attendons donc qu'un système sphérique en équilibre souffrant d'instabilité d'orbites radiales se déforme au cours du temps, pour évoluer vers une configuration géométrique non sphérique, vraisemblablement ellipsoïdale. Dans ces conditions l'une des meilleures approches existant pour caractériser cette déformation morphologique consiste en l'étude de l'évolution de la matrice d'inertie du système au cours du temps. Cette matrice symétrique est définie par (cf. [Landau & Lifchitz 1966] par exemple) :

$$\mathcal{I} \triangleq \begin{bmatrix} I_x = \sum_{i=1}^N m(y_i^2 + z_i^2) & I_{xy} = -\sum_{i=1}^N m x_i y_i & I_{xz} = -\sum_{i=1}^N m x_i z_i \\ I_{yx} = I_{xy} & I_y = \sum_{i=1}^N m(x_i^2 + z_i^2) & I_{yz} = -\sum_{i=1}^N m y_i z_i \\ I_{zx} = I_{xz} & I_{zy} = I_{yz} & I_z = \sum_{i=1}^N m(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

dans le cas d'un système constitué de N particules de coordonnées spatiales $\{x_i, y_i, z_i\}$ pour $1 \leq i \leq N$, et possédant toutes la même masse m . Elle contient toutes les informations concernant les symétries éventuelles, apparentes ou non, du système qu'elle caractérise.

Par exemple, dans un système sphérique en prenant pour origine le centre de ce dernier, les particules sont réparties uniformément autour de l'axe des x , ainsi le moment d'inertie I_{yx} par rapport à cet axe est nul. L'invariance par rotation de la sphère permet alors d'affirmer que le moment d'inertie d'un système sphérique par rapport à n'importe quel axe est nul. Dans ce cas la matrice $\mathcal{I}$ est donc diagonale et l'on pourrait aussi facilement montrer que ses trois composantes non nulles sont identiques.

Dans le cas d'un système quelconque, il est toujours possible de diagonaliser $\mathcal{I}$ car il s'agit d'une matrice symétrique. Les trois directions propres associées à cette diagonalisation sont

orthogonales et correspondent aux trois principaux axes de symétrie du système. Les trois valeurs propres (qui sont ici toujours réelles) permettent d'évaluer l'écart entre le système étudié et le système parfaitement symétrique : la sphère. Par exemple si $\mathcal{I}$ possède une valeur propre double et une simple, le système est sans doute ¹ un ellipsoïde.

Afin de caractériser "l'écart à la sphère" d'un système tri-dimensionnel, il est donc pratique d'utiliser les rapports d'axes définis de la façon suivante :

Définition 4 Soit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ les trois valeurs propres de la matrice d'inertie $\mathcal{I}$ d'un système, on appelle rapports d'axes de ce système les quantités a_1 et a_2 telles que

$$a_1 \triangleq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{et} \quad a_2 \triangleq \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \quad (8.2)$$

Ces deux quantités, toujours définies car une valeur propre n'est jamais nulle, vérifient donc la relation $a_1 \leq 1 \leq a_2$.

Dans le but de mettre en évidence le fait qu'un de nos systèmes se déforme sous l'effet de l'instabilité d'orbites radiales, nous allons donc suivre le comportement de ses rapports d'axes au cours de son évolution dynamique. Initialement sphériques, nos systèmes verront ou non leur rapport d'axe s'éloigner de la valeur 1, en fonction de la violence de l'instabilité. L'utilisation de ces deux grandeurs pour caractériser cette instabilité est assez courante ([Palmer & Papaloizou 1986], [May & Binney 1986] et bien d'autres), mais force est de constater qu'aucun de ces auteurs ne donne de définition précise les concernant, c'est pourquoi nous avons tout au moins en ce qui nous concerne tenu à le faire.

8.1.3 De l'utilisation du rapport du viriel

Nous avons vu dans quelle mesure l'évaluation des rapports d'axes permettait de mettre en évidence ou non une instabilité morphologique. Toutefois, cette analyse est purement quantitative et il semble hardi au seul jugement de cette dernière, de prétendre différencier distinctement un modèle faiblement instable d'un modèle stable. Il existe un autre moyen, plus fondamental mais beaucoup plus onéreux, de quantifier la stabilité de l'équilibre d'un système : il suffit de suivre l'évolution de son rapport du viriel. En effet, initialement en équilibre le système est relaxé son rapport du viriel vaut -1. Si l'évolution conduit alors à une instabilité, le dit rapport n'a plus aucune raison de valoir -1, sauf bien entendu après la phase d'instabilité si le système se relaxe à nouveau. Si par contre le système reste relaxé ou stable au cours de son évolution, les conditions d'applications du théorème du viriel restent valables, et le rapport associé reste à sa valeur initiale de -1. Dans le cadre de notre schéma d'intégration numérique de l'évolution dynamique (somme directe) la connaissance de l'énergie potentielle du système est effective avec une très grande précision, il est donc possible de suivre avec la même précision l'évolution du rapport du viriel. Dans le cadre d'un autre schéma d'intégration, l'approximation qu'il faut effectuer pour le calcul du potentiel gravitationnel rend en pratique le rapport du viriel inutilisable car trop perturbé. L'utilisation couplée des rapports d'axes et du rapport du viriel devrait donc nous permettre dans de bonnes conditions de statuer sur la stabilité de nos systèmes. Les figures ci-après représentent l'évolution dynamique des rapports d'axes et du rapport du viriel pour des modèles générés via l'algorithme présenté au chapitre Ossipkov-Merritt introduit précédemment.

¹Le système peut aussi se présenter sous d'autres configurations : un cylindre, une barre de section carrée, etc. Nous pourrions le savoir en étudiant plus en détail ces valeurs propres

Figures 12

Evolution des rapports d'axes (Bleu) et des rapports du viriel(Rouge)

Indice Polytrorique $n = 3.5$

Rayon d'anisotropie $r_a = 0.75$ (en haut à gauche), 1, 2, 5, 10 et 100

Figures 13

Evolution des rapports d'axes (Bleu) et des rapports du viriel(Rouge)

Indice Polytrorique $n = 4$

Rayon d'anisotropie $r_a = 0.75$ (en haut à gauche), 1, 2, 5, 10 et 100

Figures 14
 Evolution des rapports d'axes (Bleu) et des rapports du viriel(Rouge)
 Indice Polytropique $n = 4.5$
 Rayon d'anisotropie $r_a = 0.75$ (en haut à gauche), 1, 2, 5, 10 et 100

8.1.4 Contenu physique de l'évolution

Il est avant tout important de mettre en évidence le fait que les systèmes dont nous avons représenté l'évolution dynamique sur les figures précédentes possèdent des caractéristiques phy-

siques (taille, temps dynamique, profil de densité) très variées (cf. annexe D).

La principale remarque qu'il est possible de faire au vu des figures précédentes est qu'elles ne remettent pas en cause l'ensemble des simulations déjà effectuées par d'autres auteurs dans ce domaine (voir [de Zeeuw & Franx 1991] pour une revue de ces résultats). En effet, tous les systèmes fortement anisotropes (possédant un faible rayon d'anisotropie : $r_a \leq 2$) voient leurs rapports d'axes s'éloigner de façon significative de l'unité. Dans tous les cas le rapport du viriel nous indique que ces systèmes, initialement sphériques se déstabilisent pour atteindre, en une dizaine de temps dynamiques, un nouvel état d'équilibre stable non sphérique (ellipse). Afin de mieux juger de cette déformation nous avons représenté ci-dessous un contour iso-densité des conditions initiales (à gauche) d'un système $n = 4$ et $r_a = 0.75$, et du même système après $20T_d$ d'évolution (à droite).

Figure 15 : Visualisation de l'instabilité

Les systèmes moins anisotropes ($r_a > 2$) ne présentent pas quant à eux, les mêmes caractéristiques. En effet, après une rapide réorganisation initiale, ils demeurent tous dans la configuration sphérique qui était la leur initialement. La "respiration" se produisant dans les toutes premières étapes de l'évolution (et qui se produit approximativement à rapport du viriel constant) est le résultat du fait que la fonction de distribution n'est pas initialement strictement monotone. En effet, cette condition imposée par la nature physique de tels système n'a aucune raison d'être respectée par les perturbations poissoniennes qui apparaissent obligatoirement lors de la genèse de nos systèmes. Ce type de petite relaxation (qui n'est pas une instabilité car le rapport du viriel n'est pas affecté) est d'ailleurs l'un des bénéfices substantiels que permet d'apporter la grande résolution de notre calcul. En effet, il est facile de se convaincre qu'un δt plus grand, un nombre de particules plus faible, ou un schéma d'intégration non direct aurait pour effet de lisser ce phénomène. Par exemple, dans le cas de [Palmer & Papaloizou 1986] la méthode d'intégration utilisée est celle de type champ moyen (cf. chapitre 7) où le potentiel (et donc la fonction de distribution) est décomposé sur les premières harmoniques sphériques pour permettre la résolution de l'équation de Poisson. Ne faisant appel à aucune particule, cette limite continue ne peut pas faire apparaître un tel phénomène directement issu de la nature particulière des systèmes que nous prenons en compte. C'est pourquoi, dans ce cas précis, l'évolution des rapports d'axes ne montre pas un tel réarrangement.

Sous le jour des développements analytiques obtenus dans la deuxième partie de ce travail, et en accord avec les faits expérimentaux que nous venons de présenter, nous allons montrer main-

tenant que nous sommes capables d’interpréter “microscopiquement” l’ensemble du comportement macroscopique des systèmes que nous étudions. Nous verrons notamment, comment il est possible de construire, à partir de la donnée de conditions initiales d’un système auto-gravitant sphérique non collisionnel en équilibre, un paramètre de stabilité efficace.

8.2 Propriétés du générateur de perturbation et stabilité

L’ensemble de la section précédente avait pour objet l’analyse dynamique et numérique d’un système auto-gravitant. Nous nous donnions un tel système dans un état relaxé et stationnaire, puis nous le laissions évoluer sous l’action de sa propre gravité. Malgré tout le soin que nous avons essayé de porter à notre étude (Code PP), nous étions placés devant le fait accompli. Nous avons en effet pu constater que les système dont les étoiles sont en grande majorité sur des orbites radiales présentent une instabilité morphologique. Nous sommes d’ailleurs loin d’être les premiers à mettre en évidence ce phénomène, la seule originalité de notre travail se situant dans l’utilisation d’un calcul direct du terme d’interaction gravitationnelle à chaque étape de l’évolution.

Nous avons même pu expliquer le mécanisme de cette instabilité (e.g. [Antonov 1962], et [Palmer 1994a]), mais force est de constater que nous ne sommes pas, à cet instant de notre étude, en possession d’un paramètre prédictif de stabilité. Il s’agit d’ailleurs d’un problème épineux, l’une des seules approches frontales de cette quête se trouve rassemblée dans un ouvrage ([Fridman & Polyachenko 1984]), qui considère le rapport

$$\tau \triangleq \frac{\langle E_{ct} \rangle}{2 \langle E_{cr} \rangle} \quad (8.3)$$

de l’énergie cinétique moyenne des étoiles évoluant sur des orbites tangentielles à celle des étoiles évoluant sur des orbites radiales.

Fridmann et Polyachenko affirment que tout système possédant un $\tau > 1,7 \pm 0,4$ est instable. Le paramètre τ évoqué est simple à calculer, mais le critère qui en dépend a été mis en défaut par nos simulations ainsi que par celles de ([Allen *et al.* 1990]), qui affirment pouvoir générer des conditions initiales en équilibre instable avec un τ arbitrairement proche de 1.

Dans la suite de notre étude, nous allons montrer comment un tel paramètre de stabilité simple à calculer peut être déduit de notre approche analytique.

8.2.1 Perturbations Euleriennes

Dans le cadre de la physique statistique, il est toujours possible de décomposer la fonction de distribution d’un système quelconque de la manière suivante

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = f_o(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \delta f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (8.4)$$

Le terme f_o étant une fonction stationnaire (d’équilibre lorsque ce dernier existe) du système et $\delta f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ représentant la perturbation eulérienne subie par ce même système. En ce qui nous concerne, nous supposons qu’il existe un instant t_o (choisi comme temps initial), tel que l’on puisse écrire

$$\int f_o^2 d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} \triangleq 1 \quad \gg \quad \int \delta f^2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t = t_o + \delta t) d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} \triangleq \epsilon \quad (8.5)$$

ceci est toujours possible en choisissant δt suffisamment petit.

Nous étudions donc la stabilité linéaire du système. C'est-à-dire que nous allons étudier les termes d'ordre le plus faible dans les développements en ϵ .

Nous avons vu, lors de nos développements analytiques, comment développer une fonctionnelle dans un contexte donné. En prenant le cas d'un système dynamique soumis à une perturbation de générateur g , nous pouvons écrire

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = f_o + \mathcal{P}_3[g, f_o]t + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (8.6)$$

L'information sur la stabilité linéaire du système est donc contenue dans le terme $\mathcal{P}_3[g, f_o]$.

8.2.2 Le message analytique

Dans le cadre d'un système sphérique, nous savons que la fonction de distribution stationnaire ne dépend que des deux intégrales premières que sont l'énergie E et le module du moment cinétique L^2 , ainsi grâce à la propriété de décomposition de $\mathcal{P}_3$ (cf. annexe C), nous aurons

$$\mathcal{P}_3[g, f_o] = \frac{\partial f_o}{\partial E} \mathcal{P}_3[g, E] + \frac{\partial f_o}{\partial L^2} \mathcal{P}_3[g, L^2] \triangleq f_E \mathcal{P}_3[g, E] + f_{L^2} \mathcal{P}_3[g, L^2] \quad (8.7)$$

Le message que nous a fait parvenir notre approche analytique sur les systèmes sphériques est triple :

- Les systèmes isotropes

La fonction de distribution de tels systèmes ne dépend que de E . Il est de notoriété publique que tous les systèmes isotropes tels que $f_E < 0$ sont linéairement stables contre toutes les perturbations (voir notre introduction). Quant à nous, constatons que dans ce cas $f_{L^2} = 0$ par la force des hypothèses, et que, par conséquent, nous avons

$$\mathcal{P}_3[g, f_o] = f_E \mathcal{P}_3[g, E] \quad (8.8)$$

Nous constatons donc que toutes les perturbations susceptibles de s'appliquer à un système isotrope sont préservantes au sens introduit au chapitre 2. Le théorème de stabilité contre de telles perturbations est donc vérifié dans ce cas particulier.

- Les systèmes anisotropes

Nous avons pu montrer que les systèmes sphériques anisotropes tels que $f_E < 0$ et $f_{L^2} < 0$ sont stables contre toutes les perturbations préservantes, c'est-à-dire engendrées par g tel que $\mathcal{P}_3[g, L^2] = 0$.

- Les systèmes purement radiaux

Nous savons que la fonction de distribution des systèmes dont toutes les étoiles sont sur des trajectoires radiales s'écrit $f_o(E, L^2) = \phi(E)\delta(L^2)$, où ϕ est une fonction quelconque. De plus, si on utilise ce type de fonction dans (8.7), il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3[g, f_o] &= \phi_E \mathcal{P}_3[g, E] + \delta'(L^2) \mathcal{P}_3[g, L^2] \\ &= \phi_E \mathcal{P}_3[g, E] - \delta(L^2) \frac{\mathcal{P}_3[g, L^2]}{L^2} \end{aligned} \quad (8.9)$$

toute mesure de ϵ rend donc le terme en $[g, L^2]$ prépondérant. Il est même possible de montrer que dans ce cas, toutes les perturbations préservantes sont nulles.

D'autre part, comme nous l'avons vu, ces systèmes présentent une instabilité.

Nous pouvons donc d'ores et déjà soupçonner l'existence d'une relation entre $\mathcal{P}_3[g, E]$ et $\mathcal{P}_3[g, L^2]$ d'une part et un paramètre de stabilité d'autre part.

Le contenu physique de ces deux crochets est clair. En effet, la combinaison de (8.6) et (8.7) nous donne

$$\delta f = f_E \mathcal{P}_3[g, E] + f_{L^2} \mathcal{P}_3[g, L^2] \quad (8.10)$$

ainsi, $\mathcal{P}_3[g, E]$ est la différentielle de l'énergie par particule et $\mathcal{P}_3[g, L^2]$ est la différentielle du module du moment cinétique carré. Ces deux quantités représentent donc des variations, leur étude peut paraître non triviale, mais le fait qu'il s'agisse de quantités moyennes va grandement la simplifier.

Par opposition avec des méthodes analytiques, dans notre approche numérique, nous possédons toute l'information sur les particules, nous sommes en mesure de connaître la position et la vitesse de chaque étoile à chaque pas de temps de notre simulation. Nous pouvons donc former la fonction de distribution de Liouville (à $6N+1$ variables) ou celle de Vlasov (à $6+1$ variables) (voir introduction). De toute manière si N est très grand, ces deux fonctions conféreront au système les mêmes propriétés statistiques (hypothèse de base de la physique statistique).

Si l'on suppose négligeable les corrélations, une grandeur donnée (Energie cinétique, moment dynamique...) calculée exactement pour chaque particule (en utilisant la fonction de distribution de Liouville ou directement la position et la vitesse de cette dernière) aura les mêmes propriétés statistiques que la même grandeur calculée en moyenne à l'aide de la fonction de distribution de Vlasov.

C'est exactement de ce genre de remarque dont nous avons besoin. En effet, si nous considérons les fonctions $\mathcal{C}_\alpha^{ge}$ et $\mathcal{C}_\alpha^{gl}$ définies par

$$\mathcal{C}_\alpha^{ge} := \mathcal{P}_3[g, E]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}=\mathbf{p}_\alpha} = (\nabla_{\mathbf{q}} g \cdot \nabla_{\mathbf{p}} E)_\alpha - (\nabla_{\mathbf{p}} g \cdot \nabla_{\mathbf{q}} E)_\alpha \quad (8.11)$$

$$\mathcal{C}_\alpha^{gl} := \mathcal{P}_3[g, L^2]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}=\mathbf{p}_\alpha} = (\nabla_{\mathbf{q}} g \cdot L^2)_\alpha - (\nabla_{\mathbf{p}} g \cdot \nabla_{\mathbf{q}} L^2)_\alpha \quad (8.12)$$

calculées pour chaque particules et traitées comme des variables aléatoires, ces deux fonctions auront les mêmes propriétés statistiques que $\mathcal{P}_{3l}[g, E]$ et $\mathcal{P}_{3l}[g, L^2]$ qui apparaissent dans le critère de stabilité du chapitre précédent et qui semblent reliés à l'éventuel paramètre de stabilité.

Le seul problème restant à résoudre est celui du calcul du générateur g de la perturbation intervenant dans $\mathcal{C}_\alpha^{ge}$ et $\mathcal{C}_\alpha^{gl}$. Le calcul de g lui-même doit être redoutable, mais nous n'avons besoin que des dérivées partielles de cette fonction par rapport à ses deux variables. Le début de notre deuxième partie, nous indique la marche à suivre. Si l'on considère la transformation canonique (perturbation) telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &\longrightarrow \mathbf{q} + \delta \mathbf{q} \\ \mathbf{p} &\longrightarrow \mathbf{p} + \delta \mathbf{p} \end{aligned}$$

par définition de g nous aurons alors

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} = \delta \mathbf{p} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} = -\delta \mathbf{q} \quad (8.13)$$

Pour obtenir les deux dérivées de g pour chaque point nous n'avons plus qu'à réaliser effectivement $\delta \mathbf{q}$ et $\delta \mathbf{p}$. En effet si $\delta \mathbf{q}_\alpha(t)$ et $\delta \mathbf{p}_\alpha(t)$ sont la position et l'impulsion d'une étoile à l'instant t et si δt est un intervalle de temps très petit ($\delta t \ll T_d$ par exemple), en utilisant (8.13) nous aurons donc

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = -(\mathbf{p}_\alpha(t + \delta t) - \mathbf{p}_\alpha(t)) \quad (8.14)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = (\mathbf{q}_\alpha(t + \delta t) - \mathbf{q}_\alpha(t)) \quad (8.15)$$

Le calcul de $\mathcal{C}_\alpha^{ge}$ et $\mathcal{C}_\alpha^{gl}$ n'est donc plus qu'une formalité.

Calcul de $\mathcal{C}_\alpha^{ge}$ et utilisation de $\mathcal{C}^{ge}$

Pour calculer $\mathcal{C}_\alpha^{ge}$ il suffit de prendre en compte nos dernières remarques et d'expliciter (8.11)

$$\mathcal{C}_\alpha^{ge} \triangleq (\nabla_{\mathbf{q}} g \cdot \nabla_{\mathbf{p}} E)_\alpha - (\nabla_{\mathbf{p}} g \cdot \nabla_{\mathbf{q}} E)_\alpha \quad (8.16)$$

$$= \left(\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \delta \mathbf{p} \right)_\alpha + (\nabla_{\mathbf{q}} \psi \cdot \delta \mathbf{q})_\alpha \quad (8.17)$$

$$= \left(\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot (\mathbf{p}(t + \delta t) - \mathbf{p}) \right)_\alpha + (\nabla_{\mathbf{q}} \psi \cdot (\mathbf{q}(t + \delta t) - \mathbf{q}))_\alpha \quad (8.18)$$

Les positions et vitesses initiales sont fournies par notre générateur de modèle polytropique étendu. Les positions et vitesses décalées de δt sont calculées par le code PP d'évolution dynamique. Le calcul de la dérivée du potentiel est également effectué par ce code lors du schéma saute mouton ($\nabla_{\mathbf{q}} \psi = \mathbf{F} = m\mathbf{a}$), il ne reste plus qu'à effectuer les deux produits scalaires (en coordonnées cartésiennes par exemple) et le tour est joué.

La définition elle-même de $\mathcal{C}_\alpha^{ge}$ permet d'interpréter la variable aléatoire $\mathcal{C}^{ge}$. En effet, nous avons

$$\mathcal{C}_\alpha^{ge} \triangleq (\nabla_{\mathbf{q}} g \cdot \nabla_{\mathbf{p}} E)_\alpha - (\nabla_{\mathbf{p}} g \cdot \nabla_{\mathbf{q}} E)_\alpha \quad (8.19)$$

$$= \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p} \right)_\alpha + \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} \right)_\alpha \quad (8.20)$$

$$= \delta E_\alpha \quad (8.21)$$

ainsi une réalisation α de la variable $\mathcal{C}^{ge}$ représente la variation instantanée d'énergie vue par l'étoile α . Nous jubilons... En étudiant le signe de l'espérance mathématique de $\mathcal{C}^{ge}$ sur l'ensemble des α , nous allons déterminer le signe de la variation d'énergie Vlasovienne E que nous avons tant étudié analytiquement. Nous sommes donc a priori en mesure d'effectuer une étude numérique détaillée du Théorème d'Arnold sur la stabilité des systèmes en fonction du signe de la variation d'énergie du système.

Calcul de $\mathcal{C}_\alpha^{gl}$ et utilisation de $\mathcal{C}^{gl}$

Le calcul de $\mathcal{C}_\alpha^{ge}$ est encore plus simple. En effet en se plaçant en coordonnées sphériques, le module carré du moment cinétique s'écrit simplement $L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2 / \sin^2 \theta$ ainsi

$$\mathcal{C}_\alpha^{gl} \triangleq (\nabla_{\mathbf{q}} g \cdot \nabla_{\mathbf{p}} L^2)_\alpha - (\nabla_{\mathbf{p}} g \cdot \nabla_{\mathbf{q}} L^2)_\alpha \quad (8.22)$$

$$\triangleq 2 \left(\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} p_\phi^2 \delta \theta - \delta p_\phi p_\phi - \delta p_\theta p_\theta \right)_\alpha \quad (8.23)$$

Il suffit donc de vieillir de δt nos initiaux polytropes étendus pour obtenir $\mathcal{C}_\alpha^{gl}$. L'utilisation de la variable aléatoire $\mathcal{C}^{gl}$ est quant à elle plus élaborée que pour sa collègue énergétique. Il est clair que les propriétés statistiques de cette variable sont reliées à la nature préservante de la perturbation affectant le système. Mais quelle est la nature de ce lien ?

La solution se trouve dans la définition de la perturbation préservante. Une perturbation est dite préservante dans le cas sphérique anisotrope lorsqu'elle est engendrée par g tel que $\mathcal{P}_3[g, L^2] = 0$. Il faudra donc étudier $\mathcal{C}^{gl}$ dans un intervalle très proche de 0, et quantifier le nombre de particules

ayant $\mathcal{C}_\alpha^{gl} \simeq 0$ par rapport au nombre total de particules. Les systèmes pour lesquels la distribution de $\mathcal{C}^{gl}$ présente un maximum très élevé, et est très peu étalée autour de 0, seront en train de subir une perturbation préservante. Par contre, les systèmes dont la fonction de distribution de $\mathcal{C}^{gl}$ présente un maximum de faible amplitude, et est répartie sur un large intervalle autour de 0, seront sous l'influence d'une perturbation non préservante.

Sur un schéma la différence entre les deux types de perturbations est plus explicite.

Figure 16 : Distribution de $\mathcal{C}^{gl}$ pour une perturbation préservante (bleu) ou non (rouge)

Il faut donc à la fois prendre en compte le maximum de la distribution et sa largeur, la variance de $\mathcal{C}^{gl}$ ne suffit donc pas, le bon paramètre nous vient des statistiques descriptives, il s'agit de l'indice de Pearson γ_2 (cf. [Callot 1973]). Dans le cas d'une variable aléatoire discrète λ , d'espérance mathématique $\bar{\lambda}$ et dont l'ensemble des réalisations est $\mathcal{S} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ cet indice est défini par

$$\gamma_2(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \bar{\lambda})^4}{\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \bar{\lambda})^2\right)^2} - 3 \quad (8.24)$$

Pour des distributions de grande amplitude et très piquées (leptokurtiques), cet indice est élevé (typiquement > 2.5), pour des distributions aplaties et de faible amplitude cet indice est faible (typiquement < 1). Pour une distribution normale, cet indice s'annule. Toutefois la réciproque est fautive et une distribution possédant un indice de Pearson nul n'est pas forcément normale.

8.2.3 Analyse des conditions initiales

Nous sommes donc à présent en mesure de mettre en évidence pour chacun de nos modèles issus de l'algorithme Ossipkov-Meritt, les variables statistico-symplectiques $\mathcal{C}^{ge}$ et $\mathcal{C}^{gl}$.

Nous présentons tout d'abord un histogramme de ces deux variables. Sur les figures 17 nous avons représenté en bleu un histogramme de la distribution de $\mathcal{C}^{ge}$ dans le cas d'un modèle fortement anisotrope ($n=4.5$ et $r_a=0.75$), et en rouge un histogramme de la même variable dans le cas d'un modèle faiblement anisotrope ($n = 4.5$ et $r_a = 100$).

Figures 17 : Distribution de $\mathcal{C}^{ge}$ calculée pour $n=4.5$ et $r_a=0.75$ (rouge) et $r_a=100$ (bleu)
L'ordonnée représente le nombre de crochets

Comme prévu, la partie négative de la distribution est plus importante pour le modèle très anisotrope, qui subit statistiquement une variation d'énergie plus déstabilisante que son collègue moins anisotrope. Toutefois, les deux courbes montrent clairement que dans les deux cas la variation d'énergie possède une partie positive et une partie négative. Cette constatation qui peut paraître anodine est en fait le reflet de tous les problèmes que pose la modélisation analytique du problème de la stabilité de tels systèmes anisotropes. En effet, dans le cas simplificateur des modèles isotropes, nous avons vu que l'on pouvait relier la variation énergie au spectre de la perturbation, et montrer que ce spectre est réel. Tout ce travail est en fait possible grâce au fait que la variation d'énergie possède un signe constant (positif si $f_E < 0$). Dans notre cas anisotrope comme nous le voyons sur les figures 17, cette propriété n'est plus totalement respectée et la théorie s'effondre.

Nous allons tout de même voir comment notre approche numérique permet de "prolonger par continuité" l'approche analytique.

Nous présentons ensuite sur les figures 18, en bleu un histogramme de la distribution de $\mathcal{C}^{gl}$ dans le cas d'un système très anisotrope ($n=4.5$ et $r_a=0.75$), et en rouge un histogramme de la même variable dans le cas d'un modèle presque isotrope ($n = 4.5$ et $r_a = 100$).

Figures 18 : Distribution de $\mathcal{C}^{gl}$ calculée pour $n=4.5$ et $r_a=0.75$ (rouge) et $r_a=100$ (bleu)
L'ordonnée représente le nombre de crochet

Nous constatons comme prévu que le modèle fortement anisotrope présente une distribution de $\mathcal{C}^{gl}$ moins étroite et de plus faible amplitude que celle du modèle quasiment isotrope. Ce dernier semble donc subir un ensemble de perturbation plus préservante (au sens introduit lors de la définition 3 du chapitre 5) que son collègue radial.

Bien que relativement nettes, les propriétés intéressantes de $\mathcal{C}^{ge}$ et $\mathcal{C}^{gl}$ apparaissant sur les figures 17 et 18 peuvent être synthétisées à travers deux paramètres. Le premier de ces paramètres, le pourcentage de crochets négatifs ou en d'autres termes la probabilité pour que $\mathcal{C}^{ge}$ soit négatif,

viendra caractériser la nature de la variation d'énergie subie par le système. Le second, indice de Pearson γ_2 (cf. section précédente) de la variable aléatoire $\mathcal{C}^{gl}$ nous renseignera sur la propension du système à recevoir des perturbations préservantes.

Nous avons représenté sur les figures 19,20 et 21 ces deux paramètres en fonction du rayon d'anisotropie r_a de chacun des modèles dont nous avons étudié l'évolution dynamique ($n = 3.5, 4$ et 4.5 et $r_a = 0.75, 1, 2, 5, 10$ et 100). Pour calculer chacun des 6 points par courbe de chacune de ces figures nous avons généré 6 ensembles de conditions initiales (8192 particules) indépendantes de même indice polytropique et rayon d'anisotropie. Les points retenus pour tracer les courbes sont les valeurs moyennes sur ces 6 expériences de $P(\mathcal{C}^{ge} < 0)$ et $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$. La largeur des barres d'erreur portées sur ces courbes est de 3 écart-types, qui correspondent à 90% des réalisations.

Figure 19 : $n = 3.5$ – $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ (Courbe rouge) et $P(\mathcal{C}^{ge} < 0)$ (Courbe bleue) en fonction de r_a

Figure 20 : $n = 4$ – $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ (Courbe rouge) et $P(\mathcal{C}^{ge} < 0)$ (Courbe bleue) en fonction de r_a

Figure 21 : $n = 4.5 - \gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ (Courbe rouge) et $P(\mathcal{C}^{ge} < 0)$ (Courbe bleue) en fonction de r_a

8.2.4 Contenu physique des conditions initiales

Le contenu physique des conditions initiales concernant la stabilité du système est clairement mis en évidence par les figures 19,20 et 21. En effet, les trois couples de courbes sont de nature identique tant en valeur qu'en aspect. Elles indiquent clairement l'existence de deux régions distinctes : une première ($r_a \leq 2$), dans laquelle $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ est faible ($\gamma_2 \lesssim 2.2$) et la part de variation d'énergie négative est forte ($P(\mathcal{C}^{ge} < 0) \gtrsim 20\%$). Une deuxième ($r_a > 2$), dans laquelle $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ est fort ($\gamma_2 \gtrsim 2.5$) et la part de variation d'énergie négative est faible ($P(\mathcal{C}^{ge} < 0) \gtrsim 18\%$). Ces deux régions sont d'autant plus distinctes que l'échelle de variation du rayon d'anisotropie est logarithmique.

Lors de l'étude du comportement dynamique de nos systèmes (cf. 8.1) nous avons mis aussi mis en évidence deux classes de systèmes, les systèmes instables caractérisés par un faible rayon d'anisotropie ($r_a \leq 2$) et les systèmes stables tels que $r_a > 2$. L'information concernant la stabilité du système est donc entièrement contenue dans les conditions initiales, pour peu que l'on calcule les paramètres $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ et $P(\mathcal{C}^{ge} < 0)$.

Ces deux paramètres ne possèdent cependant pas tous les deux la même valeur. En effet, nous avons montré analytiquement qu'un système soumis uniquement à des perturbations préservantes (donc tel que $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl}) \rightarrow \infty$) était stable, d'un autre côté, il est possible de montrer qu'un système purement radial (donc tel que $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl}) \rightarrow 0$) est instable. L'étude numérique que nous avons effectuée sur ce paramètre permet donc de faire le lien entre ces deux cas extrêmes. En ce qui concerne le second paramètre relié à l'énergie, nous ne pouvons pas être aussi affirmatifs, car nous ne disposons pas d'un résultat analytique liant l'instabilité du système à une éventuelle variation d'énergie négative. Le paramètre $P(\mathcal{C}^{ge} < 0)$ est donc un indicateur de la stabilité : **un système sphérique anisotrope tel que $P(\mathcal{C}^{ge} < 0) < 18\%$ est stable**.

La quantité $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ est quant à elle un paramètre de stabilité : **un système sphérique anisotrope est stable si et seulement si $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl}) > 2.5$** .

8.2.5 Universalité des prédictions

Nous avons lors du paragraphe précédent énoncé deux lois importantes sur la stabilité des systèmes auto-gravitants non collisionnels, une loi faible (en bleu) et une loi forte (en rouge).

Toutefois deux remarques importantes sont à formuler à ce moment de notre récit. Nous avons indiqué, je cite : “ *Un système sphérique anisotrope...*”, l’article indéfini un, s’applique donc à tous les systèmes sphériques anisotropes, cependant mis à part nos résultats analytiques, nous n’avons testé jusqu’à présent que des systèmes dont l’état initial est issu de l’algorithme Ossipkov-Merritt utilisé dans sa version anisotropie radiale. Nous devons donc apporter un certain nombre de précisions concernant nos affirmations rouges et bleues.

- Les systèmes présentant une anisotropie radiale et dont les conditions initiales ne sont pas issues de l’algorithme Ossipkov-Merritt montrent dans l’abondante littérature sur ce sujet (voir [de Zeeuw & Franx 1991] pour une revue) au minimum les mêmes caractéristiques concernant leur stabilité, que celles que nous avons pu mettre en évidence : les systèmes faiblement anisotropes sont stables, les systèmes fortement anisotropes souffrent d’instabilité orbite radiale.
- Les systèmes présentant une anisotropie circulaire dans l’espace des vitesses sont stables (cf. [Fridman & Polyachenko 1984]), en fait (cf. [Palmer *et al.* 1989]) de tels systèmes ne présentent pas d’instabilité morphologique lors de leur évolution, mais le spectre associé aux perturbations qu’ils peuvent développer permet certains cas de méta-stabilité. En d’autres termes ces systèmes peuvent se réorganiser tout en restant sphériques. Ils sont donc généralement reconnus comme stables.
- Nous avons tout au long de notre approche analytique supposé que la fonction de distribution d’équilibre était une fonction monotone décroissante pour ses deux variables. Cette hypothèse est une hypothèse physique mais elle est d’un grand secours pour permettre une étude analytique. Numériquement, elle est difficile à garantir compte-tenu de la nature particulière de nos systèmes, mais nous avons vu qu’elle n’avait que très peu d’influence sur le comportement dynamique de nos systèmes (cf 8.1.4). Pour des systèmes dont les conditions initiales ne proviennent pas de l’algorithme Ossipkov-Merritt, nous ne pouvons pas dire grand chose compte tenu du fait que cette non-monotonie ne semble pas intéresser beaucoup d’auteurs (sans doute à cause de son caractère non physique).

Bien que nous ayons tenu à engendrer des conditions initiales aux caractéristiques physiques variées (cf. appendice D), nous avons cependant effectué un certain nombre de tests de nos prédictions dans un contexte plus général que celui de l’algorithme Ossipkov-Merritt. Pour cela nous avons généré de façon arbitraire 4 ensembles de conditions initiales non issus de l’algorithme Ossipkov-Merritt, représentant des systèmes auto-gravitants sphériques en équilibre, anisotropes dans l’espace des vitesses. Afin de pouvoir comparer des quantités comparables nous avons représenté ces systèmes au moyen de leur diagramme de Lindblad (cf. [Lindblad 1933] ou [Merritt 1985b]). La fonction de distribution d’un système sphérique anisotrope dépendant de E et L^2 , ce type de diagramme correspond aux surfaces iso-contour de la fonction de distribution dans le plan $E - L^2$. Dans ce mode de représentation, un système faiblement anisotrope verra sa dépendance en L^2 peu importante (lignes verticales ou lignes horizontales); un système fortement anisotrope radialement sera représenté par un pic très fin au voisinage du point $(E = 0, L^2 = 0)$; enfin, un diagramme sur lequel la fonction de distribution est étalée en E et L^2 sera caractéristique d’un système présentant une anisotropie circulaire.

Nous présentons ci-dessous de tels diagrammes pour certains de nos modèles issus de l’algorithme Ossipkov-Merritt :

Figures 22 : Diagramme de Lindblad de modèles sphériques anisotropes Ossipkov-Merritt :
 $n = 4.5$ $r_a = 1$ (en haut à gauche), 2, 10 et 100 (en bas à droite)

Nous présentons aussi le même type de diagramme pour des conditions initiales en équilibre ne provenant pas de l'algorithme Ossipkov-Merritt :

Figures 23 : Diagramme de Lindblad de modèles sphériques anisotropes non Ossipkov-Merritt :
 Modèle 1 (en haut à gauche), 2, 3, 4 (en bas à droite)

Ces 4 modèles initiaux sont sphériques, composés de 8192 particules chacun, et possèdent une masse totale unité. Nous avons rassemblé leurs principales caractéristiques ci-dessous :

	T_{aile}	T_d	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$	$Nature$
Modèle 1	2.69	4,42	18,75	8,26	faible anisotropie
Modèle 2	9.94	31,35	22,82	2,12	anisotropie radiale
Modèle 3	3.27	5,94	17,46	2,93	anisotropie circulaire
Modèle 4	3.18	5,68	18,04	3,42	faible anisotropie

Au vu des paramètres de stabilité ci-dessus, nous pouvons donc diagnostiquer la stabilité de l'équilibre des modèles 1,3 et 4, et l'instabilité de l'équilibre du modèle 2. Afin de vérifier ces prédictions, nous avons fait évoluer dynamiquement ces 4 systèmes en utilisant le code PP, décrit au chapitre 7, en utilisant une résolution de 500 pas de temps par temps dynamique. Le résultat de cette évolution est présenté ci-dessous à travers les rapports d'axes(à gauche) et le rapport du viriel(à droite) :

Figure 24 : Evolution des rapports d'axes et du rapport du viriel en fonction du temps dynamique pour des modèles non Ossipkov-Merritt

Nous constatons sur ce graphique que, comme prévu, seul le modèle 2 développe une instabilité, et la remarquable stabilité du modèle 1 dont le coefficient de Pearson est très grand.

Les paramètres de stabilité que nous présentons ici semblent donc bien indépendants de l'algorithme Ossipkov-Merritt que nous avons utilisé.

Conclusion

Après que Lord Jeans eut, au début de ce siècle, posé les prémices de la dynamique stellaire, force est de constater depuis, que les progrès effectués dans ce domaine furent à la fois peu nombreux et difficiles à obtenir. Eddington dans les années 1930 puis Chandrasekhar au milieu du siècle améliorèrent la formulation du problème, mais la plus grande avancée fut l'œuvre d'Antonov qui, de 1960 à 1970, obtint les principaux résultats, qui restent à ce jour une des plus grandes contribution analytique à l'étude des systèmes auto-gravitants : rassemblés en quatre lois (cf. [Binney & Tremaine 1987]), il s'agit successivement du premier principe variationnel de stabilité d'un système auto-gravitant non-collisionnel sphérique et isotrope, puis de l'application de ce principe à une vaste classe de tels systèmes. Il est aussi notable de remarquer que ce même Antonov fut le premier à prévoir, dès 1962, l'instabilité d'orbite radiale. Toutefois, et comme nous l'avons signalé lors de notre introduction, les résultats analytiques sur la stabilité des systèmes auto-gravitants restent peu nombreux et fortement contraints.

L'apparition d'ordinateurs de plus en plus puissants a contribué depuis une dizaine d'années à relancer ce domaine par le biais de simulations numériques. Malgré tous les résultats que ces dernières ont pu apporter, nous devons constater qu'il n'existe pas d'approche globale du problème de la stabilité d'un système de particules en interaction gravitationnelle. Les simulations sont aujourd'hui en mesure de reproduire l'évolution de tels systèmes. Un certain nombre d'arguments physiques nous permettent de comprendre le mécanisme de l'instabilité d'orbites radiales, que certains soupçonnent d'être à l'origine d'une partie des galaxies elliptiques. Mais nous ne sommes pas capables, faute de formalisation analytique, de prévoir ces évolutions.

Dans ce contexte, notre contribution à ce sujet est double : d'une part, en proposant un critère général de stabilité souffrant de peu de contraintes d'utilisations, nous fournissons un moyen qui permettra peut-être de canaliser la modélisation numérique en indiquant un certain nombre de voies de recherches. D'autre part, les résultats obtenus dans le cadre de la géométrie sphérique (stabilité des systèmes contre toutes les perturbations préservantes et mise en évidence de paramètres de stabilité) pourront peut-être contribuer à une vision plus éclairée de l'évolution dynamique de systèmes tel que les amas globulaires ou les galaxies peu gazeuses. En effet, alors que nous serons bientôt en mesure d'obtenir observationnellement le profil de densité et la dispersion des vitesses de tels objets, nous pourrions sans doute prévoir leur évolution future.

Tout n'est cependant pas pour le mieux dans le meilleur des mondes, les hypothèses non dissipatives et sphériques de nos principaux résultats sont sans aucun doute à améliorer. Afin de pouvoir modéliser des systèmes encore plus réalistes, nous devons introduire dans notre représentation une composante gazeuse qui, dans le cas des galaxies comme dans celui des amas globulaires, est à l'origine de nombreux processus. D'un autre côté, les déformations inhérentes à la rotation de tels systèmes doivent être prises en compte dans un cadre plus réaliste. Le chemin qui conduit à une vision globale de l'évolution des systèmes auto-gravitants reste donc parsemé d'embûches. Même si la puissance grandissante des machines à notre disposition ouvre la porte à de nombreuses investigations, le jour où la vie et les mœurs des troupeaux d'étoiles, qui peuplent

notre univers, sera expliqué en quelques pages d'une encyclopédie n'est pas encore pour demain.

Partie IV

Annexes

Chapitre A

Origine des équations de la théorie cinétique

Nous allons dans cette section voir comment la majeure partie des équations cinétiques découle simplement de quelques propriétés mathématiques.

Considérons les propositions suivantes:

Théorème 8 *Soit un espace probabilisé Ω , les trois propriétés suivantes sont vraies:*

- si $A \in \Omega \Rightarrow P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$ ou bien $P(\emptyset) = 0$
- soit A_i une suite d'événements tels que $\forall i, j \ A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

Elles sont appelées axiomes de probabilité.

Ces axiomes de probabilités sont à la base de toute la théorie des probabilités et ils suffisent à la construire entièrement.

Enonçons à présent une propriété constitutive :

Définition 5 *Soit (x_n, t_n) une suite ordonnée dans le temps d'événements, si:*

$$P(x_n, t_n \mid y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1}) = P(y_n, t_n \mid y_{n-1}, t_{n-1})$$

On dit que la suite (ou chaîne) est Markovienne.

De cette définition nous pouvons tirer une propriété qui nous sera très utile par la suite.

Ecrivons tout d'abord une relation triviale sur les chaînes de probabilités.

$$P(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = P(x_1, t_1 \mid x_2, t_2) P(x_2, t_2 \mid x_3, t_3) \dots P(x_{n-1}, t_{n-1} \mid x_n, t_n) P(x_n, t_n) \quad (\text{A1})$$

$$\text{avec } t_1 \geq t_2 \dots \geq t_n$$

Ce qui signifie qu'il suffit de connaître la dernière probabilité et les diverses probabilités de transition pour reconstituer le processus total. De plus, on peut décomposer $P(x_1, t_1)$ en:

$$P(x_1, t_1) = \int dx_2 P(x_1, t_1; x_2, t_2)$$

Ainsi, en utilisant l'équation A1 il vient:

$$P(x_1, t_1) = \int dx_2 P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2) \quad (\text{A2})$$

On insère à présent un temps intermédiaire tel que l'on ait $t_1 \geq t_2 \geq t_3$, et l'on obtient:

$$P(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int dx_2 P(x_1, t_1; x_2, t_2 | x_3, t_3) \quad (\text{A3})$$

En utilisant la relation A1 et la propriété Markovienne que nous supposons pour la chaîne, nous avons finalement:

Théorème 9 *Si $x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3$ est une chaîne de Markov alors:*

$$P(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int dx_2 P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3)$$

Cette relation est appelée équation de CHAPMAN-KOLMOGOROV.

Dans le cas discret, nous aurons bien évidemment $\int dx_2 \equiv \sum_{n_2}$ ainsi:

$$P(n_1, t_1 | n_3, t_3) = \sum_{n_2} P(n_1, t_1 | n_2, t_2) \cdot P(n_2, t_2 | n_3, t_3) \quad (\text{A4})$$

Nous allons à présent nous intéresser à l'évolution temporelle de P, nous avons pour cela besoin de faire quelques remarques préliminaires.

1. Probabilité de transition

Nous faisons l'hypothèse que pendant un intervalle Δt très court, x peut varier de $\Delta x = x - z$

Nous introduisons donc naturellement $W_{\Delta t}$ tel que :

$$W_{\Delta t}((x - \Delta x) | \Delta x) = P(x, t + \Delta t | x - \Delta x, t)$$

$$\text{soit encore } W_{\Delta t}(z | z - x) = P(z + \Delta x, t + \Delta t | z, t)$$

W est aussi une limite, nous prendrons comme définition:

Définition 6 *On appelle probabilité de transition de z en x à l'instant t tout scalaire $W(x | z, t)$ tel que:*

$$W(x | z, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(x, t + \Delta t | z, t)}{\Delta t} \quad (\text{A5})$$

2. Calculons les différents moments de Δx , nous avons :

$$\langle \Delta x \rangle = \int \Delta x \cdot W_{\Delta t}(x, \Delta x) \cdot d(\Delta x)$$

$$\langle \Delta x \cdot \Delta x \rangle = \int \Delta x \cdot \Delta x \cdot W_{\Delta t}(x, \Delta x) \cdot d(\Delta x)$$

En repassant aux limites et en faisant l'hypothèse de petits accroissements, nous avons:

$$\langle \Delta x \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|x-z| < \epsilon} dx (x_i - z_i) \cdot \frac{P(x, t + \Delta t | z, t)}{\Delta t}$$

$$\triangleq A_i(z, t) + O(\epsilon) \quad (\text{A6})$$

$$< \Delta x . \Delta x > = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|x-z| < \epsilon} dx . (x_i - z_i)(x_j - z_j) . \frac{P(x, t + \Delta t | z, t)}{\Delta t}$$

$$\triangleq B_{ij}(z, t) + O(\epsilon) \quad (\text{A7})$$

A l'ordre trois nous avons de même:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|x-z| < \epsilon} dx . (x_i - z_i)(x_j - z_j)(x_k - z_k) \frac{P(x, t + \Delta t | z, t)}{\Delta t} \triangleq C_{ijk}(z, t) + O(\epsilon)$$

Toutefois, on montre que $\mathcal{O}(C_{ijk}) = \mathcal{O}(\epsilon)$, et qu'il en est de même pour tous les ordres supérieurs. Nous pouvons donc raisonnablement stopper nos développements à l'ordre 2.

3. Continuité du processus

Le processus sera continu si toutes les probabilités de transition sont nulles à chaque instant, ce qui s'écrit:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| < \epsilon} dx . f(x, t + \Delta t | z, t) = 0 \quad (\text{A8})$$

Ainsi le processus peut avoir des chemins continus tant que $W(x | z, t) = \delta_{xz}$

Nous allons à présent revenir à notre problème initial qui était de s'intéresser à l'évolution temporelle de la probabilité conditionnelle $P(x, t | y, t')$. Considérons une fonction ϕ , $\mathcal{C}^2$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int dx . \phi(x) . P(x, t | y, t') \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int dx . \phi(x) . [P(x, t + \Delta t | y, t') - P(x, t | y, t')]}{\Delta t} \end{aligned}$$

On introduit à présent un $z \in D_\phi$, en utilisant l'équation de Chapman-Kolmogorov (9) il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int dx . \phi(x) . P(x, t | y, t') \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int dx . \int dz . \phi(z) . P(x, t + \Delta t | z, t) . P(z, t | y, t') - \int dz . \phi(z) . P(z, t | y, t')}{\Delta t} \end{aligned}$$

On développe maintenant ϕ à l'ordre 2 comme prévu plus haut :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(z) + \sum_i \frac{\partial \phi(z)}{\partial z_i} (x_i - z_i) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z_i \partial z_j} (x_i - z_i) . (x_j - z_j) \\ &+ |x - z|^2 R(x, z) \quad \text{avec} \quad \lim_{|x-z| \rightarrow 0} |R(x, z)| = 0 \end{aligned}$$

On remplace donc ϕ par son développement, et après quelques intégrations par parties et un peu d'algèbre, A_i et B_{ij} apparaissent pour former :

$$\int dz . \phi(z) . \frac{\partial}{\partial t} P(z, t | y, t') = \int dz . \phi(z) \left\{ - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} A_i(z, t) . P(z, t | y, t') \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} B_{ij}(z, t) \cdot P(z, t | y, t') \\
& + \int dx \cdot [W(z | x, t) \cdot P(x, t | y, t') - W(x | z, t) \cdot P(z, t | y, t')] \} \\
& + \text{“ Termes de Surface ”}
\end{aligned}$$

L'hypothèse fondamentale permettant d'arriver à ce résultat réside dans le fait que l'on considère le processus à l'intérieur d'un domaine R de surface S , tel que $W(x | z, t) = 0$ si x et $z \notin R$. Les termes de surface sont d'ordre trois, donc négligeables et dépendent des conditions initiales tuées par le caractère markovien du processus.

De plus comme ϕ est arbitraire on peut simplifier par $\int dz \cdot \phi(z)$ il vient finalement:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P(z, t | y, t') &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} A_i(z, t) \cdot P(z, t | y, t') \\
& + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} B_{ij}(z, t) \cdot P(z, t | y, t') \\
& + \int dx \cdot [W(z | x, t) \cdot P(x, t | y, t') - W(x | z, t) \cdot P(z, t | y, t')]
\end{aligned} \tag{A9}$$

Cette relation est appelée Equation de Chapman-Kolmogorov Différentielle, elle rassemble comme nous allons le voir une grande partie de la Physique.

1. Les processus de saut - L'Equation Maître

Prenons le cas où $A_i = B_{ij} = 0$, c'est-à-dire le cas où le processus évolue de manière purement discontinue, en sautant entre ses divers états accessibles. Physiquement, cela rassemble tous les problèmes de transition pour les systèmes à plusieurs niveaux.

Nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(z, t | y, t') = \int dx \cdot [W(z | x, t) \cdot P(x, t | y, t') - W(x | z, t) \cdot P(z, t | y, t')] \tag{A10}$$

Cette relation est appelée Equation Maître, elle reflète l'évolution des probabilités de présence et de transition dans les systèmes Physiques discontinus tels que les niveaux d'énergie dans les atomes. En outre, cette équation est fondamentale dans la physique statistique du proche équilibre, et permet notamment de retrouver le principe de Bilan détaillé ou de comprendre la nature des divers coefficients de transport d'un système. Cette équation est aussi le point de départ de nombreuses théories comme les relations de réciprocités de Onsager, les coefficients d'Einstein du rayonnement ou même encore le traitement de la Chimie par le formalisme de la Physique Statistique. Aussi intéressante qu'elle puisse être, l'étude de cette équation n'est pas notre sujet qui demeure essentiellement continu.

2. Les processus de diffusion - L'équation de Fock-Planck

Nous allons donc à présent nous intéresser aux processus purement continus. C'est-à-dire que nous allons supposer que toutes les probabilités de transitions entre les divers états du système sont identiquement nulles au cours du temps.

Nous avons donc:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(z, t | y, t') = \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} A_i(z, t) \cdot P(z, t | y, t') + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} B_{ij}(z, t) \cdot P(z, t | y, t') \tag{A11}$$

Il s'agit cette fois-ci de l'équation de Focker-Planck, qui décrit la majeure partie des processus de diffusion classique.

Cette équation donne l'évolution temporelle des systèmes physiques soumis à un ensemble de perturbations externes où internes.

Comme nous le verrons plus loin, c'est l'équation qui gouverne l'évolution d'un système gravitationnel après la phase de Relaxation Violente (essentiellement non-collisionnelle) et durant la Catastrophe Gravo-Thermale.

3. Les processus déterministes - L'équation de Liouville

En prenant une matrice de diffusion identiquement nulle, i.e. $B_{ij} = 0$, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(z, t | y, t') = \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} A_i(z, t) \cdot P(z, t | y, t') \quad (\text{A12})$$

Il s'agit de l'équation de que nous allons étudier.

Elle s'interprète généralement comme une loi de conservation, mais elle est en fait bien plus que cela, car jusqu'à présent nous ne nous sommes pas placés dans un espace des phases, nous n'avons supposé que la connaissance des axiomes de probabilité et défini uniquement la propriété markovienne.

Comme nous allons le voir à présent, c'est une solution particulière de cette équation qui permet l'interprétation habituelle de l'équation de Liouville, nous travaillerons donc dans le cadre d'un cas particulier de tout le formalisme que nous avons utilisé depuis le début de cette introduction. Etudions donc cette solution particulière.

Théorème 10 *Si $y \triangleq x(y, t)$ est solution de l'équation différentielle suivante:*

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t), t) \quad (\text{A13})$$

alors la solution de l'équation de Liouville avec la condition initiale $P(x, t | y, t') = \delta(x - y)$ est $P(z, t | y, t') = \delta(z - x(y, t))$.

Preuve :

En substituant P par sa valeur il vient dans (A12) :

$$\begin{aligned} - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} A_i(z, t) \cdot P(z, t | y, t') &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(z, t) \cdot \delta(z - x(y, t))] \\ &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(x(y, t), t) \cdot \delta(z - x(y, t))] \\ &= - \sum_i \left[A_i(x(y, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial z_i} \delta(z - x(y, t)) \right] \end{aligned}$$

Mais comme,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(z, t | y, t') &= \frac{\partial}{\partial t} \delta(z - x(y, t)) \\ &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \delta(z - x(y, t)) \frac{\partial x_i}{\partial t} \end{aligned}$$

On a bien équivalence des deux termes compte tenu de la définition de A .

Nous nous plaçons alors dans l'espace des phases, en effet :

$P(z, t | y, t')$ est la probabilité d'avoir z à l'instant t sachant que l'on a eu y à l'instant t' .

Dans l'espace des phases d'une particule, un point z possède 2 coordonnées (à 3 composantes chacune) canoniquement conjuguées, $z = z(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Pour des commodités de notation nous prendrons $f_y(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \triangleq P(z, t | y, t')$, et nous parlerons simplement de f .

Reprenons la solution particulière que nous venons d'évoquer.

Soit le point $W(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ de l'espace des phases tel que :

$$\frac{dW}{dt} = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) = A(W(\mathbf{q}, \mathbf{p}), t) \quad (\text{A14})$$

Nous avons vu que dans ces conditions si à $t = t_0$, $W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = W(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ alors :

$$f_y(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \delta((\mathbf{q}', \mathbf{p}') - (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) \quad (\text{A15})$$

Ainsi, dans le cadre de cette solution particulière, f est la densité de probabilité de se trouver suremment en $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ à l'instant t sachant que l'on était en $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ à l'instant initial.

Dans ce contexte, la densité dans l'espace des phases n'est autre que le premier moment de f , et l'équation de Liouville traduit la conservation de cette densité. Toutefois, il ne s'agit là que d'une propriété locale de cette équation très générale dans le cadre d'une de ses solutions et de l'espace des phases. Nous pouvons d'ailleurs particulariser plus amont cette équation à notre problème.

En effet, si $A = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) = \dot{\mathbf{z}}$, l'équation de Liouville se réécrit (pour une particule):

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial}{\partial z_i} (\dot{z}_i f(z, t)) \quad (\text{A16})$$

$\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$ sont canoniquement conjuguées donc :

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{z}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right] = 0 \quad (\text{A17})$$

Nous nous plaçons à présent dans le cas de forces généralisées conservatives, et dérivant donc d'un potentiel Φ indépendant de la vitesse.

Nous avons donc :

$$\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = - \frac{\partial}{\partial z_i} \nabla_{q_i} \Phi \quad (\text{A18})$$

Ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sum_i^6 \frac{\partial}{\partial z_i} (\dot{z}_i f(z, t)) &= \sum_i^6 \dot{z}_i \cdot \frac{\partial f}{\partial z_i} \\ &= \sum_i^3 [\dot{q}_i \cdot \nabla_{q_i} f - \nabla_{q_i} \Phi \cdot \nabla_{p_i} f] \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

Ainsi, l'équation de Liouville s'écrit donc dans notre cas:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 [\dot{q}_i \cdot \nabla_{q_i} f - \nabla_{q_i} \Phi \cdot \nabla_{p_i} f] = 0 \quad (\text{A20})$$

Qui n'est autre que l'équation de Boltzmann sans collision, encore appelée équation de VLASOV, fondamentale pour les systèmes que nous allons étudier.

Chapitre B

Les fonctionnelles et leurs dérivées

B.1 Définitions

Une fonctionnelle F agit sur un espace de fonction $\mathbb{F}$, en transformant chaque “point” de cet espace en un scalaire élément d’un corps $\mathbb{K}$ (en général réel ou complexe). On a

$$F \quad \begin{cases} \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \mapsto F[f] \end{cases}$$

Comme pour toute application, il est possible de définir sa dérivée d’ordre k au point f par

$$\forall g_1, \dots, g_k \in \mathbb{F} : D^k F[f] \cdot (g_1, \dots, g_k) := \left. \frac{\partial^k}{\partial s_1 \dots \partial s_k} F[f + s_1 g_1 + \dots + s_k g_k] \right|_{s_1 = \dots = s_k = 0} \quad (\text{B1})$$

$D^k F[f]$ est elle-même une fonctionnelle k -linéaire sur $\mathbb{F}$, c’est-à-dire que

$$D^k F[f] : (g_1, \dots, g_k) \in \mathbb{F}^k \longrightarrow D^k F[f] \cdot (g_1, \dots, g_k) \in \mathbb{K} \quad (\text{B2})$$

est linéaire pour chacun de ses arguments g_i , et de plus, est invariant par l’échange $g_i \longleftrightarrow g_j$.

En lieu et place de $D^k F[f]$, il est souvent préférable d’utiliser la dérivée fonctionnelle $\frac{\delta^k F[f]}{f^{(1)} \dots f^{(k)}}$ de F , définie par

$$\forall g_1, \dots, g_k \in \mathbb{F} : \int \frac{\delta^k F[f]}{\delta f^{(1)} \dots \delta f^{(k)}} g_1^{(1)} \dots g_k^{(k)} d\xi^{(1)} \dots d\xi^{(k)} := D^k F[f] \cdot (g_1, \dots, g_k) \quad (\text{B3})$$

dans laquelle nous avons noté $h^{(i)}$ pour $h(\xi^{(i)})$.

Ainsi $\delta^k F[f] / \delta f^{(1)} \dots \delta f^{(k)}$ peut être considéré (pour une fonction f donnée) comme une fonction symétrique de $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}$

En utilisant la définition ci-dessus, il est clair que nous avons

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \frac{\delta^k F[f + sg]}{\delta f^{(1)} \dots \delta f^{(k)}} \right|_{s=0} = \int \frac{\delta^{k+1} F[f]}{\delta f^{(1)} \dots \delta f^{(k+1)}} g^{(k+1)} d\xi^{(k+1)} \quad (\text{B4})$$

et

$$\left. \frac{\partial^k F[f + sg]}{\partial s^k} \right|_{s=0} = \int \frac{\delta^k F}{\delta f^{(1)} \dots \delta f^{(k)}} g^{(1)} \dots g^{(k)} d\xi^{(1)} d\xi^{(k)} \quad (\text{B5})$$

De plus, en développant $F[f + sg]$ en fonction de s , et en prenant $s = 1$ dans (B4), on obtient simplement un développement de Taylor à l'ordre n de F au voisinage de f :

$$\begin{aligned} F[f + g] &= F[f] + \int \frac{\delta F[f]}{\delta f^{(1)}} g^{(1)} d\xi^{(1)} + \frac{1}{2} \int \frac{\delta^2 F[f]}{\delta f^{(1)} \delta f^{(2)}} g^{(1)} g^{(2)} d\xi^{(1)} d\xi^{(2)} \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!} \int \frac{\delta^n F[f]}{\delta f^{(1)} \cdots \delta f^{(n)}} g^{(1)} \cdots g^{(n)} d\xi^{(1)} \cdots d\xi^{(n)} + \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} F[f + sg] \Big|_{s=s_o} \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

avec $0 \leq s_o \leq 1$. Les définitions et propriétés générales étant posées, nous pouvons à présent nous intéresser à quelques exemples classiques.

B.2 Exemples

B.1.a Les casimirs

On appelle casimir, toute fonctionnelle F définie par

$$F[f] := \int C(f) d\xi \quad (\text{B7})$$

où C est une fonction donnée. Une application directe des définitions donne

$$DF[f].g = \int \frac{dC(f)}{df} g d\xi \quad (\text{B8})$$

$$\begin{aligned} D^2 F[f].(g, k) &= \int \frac{d^2 C(f)}{df^2} g h d\xi \\ &= \int \frac{d^2 C(f)}{df^2} g h' \delta(\xi - \xi') d\xi d\xi' \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

ainsi

$$\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{dC}{df}(f) \quad (\text{B10})$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta f \delta f'} = \frac{d^2 C}{df^2}(f) \delta(\xi - \xi') \quad (\text{B11})$$

Les casimirs ont une grande importance dans l'étude des systèmes dynamiques, car ils représentent des ensembles invariants dans certaines transformations.

B.2.1 L'énergie

Si nous considérons le cas particulier dans lequel F est l'énergie totale H d'un système

$$H[f] = \int d\Gamma \frac{p^2}{2m} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \frac{Gm^2}{2} \int d\Gamma \int d\Gamma' \frac{f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (\text{B12})$$

Nous avons évidemment

$$DH[f].g = \int \left(\frac{1}{2m} |p|^2 - Gm \int \frac{f' d\xi'}{|q - q'|} \right) g d\xi \quad (\text{B13})$$

$$D^2 H[f].(g, k) = -Gm \int \frac{gh'}{|q - q'|} d\xi d\xi' \quad (\text{B14})$$

ainsi donc

$$\frac{\delta H}{\delta f} = \frac{1}{2m} |p|^2 + \psi_f = E_f \quad (\text{B15})$$

$$\frac{\delta^2}{\delta f \delta f'} = -Gm \frac{1}{|q - q'|} \quad (\text{B16})$$

Ce dernier calcul n'utilise que la définition du potentiel, et donc la forme intégrale de l'équation de Poisson. La partie cinétique de l'énergie moyenne E_f n'a plus de dépendance explicite en f .

B.2.2 Les F dépendant de ∇f

A titre de troisième exemple, considérons les fonctionnelles F telles que :

$$F[f] := \frac{1}{2} \int |\nabla f|^2 d\xi \quad (\text{B17})$$

Nous ne les utilisons pas dans notre étude mais leur forme est propice à la compréhension du mécanisme de dérivation fonctionnelle, en effet :

$$DF[f].g = \int \nabla f \cdot \nabla g d\xi = - \int \Delta f g d\xi \quad (\text{B18})$$

$$D^2 F[f].(g, h) = - \int g \delta h d\xi = - \int g h' \Delta_\xi \delta(\xi - \xi') d\xi d\xi' \quad (\text{B19})$$

ainsi :

$$\frac{\delta F}{\delta f} = -\Delta f \quad (\text{B20})$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta f \delta f'} = -\Delta_{\xi'} \delta(\xi - \xi') \quad (\text{B21})$$

et le tour est joué.

B.3 La dérivée fonctionnelle de $\mathcal{M}_3[G, H]$

Dans le calcul du terme du second ordre de la variation d'énergie, nous avons besoin de connaître $\delta \mathcal{M}_3[G, H]/\delta f$. Nous allons donc faire ce calcul en détail.

La définition de $\mathcal{M}_3$ et (B3), nous donnent :

$$\begin{aligned} D\mathcal{M}_3[G, H][f].g &= \int g \mathcal{P}_3 \left[\frac{\delta F}{\delta f}, \frac{\delta G}{\delta f} \right] d\xi \\ &+ \int f \left(\mathcal{P}_3 \left[\int \frac{\delta^2 F}{\delta f \delta f'} g' d\xi', \frac{\delta G}{\delta f} \right] + \mathcal{P}_3 \left[\frac{\delta F}{\delta f}, \int \frac{\delta^2 G}{\delta f \delta f'} g' d\xi' \right] \right) d\xi \end{aligned}$$

$$= \int g \left(\mathcal{P}_3 \left[\frac{\delta F}{\delta f}, \frac{\delta G}{\delta f} \right] + \int f' \left(\mathcal{P}_3 \left[\frac{\delta^2 F}{\delta f \delta f'}, \frac{\delta G}{\delta f'} \right]' + \mathcal{P}_3 \left[\frac{\delta F}{\delta f'}, \frac{\delta^2 G}{\delta f \delta f'} \right]' \right) d\xi' \right) d\xi \quad (\text{B22})$$

ainsi donc

$$\frac{\delta \mathcal{P}_3[F, G]}{\delta f} = \mathcal{P}_3 \left[\frac{\delta F}{\delta f}, \frac{\delta G}{\delta f} \right] + \int f' \left(\frac{\delta^2 F}{\delta f \delta f'} \mathcal{P}_3 \left[\frac{\delta G}{\delta f'}, f' \right]' - \frac{\delta^2 G}{\delta f \delta f'} \mathcal{P}_3 \left[\frac{\delta F}{\delta f'}, f' \right]' \right) d\xi' \quad (\text{B23})$$

Nous avons utilisé l'antisymétrie des crochets, mais aussi la relation fondamentale

$$\int f \mathcal{P}_3[g, h] d\xi = \int g \mathcal{P}_3[h, f] d\xi \quad (\text{B24})$$

longueusement exposée dans l'annexe suivante.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, $F = H$ et G est défini par

$$\forall f \in \mathbb{F} : G[f] = \int f g d\Gamma \quad (\text{B25})$$

où g est le générateur de la perturbation. Comme nous l'avons expliqué, $\frac{\delta G}{\delta f} = g$ et $\frac{\delta^2 G}{\delta f \delta f'} = 0$, ainsi donc (B23) donne

$$\frac{\delta \mathcal{M}_3[F, G]}{\delta f} = \mathcal{P}_3[E, g] - \int f' \frac{\delta^2 H}{\delta f \delta f'} \mathcal{P}_3[g, f_o]' d\xi' \quad (\text{B26})$$

En injectant (B16) dans (B26) nous obtenons

$$\frac{\delta \mathcal{M}_3[G, F]}{\delta f} = \mathcal{P}_3[g, E] + Gm \int \frac{\mathcal{P}_3[g', f_o']}{|r - r'|} d\Gamma' \quad (\text{B27})$$

En utilisant encore une fois (B24), nous obtenons directement

$$\frac{1}{2} \mathcal{M}_3[G, \mathcal{M}_3[G, H]](f_o) = -\frac{1}{2} \int \mathcal{P}_3[g, E] \mathcal{P}_3[g, f_o] d\Gamma - \frac{1}{2} \int d\Gamma \int d\Gamma' \frac{\mathcal{P}_3[g, f_o] \cdot \mathcal{P}_3[g', f_o']}{|q - q'|} \quad (\text{B28})$$

qui est bien la variation au second ordre de l'énergie que nous utilisons.

Chapitre C

Structures, formes et crochets de Lie

C.1 Crochets de Lie

Considérons un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$, et un champ de vecteurs f dont les coordonnées sont notées $(f_1, \dots, f_n)$. On peut toujours associer à f une opération de dérivée appelée dérivée de Lie dans la direction f définie de la façon suivante :

Définition 7 Soit h une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On appelle dérivée de Lie de h dans la direction f , notée $L_f h$, la quantité

$$L_f h = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \quad (\text{C1})$$

Par cette définition, un champ de vecteurs quelconque est identifié à l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre L_f .

Dans ce contexte, il est possible de définir une application appelée crochet de Lie :

Définition 8 On appelle crochet de Lie de deux champs de vecteurs quelconques l'opérateur $L_{[f,g]}$ tel que

$$L_{[f,g]} = L_f L_g - L_g L_f \quad (\text{C2})$$

En coordonnées locales nous avons donc

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{C3})$$

Cette application possède trois propriétés fondamentales

- antisymétrie : $[f, g] = -[g, f]$
- $[\alpha f, \beta g] = \alpha \beta [f, g] + (\alpha L_f \beta) g - (\alpha L_g \beta) f$, pour toute paire de fonctions dérivables α et β .
- Identité de Jacobi : $[f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_1, f_2]] = 0$.

C.2 Crochets de Poisson

C.2.1 Définition et propriétés générales

Lorsque les variables utilisées sont respectivement la position $\mathbf{q}$ et l'impulsion $\mathbf{p}$, on parle de crochet de Poisson

$$\forall x, y, \quad \mathcal{P}_3[x, y] \triangleq \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial p_i} - \frac{\partial x}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_i} \right) \quad . \quad (\text{C4})$$

Nous pouvons donc déduire de cette définition un certain nombre de propriétés :

$$\forall 1 \leq i, j \leq 3 \quad \mathcal{P}_3[q_i, q_j] = 0, \quad \mathcal{P}_3[p_i, p_j] = 0, \quad \mathcal{P}_3[p_i, q_j] = \delta_{ij} \quad (\text{C5})$$

ou bien encore pour toutes fonctions $x(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ et y d'une variable quelconque on a

$$\forall 1 \leq i \leq 3 \quad \mathcal{P}_3[x, q_j] = \frac{\partial x}{\partial p_i}, \text{ et } \mathcal{P}_3[x, p_j] = -\frac{\partial x}{\partial q_i} \quad (\text{C6})$$

$$\mathcal{P}_3[x, y] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x}{\partial \xi_k} \mathcal{P}_3[\xi_k, y] \triangleq \sum_{k=1}^n x_{\xi_k} \mathcal{P}_3[\xi_k, y] \quad (\text{C7})$$

Cet ensemble de propriétés additionnées à celle provenant du fait qu'ils sont aussi des crochets de Lie (anticommutativité, identité de Jacobi,...) font des crochets de Poisson un outil extraordinaire pour la manipulation des équations de la mécanique.

C.2.2 Produit scalaire et crochet de Poisson

Une propriété remarquable simplifie encore l'utilisation des crochets de Poisson en mécanique. En effet, dans l'espace des phases, nous pouvons définir le produit scalaire dans l'espace des phases de la manière suivante

$$\forall x(\mathbf{q}, \mathbf{p}), y(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad \langle x | y \rangle \triangleq \int xy d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} \quad (\text{C8})$$

Ainsi, en introduisant une troisième fonction quelconque $z(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ nous avons

$$\langle x | \mathcal{P}_3[y, z] \rangle = \iint x \mathcal{P}_3[y, z] d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} = \iint x \left(\frac{\partial^3 y}{\partial \mathbf{q}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} - \frac{\partial^3 y}{\partial \mathbf{p}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} \right) \quad (\text{C9})$$

chaque terme du membre de droite de (C9) peut être intégré par partie, il vient

$$\iint x \frac{\partial^3 y}{\partial \mathbf{q}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} = \int \left| x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} \right|_{S_{\mathbf{p}}} d^3\mathbf{q} - \iint y \left(\frac{\partial^3 x}{\partial \mathbf{p}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} + x \frac{\partial^6 z}{\partial \mathbf{p}^3 \partial \mathbf{q}^3} \right) d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} \quad (\text{C10})$$

pour le premier terme, et

$$\iint x \frac{\partial^3 y}{\partial \mathbf{p}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} = \int \left| x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} \right|_{S_{\mathbf{q}}} d^3\mathbf{p} - \iint y \left(\frac{\partial^3 x}{\partial \mathbf{q}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} + x \frac{\partial^6 z}{\partial \mathbf{p}^3 \partial \mathbf{q}^3} \right) d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} \quad (\text{C11})$$

dans lesquelles $S_{\mathbf{q}}$ et $S_{\mathbf{p}}$ représentent respectivement les surfaces tridimensionnelles obtenues dans l'espace des phases lorsque $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$ tendent vers les limites du système. Ainsi en injectant (C10) et (C11) dans (C9) nous avons

$$\iint x \mathcal{P}_3[y, z] d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} = \iint y \mathcal{P}_3[z, x] d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} + \int \left| x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} \right|_{S_{\mathbf{p}}} d^3\mathbf{q} - \int \left| x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} \right|_{S_{\mathbf{q}}} d^3\mathbf{p} \quad (\text{C12})$$

dans cette dernière relation les deux derniers termes sont généralement nuls, en effet si

$$\lim_{\mathbf{p} \rightarrow \infty} x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\mathbf{q} \rightarrow \infty} x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} = 0 \quad (\text{C13})$$

alors ces termes de surface s'annulent. Par exemple, si x ou y représente la fonction de distribution, le potentiel, la densité ou toute autre grandeur physique, ces termes de surface s'annulent obligatoirement.

Ainsi dans la plupart des cas physiques¹, nous avons

$$\langle x \mid \mathcal{P}_3[y, z] \rangle = \langle y \mid \mathcal{P}_3[z, x] \rangle \quad (\text{C14})$$

cette relation est à la base d'un grand nombre de manipulations algébriques dont nous ne nous sommes pas privés.

¹les seuls cas pathologiques peuvent apparaître en cosmologie lorsque le système est l'univers tout entier, mais même dans ce cas, des conditions aux limites périodiques permettent de lever le paradoxe.

Chapitre D

Statistiques de simulations

Nous avons rassemblé dans ces tableaux l'ensemble des simulations effectuées dans le but d'obtenir les courbes sur les paramètres de stabilité. Les unités sont telles que la constante gravitationnelle $G = 1$, la masse totale du système $M = 1$ et le rapport $T_d^2/Taille^3 = 1$ (cf. Chapitre 7). La taille du système correspond à la distance moyenne entre une particule et le centre du système. Le temps dynamique est calculé en utilisant la relation classique (cf. chapitre 1).

$$T_d \approx \sqrt{\frac{3\pi}{16G\rho}} \quad (D1)$$

Le paramètre $\%(\mathcal{C}^{ge} < 0)$ représente le pourcentage de particules ayant subi une variation instantanée d'énergie négative. Enfin, Le paramètre $\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$ représente le coefficient de Pearson γ_2 (cf chapitre 8) de la distribution des $[g, L2]$ pour l'ensemble des particules.

Chacune de ces simulations est constituée de 8192 corps de masse identique. L'évolution dynamique correspondant à la perturbation nécessaire au calcul de $\mathcal{C}^{ge}$ et $\mathcal{C}^{gl}$ s'effectue pendant un temps équivalent à $T_d/100$.

==--==--==--==

Indice Polytropique $n = 3, 5$

$r_a = 0.75$	T_d	$Taille$	$\%(\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$	$r_a = 1$	T_d	$Taille$	$\%(\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$
M1	5,41899	3,0852	22,7417	0,95126	M1	5,09521	2,9610	20,9351	1,22666
M2	5,48123	3,1087	22,3022	0,956321	M2	5,15161	2,9828	20,2026	1,23507
M3	5,47182	3,1052	22,9858	0,954126	M3	5,14549	2,9805	20,8252	1,20539
M4	5,42509	3,0875	24,5728	0,867708	M4	5,08698	2,9578	22,5586	1,06631
M5	5,56438	3,1401	22,9248	1,04896	M5	5,22907	3,0127	20,8984	1,2557
M6	5,36877	3,0661	22,6929	0,936834	M6	5,0539	2,9450	20,752	1,24504
μ	5,4550	3,0988	23,0367	0,9525	μ	5,1270	2,9733	21,0287	1,2057
σ_{rel}	1,12%	0,75%	3,13%	5,55%	σ_{rel}	1,11%	0,74%	3,45%	5,33%

$r_a = 2$	T_d	$Taille$	$\%(\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$	$r_a = 5$	T_d	$Taille$	$\%(\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2(\mathcal{C}^{gl})$
M1	4,14704	2,5812	16,1987	2,09432	M1	3,27281	2,2043	12,8906	2,72261
M2	4,12561	2,5723	15,564	2,09246	M2	3,21689	2,1792	12,7075	3,08326
M3	4,16736	2,5896	15,7959	2,0788	M3	3,26466	2,2007	12,6709	2,97637
M4	4,23479	2,6175	17,4194	1,97572	M4	3,22735	2,1839	13,9526	2,74615
M5	4,13896	2,5779	16,626	2,05458	M5	3,2376	2,1885	12,9272	2,80333
M6	4,12499	2,5721	16,687	2,23271	M6	3,2188	2,1800	12,1216	2,77777
μ	4,1565	2,5851	16,3818	2,0881	μ	3,2397	2,1894	12,8784	2,8516
σ_{rel}	0,91%	0,61%	3,76%	3,65%	σ_{rel}	0,67%	0,45%	4,25%	4,63%

$r_a = 10$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$	$r_a = 100$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$
M1	3,07293	2,1137	12,3779	2,91479	M1	3,00537	2,0826	12,207	2,93903
M2	3,01783	2,0883	12,3779	3,29575	M2	2,94635	2,0552	11,9873	3,31963
M3	3,06631	2,1106	12,1948	3,16576	M3	2,99468	2,0776	12,0361	3,20133
M4	3,03298	2,0953	13,2202	3,01523	M4	2,9661	2,0644	12,8052	3,05235
M5	3,0401	2,0986	12,4756	3,02315	M5	2,97022	2,0663	12,3413	3,03063
M6	3,02497	2,0916	11,6699	2,94615	M6	2,95558	2,0595	11,2061	2,95069
μ	3,0425	2,0997	12,3861	3,0601	μ	2,9731	2,0676	12,0972	3,0823
σ_{rel}	0,67%	0,45%	3,69%	4,31%	σ_{rel}	0,70%	0,47%	3,97%	4,43%

Indice Polytropique $n = 4$

$r_a = 0,75$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$	$r_a = 1$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$
M1	8,69563	4,2286	25,0732	0,920498	M1	8,19988	4,0664	23,0103	1,10147
M2	8,7654	4,2512	25,1587	0,952378	M2	8,24581	4,0815	22,4854	1,06965
M3	8,63444	4,2088	25,6592	1,04428	M3	8,28399	4,0941	23,1445	1,08406
M4	8,69737	4,2292	26,8188	0,854031	M4	8,22087	4,0733	24,7681	1,01248
M5	8,90821	4,2973	25,6714	1,02024	M5	8,43199	4,1427	23,5107	1,15661
M6	8,62151	4,2046	25,415	0,815775	M6	8,16184	4,0538	23,8037	1,04999
μ	8,7204	4,2366	25,6327	0,9345	μ	8,2574	4,0853	23,4538	1,0790
σ_{rel}	1,10%	0,73%	2,25%	8,79%	σ_{rel}	1,05%	0,70%	3,06%	4,13%

$r_a = 2$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$	$r_a = 5$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$
M1	6,48977	3,4793	18,5181	2,02203	M1	4,56047	2,7500	14,4897	2,92308
M2	6,46138	3,4691	18,1641	1,9314	M2	4,4666	2,7122	14,7217	3,2855
M3	6,51507	3,4883	18,4448	1,93379	M3	4,54363	2,7433	14,6973	3,19113
M4	6,44528	3,4633	19,7754	1,84742	M4	4,48487	2,7196	15,8936	2,87973
M5	6,51224	3,4873	19,1895	2,00046	M5	4,50091	2,7260	15,0513	3,018
M6	6,41268	3,4516	18,3228	2,03421	M6	4,46246	2,7105	13,7573	2,95474
μ	6,4727	3,4732	18,7358	1,9616	μ	4,5032	2,7269	14,7685	3,0420
σ_{rel}	0,57%	0,38%	3,02%	3,30%	σ_{rel}	0,82%	0,55%	4,33%	4,84%

$r_a = 10$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$	$r_a = 100$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$
M1	4,06696	2,5479	13,7085	3,24459	M1	3,88356	2,4707	13,3911	3,39143
M2	3,97555	2,5096	13,9038	3,66856	M2	3,79679	2,4338	13,4888	3,83127
M3	4,04857	2,5402	13,7085	3,52832	M3	3,86775	2,4640	13,4766	3,64996
M4	4,00343	2,5213	15,1367	3,28787	M4	3,82601	2,4462	14,6362	3,42063
M5	4,01303	2,5253	14,1846	3,37852	M5	3,83205	2,4488	13,7695	3,47606
M6	3,98129	2,5120	13,208	3,28643	M6	3,80499	2,4373	12,7808	3,42127
μ	4,0148	2,5260	13,9750	3,3990	μ	3,8352	2,4501	13,5905	3,5318
σ_{rel}	0,83%	0,55%	4,26%	4,47%	σ_{rel}	0,82%	0,54%	4,08%	4,49%

Indice Polytropique $n = 4.5$

$r_a = 0,75$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$	$r_a = 1$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$
M1	16,9846	6,6075	26,2695	1,11992	M1	16,1684	6,3941	24,2188	1,21697
M2	17,0606	6,6272	26,8311	1,23078	M2	16,2113	6,4054	24,7803	1,31191
M3	17,2455	6,6750	26,6968	1,16887	M3	16,342	6,4398	24,9146	1,26215
M4	17,0133	6,6149	27,2583	1,10953	M4	16,2046	6,4036	25,9399	1,1843
M5	17,4401	6,7251	26,5625	1,26855	M5	16,6249	6,5139	24,585	1,25908
M6	16,7957	6,5584	26,3916	1,06837	M6	16,0085	6,3519	24,3164	1,20889
μ	17,0900	6,6347	26,6683	1,1610	μ	16,2600	6,4181	24,7925	1,2406
σ_{rel}	1,20%	0,80%	1,21%	6,03%	σ_{rel}	1,17%	0,78%	2,29%	3,39%

$r_a = 2$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$	$r_a = 5$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$
M1	12,5977	5,4141	19,1528	1,95917	M1	7,3331	3,7745	15,6738	3,04489
M2	12,5707	5,4064	19,1772	1,93551	M2	7,15719	3,7139	15,6616	3,37695
M3	12,6799	5,4376	19,4092	1,89983	M3	7,28997	3,7597	15,8936	3,28621
M4	12,486	5,3821	20,8008	1,72401	M4	7,15398	3,7128	17,1631	3,06966
M5	12,6933	5,4415	20,2515	2,02146	M5	7,20075	3,7289	16,7725	3,15289
M6	12,3326	5,3379	19,9097	1,84508	M6	7,09858	3,6936	15,5762	3,0368
μ	12,5600	5,4033	19,7835	1,8975	μ	7,2056	3,7306	16,1235	3,1612
σ_{rel}	0,98%	0,65%	3,04%	4,97%	σ_{rel}	1,13%	0,75%	3,81%	4,08%

$r_a = 10$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$	$r_a = 100$	T_d	$Taille$	$\% (\mathcal{C}^{ge} < 0)$	$\gamma_2 (\mathcal{C}^{gl})$
M1	5,74992	3,2095	14,8926	3,73778	M1	5,14403	2,9799	14,4531	4,03312
M2	5,6009	3,1538	14,8682	4,10576	M2	5,0138	2,9294	14,6606	4,43216
M3	5,71684	3,1972	15,1001	3,94473	M3	5,11596	2,9691	14,4775	4,23679
M4	5,62699	3,1636	16,2476	3,72241	M4	5,04548	2,9417	15,8569	3,99289
M5	5,65605	3,1745	15,3564	3,82282	M5	5,06022	2,9474	14,8926	4,2286
M6	5,57643	3,1446	14,4043	3,75842	M6	5,00359	2,9254	14,0137	4,17068
μ	5,6545	3,1739	15,1449	3,8487	μ	5,0638	2,9488	14,7257	4,1824
σ_{rel}	1,09%	0,73%	3,77%	3,56%	σ_{rel}	1,01%	0,67%	3,88%	3,46%

Partie V

Articles publiés dans des revues soumises à arbitrage

Chapitre E

On the stability of a gaseous sphere against non-radial perturbations

Jean-Jacques Aly¹ and Jérôme Perez^{1,2}

¹ *Service d'Astrophysique - CE Saclay - 91191 Gif sur Yvette Cédex - France*

² *ETCA/CREA - 16 bis av. Prieur de la côte d'or - 94114 Arcueil Cédex -France*

Accepté le 5 Mai 1992 dans *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*
Volume 259, Page 95, 1992.

Résumé

We present a simplified proof of the Antonov-Lebovitz theorem asserting that any spherical barotropic star having a mass density decreasing monotonically outwards and vanishing at its surface, is stable to all non-radial perturbations. We also develop a simple argument showing in a straightforward way a related but somewhat weaker result, according to which any such star is stable if and only if it is stable to radial perturbations. Extension of these results to a star with a non-decreasing specific entropy distribution is also briefly discussed.

E.1 Introduction

In the sixties, a quite remarkable stability result was obtained independently by [Antonov 1962], [Lebovitz 1965], and [Lynden-Bell & Sannit 1967] ("stability" is understood in this paper to mean "linear stability"). It may be stated as follows : Any spherical barotropic star having a mass density decreasing monotonically outwards and vanishing at its surface, is stable to all the purely non-radial perturbations - i.e. to all the perturbations for which the associated variation of the gravitational potential has a zero mean value over any sphere concentric with the star. This general theorem is referred to as the "Antonov-Lebovitz Theorem" (ALT) in the monograph by [Binney & Tremaine 1987] (BT hereafter), where it is given a clear presentation (p.300 and 687). Besides its obvious importance in the theory of stellar structure, it is also of great interest when one studies the properties of a spherical cluster of stars interacting together through their mean gravitational field (collisionless approximation). It allows indeed to show the stability to all non-radial perturbations of a cluster described by a distribution function depending only on the energy of a star and decreasing with it ("Antonov's Second Law" in BT, p.306; [Antonov 1962], [Lynden-Bell & Sannit 1967], [Kandrup & Sygnet 1985]).

In the first part of this paper (sections 2 and 3), we revisit ALT and give of it a new proof based on Chandrasekhar's energy principle (e.g. BT, p.300). The method we use consists to construct a positive lower bound on the second variation of the energy by just appealing to some tricky algebraic transformations and to two standard inequalities (Schwartz's; and Wirtinger's, a derivation of which is given in Appendix A). Our proof turns out to be much simpler and more transparent than the earlier ones, in which it was shown in a first step that the eigenfunctions of some operator are stable modes, and in a second step that they form a complete set in the space of the admissible perturbations (actually, this result was taken for granted by the authors quoted above and proved only later on by [Eisenfeld 1969]). In particular, our approach allows us to completely bypass this difficult completeness problem.

In the second part of this paper (section 4), we develop a simple argument showing that a star as considered above is stable if and only if it is stable to the radial perturbations. Although leading to a result somewhat weaker than ALT, our argument sheds some light onto the reasons why this later holds. It is based on the technique of symmetrization of a function, which has already been used in the study of spherical clusters of stars - in an intuitive way by [Antonov 1962], [Lynden-Bell & Wood 1969], [Ipser 1974] and certainly others, and in a more formal way by [Aly 1989].

It must be noted that we have made the barotropy assumption only to not obscure the presentation with too complicated technical details. Our results are still true under the much less restrictive assumption - actually the one made in [Lebovitz 1965] original paper - that the specific entropy of the gas is a non-decreasing function of r (Schwarzschild's criterion for the absence of convection). This point is briefly discussed in appendix B.

E.2 Statement of the problem

E.2.1 The equilibrium

Consider an isolated spherically symmetric barotropic star of mass M ($< \infty$), radius R ($< \infty$), and center O in static equilibrium in the inertial cartesian frame $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Then the mass density ρ_0 of the gas, its thermal pressure p_0 (imposed to vanish at the surface of the star), and the gravitational potential ψ_0 (imposed to vanish at infinity), are functions of the only

distance r , ($0 \leq r < \infty$) to the origin and they are related by (e.g. [Chandrasekhar 1957])

$$p'_0 = -\rho_0 \psi'_0 , \quad (\text{E1})$$

$$\Delta \psi_0 = \frac{1}{r^2} (r^2 \psi'_0)' = 4\pi G \rho_0 , \quad (\text{E2})$$

$$p_0 = g(\rho_0) , \quad (\text{E3})$$

where a prime indicates a derivative with respect to r , G is the gravitational constant, and $g(\rho)$ is a given function of $\rho \geq 0$ satisfying

$$g(0) = 0 \text{ and } \dot{g} := \frac{dg}{d\rho}(\rho) > 0, \rho > 0 . \quad (\text{E4})$$

As it is well known, ρ_0 and p_0 are strictly decreasing functions of r for $0 < r < \infty$ and vanish for $r \geq R$, while ψ'_0 is a positive quantity for $r > 0$ and decreases as r^{-2} at infinity. Then we have in particular

$$\rho'_0(r) < 0 \text{ for } 0 < r < R \text{ and } \rho'_0(r) = 0 \text{ for } r > R , \quad (\text{E5})$$

$$\psi'_0 > 0 \text{ for } 0 < r . \quad (\text{E6})$$

On the other hand, differentiating (E2) with respect to r , we obtain

$$\Delta \psi'_0 = 2 \frac{\psi'_0}{r^2} + 4\pi G \rho'_0 = 2 \frac{\psi'_0}{r^2} - 4\pi G |\rho_\psi| \psi'_0 , \quad (\text{E7})$$

where we have set, taking (E5) and (E6) into account,

$$|\rho_\psi| := -\rho_\psi = -\frac{d\rho_0}{d\psi_0} = -\frac{\rho'_0}{\psi'_0} \geq 0 \quad (\text{E8})$$

(clearly, $|\rho_\psi| > 0$ for $0 < r < R$, and $|\rho_\psi| = 0$ for $R < r$).

We shall use hereafter the notation $\psi[\rho, r]$ (or $\psi[\rho]$ for short) to represent the general solution of Poisson's equation $\Delta \psi = 4\pi G \rho$ in $\mathcal{R}^3$, with $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = 0$, i.e. we set

$$\psi[\rho, r] = -G \int \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dr' \quad (\text{E9})$$

(unless otherwise stated, an integral is assumed to be taken over $\mathcal{R}^3$).

E.2.2 Chandrasekhar's energy principle

The 'potential energy' of an arbitrary self-gravitating configuration (equilibrium or not) characterized by a mass density $\rho(r)$ and a pressure $p(r)$ related to $\rho(r)$ by the barotropic law $p = g(\rho)$, is given by

$$W[\rho] := \int \left\{ U(\rho(r)) + \frac{1}{2} \rho(r) \psi[\rho, r] \right\} dr , \quad (\text{E10})$$

where

$$U(\rho) := \rho \int_0^\rho \frac{g(\tau)}{\tau^2} d\tau \quad (\text{E11})$$

is the thermal energy per unit of volume of the gas. In particular, the potential energy of the equilibrium described in subsection 2.1 is just given by $W[\rho_0]$.

Let us then perturb the previous equilibrium by applying a lagrangian displacement $\xi(r)$ to each element of the fluid, the entropy being assumed to be locally conserved during that process. In the resulting state, the mass density and the gravitational potential can be written (by introducing a standard system of spherical coordinates $(O, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$)

$$\rho(r, \theta, \phi) = \rho_0(r) + \rho_1(r, \theta, \phi) + \cdots, \quad (\text{E12})$$

$$\psi(r, \theta, \phi) = \psi_0(r) + \psi_1(r, \theta, \phi) + \cdots, \quad (\text{E13})$$

with ρ_1 and ψ_1 first order in ξ and being related to each other by the perturbed Poisson equation

$$\Delta \psi_1 = 4\pi G \rho_1, \text{ or } : \psi_1 = \psi[\rho_1]. \quad (\text{E14})$$

Because of the assumption on the conservation of the entropy, the barotropic law $p = g(\rho)$ holds in the final configuration too, and we can consider the variation $W[\rho] - W[\rho_0]$ of the potential energy resulting from the deformation of the equilibrium. Clearly, this quantity vanishes to the first order in ρ_1 owing to the hydrostatic equation (E1), and it writes to the second order

$$\delta^2 W[\rho_1] := \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{\rho_1^2}{|\rho_\psi|} + \rho_1 \psi[\rho_1] \right\} dr, \quad (\text{E15})$$

where $D := \{r : |r| < R\}$ is the sphere occupied by the unperturbed fluid; the form of the first term in the integrand is a consequence of the relation

$$\ddot{U}(\rho_0) = \frac{\dot{g}(\rho_0)}{\rho_0} = |\rho_\psi|^{-1}, \quad (\text{E16})$$

where the first equality just results from (E11) while the second one holds because of (E1) and (E4).

Thus Chandrasekhar's energy principle (e.g. BT, p.300) asserts that the star is linearly stable with respect to all the adiabatic perturbations if and only if

$$\delta^2 W[\rho_1] > 0 \quad (\text{E17})$$

for any $\rho_1 \neq 0$ compatible with total mass conservation and invariance of the position of the center of mass, i.e. for any $\rho_1 \neq 0$ satisfying

$$\int_D \rho_1 dr = 0, \quad (\text{E18})$$

$$\int_D \rho_1 r dr = 0. \quad (\text{E19})$$

Note that (E9) along with the constraint (E18) implies

$$r^2 \psi_1 \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} r^3 |\nabla \psi_1| \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{O}(1), \quad (\text{E20})$$

while the second condition (actually not quoted explicitly in BT) allows to eliminate the irrelevant variations $\rho_1 \neq 0$ resulting from a mere small global translation of the star, for which $\delta^2 W[\rho_1] = 0$ while obviously no physical instability is implied. It is worth noticing that the other usual class of neutral perturbations, the so-called ‘interchanges’, is automatically overlooked in the above formulation of the energy principle in terms of ρ_1 rather than ξ . Such perturbations correspond to displacements of the form $\xi = \rho_0^{-1} \nabla \times A$, with A some arbitrary vector, and they do not change the mass density distribution as they have $\rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \xi) = 0$ (for instance, purely toroidal displacements are clearly of this type). Then a star, if it is shown to be stable by the criterion above, should be said more correctly to be ‘neutrally stable’. All this stuff is however sufficiently well known for it be needed to insist upon here.

We now introduce the decomposition for $f_1 = \rho_1$ or ψ_1

$$f_1(r, \theta, \phi) = \overline{f_1}(r) + \delta f_1(r, \theta, \phi) , \quad (\text{E21})$$

where ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$)

$$\overline{f_1}(r) = \frac{1}{4\pi} \int f_1(r, \theta, \phi) d\Omega , \quad (\text{E22})$$

and thus

$$\int \delta f_1(r, \theta, \phi) d\Omega = 0 . \quad (\text{E23})$$

It results at once from (E14), (E19) and (E20) that

$$\Delta \overline{\psi_1} = 4\pi G \overline{\rho_1} , \text{ or } : \overline{\psi_1} = \psi[\overline{\rho_1}] , \quad (\text{E24})$$

$$\Delta \delta \psi_1 = 4\pi G \delta \rho_1 , \text{ or } : \delta \psi_1 = \psi[\delta \rho_1] , \quad (\text{E25})$$

$$r^2 \overline{\psi_1} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} r^2 \delta \psi_1 \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} r^3 \left| \nabla \overline{\psi_1} \right| \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} r^3 \left| \nabla \delta \psi_1 \right| \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{O}(1) , \quad (\text{E26})$$

$$\int_D \delta \rho_1 r dr = 0 . \quad (\text{E27})$$

Reporting (E21) into (E15) and using (E22), we can rewrite the stability criterion in the form

$$\delta^2 W[\rho_1] = \delta_r^2 W[\overline{\rho_1}] + \delta_{nr}^2 W[\delta \rho_1] > 0 , \quad (\text{E28})$$

where

$$\delta_r^2 W[\overline{\rho_1}] := \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{\overline{\rho_1}^2}{|\rho_\psi|} + \overline{\rho_1} \overline{\psi_1} \right\} dr , \quad (\text{E29})$$

$$\delta_{nr}^2 W[\delta \rho_1] := \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{\delta \rho_1^2}{|\rho_\psi|} + \delta \rho_1 \delta \psi_1 \right\} dr . \quad (\text{E30})$$

The ALT (BT p.687) then states that

$$\delta_{nr}^2 W[\delta \rho_1] > 0 \quad (\text{E31})$$

for any $\delta \rho_1 \neq 0$ satisfying (E23) and (E27). Our goal now is to give a new proof of (E31), which is simpler than the earlier ones. For convenience, we shall assume from now on that $\delta \rho_1 = 0$ for $r > R$ (this does not entail any loss of generality as $\delta \rho_1$ just appears in the integral (E30) which is taken over D).

E.3 A new proof of the Antonov-Lebovitz Theorem

Using the perturbed Poisson equation (E25) and Schwartz's inequality, we obtain (remembering that $\delta\rho_1 = 0$ and $|\rho_\psi| = 0$ for $r > R$)

$$\left\{ \int \frac{|\nabla \delta\psi_1|^2}{4\pi G} dr \right\}^2 = \left\{ \int \delta\rho_1 \delta\psi_1 dr \right\}^2 \leq \int \frac{|\delta\rho_1|^2}{|\rho_\psi|} dr \cdot \int |\rho_\psi| |\delta\psi_1|^2 dr, \quad (\text{E32})$$

with equality if and only if

$$\delta\rho_1 = -\lambda^{-1} |\rho_\psi| \delta\psi_1, \quad (\text{E33})$$

for some constant λ . Whence, injecting (E32) into (E30),

$$2\delta_{nr}^2 W[\delta\rho_1] \geq \left\{ \int \frac{|\nabla \delta\psi_1|^2}{4\pi G} dr \right\} \left\{ \int |\rho_\psi| |\delta\psi_1|^2 dr \right\}^{-1} \left\{ \int \frac{|\nabla \delta\psi_1|^2}{4\pi G} dr - \int |\rho_\psi| |\delta\psi_1|^2 dr \right\} \quad (\text{E34})$$

We now set

$$\delta\psi_1(r, \theta, \phi) := \psi'_0(r) h(r, \theta, \phi), \quad (\text{E35})$$

with h being clearly bounded over $\mathcal{R}^3$ (in particular, $h \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{O}(1)$ owing to $\psi'_0 \simeq \delta\psi_1 \simeq r^{-2}$ when $r \rightarrow \infty$). Then we have, using Gauss theorem

$$\begin{aligned} \int |\nabla \delta\psi_1|^2 dr &= \int \{ |\nabla \psi'_0|^2 h^2 + \psi'_0 \nabla \psi'_0 \cdot \nabla h^2 + |\psi'_0|^2 |\nabla h|^2 \} dr \\ &= \int \{ |\nabla \psi'_0|^2 h^2 - h^2 \nabla \cdot (\psi'_0 \nabla \psi'_0) + |\psi'_0|^2 |\nabla h|^2 \} dr \\ &= \int \{ -h^2 \psi'_0 \Delta \psi'_0 + |\psi'_0|^2 |\nabla h|^2 \} dr, \end{aligned} \quad (\text{E36})$$

whence, making use of (E7),

$$\int |\nabla \delta\psi_1|^2 dr = \int |\psi'_0|^2 \left\{ \left| \frac{\partial h}{\partial r} \right|^2 + |\nabla_S h|^2 - \frac{2h^2}{r^2} \right\} dr + 4\pi G \int |\rho_\psi| |\delta\psi_1|^2 dr, \quad (\text{E37})$$

where $\nabla_S := \nabla - r \partial / \partial r$. On the other hand, we note that, because of (E23), h has zero average value over a sphere S_r of center O and arbitrary radius r . Therefore h satisfies the general inequality (referred to sometimes as Wirtinger's inequality; see appendix)

$$\int \frac{2}{r^2} |h(r, \theta, \phi)|^2 d\Omega \leq \int |\nabla_S h(r, \theta, \phi)|^2 d\Omega \quad \forall r \in]0, \infty[, \quad (\text{E38})$$

with equality if and only if

$$h(r) = h_0(r) r \cdot \hat{a} \quad (\text{E39})$$

for some fixed unit vector $\hat{a}$. Combining (E34), (E37) and (E38), we thus get eventually

$$2\delta_{nr}^2 W \geq \frac{1}{4\pi G} \int |\psi'_0|^2 \left| \frac{\partial h}{\partial r} \right|^2 dr \cdot \left\{ 1 + \frac{\int |\psi'_0|^2 \left| \frac{\partial h}{\partial r} \right|^2 dr}{4\pi G \int |\rho_\psi| |\delta\psi_1|^2 dr} \right\} \geq 0. \quad (\text{E40})$$

Let us now suppose that $\delta_{nr}^2 W = 0$. Because of (E40), this implies that $\partial h / \partial r = 0$ and that the two inequalities (E32) and (E38) we have used to bound $\delta_{nr}^2 W$ from below reduce to equalities. Then, in particular, (E39) holds, and we must have :

$$\delta\psi_1 = \epsilon \hat{a} \cdot \nabla \psi_0, \quad (\text{E41})$$

for some $\hat{a}$ and some constant ϵ . Whence, by (E25) and (E2)

$$\delta\rho_1 = \epsilon\hat{a}\cdot\nabla\frac{\Delta\psi_0}{4\pi G} = \epsilon\hat{a}\cdot\nabla\rho_0 = \rho_\psi\delta\psi_1, \quad (\text{E42})$$

a relation which turns out to be just of the form (E33) (with $\lambda = 1$). To be admissible, however, this $\delta\rho_1$ has to satisfy the constraint (E27), i.e. we must have (using Gauss theorem)

$$\int \delta\rho_1 r dr = -\epsilon\hat{a}M = 0, \quad (\text{E43})$$

and therefore $\epsilon = 0$ and $\delta\rho_1 = 0$ (physically, the variations $\delta\psi_1$ and $\delta\rho_1$ given by (E41) and (E42), respectively, result from a mere constant displacement $\xi = \epsilon\hat{a}$ of the whole star, what is clearly forbidden by the constraint of invariance of the center of mass position). This argument implies at once that (E31) holds true indeed for any non-zero $\delta\rho_1$ satisfying (E27).

The proof we have just reported differs in several important respects from earlier ones. For instance, let us compare it in details with that one given in BT(p.687) (our discussion also applying, with some minor changes, to all the other variants):

- i) In BT, it is assumed that the minimum of $\delta_{nr}^2 W[\delta\rho_1]$ over the set of admissible perturbations - satisfying the arbitrarily chosen normalization constraint : $\int |\rho_\psi|^{-1} |\delta\rho_1|^2 dr = 2K$, taken into account later on by means of a Lagrange multiplier λ - is actually reached for some $\delta\rho_1^-$ belonging to that set, the corresponding $\delta\psi_1^-$ thus solving - for some value λ^- of λ - the associated Euler-Lagrange boundary value problem

$$-\Delta\delta\psi_1 + \frac{4\pi G}{\lambda} |\rho_\psi| \delta\psi_1 = 0 \text{ in } \mathcal{R}^3, \quad (\text{E44})$$

$$r^2\delta\psi_1|_{r=\infty} = \mathcal{O}(1), \quad (\text{E45})$$

completed by (E23) and a normalization condition deriving from that imposed to $\delta\rho_1$. As easily checked : $\delta_{nr}^2 W[\delta\rho_1] \geq \delta_{nr}^2 W[\delta\rho_1^-] = (1 - \lambda^-)K$, and therefore the equilibrium should be necessarily stable if $\lambda^- < 1$.

That $\delta_{nr}^2 W[\delta\rho_1]$ reaches its minimum at some admissible $\delta\rho_1^-$ is however not completely obvious (there are many instances in physics of minimization problems which have no solutions ; see e.g [Aly 1993]) for an example of a functional which, although being bounded from below, does not reach its minimum over the set of admissible functions, in which, however, the associated Euler-Lagrange equation has a unique solution), and some justification is needed. As pointed out to us by the referee, it appears here, that the gap may be filled by appealing to a completeness theorem proven by [Eisenfeld 1969]. Although we have not considered this point in detail, it seems that Eisenfeld's result (which relies on the original formulation of the problem by [Lebovitz 1965], implies that (E44)-(E45) admit a complete system of eigenfunctions $\{\delta\psi_1^{(i)}\}$, and we have $\delta\psi_1^- = \delta\psi_1^{(1)}$ and $\lambda^- = \lambda_1 := \max\{\lambda_i\}$. Then we can write for an arbitrary perturbation :

$$\delta\psi_1 = \sum c_i \delta\psi_1^{(i)}, \quad (\text{E46})$$

and

$$\delta_{nr}^2 W[\delta\rho_1] = \sum |c_i|^2 (1 - \lambda_i)K \geq (1 - \lambda_1) \sum |c_i|^2 K = \delta_{nr}^2 W[\delta\rho_1^{(1)}], \quad (\text{E47})$$

and stability of $\delta\rho_1^{(1)}$ implies general stability indeed. In our proof, on the contrary, we have not to deal with the problem of the existence of a minimizer $\delta\rho_1^-$: we just apply our two inequalities to get a lower bound on $\delta_{nr}^2 W[\delta\rho_1]$ which applies to any $\delta\rho_1$.

- ii) BT's calculation following their (5C-5)(our (E44)) and ours following (E35) certainly bear some apparent similarities. They are however quite different as BT establish ALT by proving the positivity of $\delta_{nr}^2 W[\delta\rho_1^-]$, thus using in a crucial way the equation defining $\delta\rho_1^-$, while we stay at a completely general level all along our argument, which applies directly to an arbitrary admissible $\delta\psi_1$. This way of proceeding turns out to lead to many simplifications (for instance, we have not to deal with a matching problem at the surface of D as in BT) and allows at the same time to identify precisely the reason why the RHS of (E34) is necessarily positive : this is just due to inequality (E38) which holds on every sphere S_r , a point somewhat hidden in BT's proof (and more in [Lynden-Bell & Sannit 1967], which apparently rest on arguments about the radial structure of the solutions of (E44)-(E45)).

E.4 An alternative approach

Let us now develop a somewhat different approach to the non-radial stability problem. For that, we first introduce the set of functions (conserving the notations of the previous sections)

$$\mathcal{H} := \{ \rho \mid \rho(r) \geq 0 ; \int \rho(r) dr = M ; \int \rho(r) r dr = 0 \} , \quad (\text{E48})$$

to which belongs the equilibrium density ρ_0 .

By effecting a so-called Schwartz's symmetrization (e.g. [Lieb 1977],[Mossino 1984]), we can construct from any ρ its "spherically symmetric decreasing rearrangement" $\rho^*(r)$, which is the essentially unique non-increasing, non-negative function of r which has the same "distribution function" as ρ (i.e. we have $meas\{r \mid \rho(r) > \tau\} = meas\{r \mid \rho^*(r) > \tau\}$ for any $\tau \geq 0$, with $measA$ denoting the volume of the subset A of $\mathcal{R}^3$. ρ^* is well known to satisfy :

- i) For any sufficiently regular function G ,

$$\int G(\rho^*) dr = \int G(\rho) dr . \quad (\text{E49})$$

Taking in particular $G(t) = t$, we conclude immediately that ρ^* belongs to $\mathcal{H}$ too (the condition $\int \rho^* r dr = 0$ being trivially satisfied owing to the symmetry of ρ^*);

- ii) Riez's inequality

$$- \int \rho \psi[\rho] dr = G \int \frac{\rho(r)\rho(r')}{|r - r'|} dr dr' \leq G \int \frac{\rho^*(r)\rho^*(r')}{|r - r'|} dr dr' = - \int \rho^* \psi[\rho^*] dr \quad (\text{E50})$$

with equality if and only if $\rho = \rho^*$.

Physically, (E49) and (E50) appear to be quite simple to interpret. ρ^* can be considered indeed as being obtained from ρ by moving in an incompressible way the fluid elements of mass ρdr , rearranging them in a symmetric way, the heavier of two elements being placed nearer the center. During that process, $G(\rho)dr$ is thus conserved, whence (E49), while the potential energy is clearly decreased, whence (E50).

From (E49) with $G = U$ and (E50), we can assert that

$$W[\rho] - W[\rho_0] \geq W[\rho^*] - W[\rho_0] , \quad (\text{E51})$$

where W is defined by (E10) and $W[\rho]$ is therefore the energy of a configuration related to the equilibrium by an entropy-conserving transform.

Let us now assume that $\rho_1 = \rho - \rho_0$ is a small perturbation of ρ_0 . Thus, as we have $\rho_0^* = \rho_0$ because of (E5), $(\rho^*)_1 = \rho^* - \rho_0$ is also a small perturbation of ρ_0 , and we can write, developing each member of (E51) up to the second order, and using (E16) :

$$\int_D \left\{ \frac{|\rho_1|^2}{|\rho_\psi|} + \rho_1 \psi[\rho_1] \right\} dr \geq \int_D \left\{ \frac{|(\rho^*)_1|^2}{|\rho_\psi|} + (\rho^*)_1 \psi[(\rho^*)_1] \right\} dr , \quad (\text{E52})$$

with equality if and only if $(\rho^*)_1 = \rho_1$. If the star is stable with respect to any radial admissible perturbation, Chandrasekhar's energy principle thus implies

$$\delta^2 W[\rho_1] \geq \delta^2 W[(\rho^*)_1] \geq 0 , \quad (\text{E53})$$

with the second inequality being strict if $(\rho^*)_1 \neq 0$, and therefore

$$\delta^2 W[\rho_1] > 0 , \quad (\text{E54})$$

for any admissible $\rho_1 \neq 0$, as $\delta^2 W[\rho_1] = 0$ would imply $\rho_1 = (\rho^*)_1 = 0$. A star thus appears to be stable against arbitrary perturbations - in particular against non-radial ones - if it is radially stable. This result is slightly weaker than ALT but it has been obtained with almost no calculations and it certainly allows us to understand better this last one.

E.5 Conclusion

We have given in this paper a proof of ALT which turns out to be much simpler than those established earlier, which involved a lot of algebraic computation (e.g. BT, p.687) or complicated considerations on the radial structure of the eigenmodes [Lynden-Bell & Sannit 1967] and required a difficult proof of eigenfunctions completeness. In fact, we have shown that ALT is essentially a simple consequence of the standard Wirtinger's inequality, which can be applied to $\delta\psi_1(r, \theta, \phi)$ over the sphere S_r (for all r) because of the imposed constraint ' $\delta\psi_1$ has zero mean value over S_r '. We have also proved in a straightforward way a related result (which can be considered in fact as a corollary of ALT) according to which it is just needed, to establish the stability of a barotropic star with $\rho'_0(r) < 0$, to prove its radial stability. This theorem has been obtained by using in a formal way the powerful symmetrization technique.

On the other hand, we have shown (Appendix B) that all these results are still true in the case when the specific entropy of the star is no longer imposed to be constant, but is more generally allowed to be a non-decreasing function of r .

We thank the referee for this comments on the manuscript and for having pointed out to us that the completeness problem discussed in section 3 had been solved by Eisenfeld.

E.6 Appendix A ; Wirtinger Inequality

For the convenience of the reader, we give a simple proof of inequality (E38), which is of a quite general use. Let us then consider a function $f(r, \theta, \phi)$ with zero average value $\overline{f(r)}$ over the

sphere S_r . Owing to the completeness of the spherical harmonics and the standard relations of orthogonality (e.g. [Courant & Hilbert 1962])

$$\int_{S_r} \nabla_S Y_m^l \cdot \nabla_S Y_{m'}^{l'} d\Omega = \frac{l(l+1)}{r^2} \int_{S_r} Y_m^l \cdot Y_{m'}^{l'} d\Omega = \frac{l(l+1)}{r^2} \delta_{l'}^l \delta_{m'}^m \quad (\text{E55})$$

(which results at once from the equation : $-\Delta_S Y_m^l = l(l+1)r^{-2}Y_m^l$, where $\Delta_S = \nabla_S \cdot \nabla_S$), we can write

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_m^l(r) Y_m^l(\theta, \phi) , \quad (\text{E56})$$

and

$$\int_{S_r} |\nabla_S f|^2 d\Omega = \sum_{l \geq 1, m} |c_m^l(r)|^2 \frac{l(l+1)}{r^2} \geq \frac{2}{r^2} \sum_{l \geq 1, m} |c_m^l(r)|^2 = \frac{2}{r^2} \int_{S_r} |f|^2 d\Omega \quad (\text{E57})$$

Note that if $\overline{f(r)} \neq 0$, we can apply the previous inequality to $f(r, \theta, \phi) - \overline{f(r)}$.

In fact, (E38) is a particular case of a general inequality valid on any closed regular surface S . For any f defined on S and averaging to zero over it, one has ([Aubin 1982] Corollary 4.3, p.102)

$$\int_S |f|^2 d\sigma \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \int_S |\nabla_S f|^2 d\sigma , \quad (\text{E58})$$

where $d\sigma$ and ∇_S denotes the surface element and the surface gradient on S and λ_1^2 is the smallest eigenvalue of the problem

$$-\Delta_S f_i = \lambda_i^2 f_i \text{ on } S , \quad (\text{E59})$$

$$\int_S f_i d\sigma = 0 . \quad (\text{E60})$$

Equality holds in (E58) if and only if $f = f_1$ (f being of course defined up to a multiplicative constant). When $S = S_r$, $\lambda_1^2 = 2/r^2$ and (E38) is recovered indeed.

E.7 Appendix B : Barotropic condition

In this appendix, we consider a class of equilibria more general than the one introduced in section 2-1. Instead of assuming the specific entropy s_0 of the gas to be constant throughout the volume of the star (barotropic condition), we allow indeed this quantity to be an arbitrary non-decreasing function of r , i.e. we just impose

$$s'_0(r) \geq 0 \text{ for } 0 \leq r \leq R \quad (\text{E61})$$

(E61) may be considered as a form of Schwarzschild's criterion for the absence of convection.

Let us then consider some admissible equilibrium characterized by the functions $(\rho_0, p_0, s_0, \psi_0)$. The second variation of the energy resulting from an entropy-conserving perturbation has two parts [Lebovitz 1965]. The first one is just given by (E15), and thus, by the results of section 3, it is positive for any non radial perturbation generating a variation ρ_1 of the mass density satisfying the constraints (E23) and (E27). The second part is always non-negative because of (E61) (it is equal to the integral of $s'_0(r)\rho_1^2$ - up to some factors - with ρ_1 the Lagrangian variation of the mass density). Therefore, ALT is also valid for this class of equilibria and our proof is

still relevant here. Let us now show how it is possible to extend the argument of section 4 to our more general equilibrium $(\rho_0, p_0, s_0, \psi_0)$. We first introduce the set of configurations

$$\mathcal{F} := \left\{ (\rho, s) \mid \rho \in \mathcal{H} ; \text{supp } s \subset \text{supp } \rho ; \int_{\{s < \tau\}} \rho dr = m_0(\tau) \ \forall \tau \right\} \quad (\text{E62})$$

where $\mathcal{H}$ is defined by (E48), ‘supp’ stands for ‘support’ (for an arbitrary function f we have $\text{supp } f := \{r \mid f(r) \neq 0\}$), and the function m_0 is defined by

$$m_0(\tau) := \int_{\{s_0 < \tau\}} \rho_0 dr . \quad (\text{E63})$$

A configuration of $\mathcal{F}$ is thus a given spatial distribution of mass and entropy, with the entropy vanishing where there is no matter and having a ‘distribution function’ with respect to the measure ρdr equal to that of s_0 with respect to $\rho_0 dr$. Clearly, $\mathcal{F}$ contains all the configurations accessible from the equilibrium by an arbitrary adiabatic transform. The energy of a couple (ρ, s) of $\mathcal{F}$ is given by

$$W[\rho, s] := \int \rho u(\rho, s) dr + \frac{1}{2} \int \rho \psi[\rho] dr , \quad (\text{E64})$$

with the specific internal energy u being quite generally an increasing function of both its arguments, and being assumed here to satisfy

$$u(\rho_2, s_2) + u(\rho_1, s_1) \geq u(\rho_2, s_1) + u(\rho_1, s_2) \quad (\text{E65})$$

whenever $\rho_2 \geq \rho_1$ and $s_2 \geq s_1$ (this condition is not very restrictive; it is satisfied if $\partial^2 u / \partial \rho \partial s \geq 0$ or, equivalently if the coefficient of thermal expansion of the gas $\alpha := -\rho^{-1}(\partial \rho / \partial T)_p \geq 0$, with T the temperature of the gas).

Given any (ρ, s) of $\mathcal{F}$, we construct a new configuration (ρ^*, s^*) as follows: ρ^* is the rearrangement of ρ defined in section 4, while s^* is the unique non-decreasing function of r such that

$$\int_{\{s^* < \tau\}} \rho^* dr = m_0(\tau) . \quad (\text{E66})$$

Clearly, (ρ^*, s^*) belongs to $\mathcal{F}$ too and it has a gravitational energy lower than that of (ρ, s) (equal if $\rho = \rho^*$). Moreover, because of assumption (E65), its internal energy is not larger than that of (ρ, s) either. This can be shown in a formal way, but it will be enough here to present an intuitive argument. In fact, we can consider the transform $(\rho, s) \longrightarrow (\rho^*, s^*)$ as a two-step process. In the first step, we rearrange the fluid elements to get the mass distribution ρ^* , the mass and the entropy of each element being conserved, and the internal energy thus keeping a constant value. Thus, in a second step, we get s^* by taking couples of fluid elements having the same mass δm , and characterized by (r_2, ρ_2^*, s_2) and (r_1, ρ_1^*, s_1) , respectively, with $r_2 > r_1$, $\rho_2^* \leq \rho_1^*$ and $s_2 \leq s_1$, and by exchanging the values of s between them - what non-increases indeed the internal energy owing to (E65). Therefore, we can associate to any non-radially symmetric distribution of $\mathcal{F}$ a radial one belonging to the same set and having a not larger energy.

If the equilibrium we consider realizes a relative minimum of $W[\rho, s]$ in the subset of $\mathcal{F}$ containing the radial configurations, it is thus clear that it will have the same property in the whole $\mathcal{F}$ - an arbitrary (ρ, s) in a neighbourhood of (ρ_0, s_0) giving rise to a (ρ^*, s^*) near (ρ_0, s_0) too, as $(\rho_0^*, s_0^*) = (\rho_0, s_0)$. Thus we can say :

Any equilibrium satisfying (E61) is stable - as in the barotropic case - if it is radially stable.

Chapitre F

Stability of spherical stellar systems I : Analytical results

Jean-Jacques Aly¹ and Jérôme Perez^{1,2}

¹ Service d'Astrophysique - CE Saclay - 91191 Gif sur Yvette Cédex - France

² ETCA/CREA - 16 bis av. Prieur de la côte d'or - 94114 Arcueil Cédex - France

Résumé

The so-called “symplectic method” is used for studying the linear stability of a self-gravitating collisionless stellar system, in which the particles are also submitted to an external potential. The system is steady and spherically symmetric, and its distribution function f_0 thus depends only on the energy E and the squared angular momentum L^2 of a particle. Assuming that $\partial f_0 / \partial E < 0$, it is first shown that stability holds with respect to all the spherical perturbations – a statement which turns out to be also valid for a rotating spherical system. Thus it is proven that the energy of an arbitrary aspherical perturbation associated to a “preserving generator” δg_1 [i.e., one satisfying $\partial f_0 / \partial L^2 \{ \delta g_1, L^2 \} = 0$] is always positive if $\partial f_0 / \partial L^2 \leq 0$ and the external mass density is a decreasing function of the distance r to the center. This implies in particular (under the latter condition) the stability of an isotropic system with respect to all the perturbations.

Some new remarks on the relation between the symmetry of the system and the form of f_0 are also reported. It is argued in particular that a system with $f_0 = f_0(E)$ is necessarily spherically symmetric.

F.1 Introduction

The analytical study of the linear stability of a steady collisionless stellar system is a quite formidable task which has progressed with great difficulties since the pioneering work of [Antonov 1962], [Antonov 1973]. The investigation methods which have been used up to now fall into two categories: The normal mode approach, and the energetic approach. The first one is presented in a systematic way in the most recent monograph by ([Palmer 1994b], see also [Fridman & Polyachenko 1984] and references in these two books. It consists to derive from the linearized equations of motion (Vlasov-Poisson’s system, VP hereafter) a dispersion relation for the eigenfrequencies of the system, and to try to extract from it as much information as possible on the nature of these numbers – an instability being present if at least one of them has a nonzero imaginary part, while stability holds if they are all real. The second method consists in constructing a quadratic functional W over a set $\mathcal{Q}$ of admissible test functions satisfying some of the con-

straints actually fulfilled by any solutions of VP. The system is found to be stable if W keeps the same sign over $\mathcal{Q}$. Actually, there are several types of energy methods, which correspond to different choices for W and $\mathcal{Q}$. The simplest one is the “thermodynamic method” ([Lynden-Bell & Sannit 1967], [Ipser 1974], [Ipser & Horwitz 1979]), in which only a very few constraints are taken into account. On the contrary, all the VP constraints are retained in the more elaborate “energy principle” ([Antonov 1961], [Kulsrud & Mark 1970], [Kandrup & Sygnet 1985]), as well as in the “symplectic method” ([Bartholomew 1971], [Kandrup 1990], [Kandrup 1991b], [Perez 1995] and [Perez & Aly 1995] Paper I hereafter), the latter differing from the former by a restriction imposed to the perturbations, which are imposed to be “symplectic” – i.e., to be generated by the infinitesimal canonical transforms acting on the steady state.

Our aim here is to reinvestigate the linear stability of a spherically symmetric system by fully working in the symplectic framework, with the hope of extending some of the results which have been obtained thus far by other methods. Our paper thus presents an interesting illustration of the general principles discussed in Paper I. At the same time, it also provides the theoretical background for the following paper of this series [Perez *et al.* 1995a], in which the problem is tackled from a numerical point of view.

Our plan is as follows. In §2, we state precisely our assumptions – which include the possible presence of an external potential, not considered by previous authors –, and we develop some new considerations on the relations between the symmetry of the steady states we are interested in and the form of their distribution functions f_0 . In §3, we recall the definition of a linear symplectic perturbation, the expression of its energy (which we cast into a particularly useful form), and the relations of the latter with the stability properties of the system. Thus we consider in details stability with respect to spherical (§4) and aspherical (§5) perturbations, respectively, assuming that f_0 is a decreasing function of the energy. Some extensions of our results to spherical rotating systems [Lynden-Bell 1960], and to systems with nonmonotonic f_0 , are reported in §6.

F.2 Equilibrium

F.2.1 Notations and equations

We consider a system constituted of a large number of gravitating particles interacting together, and also submitted to an “external” potential Ψ_e . We denote as x and v , respectively, the position and the velocity of a particle with respect to a Galilean frame $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, and as $\xi := (x, v)$ the corresponding point in the phase space R^6 . Most often, we shall represent ξ either by its standard spherical coordinates $(r, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi)$ (with θ measured from the z -axis), or by its “canonical” coordinates $(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi)$, with $p_r = v_r$, $p_\theta = rv_\theta$, $p_\phi = r \sin \theta v_\phi$ the “conjugated” momenta of (r, θ, ϕ) (e.g., [Landau & Lifchitz 1966]).

Here, we shall assume that:

a) The external potential is spherically symmetric about O , i.e., $\Psi_e = \Psi_e(r)$. In most practical applications, Ψ_e will represent the potential either of a central massive object or of a massive halo. For our theoretical purpose, however, we do not need to fix precisely its form, and we just consider it as being created by some matter distributed with the given smooth density $\rho_e(r)$. The total respective masses M_e of that distribution and M of the system, are finite.

b) The statistical state of the system is described at each time t by a one-particle distribution function $\mathcal{F}(\xi, t, m)$, with $\mathcal{F}(\xi, t, m) d\xi dm$ representing the number of particles of mass between m and $m + dm$ contained in the phase space volume $d\xi$ around ξ .

c) Collisions between the particles are negligible. Then it is sufficient to consider the mass-

average distribution function

$$f(\xi, t) := \int \mathcal{F}(\xi, t, m) \, dm, \quad (\text{F1})$$

which solves the VP system

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \Psi \cdot \nabla_v f = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, h\} = 0, \quad (\text{F2})$$

$$\nabla_x^2 \Psi = 4\pi G(\rho + \rho_e) := 4\pi G \left(\int f \, dv + \rho_e \right), \quad (\text{F3})$$

$$\Psi =_{r \rightarrow \infty} O(r^{-1}) \quad \text{and} \quad \lim_{(r,v) \rightarrow \infty} f(x, v) = 0, \quad (\text{F4})$$

with the decreasing of f at infinity being supposed to be sufficiently fast. Here, $\Psi := \Phi + \Phi_e$ is the total gravitational potential created by the particles and the external masses,

$$h(x, v, t) := \frac{v^2}{2} + \Psi(x, t) \quad (\text{F5})$$

is the one-particle Hamiltonian, and $\{.,.\}$ denotes the Poisson bracket, defined by

$$\{f_1, f_2\} := \nabla_x f_1 \cdot \nabla_v f_2 - \nabla_v f_1 \cdot \nabla_x f_2. \quad (\text{F6})$$

Note that there is no explicit dependance on the mass of the particles appearing in Eqs. (F2)-(F3).

Instead of (F2)-(F3), we may use only Eq. (F2) in which we have substituted for Φ the unique solution to Eqs. (F3)-(F4). The latter can be written in integral form as $K[f]$, with the operator K being quite generally defined by

$$K[f](x) := -G \int \frac{f(\xi')}{|x - x'|} \, d\xi'. \quad (\text{F7})$$

F.2.2 Spherically symmetric steady states

We are interested here in a steady state which is spherically symmetric with respect to O , and then, in particular, occupies a sphere of radius R ($\leq \infty$) in the physical space. Hence f_0 and the associated potential $\Phi_0 = K[f_0]$ are left unchanged by any rotation of R^3 of center O , which implies that they can depend only on the three geometrical invariants r , v and $x.v = rv_r$ – i.e., they are necessarily of the form $f_0 = f_0(r, v, rv_r)$ and $\Phi_0 = \Phi_0(r)$, respectively.

Let us introduce the two quantities

$$E := h_0 := \frac{v^2}{2} + \Psi_0(r) := \frac{v_r^2}{2} + \frac{v_t^2}{2} + \Phi_0(r) + \Phi_e(r) \quad (\text{F8})$$

and

$$L^2 := r^2 v_t^2 := r^2 (v_\theta^2 + v_\phi^2) = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}, \quad (\text{F9})$$

which represent the energy of a particle in the potential Ψ_0 and the squared modulus of its angular momentum with respect to O . Clearly, we can express v in terms of r , v_r and L^2 , and thus write

$$f_0 = f_0(r, v_r, L^2). \quad (\text{F10})$$

Injecting this expression into the time-independant version of Eq. (F2), we obtain

$$v_r \frac{\partial f_0}{\partial r} + \left(\frac{L^2}{r^2} - \Psi_0' \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_r} = 0. \quad (\text{F11})$$

From the general theory of first order partial differential equations, we know that the general solution of Eq. (F11) is a function of two independent integrals of its characteristic system

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dv_r}{L^2/r^2 - \Psi'_0}. \quad (\text{F12})$$

Two such integrals are obvious here: L^2 (as dL^2 does not appear), and $E(r, v_r, L^2)$. Thus we can conclude at once that

$$f_0 = f_0(E, L^2). \quad (\text{F13})$$

The particular case $f_0 = f_0(E)$ corresponds to an isotropic equilibrium.

The general form (F13) of f_0 is well known, but it is usually derived (e.g., [Dejonghe 1986], [Binney & Tremaine 1987], [Palmer 1994b]) by appealing to the so-called strong Jeans theorem, which deals with the isolating integrals of motion. As this theorem is far from being easy both to derive and to apply, we felt that it was a useful task to provide the reader with a completely straightforward proof. In particular, the proof presented here shows most clearly the basic reasons why f_0 depends on only two variables: Symmetry imposes f_0 to depend on only three variables, and the steady VP reduces this number by one unit.

Evidently, the potential Ψ_0 appearing in E is a solution of

$$\nabla_x^2 \Psi_0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi_0}{dr} \right) = 4\pi G(\rho_0 + \rho_e) := 4\pi G \left(\int f_0(E, L^2) dv + \rho_e \right), \quad (\text{F14})$$

$$\Psi_0 =_{r \rightarrow \infty} O(r^{-1}). \quad (\text{F15})$$

An immediate consequence (which will prove quite important hereafter) of these equations is that $\Psi_0(r)$ is a strictly increasing negative function (as $\rho \geq 0$ and $\rho_e \geq 0$. Φ_0 – and Φ_e , if $\rho_e \neq 0$ – have obviously the same properties).

The characteristics of the steady state VP describe the motion of the individual particles in the (self-consistent) potential Ψ_0 . In particular, if we substitute dr/dt for v_r , Eq. (F12) and its integral E determine the radial motion of a particle of energy E and angular momentum modulus L , which can be described as a one-dimensional motion in the effective potential $\Psi_{eff} := \Psi_0 + L^2/2r^2$. When r increases from 0 to $+\infty$, the latter decreases from $+\infty$ to a negative minimum, reached for $r_0(E, L^2)$, and then increases to 0¹. Clearly, particles with $E > 0$ would escape to infinity, and then cannot be present in our confined system. The latter can only contain particles with $E \leq 0$, which bounce between two radii $r^-(E, L^2)$ and $r^+(E, L^2)$, with $r^- \leq r_0 \leq r^+ \leq R$. As r^+ is a monotonically increasing function of E , we thus have necessarily

$$E \leq E_0(L^2) := \Psi_0(R) + \frac{L^2}{2R^2} \leq 0 \quad (\text{F16})$$

[with $E_0(L^2) = 0$ for any possible value of L^2 if $R = \infty$], and the function f_0 must vanish for $E > E_0(L^2)$. Obviously, $E_0(L^2) = \Psi_0(R) = \text{const.} \leq 0$ for an isotropic equilibrium.

Hereafter, we shall consider equilibria which are characterized by a sufficiently smooth distribution function (unless otherwise specified). We shall denote as Ω_0 the region of the phase space where $f_0 > 0$, and set

$$f_{0E} := \frac{\partial f_0}{\partial E} \quad \text{and} \quad f_{0L^2} := \frac{\partial f_0}{\partial L^2}. \quad (\text{F17})$$

¹This last statement is quoted very often in the literature, but without proof. To establish it, we remark that $\Psi'_{eff} = 0$ implies $G(M_r + M_{er}) = L^2/r$, where $(M_r + M_{er})$ denotes the total mass in a sphere of radius r , and we have used the integral of Eq. (F14) (Newton's theorem); as the LHS of that equation is a nondecreasing function of r , while its RHS is an increasing one, it has one and only one solution $r_0(E, L^2)$. The conclusion thus follows by noting the obvious behaviour of Ψ_{eff} when $r \rightarrow 0, \infty$.

Unless otherwise specified, it will be assumed that

$$f_{0E} < 0 \quad (\text{F18})$$

in Ω_0 .

F.2.3 Symmetry of f_0 : Converse theorems

In the previous subsection, we have shown that a steady spherically symmetric system has an f_0 of the form (F13). It is then natural to address the converse question (which seems to have never been done before): *If a steady state is characterized by a distribution function of the form $f_0(E, L^2)$, is it necessarily spherically symmetric?* This problem is highly nontrivial, but fortunately, there are some recent mathematical results which allow to give at least a partial solution, and we now present a somewhat sketchy discussion of what can be asserted, referring the interested reader to [Gidas *et al.*1981] for complete statements and proofs of the theorems we shall use.

Let us then assume that we have some steady state (with no a priori prescribed symmetry) associated to the given form $f_0(E, L^2)$ of the distribution function. For simplifying the discussion, we assume that $E_0(L^2) < 0$, and that $\rho_e(r) = 0$ outside some sphere. Note that these conditions are not very restrictive as far as applications are concerned. Basically, the first one imposes that the region Ω_0 where the distribution function is nonzero is a bounded volume of the phase space; it is satisfied, for instance, by the well known spherically symmetric polytropes of finite mass, except Plummer's [Binney & Tremaine 1987]. We first note that the function $u(x) := -\Psi_0(x)$ is a positive solution to the nonlinear boundary value problem

$$-\nabla_x^2 u(x) = 4\pi G \left\{ \int f_0 \left(\frac{v^2}{2} - u(x), r^2 v_t^2 \right) dv + \rho_e(r) \right\} =: g[u(x), r], \quad (\text{F19})$$

$$u =_{r \rightarrow \infty} O(r^{-1}), \quad (\text{F20})$$

where we have distinguished in the dependance of g on x a part which arises from the dependance of f_0 on E , and a part which is related to both the dependances of f_0 on L^2 and of ρ_e on r (this separation being clearly possible without any ambiguities). The function g so defined is continuous with respect to the variables u and r , and it is clearly nondecreasing with respect to u owing to Eq. (F18).

If f_0 does not depend on L^2 and $\rho_e \equiv 0$, the function $g = g(u)$ does satisfy $g(u) = 0$ for $-E_0 > u > 0$. Therefore, we are exactly in the conditions of Theorem 1 of [Gidas *et al.*1981] [which only requires $g(u) = O(u^\alpha)$ near $u = 0$, with $\alpha > 4$ for $n = 3$ and $m = 1$, in their notations], and we can assert that any solution to Eqs. (F19)-(F20) – and then any solution Ψ_0 to Eqs. (F14)-(F15) – is necessarily spherically symmetric about the origin O (possibly after a translation). The fact that $du/dr = -d\Psi_0/dr < 0$ for $r > 0$, also asserted by the theorem, results more directly here from g being nonnegative. It is easily seen that these results extend to the Plummer's case, for which $E_0 = 0$ and $\alpha = 5$.

In the more complicated case where $f_{0L^2} \leq 0$ (but $\neq 0$) and/or $\rho'_e \leq 0$ (but $\neq 0$), $g(u, r)$ is also a nonincreasing function with respect to r and it vanishes in a neighbourhood of $(u = 0, r = \infty)$. Thus we have certainly $g(u, r) \leq cu^\alpha$ near $u = 0$, with $c > 0$ and $\alpha > 4$, and we can assert on the basis of theorem 1" of [Gidas *et al.*1981] that u and Ψ_0 are spherically symmetric about O [in fact, the theorem requires $g(u, r)$ to be strictly decreasing in r ; but we can use our particular restrictions on f_0 to get rid off that condition].

Certainly, it would be quite interesting to investigate the possibility – left open by the previous results – of constructing nonspherically symmetric equilibria in the case where $g(u, r)$ is increasing in r in some part of $[0, \infty[$.

F.3 Symplectic energy functional and linear stability

F.3.1 Symplectic perturbations

Let us now recall some of the basic facts about the symplectic approach to the stability of a steady state, referring the readers to [Bartholomew 1971], [Kandrup 1990], [Kandrup 1991b] and Paper I for details. A linear “symplectic” perturbation is defined to be a first order change of the distribution function which is of the form

$$f_1 = -\{f_0, g_1\}, \quad (\text{F21})$$

for some arbitrary regular phase-space function g_1 – the so-called “generator” –, that it is convenient to consider formally as being complex valued. Clearly, a symplectic perturbation admits of an infinity of generators, two of them differing by some function $\tilde{g}$ commuting with f_0 ($\{f_0, \tilde{g}\} = 0$). We shall say that g_1 is nontrivial if $f_1 \neq 0$.

To any g_1 are also associated a first order variation of the potential,

$$\Phi_1 = K[f_1] = K[-\{f_0, g_1\}], \quad (\text{F22})$$

and a variation of the total energy which turns out to be second order in g_1 , being given by

$$H^{(2)}[g_1] = -\frac{1}{2} \int \{f_0, g_1\} \{E, g_1^*\} d\xi - \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla \Phi_1|^2 dx \quad (\text{F23})$$

(“*” denotes complex conjugation). It is worth noticing that:

a) $H^{(2)}[g_1]$ is a conserved quantity if g_1 is taken to be a solution of the linearized equation of motion

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \mathcal{L}[g_1] := \{E, g_1\} + K[\{f_0, g_1\}] \quad (\text{F24})$$

[in which case $f_1 = -\{f_0, g_1\}$ solves the linearized version of VP].

b) If the system is translated as a whole by an infinitesimal vector a ($g_1 = a \cdot v$ and $f_1 = -a \cdot \nabla f_0$), then $H^{(2)}[g_1] = 0$ in the absence of external potential (this is intuitively obvious, and easy to check formally). This type of “neutral” displacements being of no interest, we shall eliminate them by imposing the admissible generators, whose set will be denoted by $\mathcal{G}$, to satisfy

$$\int f_1 x d\xi = \int g_1 \nabla_v f_0 d\xi = 0, \quad (\text{F25})$$

in the case where $\Psi_e \equiv 0$, this condition impeding the center of mass of the system to be moved by the perturbation.

F.3.2 Linear stability criteria

The stability properties of the steady state turn out to be strongly related to the values taken by $H^{(2)}$ on $\mathcal{G}$, and it is always an important first step when considering stability to classify as precisely as possible the generators g_1 according to the sign of that quantity. In fact, this study may even provide in some cases useful sufficient conditions of stability ([Bartholomew 1971], [Kandrup 1990], [Kandrup 1991b] and Paper I):

(a) If

$$H^{(2)}[g_1] > 0 \quad (\text{or } < 0) \quad (\text{F26})$$

for any nontrivial g_1 of $\mathcal{G}$, then the system is linearly stable with respect to any perturbation. Unfortunately, this condition may be possibly satisfied only if $f_0 = f_0(E)$ and $f_{0E} \leq 0$ (actually,

it may be fulfilled for a more general form of f_0 if we work in a rotating frame). Indeed, if f_0 depends explicitly on some other integral, there does always exist both positive and negative energy perturbations [Paper I. The main step in proving this result is the construction of two phase space functions α and β and of a number ϵ such that the first term in the RHS of Eq. (F23) be positive (resp., negative) for the generator $g_1 := \alpha e^{i\beta/\epsilon}$].

(b) Suppose that we cannot prove Eq. (F26) for all the admissible g_1 , but that we can identify in $\mathcal{G}$ a linear subspace $\mathcal{G}'$ that is “closed” under evolution – which means that, if an arbitrary $g_1 \in \mathcal{G}'$ is taken as an initial condition for an evolution governed by Eq. (F24), then the solution $g_1(t)$ stays in $\mathcal{G}'$ forever]. Then the system is stable with respect to the corresponding restricted class of perturbations if Eq. (F26) holds true for all the nontrivial elements of $\mathcal{G}'$.

F.3.3 Decomposition of $H^{(2)}$

For our spherically symmetric system, it will prove convenient to transform the expression for $H^{(2)}[g_1]$ into a different form. For that, we first introduce the following notations associated to the arbitrary phase function g and the arbitrary rotation $\mathcal{R}$ of R^3 about O :

$$g_{\mathcal{R}}(\xi) = g(\mathcal{R}x, \mathcal{R}v), \quad (\text{F27})$$

$$\bar{g}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int g_{\mathcal{R}}(\xi) \, d\mathcal{R}, \quad (\text{F28})$$

$$\delta g = g - \bar{g}. \quad (\text{F29})$$

Clearly, the average $\bar{g}$ is spherically symmetric, i.e., $\bar{g}(\mathcal{R}\xi) = \bar{g}(\xi)$ for any $\mathcal{R}$, and $\bar{g} = \bar{g}(r, v, rv_r)$. We have also the useful simple relations

$$\overline{\delta g} = \frac{1}{4\pi} \int (\delta g)_{\mathcal{R}} \, d\mathcal{R} = 0, \quad (\text{F30})$$

and, for any g and g'

$$\{g_{\mathcal{R}}, g'_{\mathcal{R}}\}(\xi) = \{g, g'\}(\mathcal{R}\xi). \quad (\text{F31})$$

For a perturbation generated by g_1 , we can thus write

$$g_1 = \bar{g}_1 + \delta g_1, \quad (\text{F32})$$

$$f_1 = \bar{f}_1 + \delta f_1, \quad (\text{F33})$$

$$\Phi_1 = \bar{\Phi}_1 + \delta \Phi_1. \quad (\text{F34})$$

Using the symmetry of f_0 and E , the rotational invariance of the Laplacian and the properties of the averaging process quoted above, we obtain immediately

$$\bar{f}_1 = -\{f_0, \bar{g}_1\} = -f_{0E}\{E, \bar{g}_1\} \quad \text{and} \quad \delta f_1 = -\{f_0, \delta g_1\}, \quad (\text{F35})$$

$$\bar{\Phi}_1 = K[-\{f_0, \bar{g}_1\}] \quad \text{and} \quad \delta \Phi_1 = K[-\{f_0, \delta g_1\}], \quad (\text{F36})$$

and after some straightforward algebra,

$$H^{(2)}[g_1] = H^{(2)}[\bar{g}_1] + H^{(2)}[\delta g_1], \quad (\text{F37})$$

with of course

$$H^{(2)}[\bar{g}_1] = \frac{1}{2} \int (-f_{0E}) |\{E, \bar{g}_1\}|^2 \, d\xi - \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla_x \bar{\Phi}_1|^2 \, dx, \quad (\text{F38})$$

$$H^{(2)}[\delta g_1] = -\frac{1}{2} \int \{f_0, \delta g_1\} \{E, \delta g_1^*\} \, d\xi - \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla_x \delta \Phi_1|^2 \, dx. \quad (\text{F39})$$

Eq. (F37) shows that the stability problem decomposes into two parts: Stability with respect to spherical perturbations, and stability with respect to aspherical ones. We now consider in turn each of these problems.

F.4 Stability with respect to spherical perturbations

F.4.1 A further decomposition

For studying the term $H^{(2)}[\bar{g}_1]$, it is useful to effect one further decomposition by proceeding as follows. For any average $\bar{g}$, we denote as $\bar{g}^{+/-}$, respectively, its symmetric and antisymmetric parts (with respect to the transform $v_r \rightarrow -v_r$), defined by

$$\begin{aligned}\bar{g}(r, v, rv_r) &= \frac{1}{2}[\bar{g}(r, v, rv_r) + \bar{g}(r, v, -rv_r)] + \frac{1}{2}[\bar{g}(r, v, rv_r) - \bar{g}(r, v, -rv_r)] \\ &= : \bar{g}^+(r, v, rv_r) + \bar{g}^-(r, v, rv_r).\end{aligned}\tag{F40}$$

With

$$\bar{g}_1 = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_1^-, \tag{F41}$$

$$\bar{f}_1 = \bar{f}_1^+ + \bar{f}_1^-, \tag{F42}$$

we thus have

$$\bar{f}_1^\pm = -\{f_0, \bar{g}_1^\mp\}, \tag{F43}$$

$$\bar{\Phi}_1 = K[-\{f_0, \bar{g}_1^-\}], \tag{F44}$$

and we get after some simple algebra,

$$H^{(2)}[\bar{g}_1] = H^{(2)}[\bar{g}_1^+] + H^{(2)}[\bar{g}_1^-], \tag{F45}$$

with

$$H^{(2)}[\bar{g}_1^+] = \frac{1}{2} \int (-f_{0E}) |\{E, \bar{g}_1^+\}|^2 d\xi, \tag{F46}$$

$$H^{(2)}[\bar{g}_1^-] = \frac{1}{2} \int (-f_{0E}) |\{E, \bar{g}_1^-\}|^2 d\xi - \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla_x \bar{\Phi}_1|^2 dx. \tag{F47}$$

The first part $H^{(2)}[\bar{g}_1^+]$ of $H^{(2)}[\bar{g}_1]$ is clearly nonnegative, and thus we just need to consider in details the second part $H^{(2)}[\bar{g}_1^-]$.

F.4.2 The sign of $H^{(2)}[\bar{g}_1^-]$

To study the sign of $H^{(2)}[\bar{g}_1^-]$, we closely follow the method of [Sygnet *et al.*1984], which originates in the work of [Gillon *et al.*1976]. However, in addition to the facts that we have an external potential Ψ_e and that we do not use (r, L^2, E) as independant variables, there are some essential differences between their calculations and ours, that we shall discuss below.

First, we transform the expression of $H^{(2)}[\bar{g}_1^-]$ into a more convenient form. For that, we integrate once the Poisson equation

$$\nabla_x^2 \bar{\Phi}_1 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\bar{\Phi}_1}{dr} = -4\pi G \int \{f_0, \bar{g}_1^-\} dv = 4\pi G \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \int f_{0E} v_r \bar{g}_1^- dv \right), \tag{F48}$$

(where we have effected two integrations by part in the second member to get the RHS), which gives

$$\nabla \bar{\Phi}_1 = \frac{d\bar{\Phi}_1}{dr} \hat{r} = \left(4\pi G \int f_{0E} v_r \bar{g}_1^- dv \right) \hat{r}. \tag{F49}$$

Injecting this result into the second term of the RHS of Eq. (F38) and using Schwartz's inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla_x \overline{\Phi_1}|^2 dx &= 2\pi G \int \left| \int f_{0E} v_r \overline{g_1}^- dv \right|^2 dx \\ &\leq 2\pi G \int \left(\int (-f_{0E}) v_r^2 dv \right) \left(\int (-f_{0E}) |\overline{g_1}^-|^2 dv \right) dx. \end{aligned} \quad (\text{F50})$$

Noticing that

$$\rho_0 = \int f_0 dv = \int (-f_{0E}) v_r^2 dv \quad (\text{F51})$$

(just remark that $dv = 2\pi v_t dv_r dv_t$ and integrate by part with respect to v_r), we thus obtain

$$H^{(2)}[\overline{g_1}^-] \geq \frac{1}{2} \int (-f_{0E}) (|\{E, \overline{g_1}^-\}|^2 - 4\pi G \rho_0 |\overline{g_1}^-|^2) d\xi. \quad (\text{F52})$$

We now make the change of variable

$$\overline{g_1}^- =: r v_r \mu, \quad (\text{F53})$$

with the new function μ being still regular for $r v_r = 0$ as $\overline{g_1}^-(r, v, r v_r = 0) = 0$ owing to the antisymmetry of $\overline{g_1}^-$. Using the derivative property of the Poisson bracket, and the fact that the integral over the phase space of a Poisson bracket vanishes, we can rewrite Eq. (F52) in the form

$$\begin{aligned} H^{(2)}[\overline{g_1}^-] &\geq \frac{1}{2} \int (-f_{0E}) [(r v_r)^2 |\{E, \mu\}|^2 + r v_r \{E, r v_r\} \{E, |\mu|^2\} + |\mu|^2 \{E, r v_r\}^2 - 4\pi G \rho_0 (r v_r |\mu|)^2] d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int (-f_{0E}) [(r v_r)^2 |\{E, \mu\}|^2 + \{E, |\mu|^2 r v_r \{E, r v_r\}\} - |\mu|^2 r v_r \{E, \{E, r v_r\}\} \\ &\quad |\mu|^2 \{E, r v_r\}^2 + |\mu|^2 \{E, r v_r\}^2 - 4\pi G \rho_0 r v_r |\mu|^2] d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int (-f_{0E}) [(r v_r)^2 |\{E, \mu\}|^2 - |\mu|^2 (r v_r \{E, \{E, r v_r\}\} + 4\pi G \rho_0 (r v_r)^2)] d\xi. \end{aligned} \quad (\text{F54})$$

By a straightforward calculation, we obtain

$$\{E, \{E, r v_r\}\} = -r v_r \left(\frac{d^2 \Psi_0}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\Psi_0}{dr} \right) = -r v_r \left(4\pi G (\rho_0 + \rho_e) + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_0}{dr} \right), \quad (\text{F55})$$

whence, injecting this expression into Eq. (F54),

$$H^{(2)}[\overline{g_1}^-] \geq \frac{1}{2} \int (-f_{0E}) (r v_r)^2 \left[|\{E, \mu\}|^2 + |\mu|^2 \left(4\pi G \rho_e + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_0}{dr} \right) \right] d\xi \geq 0, \quad (\text{F56})$$

the last inequality sign resulting from the negativity of f_{0E} and the positivity of ρ_e and $d\Psi_0/dr$.

Let us now assume that $H^{(2)}[\overline{g_1}] = 0$. Then $H^{(2)}[\overline{g_1}^+] = 0$, whence $\{f_0, \overline{g_1}^+\} = 0$; and $H^{(2)}[\overline{g_1}^-] = 0$, whence $f_{0E} \overline{g_1}^- = 0$, and $\{f_0, \overline{g_1}^-\} = 0$. Therefore $\overline{f_1} = 0$, and we can eventually conclude that $H^{(2)}[\overline{g_1}] > 0$ for any g_1 such that $\overline{f_1} = -\{f_0, \overline{g_1}\} \neq 0$.

We can summarize the results of this section in the form of a theorem:

Theorem 1: If the steady state satisfies condition (F18), then $H^{(2)}[\overline{g_1}] > 0$ for any g_1 with a nontrivial average $\overline{g_1}$.

F.4.3 Consequences for stability

It is quite obvious that the set $\mathcal{G}'$ of the generators underlying the spherically symmetric perturbations is “closed with respect to evolution” in the sense of §3.2 – i.e., the solution $g_1(t)$ of Eq. (F24) generates a spherically symmetric perturbations if the initial condition $g_1(0)$ does. Then, by the general statement (b) of §3.2, we can conclude at once that *any spherical steady state satisfying (F18) is linearly stable with respect to all the spherical perturbations.*

F.4.4 Comparison with previous works

Of course, this result has been reported many times in the literature for the case where $\Psi_e \equiv 0$, and it is then worth explaining in a few words the differences between our proof and previous ones. In fact, the game consists in any case to show the positiveness of some quadratic functional $W[q]$ over a set $\mathcal{Q}$ of admissible functions q .

a) In a first class of methods ([Antonov 1961], [Kulsrud & Mark 1970], [Kandrup & Sygnet 1985]), $\mathcal{Q}_1$ is taken to be the set of all the functions which vanish outside Ω_0 and are antisymmetric in the change $v_r \rightarrow -v_r$, to which belongs the antisymmetric part $\overline{f_1^-}$ of any solution to the linearized VP. The relevant functional W_1 may be derived in a standard way (e.g., [Laval *et al.* 1965]) from the equation of motion (second order in time!)

$$\frac{1}{-f_{0E}} \frac{\partial^2 \overline{f_1^-}}{\partial t^2} = \mathcal{M} \overline{f_1^-} \quad (\text{F57})$$

satisfied by $\overline{f_1^-}$, the essential point being here the self-adjoint character (with respect to the usual hermitian product) of the operator $\mathcal{M}$ [Kandrup & Sygnet 1985]. It turns out that

$$W_1[\overline{f_1^-}] = H^{(2)}[\overline{f_1^-}]. \quad (\text{F58})$$

It appears that the “energy principle” method and the symplectic one lead to formally identical functionals in the situation we are considering here. They can thus be treated by the similar technics, and the same results are obtained. However, the two methods are conceptually very different ([Bartholomew 1971], [Kandrup 1990], [Kandrup 1991b], Paper I). In the former, the derived “energy functional” is closely related to the peculiar properties of the second order equation one starts with [the existence of W_1 results from the self-adjointness of $\mathcal{M}$, which is just a consequence of the strong symmetries of the system], and it has no obvious physical meaning. The latter, on the contrary, is more transparent. It only deals with a first order equation – the one satisfied by the generators g_1 of the symplectic perturbations (which form a restricted class of perturbations) –, and $H^{(2)}[\overline{g_1}]$ is easily seen to be actually the energy of the perturbation – an interpretation which keeps its validity when one considers more general systems.

b) In a second class of methods [Lynden-Bell & Sannit 1967], [Ipser 1974], [Ipser & Horwitz 1979], the relevant functional W_2 is the second variation of $E[f] + H_C[f]$. Here, $E[f]$ is the energy of f and

$$H_C[f] := - \int C[f, L^2] d\xi := \int \left(\int_0^f E(f_0, L^2) df_0 \right) d\xi, \quad (\text{F59})$$

with $E(f_0, L^2)$ the “inverse” of the monotone function $f_0(E, L^2)$ (the results obtained by the authors quoted above are for isotropic systems, but there is no problem to generalize them to the anisotropic case, as we do here). Formally, W_2 is easily shown to satisfy the relation

$$W_2[-\{f_0, \overline{g_1}\}] = H^{(2)}[\overline{g_1}] \quad (\text{F60})$$

for any function g_1 . The admissible $\mathcal{Q}_2$ is taken to be the set of all the $\overline{f}_1$ satisfying the constraints

$$\int \overline{f}_1 d\xi = 0 \quad \text{and} \quad \int \overline{f}_1 C'(f_0) d\xi = 0 \quad (\text{F61})$$

of first order mass and H_C -function conservation. The constraints which are retained from VP are thus quite weak, and, as a consequence, it has not been possible up to now to derive in this framework stability results as complete as those furnished by the energy and the symplectic methods.

c) The functional used by [Sygnet *et al.* 1984] appears to be $W_2[\overline{f}_1]$, as in the previous method, but the set of admissible functions $\overline{f}_1$ is not clearly specified. The authors, however, effect without further justifications the change of dependant variable $\overline{f}_1 \rightarrow \mu$ defined by

$$\overline{f}_1(r, E, L^2) = \left[(rv_r) f_{0E} \frac{\partial(rv_r \mu)}{\partial r} \right] (r, E, L^2) \quad (\text{F62})$$

[Eq. S-(B3), written with our notations], where use is made of (r, E, L^2) as independant variables [actually, this is a proper choice only in the region $\{v_r > 0\}$ or in the region $\{v_r < 0\}$]. But such a change can be valid only for particular perturbations. First, it is easy to see that any $\overline{f}_1$ of the form Eq. (F62) is symplectic, being generated by $\overline{g}_1(r, E, L^2) := (rv_r \mu)(r, E, L^2)$. Secondly, the new function μ introduced by this relation can be regular only if $\overline{g}_1 = 0$ for $rv_r = 0$. In our work, on the contrary, these conditions are explicit part of a coherent formalism: The symplectic nature of the perturbations is a basic element of the framework, while the vanishing of $\overline{g}_1$ for $rv_r = 0$ is automatically ensured by restricting our attention to the antisymmetric part $\overline{g}_1^-$ of $\overline{g}_1$, the part of the functional related to $\overline{g}_1^+$ turning out to be trivially positive.

F.5 Stability with respect to aspherical perturbations

F.5.1 A further decomposition

Using the relation

$$\delta f_1 = -\{f_0, \delta g_1\} = -f_{0E}\{E, \delta g_1\} - f_{0L^2}\{L^2, \delta g_1\}, \quad (\text{F63})$$

we can write the quantity $H^{(2)}[\delta g_1]$ as a sum of two terms:

$$H^{(2)}[\delta g_1] = H_1^{(2)}[\delta g_1] + H_2^{(2)}[\delta g_1], \quad (\text{F64})$$

with

$$H_1^{(2)}[\delta g_1] := \frac{1}{2} \int \frac{|\{f_0, \delta g_1\}|^2}{-f_{0E}} d\xi - \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla_x \delta \Phi_1|^2 dx, \quad (\text{F65})$$

$$H_2^{(2)}[\delta g_1] := -\frac{1}{2} \int \frac{f_{0L^2}}{-f_{0E}} \{L^2, \delta g_1^*\} \{f_0, \delta g_1\} d\xi. \quad (\text{F66})$$

F.5.2 Sign of $H_1^{(2)}[\delta g_1]$

We now set

$$\delta f_1 = -\{f_0, \delta g_1\} =: -f_{0E} \delta \Phi_1 + \delta \tilde{f}_1, \quad (\text{F67})$$

i.e., we use the standard trick [introduced in the gravitational context by [Lynden-Bell 1967]] which consists to single out the “quasi-static part” in the variation δf_1 of the distribution function. Then, taking into account the relation

$$\int \delta f_1 \delta \Phi_1 d\xi = -\frac{1}{4\pi G} \int |\nabla_x \delta \Phi_1|^2 dx, \quad (\text{F68})$$

we can write

$$\begin{aligned}
H_1^{(2)}[\delta g_1] &= \frac{1}{2} \int \frac{(\delta f_1)^2}{-f_{0E}} d\xi - \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla_x \delta \Phi_1|^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int \left[\frac{(\delta \tilde{f}_1)^2}{-f_{0E}} - f_{0E}(\delta \Phi_1)^2 + (\delta f_1 + f_{0E} \delta \Phi_1) \delta \Phi_1 \right] d\xi - \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla_x \delta \Phi_1|^2 dx \\
&= \frac{1}{8\pi G} \int \left[|\nabla_x \delta \Phi_1|^2 - 4\pi G \left(\int (-f_{0E}) dv \right) |\delta \Phi_1|^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int \frac{(\delta \tilde{f}_1)^2}{-f_{0E}} d\xi. \quad (\text{F69})
\end{aligned}$$

Following [Aly & Perez 1992], we now set

$$\delta \Phi_1 =: \Psi'_0 w. \quad (\text{F70})$$

Then

$$\begin{aligned}
H_1^{(2)}[\delta g_1] &= \frac{1}{2} \int \frac{(\delta \tilde{f}_1)^2}{-f_{0E}} d\xi \\
&\quad + \frac{1}{8\pi G} \int \left[\Psi_0'^2 (|\nabla_x w|^2 - 4\pi G(-f_{0E})|w|^2) + |w|^2 (\nabla_x \Psi'_0)^2 + \Psi'_0 \nabla_x \Psi'_0 \cdot \nabla_x |w|^2 \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{(\delta \tilde{f}_1)^2}{-f_{0E}} d\xi \\
&\quad + \frac{1}{8\pi G} \int \left[(\Psi'_0)^2 \left(|\nabla_x w|^2 - 4\pi G \left(\int (-f_{0E}) dv \right) |w|^2 \right) - |w|^2 \Psi'_0 \nabla_x^2 \Psi'_0 \right] dx. \quad (\text{F71})
\end{aligned}$$

The quantity $\nabla_x^2 \Psi'_0$ can be computed by differentiating Eq. (F14) with respect to r , which gives

$$\nabla_x^2 \Psi'_0 = 4\pi G(\rho'_0 + \rho'_e) + 2\frac{\Psi'_0}{r^2} = 4\pi G \left[\int (\Psi'_0 f_{0E} + 2rv_t^2 f_{0L^2}) dv + \rho'_e \right] + 2\frac{\Psi'_0}{r^2}. \quad (\text{F72})$$

On the other hand, w has zero average value on any spherical surface of center O , and then, by the so-called Wirtinger inequality [Aly & Perez 1992], we have for any value of r

$$\int \left(|\nabla_{x_s} w|^2 - \frac{2}{r^2} |w|^2 \right) d\Omega \geq 0, \quad (\text{F73})$$

with equality holding if and only if w is of the form $w(r, \theta, \phi) = w_0(r) \hat{x} \cdot a$ for some constant vector a [in Eq. (F73), we have set $\nabla_{x_s} := \nabla_x - \hat{r} \partial / \partial r$ and $d\Omega := \sin \theta d\theta d\phi$].

Using these results in Eq. (F71), we obtain eventually

$$\begin{aligned}
H_1^{(2)}[\delta g_1] &= \frac{1}{2} \int \frac{(\delta \tilde{f}_1)^2}{-f_{0E}} d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int \left[(\Psi'_0)^2 \left(\left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + |\nabla_{x_s} w|^2 - 2\frac{|w|^2}{r^2} \right) + 4\pi G \Psi'_0 \left((-\rho'_e) + 2r \int v_t^2 (-f_{0L^2}) dv \right) \right] dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int \frac{(\delta \tilde{f}_1)^2}{-f_{0E}} d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int \left[(\Psi'_0)^2 \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + 4\pi G \Psi'_0 \left((-\rho'_e) + 2r \int v_t^2 (-f_{0L^2}) dv \right) |w|^2 \right] dx. \quad (\text{F74})
\end{aligned}$$

Therefore, $H_1^{(2)}[\delta g_1] \geq 0$ for all g_1 if

$$\rho'_e \leq 0, \quad (\text{F75})$$

and

$$f_{0L^2} \leq 0. \quad (\text{F76})$$

Let us now assume that both conditions are satisfied, and that $H_1^{(2)}[\delta g_1] = 0$. Then: (i) $\delta \tilde{f}_1 = 0$; (ii) $\partial w / \partial r = 0$ and Wirtinger's inequality reduces to an equality, whence $w = \hat{x} \cdot a$. (iii) If either $\rho'_e \neq 0$ or $f_{0L^2} \neq 0$, we must also have $w = 0$ for some values of r . Then $w \equiv 0$ everywhere, and $\delta f_1 \equiv 0$. (iv) If $\rho'_e \equiv 0$ (which implies $\rho_0 \equiv 0$ and $\Psi_0 \equiv 0$) and $f_{0L^2} \equiv 0$, the previous results and the definition of w imply $\delta f_1 = -f_{0E} \Psi'_0 \hat{x} \cdot a = -a \cdot \nabla_x f_0$, which means that the perturbation just results from a rigid translation of the system of a vector a . But there is no such perturbations with $a \neq 0$ generated by the elements of $\mathcal{G}$ (see §3), and then we have in that case too $w \equiv 0$ and $\delta f_1 \equiv 0$. We have thus proven eventually that, under conditions (F75) and (F76),

$$H_1^{(2)}[\delta g_1] > 0 \quad \text{if} \quad \delta f_1 \neq 0. \quad (\text{F77})$$

F.5.3 Sign of $H_2^{(2)}[\delta g_1]$

Clearly, the term $H_2^{(2)}[\delta g_1]$ can be of either sign, depending on the choice of the generator. We even know from the general theorem of Paper I quoted in §3.2, that, by an appropriate choice of g_1 , it can be made sufficiently negative to overcome the positivity of $H^{(2)}[\overline{g}_1] + H_1^{(2)}[\delta g_1]$ which holds under conditions (F75) and (F76). Then we could only try to classify the perturbations according to the sign of that quantity.

Even that more modest goal appears to be difficult, and we shall content ourselves here with the simple following remark: $H_2^{(2)}[\delta g_1]$ vanishes for all the generators which satisfy

$$f_{0L^2} \{L^2, g_1\} = f_{0L^2} \{L^2, \delta g_1\} = 0, \quad (\text{F78})$$

i.e., which commute with L^2 in the region of the phase space where $f_{0L^2} \neq 0$ [note the use in Eq. (F78) of the obvious relation $\{L^2, \overline{g}_1\} = 0$]. We feel that these elements of $\mathcal{G}$ play some role in the dynamics of the system, and then they deserve a particular name: We shall call them “preserving generators” – the associate perturbations being thus the “preserving perturbations” –, and denote as $\mathcal{P}$ their set.

Clearly, $\mathcal{P}$ is a linear subspace of $\mathcal{G}$ [we may note here that they do automatically satisfy condition (F25)], and their general form can be found as follows. Consider the part Ω_1 of Ω_0 where $f_{0L^2} \neq 0$. We first note that there are five obvious solutions to Eq. (F78) in Ω_1 , namely: r , p_r , $L_x = -\cot \theta \cos \phi p_\phi - \sin \phi p_\theta$, $L_y = -\cot \theta \sin \phi p_\phi + \cos \phi p_\theta$ and $L_z = p_\phi$. Moreover, they are linearly independant, which can be most easily checked by considering the Jacobian determinant $D(r, p_r, L_x, L_y, L_z) / D(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi)$, which turns out to be of rank 5. As the general solution to Eq. (F78) in Ω_1 must depend on at most five integrals, we can thus conclude that any preserving generator is of the form

$$g_1(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = g_1(r, p_r, p_\phi, -\cot \theta \cos \phi p_\phi - \sin \phi p_\theta, -\cot \theta \sin \phi p_\phi + \cos \phi p_\theta), \quad (\text{F79})$$

in Ω_1 , and arbitrary elsewhere. Of course, all the spherically symmetric g_1 belong to $\mathcal{P}$. But this set contains many other elements, as the spherically symmetric elements depend on three variables [$g_1 = \overline{g}_1 = g_1(r, p_r, L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)$], while the general preserving ones depend on five variables. Unfortunately, $\mathcal{P}$ is not “closed under evolution” (see §3.2). Indeed, it results at once from the equation of evolution (F24) that condition (F78) is time-invariant only if the potential Φ_1 stays spherically symmetric, which can be the case only for the particular spherically symmetric perturbations.

We can thus eventually summarize the results of §5.2-5.3 in the form of

Theorem 2: *If the conditions (F18), (F75) and (F76) are satisfied, then we have $H^{(2)}[\delta g_1] > 0$ for all the nontrivial aspherical generators of $\mathcal{G}$ satisfying $f_{0L^2}\{L^2, \delta g_1\} = 0$.*

F.5.4 Consequences for stability

From Theorem 2 above and the general statements of §3.2, we can first conclude at once that an isotropic system is stable with respect to any aspherical perturbations – and then is stable with respect to any perturbation, because of the result of §4.2, – if condition (F75) is satisfied, i.e., if the external mass density ρ_e is a nonincreasing function of r (which is always the case in the applications).

For anisotropic systems satisfying (F75) and (F76), our Theorem 2 shows that any nontrivial aspherical perturbation generated by a preserving δg_1 has positive energy – the same result holding true for any preserving g_1 because of theorem 1. This completely new result is unfortunately more difficult to interpret. Strictly speaking, indeed, the general statements we have thus far about stability does not apply, as the preserving character of a perturbation is conserved in time only for spherically symmetric perturbations ($\{f_0, g_1\} = 0$). But we feel that it has some relevance for the stability problem, and we have undertaken some numerical simulations to check this idea. Our first results are reported in [Perez *et al.* 1995a] and seem to confirm our intuition.

F.5.5 Comparison with previous works

For isotropic systems, the stability result above has already been derived by the thermodynamic method and the energy principle ([Antonov 1961], [Lynden-Bell & Sannit 1967], [Binney & Tremaine 1987], where it is referred to as the Antonov-Lebowitz theorem) in the case where there is no external potential (i.e., $\Psi_e \equiv 0$). The new proof we have presented here, however, is more simple and transparent, and it is self-contained (e.g., it does not use results on the stability of gaseous stars). Moreover, it does not appeal to some unproven assumptions on the completeness of the modes of some operator (assumptions which may certainly be proven, but with much efforts). Our work thus answers an important question addressed by [Kandrup & Sygnet 1985] about the possibility of a stability proof not using some peculiar completeness theorem, which certainly justified to present it in details.

Concerning the aspherical stability of an anisotropic system, there seems to be only one published result based on the consideration of an energy functional. It is due to [Gillon *et al.* 1976], and states that any spherically symmetric steady state satisfying Eqs. (F18) and (F76) is stable with respect to any aspherical perturbations. There has been some doubts repeatedly casted in the literature on the validity of this result (e.g., [Binney & Tremaine 1987]), but no explicit rebuttal (or approval!) has been yet presented. Owing to its possible importance, we have thus conducted a detailed analysis of Gillon *et al.*'s complicated proof, in which a spherical system is approximated by a multiple water-bag model. Unfortunately, we have found two serious flaws, and our conclusion does confirm the fear of the skeptics:

a) There is an inconsistency in the calculations, as the basic conservation law for the quantity A [Eq. G-(49)] is obtained by using both the nonlinear and the linearized VP, without distinguishing carefully the order of the various terms. When the derivation is made correctly, it does not seem to lead to an interesting result.

b) If we assume however that the derivation is correct, then we must note that the “conserved” quantity A [Eq. G-(52)] takes a positive value $A_{eq} > 0$ at equilibrium [just make $a_{\pm k} = 0$ in Eq. G-(52), where $a_{\pm k}$ are the functions describing an arbitrary perturbation]. Therefore, to be a Lyapunov function, A should satisfy the condition $A \geq A_{eq}$ for any perturbation rather than the stated one, $A \geq 0$. But it is easy to check that the former condition is certainly not fulfilled, as

A can be made larger or smaller than A_{eq} by choosing adequately $a_{\pm k}$. Then, even under our optimistic assumption, no conclusion could be actually drawn from that quantity.

F.6 Extension to other systems

F.6.1 Rotating spherical systems

Consider a spherically symmetric steady state characterized by the function $f_s(E, L^2)$ and the potential Ψ_0 , and introduce an arbitrary function $f_a(E, L^2, L_z)$ such that

$$f_0(E, L^2, L_z) := f_s(E, L^2) + f_a(E, L^2, L_z) \geq 0, \quad (\text{F80})$$

and

$$f_a(E, L^2, -L_z) = -f_a(E, L^2, L_z). \quad (\text{F81})$$

As noted long ago by [Lynden-Bell 1960], f_0 is also a steady state distribution function associated to the potential Ψ_0 (the mass density corresponding to f_0 is the same as the one corresponding to f_s), and it describes a system which is rotating about the z -axis. We now discuss whether the stability results derived above can be extended to these more general distribution functions.

Proceeding as in §3.3, we obtain after some algebra

$$\begin{aligned} H^{(2)}[g_1] &= -\frac{1}{2} \int \{f_s, \overline{g_1}\} \{E, \overline{g_1^*}\} d\xi - \frac{1}{2} \int \{f_0, \delta g_1\} \{E, \delta g_1^*\} d\xi - \int \{f_a, \overline{g_1}\} \{E, \delta g_1^*\} d\xi \\ &- \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla \overline{\Phi_1}|^2 dx - \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla \delta \Phi_1|^2 dx, \end{aligned} \quad (\text{F82})$$

with

$$\overline{\Phi_1} = K[-\{f_s, \overline{g_1}\} - \overline{\{f_a, \delta g_1\}}], \quad (\text{F83})$$

$$\delta \Phi_1 = K[-\{f_a, \overline{g_1}\} - (\{f_a, \delta g_1\} - \overline{\{f_a, \delta g_1\}})]. \quad (\text{F84})$$

Because of the presence of the nonspherically symmetric term f_a in f_0 , it is then no longer possible to separate $H^{(2)}[g_1]$ into two terms depending respectively on $\overline{g_1}$ and δg_1 , and we have not been able yet to draw a general conclusion from the expressions above.

However, there is a simple result which can be extracted from them. Consider a purely spherically symmetric perturbation generated by $\overline{g_1}$. Then

$$H^{(2)}[g_1] = H^{(2)}[\overline{g_1}] = -\frac{1}{2} \int \{f_s, \overline{g_1}\} \{E, \overline{g_1^*}\} d\xi - \frac{1}{8\pi G} \int |\nabla \overline{\Phi_1}|^2 dx, \quad (\text{F85})$$

$$\overline{\Phi_1} = K[-\{f_s, \overline{g_1}\}], \quad (\text{F86})$$

i.e., we recover the expressions valid for the spherical state f_s . If $\partial f_s / \partial E < 0$, it thus results at once from §4 that $H^{(2)}[\overline{g_1}] > 0$ for any nontrivial $\overline{g_1}$, and our rotating state turns out to be stable with respect to all the spherically symmetric perturbations.

The positivity of the energy is also obtained in the case where g_1 – and thus δg_1 – are even in the change $v_\phi \rightarrow -v_\phi$. In that case, the crossed terms [containing both $\overline{g_1}$ and δg_1] vanish, and the results of §4-5 imply $H^{(2)}[g_1] > 0$ indeed [assuming $\partial f_{s,0} / \partial E < 0$]. But this is not a completely fair stability result as the even character of g_1 is generally not preserved by the equation of evolution.

F.6.2 Systems with a nondecreasing distribution function

The stability of a spherical system when condition (F18) is not satisfied has been considered numerically by [Henon 1973]. From an analytical point of view, it appears to be a quite difficult problem, and we shall content ourselves here to make two points.

a) Consider the case where $f_{0E} > 0$ in the region Ω_0 where $f_0 > 0$. Of course, this implies that f_0 is discontinuous on the boundary $\partial\Omega_0 = \{\xi \mid E(\xi) = E_0 \leq 0\}$, and there is a violation of our smoothness assumption. Consider a spherical perturbation generated by $\overline{g}_1$, and assume that $\{E, \overline{g}_1\}$ vanishes on $\partial\Omega_0$. It is easy to check that $H^{(2)}[\overline{g}_1]$ is still given by Eq. (F38) [the boundary term related to the presence of the delta-function $\delta(E - E_0)$ in the derivative f_{0E} disappearing], and that $H^{(2)}[\overline{g}_1] < 0$ for any nontrivial $\overline{g}_1$. Then the system appears to be stable with respect to these particular perturbations (§3.2.a) – a conclusion also obtained by [Kandrup & Sygnet 1985] by means of their energy principle.

b) Consider the case where the system is isotropic [$f_0 = f_0(E)$] and f_{0E} may have a changing sign in Ω_0 , and let us assume that the system admits a neutral aspherical mode generated by δg_1 . Then we have $\delta \tilde{f}_1 = 0$ and $H^{(2)}[\delta g_1] = 0$ (Paper I), which implies at once, by using the arguments at the end of §5.1, that $\delta f_1 = 0$. We have thus proven the following new result: Whichever be the sign of f_{0E} , an isotropic spherically symmetric system cannot admit an aspherical neutral mode.

F.7 Conclusion

In this paper, we have considered a self-gravitating collisionless system, in which the particles are also submitted to an external potential Ψ_e . We have first presented some new considerations on the relations between the spherical symmetry of a steady state and the form of its distribution function f_0 . In particular, we have argued that, under quite general assumptions, a system with an f_0 depending only on the energy is necessarily spherically symmetric.

We have thus reinvestigated from an analytical point of view the problem of the linear stability of this system in the consistent framework of the symplectic method. By effecting a systematic study of the sign of the energy of an arbitrary symplectic perturbation, we have reached in particular the following conclusions, valid when $f_{0E} < 0$:

a) Any steady state is stable with respect to all the spherically symmetric perturbations.

b) An isotropic system [$f_0 = f_0(E)$] is also stable with respect to all the aspherical perturbations, at least if the external mass density ρ_e is a nonincreasing function of the radial coordinate r . Of course, this result and the one in (a) above are well known in the case where $\Psi_e \equiv 0$. But even if we restrict our attention to this particular case, our proofs are much simpler and complete than all the previous ones, bringing about some new important elements which were called for by many authors. In particular, our proof of the second quoted result shows more clearly the origin of the stability, and it is the first which does not appeal to some unproven modes completeness result.

c) For an anisotropic system with $f_{0L^2} \leq 0$ and $\rho'_e \leq 0$, any nontrivial “preserving perturbation” – i.e., one having a generator commuting with L^2 , which of course does not mean that it is spherically symmetric – has a positive energy. The exact meaning of this result is still not completely clear, and we have tried to elucidate it by effecting numerical investigations. The results obtained for the particular case where the distribution function is of the Ossipkov-Meritt type (see, e.g., [Binney & Tremaine 1987]) and there is no external potential, are reported in [Perez *et al.* 1995a]. More general situations, currently under intensive study, will be analyzed in forthcoming papers.

Finally:

a) We have analyzed in details a challenged result by [Gillon *et al.*1976], according to which stability with respect to any perturbations holds if $f_{0L^2} \leq 0$, and found the proof to contain some flaws, that we have clearly explicated.

b) We have shown that a spherical rotating system is stable with respect to all the spherically symmetric perturbations.

c) We have proven that an isotropic system with a derivative f_{0E} which may change its sign, cannot admit a nontrivial neutral mode (i.e., one differing from a mere global translation of the system).

Chapitre G

On the stability of collisionless self gravitating spherical systems

Jérôme Perez^{1,2}, Jean-Michel Alimi³, Jean-Jacques Aly¹, Hans Scholl⁴

¹ Service d'Astrophysique - CE Saclay - 91191 Gif sur Yvette Cédex - France

² ETCA/CREA - 16 bis av. Prieur de la côte d'or - 94114 Arcueil Cédex - France

³ Laboratoire d'Astronomie Extragalactique et de Cosmologie - Observatoire de Meudon - 5, Place Jules Jansen - 92 195 Meudon - France

⁴ Département Cassini - Observatoire de la Côte d'azur - BP 229 - 06 304 Nice cedex 4 - France

Soumis le 7 Mars 1995 dans *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*

Résumé

We have performed a series of high resolution N-body experiments on a Connection Machine CM-5 in order to study the stability of collisionless self-gravitating spherical systems. We interpret our results in the framework of symplectic mechanics which provides the definition of a new class of preserving perturbations. A preserving perturbation is a generalization of radial perturbation for the anisotropic case. Using models defined by the Ossipkov-Merritt algorithm, we show that the stability of a spherical system is directly related to the preserving or non-preserving nature of the perturbations acting on the system. We then generalize our results to all spherical systems.

Since the “isotropic component” of the linear variation of the distribution function (DF) can not be used to predict the stability or instability of a spherical system, we propose a more useful stability parameter which is derived from the “anisotropic” component of the linear variation.

G.1 Introduction

The initial equilibrium of a collisionless self-gravitating system is a necessary but not sufficient condition for dynamical stability. According to Jeans' theorem, the distribution function (hereafter DF) is determined only by the isolating integrals of motion. During later evolution, significant changes can appear on a few crossing times. It is well-known for instance, that spherical and anisotropic systems with components moving mainly on radial orbits, are unstable. The physical origin of this instability has been extensively investigated analytically [Antonov 1973], [Palmer & Papaloizou 1986], and numerically [Henon 1973], [Barnes *et al.* 1986], [Merritt & Aguilar 1985], [Dejonghe & Merritt 1993], [de Zeeuw & Franx 1991]. However, none of these investigations has provided a simple and general stability criterion which allows to introduce a stability parameter defined by the initial conditions of a gravitational system. Under the light of recent analytical development [Perez 1995], [Perez & Aly 1995], we reexamine in this paper this problem.

The stability of collisionless self-gravitating systems has been described by two main analytical approaches. Stability properties can be deduced from an angle-action description and from the decomposition of the gravitational potential in normal modes [Goodman 1988], [Palmer & Papaloizou 1986]. This method applies to a large class of systems [Fridman & Polyachenko 1984]. However, the analytical developments and the derived stability criteria are often tedious [Doremus *et al.* 1971], [Palmer & Papaloizou 1986], [Goodman 1988], [Polyachenko 1992] and difficult to apply. A second method, inspired from plasma physics [Laval *et al.* 1965], is related to the variational energy principle. It has been adapted by Kulsrud and Mark [Kulsrud & Mark 1970] to gravitational systems. This method yields a stability criterion for the case of non-radial perturbations [Antonov 1973], [Lynden-Bell & Sannit 1967] in isotropic spheres, when the second order energy variation operator is Hermitian. This is the well-known Antonov-Lebovitz theorem [Binney & Tremaine 1987]. Recently, Aly and Perez [Aly & Perez 1992] have simplified the demonstration of this theorem.

The stability of radially perturbed isotropic (or anisotropic) sphere was shown by Doremus and his collaborators [Doremus *et al.* 1971]. Their analytical development have been considerably simplified by [Sygnet *et al.* 1984], [Kandrup & Sygnet 1985] and extended in more general cases by [Perez & Aly 1995]. For non-radially perturbed anisotropic spheres, or non-spherical systems, the variational energy principle as previously described is not relevant.

Independently of previous analytical work, Fridman and Polyachenko [Fridman & Polyachenko 1984] have proposed the only available stability parameter for collisionless self-gravitating spherical systems. They defined a parameter ξ which is the ratio between the total kinetic energies of the radial and transversal components of the system. Above a critical value of ξ ($\xi > 1.7 \pm 0.2$), the systems are predicted to be unstable. However, this criterion is only an empirical suggestion. Numerical simulations [Palmer 1994a], [Palmer 1994b] have shown its invalidity in many cases.

In the framework of symplectic mechanics, the pioneering work of [Bartholomew 1971], [Kandrup 1990], [Kandrup 1991b] and more recently, of Perez and Aly [Perez 1995], [Perez & Aly 1995] have built a general theory for the stability of collisionless self-gravitating systems. The Vlasov equation which governs the dynamical evolution of such systems is in this context rewritten in algebraic form. Expanding the Hamiltonian of the system in a Taylor series and retaining the first non-vanishing energy variation, a stability criterion, independent of the geometry, is deduced. Using this general result, Perez and Aly demonstrated the stability of anisotropic spheres against a new class of preserving perturbations (generalization of radial perturbation in the anisotropic case) and generalized the Antonov-Lebovitz theorem. However, the analytical predictions of this new theorem are mainly usable only in two limiting cases (stable isotropic and unstable radial

orbits). In this paper, we conjecture from previous results that the stability in the intermediate cases, is directly related to the preserving or not preserving nature of the perturbations acting on the system. We present numerical simulations which confirm this conjecture and we propose a stability parameter for all spherical anisotropic systems.

The paper is arranged as follows. In section 2, we outline the main analytical results obtained in the framework of symplectic mechanics concerning the stability of collisionless self-gravitating spherical systems. We present in section 3 the numerical method for simulating the initial conditions and the dynamical evolution of such gravitational systems. We give a physical interpretation of their (in)stability in terms of quantities introduced by the symplectic formalism in section 4. We deduce from the numerical results two laws concerning the stability of any anisotropic collisionless self-gravitating spherical systems (section 5).

G.2 Theoretical context and Analytical results

If f is the DF of the system in the $(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ phase-space, $\psi(\mathbf{x})$ the gravitational potential and G the gravitational constant, the evolution of the system (during a period compatible with the collisionless assumption) is given by the Vlasov-Poisson system

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - \nabla_{\mathbf{x}} \psi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \\ \psi_f(\mathbf{x}, t) = -4\pi G \int \frac{f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\Gamma' \end{cases} \quad (\text{G1})$$

where $d\Gamma := d\mathbf{v}d\mathbf{x}$ denotes an infinitesimal volume of phase space.

It is well known that the Vlasov equation (G1) can be written in the standard Poisson Bracket form

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{v}} E \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\mathbf{x}} E \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f := \{E, f\} \quad (\text{G2})$$

where $E = \mathbf{v}^2/2 + \psi$ is the one particle energy of the system. E is the generator of the canonical transformation describing the motion and its conjugated quantity is the time t . More generally, the evolution equation of f for any transformation defined by a generator g_1 and its conjugated quantity λ can be written

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \{g_1, f\} \quad (\text{G3})$$

The previous equation can also be generalized which yields an evolution equation for any functional of the DF f . The time-evolution is then generated by the total physical energy H associated with f

$$H[f] = \int d\Gamma \frac{\mathbf{v}^2}{2} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \frac{G}{2} \int d\Gamma \int d\Gamma' \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (\text{G4})$$

H is a functional of f and its functional derivative is

$$\frac{\delta H[f]}{\delta f} = E \quad (\text{G5})$$

For any $F[f]$ we have

$$\dot{F}[f] := \frac{\partial}{\partial t} F[f] = \int \frac{\delta F}{\delta f} \dot{f} d\Gamma \quad (\text{G6})$$

Inserting the bracket form of Vlasov equation (G2) and equation (G5) in equation (G6), we get after an integration by part the functional form of Vlasov equation describing the time-evolution of $F[f]$ [Morrison 1980]

$$\dot{F}[f] = \int f \left\{ \frac{\delta F}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f} \right\} d\Gamma := [F, H][f] \quad (\text{G7})$$

$[\cdot, \cdot]$ is a Lie bracket. More generally, the functional evolution equation of $F[f]$ for any transformation defined by a functional generator $G_1(f) := \int g_1 f d\Gamma$ can be written

$$\forall F \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} F[f] = \int f \left\{ \frac{\delta F}{\delta f}, \frac{\delta G_1}{\delta f} \right\} d\Gamma = [F, G_1][f] \quad (\text{G8})$$

The solution of (G8) can be obtained in term of an exponential

$$\forall F \quad F[f] = (e^{[\cdot, G_1] \lambda} F)[f_{\lambda_o}] \quad (\text{G9})$$

or more explicitly as a Taylor expansion,

$$\begin{aligned} \forall F \quad F[f] = F[f_{\lambda_o}] & - [G_1, F][f_{\lambda_o}](\lambda - \lambda_o) + \frac{[G_1, [G_1, F]][f_{\lambda_o}]}{2!}(\lambda - \lambda_o)^2 \\ & - \frac{[G_1, [G_1, [G_1, F]]][f_{\lambda_o}]}{3!}(\lambda - \lambda_o)^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{G10})$$

where f_{λ_o} denotes the value of the DF at the point $\lambda = \lambda_o$.

In the particular case $F = H$, the general development (G10) provides a development of the total energy of the system. When f_{λ_o} is a equilibrium DF f_o , the first non vanishing term of this development gives a linear stability criterion of a self-gravitating collisionless system, independently of its geometry.

$$H^{(1)}[f_o] = -[G_1, H][f_o] = - \int f_o \left\{ \frac{\delta G_1}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f} \right\} d\Gamma = \int g_1 \{E, f_o\} d\Gamma \quad (\text{G11})$$

is clearly vanishing ($\{E, f_o\} = \dot{f}_o = 0$)

$$H^{(2)}[f_o] = \frac{[G_1, [G_1, F]][f_o]}{2!} \quad (\text{G12})$$

can be written after some straightforward algebra [Perez 1995],[Perez & Aly 1995]

$$H^{(2)}[f_o] = -\frac{1}{2} \int \{g_1, E\} \{g_1, f_o\} d\Gamma - \frac{1}{2} \int d\Gamma d\Gamma' \frac{\{g_1, f_o\} \cdot \{g'_1, f'_o\}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (\text{G13})$$

The positiveness of $H^{(2)}[f_o]$ determines the *stability* of the system against perturbations generated by some g_1 . Using a less general method, this result had been previously obtained by Bartholomew [Bartholomew 1971] and Kandrup [Kandrup 1990],[Kandrup 1991b]).

It is important to notice that this criterion on the positiveness of $H^{(2)}[f_o]$ is only a criterion stability, it tells us nothing about the linear *instability* of the system. Kandrup [Kandrup 1991a] showed that, if $H^{(2)}[f_o]$ is negative, the system develops then a secular instability.

In the particular case of spherical self-gravitating systems, where the equilibrium DF depends only on the one-particle energy E and on the one-particle squared total angular momentum L^2 , the linear distribution function variation $\delta f := \{g_1, f_o\}$, which appears in the second order energy variation (equation (G13)), can be written

$$\delta f = \frac{\partial f_o}{\partial E} \{g_1, E\} + \frac{\partial f_o}{\partial L^2} \{g_1, L^2\}. \quad (\text{G14})$$

When one considers a preserving perturbation defined by $\{g_1, L^2\} = 0$ [Perez 1995], [Perez & Aly 1995], an anisotropic spherical system behaves then as a stable isotropic spherical system¹, with $H^{(2)}[f_o]$ positive [Antonov 1962], [Kandrup & Sygnet 1985]. On the contrary, systems with components evolving only on radial orbits are unstable. Such systems can be described by an equilibrium distribution function $f_o(E, L^2) = \nu(E)\delta(L^2)$ where $\nu(E)$ is an arbitrary monotonic function of E , and $\delta(L^2)$ denotes a Dirac distribution for L^2 . In this case, it is then easy to show that all preserving physical perturbations are vanishing. The two previous opposite cases (stable isotropic spherical systems and unstable radial-orbit anisotropic spherical systems) suggest that the stability of a spherical self-gravitating system is directly related to the preserving or non-preserving nature of the perturbations acting on the system. In order to confirm this conjecture in all the intermediate cases, which cannot be studied analytically, we have performed numerical simulations. Moreover, under the light of previous analytical work, we will propose also a stability parameter.

G.3 Numerical Methods

G.3.1 Initial Conditions

We use the Ossipkov-Merritt algorithm [Ossipkov 1979], [Merritt 1985b], [Merritt 1985a], [Binney & Tremaine 1987] which is well adapted for generating anisotropic self-gravitating spherical systems with very various physical properties (see appendix).

This algorithm consists to deform the isotropic density $\rho_{iso}(r)$ deduced from a given isotropic gravitational potential $\psi_{iso}(r)$ in the following way ($r = |\mathbf{x}|$)

$$\rho_{ani}(r) := \left(1 + \frac{r^2}{r_a^2}\right) \rho_{iso}(r) \quad (\text{G15})$$

The anisotropic radius r_a controls the deformation. Using the Abel inversion technique, this procedure allows us then to generate an anisotropic DF depending both on E and L^2 through the variable $Q := E + L^2/2r_a^2$.

$$f_o(Q) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} \frac{d}{dQ} \int_Q^0 \frac{d\psi_{iso}}{\sqrt{\psi_{iso} - Q}} \frac{d\rho_{ani}}{d\psi_{iso}} \quad (\text{G16})$$

The velocity anisotropy at any radius r is given by

$$\frac{\sigma_r^2}{\sigma_t^2} := \frac{\langle v_r^2 \rangle}{\frac{1}{2} \langle v_t^2 \rangle} = 1 + \frac{r^2}{r_a^2} \quad (\text{G17})$$

The model is always isotropic in the center and becomes anisotropic outwards.

We have chosen for the isotropic potential, the polytropic model, the solution of the Lane-Emden differential equation

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = (-1)^n 4\pi G c_n \psi^n \quad c_n = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)} \quad (\text{G18})$$

where $\psi(0)$ is a free parameter. We have set $\psi(0)$ equal to -1 . Since the gravitational force vanishes at the center of the system, we have $d\psi/dr = 0$ at $r = 0$.

¹We consider all along of this paper only systems with a distribution function which admits a monotonous decreasing dependence in respect of all isolating integrals of motion, ($\frac{\partial f_o}{\partial E} < 0$, and $\frac{\partial f_o}{\partial L^2} < 0$)

Figure G.1: Phase space DF for $n = 4.5$ with respectively $r_a = 0.75(\text{dot}), 1, 2, 5, 10, 100$. As r_a decreases, f becomes progressively smaller at low energy, ($Q \rightarrow 1$).

Figure G.2: Relative Gravitational Potential for $n = 4.5$ with respectively $r_a = 0.75(\text{dot}), 1, 2, 5, 10, 100$. The radius R at which ψ vanishes, increases with the anisotropy, ($r_a \rightarrow 0$).

The system admits a finite density and a finite mass provided the polytropic index $1/2 < n \leq 5$ [Chandrasekhar 1957]. The total mass of the system is fixed equal to 1 in our numerical simulations. Tuning n and r_a , we can then modify the only free physical parameters of the system: the size and the dynamical time. The size increases as n for a given r_a , the dynamical time increases as the anisotropy of the system for a given n . All the models are virial-relaxed ($\eta = 2.E_{kinetic}/E_{potential} = -1$). One family of DF's are plotted on figure G.1. The DF generated from such a procedure do not present any fixed-point as in the figure 2a of Merritt [Merritt 1985b]. As a matter of fact, since we have not constrained the size of the system, the gravitational potential depends in our case on r_a for a given n (figure G.2). Consequently, there is no more fixed-point.

In order to set up the initial conditions of our N-body numerical simulations, we now randomly choose the positions and the velocities for N particles from the DF. We plot in figure G.3 the radial density profile and in figure G.4 the velocity anisotropy deduced from one simulation of the system with $n = 4$ and $r_a = 2$. The agreement between our initial numerical conditions and the theoretical models are fully satisfactory.

The Ossipkov-Merriit models admit a fundamental limitation. As a matter of fact, for a given

Figure G.3: Radial density profile for a system with $n = 4$ and $r_a = 2$. The solid line is derived from equations (16) and (18), the symbols correspond to the radial density profil deduced from particles.

Figure G.4: The radius dependence of the ratio between the radial velocity dispersion and tangential velocity dispersion for $n = 4$. and $r_a = 2$. The plain line corresponds to equation (18), and the symbols correspond to the same quantities deduced from the particles.

polytropic index n , it exists a critical r_a value, for which the DF becomes negative and unphysical in some region of the phase space (figure G.1). Merrit [Merritt 1985b] interprets this limitation as a simple illustration of the well-known fact that an arbitrary spherical mass distribution cannot always be reproduced by radial orbits. We have nevertheless considered models with $r_a = 1$ or $r_a = 0.75$ for example, which admit a negative DF in a region of phase space (figure G.1). However in these cases we have arbitrarily set the DF equal to zero in this region. We deduce only now the positions and velocities of the particles. As we will see in the following, our conclusions concerning the stability or the instability of such systems with a strong anisotropy have been obtained in a similar way than the realistic Ossipkov-Merrit systems with $r_a \geq 2$.

Finally, since each particle is initialized independently, the equilibrium DF $f_o(E, L^2)$ of the system is in fact slightly perturbed. The perturbation is due to local Poissonian fluctuations of the density. The dynamical evolution of the system represents then the response of an anisotropic self-gravitating spherical equilibrium system submitted to such a perturbation.

G.3.2 Numerical Integrations

Particles of mass m_i and m_j interact through the softened potential:

$$\phi_{ij} = Gm_i m_j / (r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{1/2} \quad (\text{G19})$$

where r_{ij} is their separation. The softening parameter ϵ is essentially a particle radius. In our simulations, $\epsilon = 0.05$. The most obvious algorithm to integrate equations (G19) is direct summation [Aarseth 1972], [Aarseth 1985]. Unfortunately, the number of operations in this algorithm grows as N^2 . On classical sequential computers, it is at present not possible to consider a large number of particles ($N \leq 10000$) and to perform many numerical simulations. On the other hand, the direct summation algorithm is particularly adapted to massively parallel computers like a Connection Machine. In this paper, numerical simulations have been performed on a Connection Machine CM-5 by using a "Digital Orrery" algorithm, first developed on a Connection Machine CM-2, [Hillis & Barnes 1987], [Alimi & Scholl 1993], [Serna *et al.* 1994]. In this case, one physical or virtual processor is assigned to each particle. One can then imagine two rings of processors containing both the same set of N-body coordinates. One ring starts to turn around stepwise by the use of CM instructions. At each step, forces between all adjacent couples of bodies placed on the two different rings are calculated in parallel. A complete force calculation between all particles requires $N - 1$ such steps. To illustrate the computational requirements, for a simulation with 8192 particles, the main part, computing all interacting forces between all particles, took less than 10 seconds per time-step on a 32-nodes CM-5. The accuracy of the integration can be illustrated by the variation of the total energy throughout a complete calculation, typically 30 dynamical times resolved by 10000 time-steps. This variation was smaller than 0.01 per cent.

G.4 Numerical results

G.4.1 Morphological (In)stability

The physical mechanism of radial-orbit instability for collisionless self-gravitating systems is well-known. It is described in detail by several authors [Antonov 1962], [Palmer 1994b]. The morphological deformation resulting from such an instability is mainly due to the trapping of particles with a low angular momentum in a bounded area of space. To evaluate this deformation of an initial spherical system into an ellipsoid, it is convenient to use the axial ratio defined from the moment of the inertia tensor I [Allen *et al.* 1990]. From the three real eigenvalues of I ,

Figure G.5: The axial(bold curves,left ordinates) and the virial (dashed curve, right ordinates) ratio vs dynamical time, for models with a polytropic index $n = 3.5$ and an anisotropy radius $r_a = 0.75$ (first diagram),1, 2, 5, 10, and 100.

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, we compute the axial ratios $a_1 = \lambda_1/\lambda_2$ and $a_2 = \lambda_3/\lambda_2$. These two quantities, which can always be defined because an eigenvalue does never vanish, satisfy $a_1 \leq 1 \leq a_2$.

In figures G.5, G.6 and G.7, we plot the evolution of both the axial ratios and the virial ratio η for three classes of systems defined by 3 different polytropic indexes n . In each class, we have considered 6 different models which range from a purely radial model with $r_a = 0.75$ to a quasi isotropic one with $r_a = 100$. A large range of systems with various physical properties (size, dynamical time....) (see appendix), are thus taken into account in the set of these simulations.

All systems are initially spherical and virial-relaxed. a_1 and a_2 are equal to 1, and η is equal to -1 (see section 3.1). The temporal average value for η allover the evolution is also equal to -1 . However, during the first steps, at the same time when the systems possibly deforms, a significant fluctuation for η appears clearly, which disappears later. η stays equal to -1 . Independently of the value of the polytropic index n , weakly anisotropic systems ($r_a > 2$) have kept their initial spherical geometry during the evolution. Their axial ratios does never differ significantly from unity ($a_1 \simeq a_2 \simeq 1$). They are morphologically stable. On the contrary, but always independently of n , systems with a low initial anisotropic radius $r_a \leq 2$. deform inevitably, reach a new non-spherical configuration, and stabilize in a new ellisoidal configuration (a_1 or a_2 are significantly

Figure G.6: The axial (bold curves, left ordinates) and the virial (dashed curve, right ordinates) ratio vs dynamical time, for models with a polytropic index $n = 4$ and an anisotropy radius $r_a = 0.75$ (first diagram), 1, 2, 5, 10, and 100.

Figure G.7: The axial (bold curves, left ordinates) and the virial (dashed curve, right ordinates) ratio vs dynamical time, for models with a polytropic index $n = 4.5$ and an anisotropy radius $r_a = 0.75$ (first diagram), 1, 2, 5, 10, and 100.

different from unity). This is exactly the observed effect of the radial orbit instability which flattens the system ([de Zeeuw & Franx 1991] for a review). The collisionless hypothesis of our systems is fundamental for interpreting our results. Consequently, we do not have continued our numerical simulations beyond 30 dynamical times in order to avoid a later evolution where two-body relaxation arises.

In the next section, we interpret all these numerical results with the help of the symplectic formalism described in section 2. We also propose a stability parameter.

G.4.2 Physical interpretation in terms of $\{g_1, E\}$ and $\{g_1, L^2\}$.

The analytical developments presented in section 2 concern the dynamics and the properties in the mean field approximation of the 6-variable DF f . In a N-body simulation we have accessed to the 6N-variable exact DF, $f^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_N)$ which is a solution of the Liouville equation (for a detailed justification of required approximations for re-constructing f from $f^{(N)}$ see [Saslaw 1985])

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^N \left(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (f^{(N)} \dot{\mathbf{x}}^\alpha) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f^{(N)} \dot{\mathbf{v}}^\alpha) \right) = 0 \quad (\text{G20})$$

Consequently, the Poisson brackets $\{g_1, E\}$ and $\{g_1, L^2\}$ appearing in the Eq. (G14) which define the linear perturbation, are estimated in N-body simulations from statistical properties of the random variables ϵ_i and λ_i defined for each particle i .

$$\begin{aligned} \epsilon_i : &= \{g_1, E\}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}^{\mathbf{v}=\mathbf{v}_i} = (\nabla_{\mathbf{x}} g_1 \cdot \mathbf{v})_i - (\nabla_{\mathbf{v}} g_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi)_i \\ &= \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}} \cdot d\mathbf{v} \right)_i + \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} \right)_i = dE_i \end{aligned} \quad (\text{G21})$$

and

$$\begin{aligned} \lambda_i : &= \{g_1, L^2\}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}^{\mathbf{v}=\mathbf{v}_i} = (\nabla_{\mathbf{x}} g_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} L^2)_i - (\nabla_{\mathbf{v}} g_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} L^2)_i \\ &= \left(\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{v}} \cdot d\mathbf{v} \right)_i + \left(\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} \right)_i = dL_i^2 \end{aligned} \quad (\text{G22})$$

ϵ_i and λ_i are computed from positions and velocities of each particle i at the initial time t_0 and at a time $t_1 = t_0 + \delta t$. In order to compare different models (defined by different n and r_a) we tune δt such that $\delta f/f = 0.01$. However, in all cases we have $\delta t < T_d/100$.

The variable ϵ_i is related to the perturbation in energy acting on the system (equation G21) and thus it is related to the stability of the system. In figure (G.8), we plot for different models the fraction of ϵ_i in the numerical simulations at initial time with a negative value, i.e. the probability $P_{nb}(\epsilon)$ for ϵ to be negative.

The variable λ_i is related to the anisotropic component of the linear variation of DF of the system (equation G22). We have shown (section 2 and [Perez 1995],[Perez & Aly 1995]) that the systems are stable against all preserving perturbations, i.e. perturbations generated by a g_1 such that $\{g_1, L^2\} = 0$. But except the purely isotropic stable case, there exist no physical systems which are submitted only to preserving perturbations. In the opposite case, a fully anisotropic system with all components evolving only on radial orbits, is unstable. Consequently, in order to characterize the preserving nature of the perturbations acting on the system, we suggest to use the distribution of λ_i around their vanishing mean value. In order to discriminate between the preserving and non-preserving nature of perturbations we must take into account not only how weakly the λ_i are scattered around their mean, but also how highly they are peaked at their

Figure G.8: Probability for ϵ to be negative ($P_{nb}(\epsilon)$) (dashed curves, left ordinates) and the Pearson index of the random variable λ (plain curves, right ordinates) vs anisotropy radius, for models with a polytropic index of $n = 3.5, 4$, and 4.5 ., respectively.

mean. We thus compute the statistical Pearson index of the random variable λ (hereafter P_λ). This parameter is both a shape and a scattering parameter. A flattened distribution (platikurtic) of a random variable is characterized by a small or negative Pearson index. A distribution which is both concentrated around its mean value and which is highly peaked (leptokurtic) has a large Pearson index [Callot 1973]. However, as we are interested only in the distribution of λ_i around their mean value and, in order to eliminate some aberrant contributions, we define a truncated variable $\overline{\lambda}_i = \lambda_i$ when $|\lambda_i| \leq 3\sigma_\lambda$, where σ_λ is the standard deviation of the random variable λ_i . We compute the statistical Pearson index of the variable $\overline{\lambda}_i$.

$$P_{\overline{\lambda}} = \frac{\sum_{i=1}^{n^*} (\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda})^4}{\left(\sum_{i=1}^{n^*} (\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda})^2\right)^2} - 3 \quad (\text{G23})$$

$\overline{\lambda}$ is the mean of $\overline{\lambda}_i$.

In figure (G.8), we plot $P_{\overline{\lambda}}$ for different models. The error bars both for $P_{\overline{\lambda}}$ and $P_{nb}(\epsilon)$ are calculated from 6 numerical simulations of a given model. The bars represent $\pm\sigma$ variations (i.e. 95% of the values for this non-gaussian variable).

Whatever the polytropic indexes n , the respective behaviors of $P_{nb}(\epsilon)$ and $P_{\overline{\lambda}}$ are similar. As a matter of fact, the strongly anisotropic initial systems with $r_a \lesssim 2$ which are morphologically

unstable (section 4.1, figure 5-6-7), are characterized by a large $P_{nb}(\epsilon)$,

$$P_{nb}(\epsilon) \gtrsim 20\% \quad (\text{G24})$$

and by a small P_{λ}^{-}

$$P_{\lambda}^{-} \lesssim 2.5. \quad (\text{G25})$$

On the contrary, the median and weakly anisotropic initial systems ($r_a \gtrsim 2$), which are morphologically stable (section 4.1, figure 5-6-7), are characterized by a small $P_{nb}(\epsilon)$,

$$P_{nb}(\epsilon) \lesssim 20\% \quad (\text{G26})$$

and a large P_{λ}^{-} ,

$$P_{\lambda}^{-} \gtrsim 2.5. \quad (\text{G27})$$

Moreover, these two classes of systems are clearly separated with respect to the logarithmic scale used for r_a .

G.5 Universality of our predictions and Conclusions

In order to generalize for all collisionless self-gravitating spherical systems the stability criteria, defined on $P_{nb}(\epsilon)$ and P_{λ}^{-} parameters which has been obtained for Osipkov-Merritt systems (Eq. (24)-(27)), we have generated four independant spherical models. These models do not follow an Ossipkov-Merritt distribution (section 3.1). They are virialized and present an anisotropy in the velocity space. We show in table G.1 the physical characteristics (size, dynamical time) of these different configurations. Since all these models are spherical, their distribution function depends both on E and L^2 . We plot the iso-contour of this function in the $E - L^2$ plane which forms the so-called Lindblad diagram of the system (see [Merritt 1985b], [Lindblad 1933]). For comparison, we have plotted in figure G.9 a set of such diagrams for Ossipkov-Merritt models with $n = 4.5$, $r_a = 1, 2, 10$ and 100 . We show in figure G.10 the Lindblad diagram of the systems described in table G.1.

The models 1 and 3 are weakly anisotropic. They are similar to the Osipkov-Merritt systems (respectively with $n = 4.5$, $r_a = 10$ and $n = 4.5$, $r_a = 100$). Model 2 represents a system with particles mainly on radial orbits. DF is highly peaked around $L^2 = 0$. An analysis in velocity space of model 4 shows that this model presents a strong circular orbit anisotropy.

In figure (G.11), we present the evolution of the axial and virial ratios for models 1 to 4. Only the model 2 is morphologically unstable, contrary to model 1 which is very stable. We have computed for these models the parameters $P_{nb}(\epsilon)$ and P_{λ}^{-} . Again, the stability criteria (Eq. (24)-(27)) are confirmed. For the unstable model 2, parameter $P_{nb}(\epsilon)$ is larger than 20% (table 1) and parameter P_{λ}^{-} is smaller than 2.5 (table 1). The very stable model 1 is characterized by a low $P_{nb}(\epsilon)$ ($= 18.75\% < 20\%$) and by a very large P_{λ}^{-} ($= 8.26 > 2.5$) (table 1). We are thus now able to generalize our stability criteria from the previous section to all collisionless self-gravitating spherical systems.

- All anisotropic collisionless self-gravitating spherical systems with parameter $P_{nb}(\epsilon)$ smaller than 20% are stable. As we do not have analytical suggestions for the opposite case, we do not suggest any conclusions on the instability of such systems from parameter $P_{nb}(\epsilon)$.
- The dynamical evolution of all anisotropic collisionless self-gravitating spherical systems with $P_{\lambda}^{-} < 2.5$ is dominated by non-preserving perturbations (section 2). Such systems are unstable.

Table G.1: Physical characteristic of used general anisotropic spherical systems

	$R_{\frac{1}{2}}$	T_d	$P_{nb}(\epsilon)$	P_{λ}^{-}
Model 1	2.69	4,42	18,75	8,26
Model 2	9.94	31,35	22,82	2,12
Model 3	3.27	5,94	17,46	2,93
Model 4	3.18	5,68	18,04	3,42

Figure G.9: Lindblad diagram for polytropic Ossipkov-Merritt models with $n = 4.5$ $r_a = 1, 2, 10$, and 100

Figure G.10: Lindblad diagram for models 1,2,3 and 4

Figure G.11: Axial ratio(top diagram) and viriel ratio(bottom diagram) vs dynamical time for models 1,2,3 and 4.

Table G.2: Physical characteristics for models with $n = 3.5, 4, 4.5$ and $r_a = 0.75, 1, 2, 5, 10$ and 100

$n = 3.5$	T_d	$R_{\frac{1}{2}}$	$P_{nb}(\epsilon)$	$P(\lambda)$
$r_a = 0.75$	5.455 ± 0.062	3.099 ± 0.023	23.04 ± 0.72	0.953 ± 0.053
$r_a = 1$	5.127 ± 0.057	2.973 ± 0.022	21.03 ± 0.73	1.205 ± 0.064
$r_a = 2$	4.157 ± 0.039	2.585 ± 0.016	16.38 ± 0.61	2.088 ± 0.076
$r_a = 5$	3.238 ± 0.022	2.189 ± 0.010	12.87 ± 0.55	2.85 ± 0.13
$r_a = 10$	3.043 ± 0.020	2.0997 ± 0.0095	12.38 ± 0.46	3.06 ± 0.13
$r_a = 100$	2.973 ± 0.020	2.0676 ± 0.0097	12.10 ± 0.48	3.082 ± 0.13

$n = 4$	T_d	$R_{\frac{1}{2}}$	$P_{nb}(\epsilon)$	$P(\lambda)$
$r_a = 0.75$	8.720 ± 0.096	4.237 ± 0.031	25.63 ± 0.60	0.935 ± 0.082
$r_a = 1$	8.257 ± 0.087	4.085 ± 0.029	23.45 ± 0.72	1.079 ± 0.044
$r_a = 2$	6.473 ± 0.037	3.472 ± 0.013	18.74 ± 0.57	1.962 ± 0.065
$r_a = 5$	4.503 ± 0.037	2.727 ± 0.015	14.77 ± 0.64	3.04 ± 0.15
$r_a = 10$	4.015 ± 0.033	2.526 ± 0.014	13.98 ± 0.60	3.40 ± 0.12
$r_a = 100$	3.835 ± 0.031	2.450 ± 0.013	13.59 ± 0.55	3.53 ± 0.16

$n = 4.5$	T_d	$R_{\frac{1}{2}}$	$P_{nb}(\epsilon)$	$P(\lambda)$
$r_a = 0.75$	17.09 ± 0.21	6.634 ± 0.053	26.67 ± 0.38	1.161 ± 0.070
$r_a = 1$	16.26 ± 0.19	6.418 ± 0.050	24.79 ± 0.56	1.241 ± 0.042
$r_a = 2$	12.56 ± 0.12	5.403 ± 0.035	19.78 ± 0.60	1.898 ± 0.094
$r_a = 5$	7.206 ± 0.081	3.730 ± 0.028	16.12 ± 0.61	3.16 ± 0.13
$r_a = 10$	5.655 ± 0.062	3.174 ± 0.023	15.14 ± 0.57	3.85 ± 0.13
$r_a = 100$	5.064 ± 0.051	2.949 ± 0.020	14.73 ± 0.57	4.18 ± 0.14

G.6 Appendix : Statistics of simulations

We have randomly chosen the position and velocity for 8192 particles from the DF. Six independent simulations have been carried out for each value of n and r_a . We present in the following tables the physical properties and the stability parameters calculated for a large class of generalized polytropic Ossipkov-Merritt models. The dynamical time is the ratio between the typical size of the system and the modulus of median velocity of a particle. $R_{\frac{1}{2}}$ represents the radius of the sphere containing half of the system's total mass. $P_{nb}(\epsilon)$ represents the probability for the $\{g_1, E\}$ calculated for each particle to be negative (expressed in percent). Finally, $P(\lambda)$ represents the Pearson index of the distribution of $\{g_1, L^2\}$. The number indicates the mean value of the quantity over the 6 simulations, and the error represents an interval of two standard deviations of the quantity. Units are such that the gravitationnal constant, the total mass of the system and the initial value of the relative gravitationnal potential are unity.

Chapitre H

A symplectic approach to gravitational instability

J. Perez^{1,2}, M. Lachièze-Rey¹

¹ *Service d'Astrophysique - CE Saclay - 91191 Gif sur Yvette Cédex - France*

² *ETCA/CREA - 16 bis av. Prieur de la côte d'or - 94114 Arcueil Cédex -France*

Soumis le 15 Décembre 1994 dans *The Astrophysical Journal*

Résumé

We present a global approach of non-dissipative physics. Based on symplectic mechanics this technique allows us to obtain the solution of a very large class of problems in terms of a Taylor expand. We apply this method to the problem of gravitational instability and we obtain a general expression of the gravitational potential, solution of the Vlasov-Poisson system, as a function of time in the context of Newtonian dust cosmology.

H.1 Introduction

The Hamiltonian formalism has been proved since a long time to be very general and efficient in classical dynamics. In the recent years, Hamiltonian techniques have also been applied efficiently to continuous systems. Here we give a general presentation of Hamiltonian formalism (reflecting the underlying symplectic structure) applied to systems with a finite or infinite number of degrees of freedom. The latter case means systems described by a distribution function in phase space (like electro-magnetic or gravitational plasmas). Exploring evolution in time, i.e., motion, we are able to derive, for such systems, the analytical expression giving the evolution of any physical quantity as a function of initial conditions only. This solution is given in terms of a Taylor development, with a rule to calculate the coefficients.

Collisionless dynamics describes various astrophysical systems, typically self gravitating collapsing clouds of stars or dust particles. It may be applied, for instance, to study the stability and evolution of globular clusters, the formation of various cosmic structures by gravitational instability. Here we apply our Hamiltonian formalism to the study of gravitational instability, i.e., the evolution of a cosmic fluid under the influence of its own weight. Although our calculations are performed in the Newtonian approximation, they apply perfectly to the evolution of perturbations to the Friedmann – Lemaître universe, assumed to describe the first stages of galaxies or large scale structure formation. For such systems we are able to derive the expression of any physical quantity as a development with respect to time, depending on initial conditions only. We illustrate by developing the value of the (self-consistent) gravitational potential at any point and at any time, as a function of initial conditions only.

The paper is organized as follow : a first part is devoted to the presentation of the Hamiltonian formalism. Considering first systems with a finite number of degrees of freedom, we derive the evolution equation for any quantity, and explicit its solution. In order to show the mechanism of our formalism, we illustrate it on the very simple example of the harmonic oscillator. Then we generalize the formalism to continuous systems, by using functionals and functional derivatives, which allows us in this case also to derive the equation evolution for any quantity, as well as its solution under the form of a development. This allows in principle to calculate any physical quantity as a function of initial conditions.

The second part specializes the problem to the gravitational instability. We first recall the dynamical equations describing it, and their solution in the cosmological context (Newtonian approximation to describe the Friedmann–Lemaître models and their perturbations). Then we explicitly write the Poisson–Vlasov equations which describe the evolution of the system in the phase space, and its link with the usual hydrodynamical approach. Applying the results of the first part, we express the time-derivatives of physical quantities : as expected we recover the Liouville equation for the distribution function itself, and the derivative of the potential. We then explicit the Taylor development for the gravitational potential, and provide a recurrence formula which allows its explicit calculation from initial conditions.

H.2 The symplectic approach of non dissipative physics

This section presents a new and very general formulation of the non dissipative physical equations, applicable to many kinds of different problems. The unification proposed here is a generalization of several different works ([Arnold 1978], [Marsden *et al.*1986]). We split the framework of non dissipative physic into two parts : systems with a finite number N of degrees of freedom on one hand, and we detail the case $N = 1$; on the other hand, systems with an infinite number of degrees of freedom, i.e., statistical physics. We will show that the equations

for these two domains are strictly equivalent and derive from the same least action principle. We will propose moreover, the solution of this equation.

H.2.1 Systems with N degrees of freedom

We will consider the 3-dimensional case, corresponding to one particle in 3-dimensional space. The variables are the spatial position $\mathbf{q}$, and its conjugated quantity, the linear momentum $\mathbf{p}$. These two variables are both 3-vectors. The generalization to more dimensions is straightforward, the variables becoming any arbitrary collections of conjugated vectors (for systems of N particles for instance), or tensors.

The foundation of our analysis relies on the possibility to associate a generator, a Hamiltonian-like function $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, to any kind of transformation undergone by the system. In the following we will be mainly interested by one peculiar kind of transformation, i.e., motion. But transformations can also correspond to the effect of a class of perturbations on a given equilibrium state, or represent a geometrical change applied to the system (Rotation, Translation, etc...). In this sense, the formalism introduced here allows more than the simple study of motion : the search for invariances, the stability studies and, more generally, the systemization of the study of dynamical systems.

To the transformation considered is associated a parameter λ which allows to follow the transformation. When motion is the transformation considered, g is the usual Hamiltonian representing the energy E of the system, and λ identifies with the time t (to study instabilities, g will represent the characteristics of the instability, and λ the intensity of the displacement). Then one can always define the meta-action as the function

$$s(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int \left(\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - g \right) d\lambda, \quad (\text{H1})$$

where $\mathbf{q}$ and $\mathbf{p}$ are functions of λ . In the case of motion, this meta-action reduces to the usual action, solution of the classical Hamilton-Jacobi equation (see [Arnold 1978] for example). In this peculiar case the total energy E of the system is conserved through the t -evolution. Similarly, our formulation requires that the generator g does not depend explicitly on λ (although it depends through $\mathbf{q}$ and $\mathbf{p}$) and is conserved through the transformation.

Before turning to the key propositions, we recall some a standard definition and notations. The (usual) Poisson brackets for 2 functions $x(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ and $y(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ is defined as

$$P_3[x, y] := \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial p_i} - \frac{\partial x}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_i} \right), \quad (\text{H2})$$

and we also define the new bracket

$$L_3[x, y] := \int P_3[x, y] d\lambda, \quad (\text{H3})$$

which has all properties of a standard Lie bracket.

We now state the fundamental proposition : The evolution of $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$, as a function of λ , is given by the least action principle

$$L_3[k, s] = \int P_3[k, s] d\lambda = 0. \quad (\text{H4})$$

for any function $k(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. This relation was initially presented in the special case of motion by [Marsden *et al.* 1986] and [Morrison 1980].

Since (H4) is true for any function k , it implies in particular $\forall i, \frac{\partial s}{\partial q_i} = 0$ and $\forall i, \frac{\partial s}{\partial p_i} = 0$, corresponding to the two evolution equations for $\mathbf{q}$ and $\mathbf{p}$:

- Firstly,

$$\begin{aligned} \forall i \quad \frac{\partial s}{\partial p_i} = 0 &\iff \frac{\partial}{\partial p_i} \int \left(\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - g \right) d\lambda = 0 \\ &\iff \int \left(\frac{dq_i}{d\lambda} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Since $\mathbf{q}$ and $\mathbf{p}$ are explicitly independent, and $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ vanishes on the surface of the system¹, integration by parts gives

$$\int \left(\frac{dq_i}{d\lambda} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) d\lambda = 0,$$

which implies

$$\frac{dq_i}{d\lambda} = \frac{\partial g}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \iff \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} = P_3[\mathbf{q}, g], \quad (\text{H5})$$

which is the evolution equation for $\mathbf{q}$ induced by the transformation g .

- Similarly,

$$\begin{aligned} \forall i \quad \frac{\partial s}{\partial q_i} = 0 &\iff \frac{\partial}{\partial q_i} \int \left(\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - g \right) d\lambda = 0 \\ &\iff \int \left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) d\lambda = 0. \end{aligned}$$

And, after a new integration by parts, we get

$$\frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial g}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \iff \frac{d\mathbf{p}}{d\lambda} = P_3[\mathbf{p}, g], \quad (\text{H6})$$

the evolution equation for $\mathbf{p}$ induced by the transformation g .

In the special case of motion, where $g = E$ and $\lambda = t$, (H5) and (H6) are Hamilton's equations.

H.2.2 Evolution equation for any function

More generally, the same technique allows to write the evolution equation of any function $k(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Starting from the usual differentiation formula

$$\frac{dk}{d\lambda} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial k}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\lambda} + \frac{\partial k}{\partial p_i} \frac{dp_i}{d\lambda} \right) \quad (\text{H7})$$

using (H5) and (H6) some straightforward algebra gives the evolution equation for k induced by the transformation g

$$\frac{dk}{d\lambda} = P_3[k, g]. \quad (\text{H8})$$

This is a linear and first order differential equation. Its solution is known to be (when g is explicitly independent of λ)

$$k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = k(\mathbf{q}, \mathbf{p})|_{\lambda_0} - \lambda P_3[g, k]|_{\lambda_0} + \frac{\lambda^2}{2} P_3[g, P_3[g, k]]|_{\lambda_0} + \cdots, \quad (\text{H9})$$

¹This assumption makes no problems in this finite dimensional case, more details are required for continuous systems, see section C and appendix A

which is usually abbreviated under the notation

$$k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = e^{\lambda P_3[\cdot, g]} k(\mathbf{q}, \mathbf{p})|_{\lambda_0}. \quad (\text{H10})$$

This formulation is similar to the usual Hamiltonian formalism, with the main additional result here that explicit solution for the motion (or, more generally, the transformation) is given as a function of time (or, more generally λ). This offers several advantages in comparison with the classic formulation.

Firstly, we can expand any function in terms of any parameter. Although the case of motion is specially interesting, we have more general results. For example, taking for g the generator of a perturbation, and for k the energy of the system, we get a general energy variational principle for every system. In the context of stellar dynamics, [Perez & Aly 1995], [Kandrup 1991b] and [Kandrup 1991a] have produced new stability results. On the other hand, this technique can also be used to examine the integrability of dynamical systems, by a study of the convergence of the expansion (H9). Finally, one can use this method to produce an integral of the evolution equation. A very important improvement lies in the fact that this formalism can be extended to systems with an infinite number of degrees of freedom. Before turning to it, we use a very simple application to illustrate how it works.

Application to the harmonic oscillator

To illustrate some of the mechanism of the technique, we will shortly analyze here the trivial case of the motion of an one dimensional harmonic oscillator, with $\lambda = t$ and $g = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$. We use (H9) with $k = |\mathbf{q}| := q$, and the initial conditions $q(t = 0) = q_0$ and $p(t = 0) = p_0$, we have

$$q(t) = q(t_0) - t P_3[E, q]|_{t=t_0} + \frac{t^2}{2} P_3[E, P_3[E, q]]|_{t=t_0} - \frac{t^3}{3!} P_3[E, P_3[E, P_3[E, q]]]|_{t=t_0} + \dots \quad (\text{H11})$$

The Poisson brackets are easy to compute :

$$P_3[E, q] = \frac{\partial E}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial q} = -\frac{p}{m}$$

$$P_3[E, P_3[E, q]] = P_3[E, -\frac{p}{m}] = -\frac{q\omega^2}{m}$$

$$P_3[E, P_3[E, P_3[E, q]]] = P_3[E, -\frac{q\omega^2}{m}] = \frac{p\omega^2}{m^2}$$

and so on. We can obtain a recurrence rule. Injecting these results in (H11) one can have

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 + \frac{p_0}{m}t - \frac{1}{2}\frac{q_0\omega^2}{m}t^2 - \frac{t^3}{3!}\frac{p_0\omega^2}{m^2} - \frac{t^4}{4!}\frac{q_0\omega^4}{m^2} + \frac{t^5}{5!}\frac{p_0\omega^4}{m^2} + \dots \\ &= q_0 \left(1 - \frac{(\theta t)^2}{2!} + \frac{(\theta t)^4}{4!} + \dots\right) + \frac{p_0}{m\theta} \left(\theta t - \frac{(\theta t)^3}{3!} + \frac{(\theta t)^5}{5!} + \dots\right) \\ &= q_0 \cos \theta t + \frac{p_0}{m\theta} \sin \theta t \quad \text{with } \theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{m}} \end{aligned} \quad (\text{H12})$$

which is fortunately the well known motion equation of a free harmonic oscillator.

H.2.3 Systems with an infinity of freedom's degree

The previous analysis was explicitly written for one particle ($N = 1$) but can be generalized to any N in a straightforward way. Let us study now the $N \longrightarrow \infty$ limit, i.e., non-local statistical physics where variables are no more discrete. In this continuous limit, a dynamical system is no more described by a finite collection of $\{\mathbf{q}_i(\lambda), \mathbf{p}_i(\lambda)\}$ but through a distribution function $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda)$ in the phase space. We deal with a non dissipative problem, hence, we suppose that the system evolve without collisions between its components. We will show that the structure of the equations and the solution of the problem of evolution of such systems are exactly the same than in the finite case.

First, let us introduce a (non-relativistic) 4-dimensional formalism adapted to this study. We consider the 4-vectors $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}, \lambda)$ and $\mathbf{P} = (\mathbf{p}, g)$, where g and λ are the independents quantities defined in the previous section, which generalize energy and time for any kind of transformation. In the following we will consider functionals of f , considered as a function of $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda\}$. In the space of functins of $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda\}$, we denote the functional derivative δ^+ . This notation is introduced to distinguish from the notation δ for the functional derivative in the space of functions of $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ only, to be used later. We now define the meta-action $\mathcal{S}[f]$ through the relation $\frac{\delta^+ \mathcal{S}}{\delta^+ f} = g$. In the special case where g does not depend on f , it can be written as

$$\mathcal{S}[f] := \int f.g \, d^3\mathbf{q} \, d^3\mathbf{p} \, d\lambda, \quad (\text{H13})$$

but this linear formula does not apply, for instance, to the gravitational instability problem. We recall that we have assumed the generator g independent of λ and we note that the meta-action $\mathcal{S}$ does not depend either on λ . We also introduce another functional $\mathcal{G}$, now defined over the space of functions of $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ only (thus at given λ), and such that $\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta f} = g$. For the linear case where g does not depend on f , it can be written

$$\mathcal{G}[f] := \int f.g. \, d^3\mathbf{q} \, d^3\mathbf{p}. \quad (\text{H14})$$

Note that, in general, $\mathcal{G}$ depends on λ . Let us define now a 4-dimensional Poisson bracket in the space of functions of $\{\mathbf{Q}, \mathbf{P}\}$ by

$$\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \quad P_4[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] := \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial Q_i} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial P_i} - \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial P_i} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial Q_i}, \quad (\text{H15})$$

and a 4-dimensional Lie-bracket, relative to the distribution function f , in the space of functionals, as

$$\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \quad L_4[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{(f)} := \int f.P_4\left[\frac{\delta^+ \mathcal{X}}{\delta^+ f}, \frac{\delta^+ \mathcal{Y}}{\delta^+ f}\right] d^3\mathbf{q} \, d^3\mathbf{p} \, d\lambda, \quad (\text{H16})$$

We are now able to show that the evolution equation of the system is equivalent to

$$\forall \mathcal{K} \quad L_4[\mathcal{K}, \mathcal{S}]_{(f)} = 0. \quad (\text{H17})$$

Taking into account $\delta^+ \mathcal{S}[f]/\delta^+ f = g$, the latter relation is equivalent to

$$\forall \mathcal{K} \quad \int f.P_4\left[\frac{\delta^+ \mathcal{K}}{\delta^+ f}, g\right] d^3\mathbf{q} \, d^3\mathbf{p} \, d\lambda = 0. \quad (\text{H18})$$

Following [Morrison 1980], an integration by parts (see appendix A) then gives

$$\forall \mathcal{K} \quad \int \frac{\delta^+ \mathcal{K}}{\delta^+ f} \cdot P_4[g, f] d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} d\lambda = 0. \quad (\text{H19})$$

Since $\mathcal{K}$ can be any functional, this last relation reduces to $P_4[g, f] = 0$. Developing

$$P_4[g, f] = P_3[g, f] + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial g} - \frac{\partial g}{\partial g} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad (\text{H20})$$

and taking into account that g is explicitly independent of λ , the equation is finally reduced to

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = P_3[g, f]. \quad (\text{H21})$$

This equation describes the evolution of the distribution function f of a non dissipative system. For the special case of motion, it is easy to check that it reduces to the usual Liouville equation. Making the mean field approximation, we recover the Vlasov dynamical equation of collisionless systems. For continuous systems, observables are obtained by averaging physical quantities following the distribution function in phase space, thus observables may be seen as functionals $\mathcal{K}$ acting on a positive and normalisable function f of $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda\}$. Moreover for any such functional we have

$$\forall \mathcal{K} \quad \frac{d\mathcal{K}[f]}{d\lambda} := \int \frac{\delta \mathcal{K}}{\delta f} \frac{\partial f}{\partial \lambda} d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p}. \quad (\text{H22})$$

Injecting (H21) one has

$$\frac{d\mathcal{K}}{d\lambda} = \int \frac{\delta \mathcal{K}}{\delta f} P_3[g, f] d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p}. \quad (\text{H23})$$

Using $g = \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta f}$, an integration by part (see appendix A) then gives

$$\frac{d\mathcal{K}}{d\lambda} = \int f P_3\left[\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta f}, \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta f}\right] d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} := M_3[\mathcal{K}, \mathcal{G}]_{(f)} \quad (\text{H24})$$

where we have defined the new Lie brackets $M_3[\mathcal{K}, \mathcal{G}]_{(f)}$ relative to the distribution function f . As for the discrete systems, $M_3[\cdot, \mathcal{G}]$ is an λ -independent operator, thus (H24) can be solved using the Taylor expand of the exponential

$$\mathcal{K}[f] = \mathcal{K}[f_o] - \lambda M_3[\mathcal{G}, \mathcal{K}]_{(f)}|_{\lambda=\lambda_o} + \frac{\lambda^2}{2} M_3[\mathcal{G}, M_3[\mathcal{G}, \mathcal{K}]]_{(f)}|_{\lambda=\lambda_o} + \dots \quad (\text{H25})$$

For dynamical evolution (motion), the generator functional $\mathcal{G}$ is the Hamiltonian $\mathcal{H}[f]$ of the system. Thus the time-evolution of any functional $\mathcal{K}$ is given by

$$\mathcal{K}[f] = \mathcal{K}[f_o] - t M_3[\mathcal{H}, \mathcal{K}]_{(f)}|_{t=t_o} + \frac{t^2}{2} M_3[\mathcal{H}, M_3[\mathcal{H}, \mathcal{K}]]_{(f)}|_{t=t_o} + \dots \quad (\text{H26})$$

This latter expansion gives the expression of any quantity (mean potential, entropy ...) of the system, at time t , as a function of initial conditions only. This may be applied to many problems, as far as the brackets are known. In the following, we apply it to the problem of gravitational instability.

All these results can be resumed in a little box, expressing the symmetries between discrete and continuous non dissipative systems

<u>One degree of freedom</u>	
Variables : $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda$	
Meta-Action : $s(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \int (\mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - g) d\lambda$	
Evolution	$\left\{ \begin{array}{l} \forall k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad L_3[k, s](\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0 \\ \\ \frac{dk}{d\lambda} = P_3[k, g] \end{array} \right. \iff$
Solution : $k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = e^{\lambda P_3[\cdot, g]} k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) _{\lambda=\lambda_0}$	
<u>Infinity of freedom's degrees</u>	
Variable : $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda)$	
Meta-Action : $\mathcal{S}[f] := \int f \cdot g \cdot d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} d\lambda$	
Evolution	$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{K}[f] \quad L_4[\mathcal{F}, \mathcal{S}]_{(f)} = 0 \\ \\ \frac{d\mathcal{K}}{d\lambda} = M_3[\mathcal{K}, \mathcal{G}] \end{array} \right. \iff$
Solution : $\mathcal{K}[f] = e^{\lambda M_3[\cdot, \mathcal{G}]} \mathcal{K}[f] _{\lambda=\lambda_0}$	

H.3 Gravitational instability

H.3.1 Dynamical equations

Here we apply the previous results to the problem of Gravitational instability. This problem was introduced in this context by [Kandrup & O'Neill 1994]. We will however not consider in this paper the standard formulation of the problem, using perturbed quantities, with respect to the Friedmann–Lemaître, and a comoving formulation. This formulation would imply explicit time dependences in the evolution equations or the Hamiltonian, which would forbid the application of the previous rules. We rather calculate the evolution of the total (unperturbed plus perturbed) quantities. Since the evolution of the unperturbed ones are trivially known, under the form of the cosmological models, a simple difference will provide the perturbations. We will consider the universe as filled of dust, i.e., pressureless matter only, and apply the Newtonian approximation as usual.

The evolution of cosmic matter is described by the dynamical equation

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = \mathbf{g} = -\nabla_{\mathbf{q}} \phi, \quad (\text{H27})$$

and the Poisson equation

$$\Delta_{\mathbf{q}} \phi = 4\pi G \rho, \quad (\text{H28})$$

where ρ is the matter density and ϕ the gravitational potential. The velocity $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$. The time derivatives in these equations are to be taken following the motion, so that $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{q}}$. Hereafter, primes will denote partial derivatives with respect to time $\frac{\partial}{\partial t}$, i.e., derivative at a fixed (Eulerian) position $\mathbf{q}$. The density evolves according to mass conservation $\rho' = -\text{div}(\rho \mathbf{V})$.

It is well known that it is possible to express the usual Friedmann–Lemaître models in a (Newtonian) form obeying these equations. This will be our unperturbed solution :

$$\rho_u = \rho_0 a^{-3} \quad (\text{H29})$$

$$\mathbf{V}_u = H \mathbf{q} = (a'/a) \mathbf{q} \quad (\text{H30})$$

$$\phi_u = 2\pi G \rho_u \mathbf{q}^2/3, \quad (\text{H31})$$

where the scale factor $a(t)$ obeys the Friedmann equations

$$a^2 a'' = -\gamma/2 \quad (\text{H32})$$

and

$$a'^2 = \gamma a^{-1} - k, \quad (\text{H33})$$

where we have defined $\gamma \equiv 8\pi G \rho_0/3$. The scale factor a is normalized to its value at a time t_0 , chosen as an origin and ρ_0 denotes the value of the density at t_0 ; $k = -1, 0$, or 1 is the curvature factor of space.

H.3.2 The Vlasov–Poisson system

Gravitational instability is usually described by hydrodynamic equations, to which the Poisson equation is added to express self-gravity. However, it is not always possible to find a Hamiltonian formulation of hydrodynamics. It is thus advantageous to work with the Vlasov–Poisson system, which is more general, and from which hydrodynamics can be deduced as a peculiar case.

Thus we will consider equation (H27) as the dynamical part of a Vlasov equation. This latter, which allows to follow the velocity distribution, is advantageous to consider for the Hamiltonian formulation. Hydrodynamics will be treated as a peculiar case of the Vlasov–Poisson formulation. Assuming particles with unit mass, the matter is described by a distribution function $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ such that

$$\int d^3\mathbf{p} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \rho(\mathbf{q}, t), \quad (\text{H34})$$

and the average impulsion at point $\mathbf{q}$

$$\rho(\mathbf{q}, t) \mathbf{V} = \int d^3p \mathbf{p} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (\text{H35})$$

Note that the unperturbed distribution function takes the simple form $f_u(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \rho_0 a(t)^{-3} \delta_D(\mathbf{p} - H(t)\mathbf{q})$, where δ_D is the Dirac function. With these definitions, the Liouville equation takes the form

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d\phi}{d\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (\text{H36})$$

As we will check, the kinetic and potential “energies” associated to one particle are respectively $T = \mathbf{p}^2/2$ and $\phi(\mathbf{q})$. The gravitational potential at a point $\mathbf{q}_0$ is obtained by integrating (H28) as

$$\phi(\mathbf{q}_0, t) = -G \int d\Gamma \frac{f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0|}, \quad (\text{H37})$$

where $d\Gamma = d^3\mathbf{p} \, d^3\mathbf{q}$ is the phase space volume element.

H.3.3 Hamiltonian formulation of gravitational instability

The Vlasov–Poisson system

Considering gravitational instability as a motion with respect to time, its generator is the Hamiltonian $g = T(\mathbf{p}) + \phi$, corresponding to the functional integral

$$\mathcal{G} = \int d\Gamma f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \mathbf{p}^2/2 - G/2 \int d\Gamma \int d\Gamma' \frac{f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0|} \quad (\text{H38})$$

so that the functional derivative $\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta f} = g$. The application of the results of the previous sections involves the brackets $M_3[\mathcal{A}, \mathcal{G}]$ (with respect to the function f). In order to calculate them, we need to use the following relations, straightforward to derive :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta f} \right) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{p} \quad (\text{H39})$$

and

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta f} \right) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} = \phi_{,\mathbf{q}}, \quad (\text{H40})$$

where we wrote $\phi_{,\mathbf{q}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}}$.

This allows to calculate the evolution of any functional $\mathcal{A}$ through the fundamental relation

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = M_3[\mathcal{A}, \mathcal{G}]. \quad (\text{H41})$$

Let us consider a functional $\mathcal{A}$ with its functional derivative $\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f} = A$. When A does not depends on f (linear case), equation (H41) implies that

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \int d\Gamma A^1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (\text{H42})$$

where

$$A^1 = P_3[A, g] = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p} \cdot \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} - \phi_{,\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}}. \quad (\text{H43})$$

On the other hand, when A depends on f (non linear case), the situation is more complicated and as we will see later, the functional derivative of A must appear in $\frac{dA}{dt}$.

Hydrodynamics

It is often sufficient – and this is the general approach – to consider gravitational instability from an hydrodynamic rather than Vlasov point of view. However there is no general Hamiltonian treatment for hydrodynamics (except in the case of irrotational flow). To recover hydrodynamics, we may start from the Vlasov description given above, and take the appropriate moments, neglecting the convenient terms, in the standard manner. In fact it is appropriate to remark

that hydrodynamics for cold matter can be recovered by specifying the distribution function as $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \rho(\mathbf{q}, t) \delta_D(\mathbf{p} - \mathbf{V}_{\mathbf{q}, t})$. Since the gas is considered to be cold and pressureless, all values of $\mathbf{p}$ at point $\mathbf{q}$ are equal to $\mathbf{V}$. This allows to recover exactly the usual description of gravitational instability.

The unperturbed distribution function for hydrodynamics is thus

$$f_u(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \rho_u(\mathbf{q}, t) \delta_D(\mathbf{p} - \mathbf{V}_u(\mathbf{q}, t)) \quad (\text{H44})$$

In the hydrodynamical case, the derivation rule derived above takes a simple form. When we are interested in the evolution of a functional quantity of the type

$$\mathcal{A} = \int d^3\mathbf{q} \rho(\mathbf{q}, t) A(\mathbf{q}, \mathbf{V}),$$

the application of previous results leads directly to the derivation formula

$$\mathcal{A}' = \int d^3\mathbf{q} \rho(\mathbf{q}, t) A^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{V}),$$

where A and $A^{(1)}$ are related by (H43).

H.3.4 Time derivatives

Time derivative of the distribution function

The distribution function f can itself be considered as a functional through the development

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) = \int d\Gamma \delta_D(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \delta_D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (\text{H45})$$

corresponding to $A(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \delta_D(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \delta_D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ in the previous notations. Applying the previous rules, it is straightforward to establish that

$$f'(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) = \int d\Gamma f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) [\mathbf{p} \cdot \delta'_q(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \delta_D(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) - \phi_{\mathbf{q}} \cdot \delta'_p(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \delta_D(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)], \quad (\text{H46})$$

where δ'_q and δ'_p are vectors, the derivatives of the Dirac function with respect to their vectorial argument, i.e., such that $\delta'_q(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) |_i = \frac{\partial \delta_D(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)}{\partial q_i}$. The calculation of the integrals shows that this formula reduces to the Liouville equation (H36).

Time derivative of the gravitational potential

It may be more interesting to evaluate the derivative of the gravitational potential at a point $\mathbf{q}_0$. The expression (H37) defines $\phi(\mathbf{q}_0, t)$ as a functional of f , such that

$$A(q) = \frac{\delta \phi(\mathbf{q}_0, t)}{\delta f} = \frac{-G}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0|}. \quad (\text{H47})$$

Clearly,

$$\frac{d}{d\mathbf{p}} \left(\frac{\delta \phi}{\delta f} \right) = 0 \quad (\text{H48})$$

and

$$\frac{d}{d\mathbf{q}} \left(\frac{\delta \phi}{\delta f} \right) = -G \frac{d}{d\mathbf{q}} \left(\frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0|} \right). \quad (\text{H49})$$

Applying the results of previous sections, we may now calculate the time derivative of ϕ at point $\mathbf{q}_0$:

$$\phi'(\mathbf{q}_0, t) = -G \int d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) u_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{q}_0), \quad (\text{H50})$$

where

$$u_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{q}_0) = -\frac{1}{G} P_3 \left[\frac{\delta\phi}{\delta f}, \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta f} \right] = \mathbf{p} \cdot \frac{d}{d\mathbf{q}} \left(\frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0|} \right).$$

Integration by parts, in the hydrodynamical approximation, leads to

$$\phi'(\mathbf{q}_0, t) = G \int d^3q \frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0|} \text{div}(\rho \mathbf{V}). \quad (\text{H51})$$

This equation could have been found directly by deriving (H37) with respect to time and using the mass conservation $\rho' = -\text{div}(\rho \mathbf{V})$ but here we illustrate how the method works to calculate any time-derivative.

Taylor development

We have calculated the time-derivatives of two peculiar functionals, the distribution function itself and the potential. But we can also calculate, by applying iteratively the method, the derivatives at any order, of any functional $\mathcal{A}$. This will allow, for instance, to calculate its Taylor development. For any functional $\mathcal{A}$ with functional derivative A , we have shown that the time derivative $\mathcal{A}'$ may be written as the integral of $A^{(1)}$ related to A by (H43). It results that the n^{th} order time derivative of $\mathcal{A}$ is of the form

$$\mathcal{A}^{(n)} = \int d\Gamma f A^{(n)} \quad (\text{H52})$$

where the $A^{(n)}$ can be calculated from the $A^{(n-1)}$. This calculation involves the functional derivative

$$\left(\frac{\delta \mathcal{A}^{(n)}}{\delta f} \right) (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = A^{(n)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \int d\Gamma' f' \left(\frac{\delta A^{(n)}(\mathbf{q}', \mathbf{p}')}{\delta f} \right) (\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (\text{H53})$$

In this relation the last integral term take into account the non linear case in which $A^{(n)}$ depends on f . From the above calculations, it results that

$$A^{(n+1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\mathbf{p} \cdot \frac{d}{d\mathbf{q}} - \phi_{\mathbf{q}} \cdot \frac{d}{d\mathbf{p}} \right) \left[A^{(n)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \int d\Gamma' f' \left(\frac{\delta A^{(n)}(\mathbf{q}', \mathbf{p}')}{\delta f} \right) (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right]. \quad (\text{H54})$$

which reduces to only

$$A^{(n+1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\mathbf{p} \cdot \frac{d}{d\mathbf{q}} - \phi_{\mathbf{q}} \cdot \frac{d}{d\mathbf{p}} \right) [A^{(n)}(\mathbf{q}, \mathbf{p})], \quad (\text{H55})$$

in the linear case where $A^{(n)}$ does not depend on f .

Let us apply that to calculate some higher order derivatives of the potential. Let us first introduce the notation $J(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) := \frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0|}$. Also, we will note the spatial derivatives any quantity Λ as

$$\Lambda_{,ij\dots k} \equiv d_{q_i} d_{q_j} \dots d_{q_k} \Lambda. \quad (\text{H56})$$

For instance, the $J_{,i} = -\frac{(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0)_i}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}_0|^3}$ are the components of a vector. With more indices, $J_{,ij\dots k}$ is a tensor. From $\phi'_{(\mathbf{q}_0,t)} = G \int d\Gamma f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) [-p_i J_{,i}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)]$, we can apply the previous formula to derivate again as

$$\phi''_{(\mathbf{q}_0,t)} = G \int d\Gamma f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) u_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{q}_0), \quad (\text{H57})$$

with

$$u_2 = - \left(p_j \frac{d}{dq_j} - \phi_{,j} \frac{d}{dp_j} \right) p_i J_{,i}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = -p_i p_j J_{,ij}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \phi_{,i} J_{,i}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0). \quad (\text{H58})$$

Reporting in the above formula, integrating by parts, and using the hydrodynamical approximation, we obtain

$$\phi''_{(\mathbf{q}_0,t)} = -G \int d^3\mathbf{q} \frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0|} \left(\frac{d^2[\rho V_i V_j]}{dq_i dq_j} + \frac{d[\rho \frac{d\phi}{dq_i}]}{dq_i} \right). \quad (\text{H59})$$

Subsequent derivation leads to higher order terms. Care must be taken however that the functional derivative of ϕ'' is not u_2 which appears in the previous formula, since u_2 is non linear and depends on the potential ϕ which depends itself on f . Thus, to calculate $\phi^{(3)}$ from $\phi^{(n)} \equiv \phi''$, we must come back to original formulae (H53). First we calculate the functional derivative

$$\left(\frac{\delta \phi''_{(\mathbf{q}_0,t)}}{\delta f} \right) (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = u_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{q}_0) + \int d\Gamma' f' \left(\frac{\delta u_2(\mathbf{q}', \mathbf{p}'; \mathbf{q}_0)}{\delta f} \right) (\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

We continue by calculating the functional derivative of u_2 as :

$$\left(\frac{\delta u_2(\mathbf{q}', \mathbf{p}'; \mathbf{q}_0)}{\delta f} \right) (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = J_{,i}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_0) \left(\frac{\delta \phi'_{,i}(\mathbf{q}')}{\delta f} \right) (\mathbf{q}).$$

After some calculations with no difficulty, the integral in the previous formula may be written

$$G \int d^3\mathbf{q}' \rho(\mathbf{q}') \frac{(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_0) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}')}{|\mathbf{q}' - \mathbf{q}_0|^3 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^3}.$$

Finally, it results that

$$\phi^{(3)}_{(\mathbf{q}_0,t)} = G \int \frac{d^3\mathbf{q}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0|} \left(\frac{d^3[\rho V_i V_j V_k]}{dq_i dq_j dq_k} + 3 \frac{d^2[\rho V_i \frac{d\phi}{dq_j}]}{dq_i dq_j} - \frac{d[\rho V_i \frac{d^2\phi}{dq_i dq_j}]}{dq_j} \right) \quad (\text{H60})$$

$$+ G \int d^3\mathbf{q}' \rho(\mathbf{q}') \frac{(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_0) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}')}{|\mathbf{q}' - \mathbf{q}_0|^3 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^3}. \quad (\text{H61})$$

Similar calculations would allow to calculate the next order terms and the Taylor development of the potential may be written as

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{q}_0, t) &= \phi(\mathbf{q}_0, t=0) \\ &+ G \int d\Gamma f_0(\mathbf{q}', \mathbf{p}') \left(t u_1 + t^2 \frac{u_2}{2} + t^3 \frac{u_3}{6} + \dots \right), \end{aligned} \quad (\text{H62})$$

where all quantities are estimated at $t = 0$.

There is no peculiar difficulty with the resulting formulae, at any order, excepted for their length, so that we will not write them explicitly. The potential at any point, and at any time (even

after shell-crossing), may be calculated as a function of initial conditions only. But the expression is non local, involving the integration of initial quantities (density, velocity and potential) over the whole space. As expected, the expressions found are non linear, and it is easy to check that their degree increases with the degree in the time development. Thus the formulae here are comparable to the perturbative developments usually performed. Also it appears that each further degree in the development involves high order spatial derivatives of the initial physical quantities, integrated over space. This suggests that, the smoother the initial condition, the closer the solution remains from the linear one.

H.4 Conclusion

We have presented a very general method to deal with Hamiltonian systems. Although the illustrating case is motion, i.e., evolution in time, this applies to any kind of evolution which can be described as a function of a time-like parameter, like invariances, instabilities, optics *etc.* ... For such systems, the evolution is described by a set of canonical variable (position and momentum for discrete systems), or by a distribution function in a continuous approach. Having introduced operators which express the symplectic structure of the problem, we have been able to present an evolution equation for any quantity depending on the canonical variables, or on the distribution function. We have also presented a formal solution of this equation, which allows to calculate any physical quantity as a function of “initial” conditions only, although under the form of a development with an infinite number of terms.

These results apply well to the self-consistent problem of gravitational instability, where the distribution function evolves in time under its own gravitational interaction. This problem is treated here in the Newtonian approximation which applies in fact in the cosmological context, when fluctuations evolve with respect to a (dust) Friedmann-Lemaître model. We present formulae which give an account of the evolution of any quantity depending on the distribution function (or on the mass density and velocity field in the hydrodynamic approximation). In particular we calculate the self-consistent evolution of the gravitational potential. We have expressed its value at any point, and at any time, under the form of a Taylor development whose terms of any order may be calculated as functions of the initial conditions only. This apply to the whole (unperturbed + perturbed) potential but it is easy to subtract the unperturbed part, which is known analytically, to derive the evolution of the perturbation. This will offer a practical way to calculate the evolution of the potential (or of any quantity like the density perturbations or the velocity fields), in the context of the gravitational instability theory for the formation of galaxies and large scale structures.

In further work, we will compare the development introduced here with other development introduced in perturbative (Eulerian or Lagrangian) approaches. We will also treat in more details a case usually considered in gravitational instability scenarii, that with no initial velocity perturbations. In any case, this approach offers a new way to attack the question of gravitational instability.

Acknowledgments

We thank J. M. Alimi who has initialized our discussions.

H.5 Appendix A : Integration by parts and surface terms

Let us consider 3 functions $x(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $y(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ and $z(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. We have

$$\iint x P_3[y, z] d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} = \iint x \left(\frac{\partial^3 y}{\partial \mathbf{q}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} - \frac{\partial^3 y}{\partial \mathbf{p}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} \right) \quad (\text{H63})$$

each term of the RHS of (H63) can be integrated by parts,

$$\iint x \frac{\partial^3 y}{\partial \mathbf{q}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} = \int \left| x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} \right|_{S_{\mathbf{p}}} d^3 \mathbf{q} - \iint y \left(\frac{\partial^3 x}{\partial \mathbf{p}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} + x \frac{\partial^6 z}{\partial \mathbf{p}^3 \partial \mathbf{q}^3} \right) d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} \quad (\text{H64})$$

for the first term and

$$\iint x \frac{\partial^3 y}{\partial \mathbf{p}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} = \int \left| x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} \right|_{S_{\mathbf{q}}} d^3 \mathbf{p} - \iint y \left(\frac{\partial^3 x}{\partial \mathbf{q}^3} \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} + x \frac{\partial^6 z}{\partial \mathbf{p}^3 \partial \mathbf{q}^3} \right) d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} \quad (\text{H65})$$

where $S_{\mathbf{q}}$ and $S_{\mathbf{p}}$ represents respectively the two 3-dimensional surfaces obtained when $\mathbf{q}$ and $\mathbf{p}$ goes to ∞ . Injecting (H64) and (H65) into (H63) one can get

$$\iint x \mathcal{P}_3[y, z] d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} = \iint y \mathcal{P}_3[z, x] d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} + \int \left| x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} \right|_{S_{\mathbf{p}}} d^3 \mathbf{q} - \int \left| x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} \right|_{S_{\mathbf{q}}} d^3 \mathbf{p} \quad (\text{H66})$$

In this last relation, the two last terms generally vanishes. Indeed, if

$$\lim_{\mathbf{p} \rightarrow \infty} x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{p}^3} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\mathbf{q} \rightarrow \infty} x y \frac{\partial^3 z}{\partial \mathbf{q}^3} = 0 \quad (\text{H67})$$

then these surface terms vanishes. For example if, x or y is the distribution function in the phase space of a Newtonian finite system, both this terms vanishes. For the unperturbed solution describing the cosmological models, it can also be checked that all surface terms also vanish, so that integration by parts can be applied as well.

Chapitre I

Bounds on the H -functions of a self-gravitating system

Jean-Jacques Aly¹ and Jérôme Perez^{1,2}

¹ Service d'Astrophysique - CE Saclay - 91191 Gif sur Yvette Cédex - France

² ETCA/CREA - 16 bis av. Prieur de la côte d'or - 94114 Arcueil Cédex -France

Résumé

Non-trivial upper bounds on H -functions are established for a d -dimensional ($d = 2, 3$) self-gravitating system of fixed mass M and energy E – an H -function being defined to be any concave functional $-\int C(f) dx dv$ of the one-particle distribution function $f(x, v)$. Functional H_q associated to $C(f) = f^q$ ($q > 1$) – and related Renyi's and Tsallis's q -entropies – are first considered. When $d = 2$, they are proven to satisfies inequalities of the form $H_q[f] \leq H_q^+(M, E) < 0$ for any values of q and E ($1 < q \leq \infty, -\infty < E < +\infty$) as a consequence of a bound on the Boltzmann's entropy. But when $d = 3$, inequalities of this type hold true only if $9/7 \leq q \leq \infty$ and $-\infty < E < 0$; if $0 \leq E$ or $1 < q < 9/7$, H_q can be made as close as we want to zero. These results are thus generalized to a much larger class of H -functions.

I.1 Introduction

The problem of the relaxation to an equilibrium of a d -dimensional ($d = 2, 3$) self-gravitating system described by a one-particle distribution function f (kinetic mean-field theory) has been the object of a lot of work in the three last decades. In particular, many authors have tried to characterize the final state by a variational principle. In this approach, the system is thought to seek for a state extremizing some “thermodynamic potential” under a set of constraints. The latter express the existence of conservation laws associated to the equations of dynamical evolution obeyed by f , and then determine the memory it keeps of the initial conditions.

For a collisional system, one is thus lead in the venerable tradition of statistical mechanics to look for a final state which maximizes Boltzmann’s entropy at given mass M and energy E . The case of a 3D system was first investigated by [Antonov 1962], whose work was later on extended by [Lynden-Bell & Wood 1969]. These authors proved in particular that the entropy of a system, either unconfined or not, has no absolute upper bound. In the unconfined case, this result may be related [Tremaine et al. 1986] to the possibility of diluting the system in the whole space, energy being stored in a concentrating core of arbitrarily small mass (which is possible due to the unboundedness from below of the gravitational energy). If the system is enclosed in a spherical box, however, a relative entropy maximum (metastable state) is found to exist in some conditions, the famous “gravothermal catastrophe” taking place when they are not satisfied. More recently, the problem for a 2D system was considered [Aly 1994], who generalized some earlier work by [Katz & Lynden-Bell 1978]. Aly shown in particular that the entropy of a system confined inside a plane domain Ω of finite area V , is always bounded from above by a number $S^+(M, E, V)$. Moreover, he proved that (at least when Ω is a disk) the maximum of the entropy is reached by a unique Maxwellian function.

In the absence of collisions, it was suggested by [Lynden-Bell 1967] that there is a mechanism – the “violent relaxation” – which may drive a 3D system to some form of “macroscopic” equilibrium, in spite of the absence of dissipation. In that case, the final state should also maximize entropy, but under a much larger set of constraints, expressing the conservation of M and E , but also of the phase space volume (Liouville’ theorem for Vlasov’s equation). Unfortunately, this approach leads to the same problem as above: Entropy has no upper bound, which results in the solutions to the Euler-Lagrange equation of the variational problem having an infinite mass. The problem was revisited rather recently by [Tremaine et al. 1986], who argued that Boltzmann’s entropy has in fact no special meaning for collisionless systems, which may have viciated the original approach. One should consider instead on an equal footing all the so-called H -functions – i.e., all the concave functionals $-\int C(f) dx dv$ of the distribution function f –, which should take in the final macroscopic state larger values than in the initial state (mixing theorem). Although this property does not seem to lead to a complete characterization of the final state, it permits at least to decide if a given equilibrium may have emerged from a given arbitrary state. Another point of view was taken by [Plastino & Plastino 1993], who suggested that one should merely take into account conservation of mass and energy, but replace Boltzmann’s entropy by a particular H -function, the so-called Tsallis’s entropy [[Tsallis 1988]; this quantity, as well as the related Renyi’s entropy [Renyi 1970] have proven to be valuable tools in statistical mechanics and information theory]. The latter, however, depends on an arbitrary parameter q , and no principle has yet been given to fix its value.

An interesting question which naturally arises from the previous considerations is the following one. Consider a particular H -function for an unconfined system of given mass and energy. Then is it possible to find a distribution function which maximizes H , or do we get the problem we met with Boltzmann’s entropy? The answer to that question depends in an essential way

on the existence of a “nontrivial” upper bound (depending only on M and E) on H . The term nontrivial is quite important here, as shown by the following example. Consider an H -function associated to a $C \geq 0$. Then it certainly admits a finite least upper bound (≤ 0), which we call trivial if it is just equal to 0. In that case indeed, we may intuitively expect to still be in the Boltzmann’s case: We can make H to approach 0 by diluting the system – $f = 0$ being obtained at the limit –, while conserving energy in a ponctual core of vanishing mass – the maximization problem thus having no proper solution.

It is our main purpose here to discuss this issue for unconfined 2D and 3D systems (the 2D case being, in addition to its theoretical interest, of some importance for the interpretation of current numerical simulations). This will be done in details in §3 and 4 (for 2D) and in §5 and 6 for 3D systems, §2 being devoted to fixing the general framework of the paper.

I.2 Statement of the problem

We consider a d -dimensional ($d = 2, 3$) self-gravitating system constituted of particles of mass m occupying the whole space R^d . For convenience, we shall work hereafter with dimensionless variables, defined by choosing an arbitrary reference length l , and by setting $v_d^2 := G_d m / l^{d-2}$ and $t_d := l / v_d$ to get normalizations for velocities and times, respectively (G_d is the gravitational constant; dimensionally, $[G_3] = [G_2][l]$).

A state of the system is assumed to be entirely described by a one-particle distribution function $f(\xi)$ [unit $f_d := (lv_d)^{-d}$] defined over the phase space $R^{2d} = \{\xi = (x, v)\}$, where x and v denote the position and the velocity of a particle in a Galilean frame of origin O . To avoid some trivial degeneracy in the translation-invariant problems considered hereafter, we shall impose O to coincide with the center of mass of the system, i.e.,

$$\int f(\xi) x d\xi = 0 \quad (I1)$$

[unless otherwise specified, an integral with respect to $d\xi$ (dx, dv) is taken over the whole R^{2d} (R^d)]. f , or equivalently its mass density

$$\rho(x) := \int f(x, v) dv, \quad (I2)$$

generates the mean gravitational potential

$$\Phi(x) := - \int K[x, x'] f(\xi) d\xi = - \int K[x, x'] \rho(x) dx \quad (I3)$$

(unit $\Phi_d := v_d^2 = G_d m / l^{d-2}$), where the kernel K is given by

$$K[x, x'] = \begin{cases} 2 \ln \frac{1}{|x - x'|} & d = 2, \\ \frac{1}{|x - x'|} & d = 3. \end{cases} \quad (I4)$$

The following gauges have been choosen here: The potential created by a particle is imposed to vanish at a unit distance when $d = 2$, and at infinity when $d = 3$. Of course, Φ satisfies Poisson’s equation

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi \rho = 4\pi \int f(\xi) d\xi. \quad (I5)$$

To each f are associated:

a) The norms

$$\|f\|_\infty := \sup_{R^{2d}} f, \quad (\text{I6})$$

and, for $1 \leq q < \infty$,

$$\|f\|_q := \left(\int |f(\xi)|^q d\xi \right)^{1/q}. \quad (\text{I7})$$

Of course,

$$M[f] := \|f\|_1 = \int f(\xi) d\xi, \quad (\text{I8})$$

represents the mass of the system.

b) The “ H -functions” [Tremaine et al. 1986]

$$H_C[f] = - \int C[f(\xi)] d\xi, \quad (\text{I9})$$

where $C(f)$ is some convex function such that $C(0) = 0$. In particular, the functionals

$$H_q[f] := - \int f^q d\xi = -\|f\|_q^q \quad (\text{I10})$$

$[C(f) = f^q]$ will be of great importance hereafter. Related to them are the so-called Renyi’ and Tsallis’s q -entropies, defined by [Renyi 1970]

$$S_{Rq} = - \frac{1}{q-1} \ln \frac{\|f\|_q^q}{M}, \quad (\text{I11})$$

and [Tsallis 1988]

$$S_{Tq} = - \frac{\|f\|_q^q - \|f\|_1}{q-1}, \quad (\text{I12})$$

respectively. Both quantities reduce to the well known Boltzmann’s entropy (expressed in units of Boltzmann’s constant k) when $q \rightarrow 1^+$:

$$\lim_{q \rightarrow 1^+} S_{Rq}[f] = \lim_{q \rightarrow 1^+} S_{Tq}[f] = - \int f \ln f d\xi =: S_B. \quad (\text{I13})$$

c) The energy (unit $E_d := mv_d^2 = G_d m^2 / l^{d-2}$)

$$E[f] := \frac{1}{2} \int v^2 f(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int f(\xi) \Phi(x) d\xi = \frac{1}{2} \int v^2 f(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int \int f(\xi) f(\xi') K[x, x'] d\xi d\xi', \quad (\text{I14})$$

where the first term in the RHS represents the kinetic energy $E_c[f]$ and the second one the potential energy $E_p[f]$.

We denote as $\mathcal{G}(M, E, H_C)$ (or $\mathcal{G}$, for short), the set of all the distribution functions which have given mass M and energy E ($M, |E| < \infty$), and finite H_C -function, i.e.,

$$\mathcal{G}(M, E, H_C) := \{f|f : R^{2d} \rightarrow R^+; M[f] = M; E[f] = E; |H_C[f]| < \infty\}. \quad (\text{I15})$$

It is important to note that $\mathcal{G}$ is never empty. For instance, it is easy to check that, for appropriate choices of the parameters $R > 0$, $V > 0$ and $\eta > 0$, it contains the distribution functions

$$f(x, v) := \eta \Theta(R - r) \Theta(V - v), \quad (\text{I16})$$

where Θ is the standard step function.

I.3 Two-dimensional systems: Upper bound on Boltzmann's entropy

I.3.1 Systems confined in a bounded domain

The thermodynamics of a 2D plane system confined inside a “box” Ω of area V has been considered by [Katz & Lynden-Bell 1978] and by [Aly 1994]. In particular, it has been proven by Aly that, whichever be the shape of Ω , Boltzmann's entropy has the finite upper bound

$$S^+(M, E, V) = M \left[\ln(\pi e^3) + \ln V + \ln \theta + (2\theta - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{\theta} \right) \right], \quad (\text{I17})$$

where $\theta(M, E, V)$ is the unique solution in $]1, +\infty[$ of the equation

$$E = \frac{M^2}{2} \left[\ln V - \ln \pi + 2\theta + \theta^2 \ln \left(1 - \frac{1}{\theta} \right) \right]. \quad (\text{I18})$$

In the case where Ω is a disk of radius R ($V = \pi R^2$), the bound S^+ is reached by the only distribution function

$$f_R^+ = \frac{M\beta}{\pi^2 R^2} (2 - \beta M) \frac{1}{[(2 - \beta M) + \beta M r^2 / R^2]^2}, \quad (\text{I19})$$

which generates the potential

$$\Phi_R^+ = 2M \ln R + \frac{2}{\beta} \ln \left[\frac{2 - \beta M}{2} + \frac{\beta M}{2} \frac{r^2}{R^2} \right]; \quad (\text{I20})$$

we have set here $\beta(M, E, V) = 2/M\theta(M, E, V)$.

Eqs. (I17)-(I18) imply in particular that

$$S^+(M, E, V) = \frac{2E}{M} + M \left[\ln(\pi^2 e^3) + \ln \theta - 2\theta - (\theta - 1)^2 \ln \left(1 - \frac{1}{\theta} \right) \right] =: \frac{2E}{M} + M h(\theta). \quad (\text{I21})$$

h can be checked to be a monotonically decreasing function of θ (its derivative is negative, being an increasing function vanishing at infinity). Therefore, $h(\theta) \leq \lim_{\theta \rightarrow 1} h(\theta) = \ln(e\pi^2)$, and we can write

$$S^+(M, E, V) \leq \frac{2E}{M} + M \ln(e\pi^2). \quad (\text{I22})$$

I.3.2 Systems occupying the whole plane

The previous inequality is remarkable as its RHS does not depend on V , which suggests that S_B should stay bounded when $\Omega \rightarrow R^2$, M and E keeping constant values. That this is the case indeed can be easily proved as follows. Consider an arbitrary function f in $\mathcal{G}(M, E, S_B)$, and set $f_k = f$ for $r \leq k$ and $f_k = 0$ for $k < r$. Then we can apply Eq. (I22) to f_k , and by thus taking the limit $k \rightarrow \infty$, we get

$$S_B[f] \leq \sup_{\mathcal{G}} S_B[f] \leq \frac{2E}{M} + M \ln(e\pi^2), \quad (\text{I23})$$

and, indeed, Boltzmann's entropy S_B appears to be bounded from above over $\mathcal{G}$.

We now show that the upper bound in the RHS of Eq. (I23) is reached for a unique distribution function f^+ of $\mathcal{G}(M, E, S_B)$ – an entropy maximizer. Let us first assume that such an f^+ does

exist indeed, and denote as Φ^+ its potential. Then, by standard arguments (e.g., [Aly 1994]), we can conclude that

$$f^+ = \frac{\beta M}{2\pi} \frac{e^{-\beta(v^2/2 + \Phi^+)}}{\int e^{-\beta\Phi^+} dx}, \quad (\text{I24})$$

$$\nabla^2 \Phi^+ = 4\pi M \frac{e^{-\beta\Phi^+}}{\int e^{-\beta\Phi^+} dx}, \quad (\text{I25})$$

for some number $\beta > 0$. It turns out that Eq. (I25) can have solutions only if [Chen & Li 1991], [Kiessling 1994], [Chanillo & Kiessling 1994])

$$\beta M = 2, \quad (\text{I26})$$

in which case they are all of the form

$$\Phi_\lambda = M \ln[\lambda^2 + r^2], \quad (\text{I27})$$

where $\lambda > 0$ is an arbitrary parameter¹. Eq. (I24) associates to Φ_λ the function

$$f_\lambda = \frac{8\lambda^2}{\pi} \frac{e^{-v^2/M}}{(r^2 + \lambda^2)^2}, \quad (\text{I28})$$

which is easily found to have an energy

$$E[f_\lambda] = \frac{M^2}{2}(2 + \ln \lambda^2). \quad (\text{I29})$$

Physically, these mathematical results mean that a plane system of finite mass M admits isothermal equilibrium configurations at only one peculiar temperature, given by

$$T = \beta^{-1} = M/2 \quad (\text{I30})$$

(in units of $T_2 := mv_2^2/k$), these configurations forming a family parametrized by the energy E . Clearly, there is a unique choice of λ for which $E[f_\lambda] = E$, and we can conclude that the only possible entropy maximizer in $\mathcal{G}$ and associated potential are given by

$$f^+ = \frac{8}{\pi} \frac{e^{2(E-M^2)/M^2}}{(r^2 + e^{2(E-M^2)/M^2})^2} e^{-v^2/M}. \quad (\text{I31})$$

$$\Phi^+ = M \ln \left(r^2 + e^{2(E-M^2)/M^2} \right). \quad (\text{I32})$$

Conversely, it is easy to show by a straightforward calculation that

$$S[f^+] = \frac{2E}{M} + M \ln(e\pi^2). \quad (\text{I33})$$

f^+ saturates inequality (I23), and therefore is the sought unique entropy maximizer indeed. QED.

It is interesting to note that f^+ and Φ^+ are the limits when $R \rightarrow \infty$ of the functions f_R^+ and Φ_R^+ given by Eq. (I19) and (I20), respectively. This is most easily seen by injecting into the latter expressions the value $R(M, E, \theta)$ computed from Eq. (I18), and by taking the limit $\theta := 2/\beta M \rightarrow 1^+$.

¹As Eq. (I25) is scale invariant, the larger class of solutions $\Phi_{\lambda\mu} = M \ln[\lambda^2 + \mu^2 r^2]$ is actually allowed. But we need here to take $\mu = 1$ because of our choice of gauge for Φ , quoted in §2.

I.4 Upper bounds on general H -functions

I.4.1 Upper bounds on H_q

It results at once from inequality (I61) of Appendix A [in which we take $n = 2d$, $F = f$ and $G = f^q ||f||_1 / ||f||_q^q$, $q > 1$], that

$$\int f \ln \frac{f / ||f||_1}{f^q / ||f||_q^q} d\xi \geq 0. \quad (\text{I34})$$

Combining this relation with Eq. (I23), we thus obtain for any f in $\mathcal{G}(M, E, H_q)$

$$S_{Rq}[f] = -\frac{1}{q-1} \ln \frac{||f||_q^q}{M} \leq S_B[f] \leq \frac{2E}{M} + M \ln(e\pi^2), \quad (\text{I35})$$

whence also

$$H_q[f] = -||f||_q^q \leq -\frac{M}{(e\pi^2)^{(q-1)M}} e^{-2(q-1)E/M} < 0, \quad (\text{I36})$$

$$S_{Tq}[f] \leq -\frac{1}{q-1} M \left[\frac{e^{-2(q-1)E/M}}{(e\pi^2)^{(q-1)M}} - 1 \right] < \frac{1}{q-1} M. \quad (\text{I37})$$

Then, for a 2D system, all the quantities H_q , S_{Rq} and S_{Tq} admit nontrivial upper bounds over $\mathcal{G}(M, E, S_B)$.

I.4.2 Generalization to a larger class of H -functions

Consider now the case where there is a constant $a > 0$ such that

$$af^q \leq C(f) \quad (\text{I38})$$

for any value of f . Then it is clear that

$$H_C[f] \leq -a ||f||_q^q \leq -\frac{a ||f||_1}{(e\pi^2)^{(q-1)M}} e^{-2(q-1)E/M} < 0, \quad (\text{I39})$$

and we thus have a nontrivial upper bound for a fairly large class of H_C functions.

I.5 Three-dimensional systems: Bounds on H_q

I.5.1 Upper bounds on $H_q[f]$ when $E < 0$ and $9/7 \leq q \leq \infty$

For any gravitational system satisfying the condition $||f||_{9/7} < \infty$, it is possible to prove that [Aly 1989]

$$-c ||f||_{9/7}^3 \leq E[f], \quad (\text{I40})$$

where c is a constant given by

$$c := -\left(\frac{2}{5}\right)^5 (42\pi)^{2/3}, \quad (\text{I41})$$

and equality holds if and only if f is a Plummer's distribution function. On the other hand, for any numbers p , s , q and θ such that

$$1 \leq s \leq p \leq q \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad p^{-1} = \theta s^{-1} + (1 - \theta)q^{-1}, \quad (\text{I42})$$

we have the standard “interpolation inequality” (which is a simple consequence of Hölder’s)

$$\|f\|_p \leq \|f\|_s^\theta \|f\|_q^{1-\theta}, \quad (\text{I43})$$

(e.g., [Gilbarg & Trudinger 1983]). Taking $p = 9/7$ and $s = 1$ in Eq. (I43), we thus get for any $q \geq 9/7$

$$\|f\|_{9/7} \leq \|f\|_1^{(7q-9)/9(q-1)} \|f\|_q^{2q/9(q-1)}, \quad (\text{I44})$$

whence, using Eq. (I40),

$$-c \|f\|_1^{(7q-9)/9(q-1)} \|f\|_q^{2q/9(q-1)} \leq E[f]. \quad (\text{I45})$$

Therefore, for a system with given mass M and energy $E < 0$, we have for any $q \geq 9/7$

$$H_q[f] \leq -\frac{1}{M^{(7q-9)/2}} \left(\frac{|E|}{c} \right)^{9(q-1)/2} < 0. \quad (\text{I46})$$

I.5.2 Nonexistence of a strictly negative upper bound on $H_q[f]$ when $1 < q < 9/7$ or $E \geq 0$

When $1 < q < 9/7$ or $E \geq 0$, the previous result does not apply, and we can actually show that it is possible to construct a distribution function f in $\mathcal{G}(M, E, H_q)$ for which $H_q[f]$ is as close as we want to zero.

Let us first suppose that $E \geq 0$. We choose an arbitrary function f_1 in the nonempty $\mathcal{G}$, and we set

$$f_{\lambda\mu}(x, v) := \lambda\mu f_1(\lambda x, \mu v), \quad (\text{I47})$$

with the arbitrary numbers $0 < \lambda \leq 1$ and $0 < \mu$ being related to each other by

$$\lambda^2 \mu^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda + (1 - \lambda)(E/E_{c1})} \quad (\text{I48})$$

($E_{c1} := E_c[f_1]$). It is easy to check that $f_{\lambda\mu}$ belongs to $\mathcal{G}$ too, and that

$$H_q[f_{\lambda\mu}] = (\lambda\mu)^{q-1} H_q[f_1]. \quad (\text{I49})$$

By making $\lambda \rightarrow 0$ (i.e., by diluting indefinitely the system in the unbounded space R^3), we have $\lambda\mu \rightarrow 0$ by Eq. (I48), and then $H_q[f_{\lambda\mu}] \rightarrow 0$.

Let us now suppose that $E < 0$, but $1 < q < 9/7$. Our proof in that case is reminiscent of [Antonov 1962] and [Lynden-Bell & Wood 1969] on the unboundedness of Boltzmann’s entropy. We consider the spherically symmetric function

$$f_1(r, v) := \left(\frac{3}{4\pi} \right)^2 M \left[\frac{\alpha}{R_1^3 V_1^3} \Theta(R_1 - r) \Theta(V_1 - v) + \frac{1 - \alpha}{R_2^3 V_2^3 (1 - \beta^3)} [\Theta(R_2 - r) - \Theta(R_1 - r)] \Theta(V_2 - v) \right], \quad (\text{I50})$$

which represents a state in which: (i) The system is divided into two parts, of mass αM and $(1 - \alpha)M$ ($0 \leq \alpha \leq 1$), respectively. (ii) Part 1 is enclosed in the sphere of center O and radius R_1 , part 2 in the surrounding shell $R_1 < r < R_2$; $\beta := R_1/R_2 < 1$. (iii) The velocities are uniformly distributed up to the limiting values V_1 and V_2 for part 1 and 2, respectively.

To decrease the number of parameters, we choose

$$V_1^2 := \alpha \frac{M}{R_1} \quad \text{and} \quad V_2^2 = (1 - \alpha) \frac{M}{R_2} \frac{1 - \beta^5}{(1 - \beta^3)^2}, \quad (\text{I51})$$

i.e., we assume each part to be individually virialized. Thus we adjust R_1 , R_2 and α to make the energy equal to the prescribed value E , i.e.,

$$E = -\frac{3}{10}M^2 \left[\frac{\alpha^2}{R_1} + \frac{(1-\alpha)^2}{R_2} \frac{1-\beta^5}{(1-\beta^3)^2} + \frac{5\alpha(1-\alpha)}{R^2} \frac{1-\beta^2}{1-\beta^3} \right], \quad (I52)$$

which is clearly always possible. We now take the limits $R_2 \rightarrow \infty$, $R_1 \rightarrow 0$ (whence $\beta \rightarrow 0$) and $\alpha \rightarrow 0$, with $\alpha^2/R_1 \rightarrow -10E/(3M^2)$ to conserve energy. Then it is clear that

$$H_q[f_1] = -\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{q-1} \frac{M^{(3-q)/2}}{G^{3(q-1)/2}} \left[\alpha^{(9-7q)/2} \left(\frac{\alpha^2}{R_1}\right)^{3(q-1)/2} + \frac{(1-\alpha)^{(3-q)/2}}{R_2^{3(q-1)/2}} \frac{(1-\beta^3)^{2(q-1)}}{(1-\beta^5)^{3(q-1)/2}} \right] \quad (I53)$$

tends to zero. QED.

Here, the limit $H_q[f_1] \rightarrow 0$ is thus obtained by concentrating the “core” to a point “containing” all the energy and diluting the “halo” in the whole space, while transferring all the matter of the core to the halo.

I.6 Generalization to other H -functions ($d = 3$)

I.6.1 Renyi’s and Tsallis’s q -entropies

From the results above, we can write at once:

a) For $E < 0$ and $9/7 \leq q$,

$$S_{Rq}[f] = -\frac{1}{q-1} \ln \frac{\|f\|_q^q}{M} \leq -\frac{1}{q-1} \ln \left[\left(\frac{|E|}{c} \right)^{9(q-1)/2} \frac{1}{M^{7(q-1)/2}} \right], \quad (I54)$$

and

$$S_{Tq}[f] = -\frac{\|f\|_q^q - M}{q-1} \leq -\frac{M}{q-1} \left[\left(\frac{|E|}{c} \right)^{9(q-1)/2} - 1 \right]. \quad (I55)$$

b) For $E > 0$ or $q < 9/7$, S_{Rq} has no upper bound (i.e., it is possible to find functions f for which $S_{Rq}[f]$ is as large as we want. Clearly, this result embodies the standard one quoted in the Introduction, according to which S_B has the same property, reducing to it in the limit case $q \rightarrow 1^+$. Similarly, we can also assert that S_{Tq} has the trivial lower upper bound $M/(q-1)$.

I.6.2 Extension to a larger class of H -functions

As in §4.2, let us now assume that condition (I38) is verified. Then, if $E < 0$ and $9/7 \leq q$, we have immediately

$$H_q[f] \leq -\frac{a}{M^{(7q-9)/2}} \left(\frac{|E|}{c} \right)^{9(q-1)/2} < 0. \quad (I56)$$

Similarly, it is easy to show by examining the proof reported in §5.2 that H_q can be made as close as we want to 0 if $0 \leq E$ and

$$\lim_{f \rightarrow 0} C(f)/f = 0, \quad (I57)$$

or if $E < 0$ and we have, in addition to the previous condition,

$$C(f)/f^q =_{f \rightarrow \infty} O(1) \quad (I58)$$

for some $q < 9/7$.

I.7 Conclusion

Let us summarize the results which have been obtained in this paper:

a) For $d = 2$, Boltzmann's entropy is bounded from above over the set $\mathcal{G}(M, E, S_B)$ of all the functions of given mass M and energy E . The maximum of the entropy is realized by only one distribution function, which is a Maxwellian at temperature $M/2$.

b) For $d = 2$, H_q admit a nontrivial (strictly negative) upper bound $H_q^+(M, E)$ over $\mathcal{G}(M, E, S_B)$. This result can be reexpressed at once in terms of Renyi's and Tsallis's q -entropies S_{Rq} and S_{Tq} . It also naturally extends to all the H -functions associated to a C larger than af^q .

c) For $d = 3$, H_q has a nontrivial (strictly negative) upper bound if and only if $9/7 \leq q \leq \infty$ and $E < 0$. For $1 < q < 9/7$ or $0 \leq E$, it is possible to find a distribution function for which $H_q[f]$ is as close as we want to 0. For the limiting case $q = 9/7$, the maximum of $H_{9/7}$ over $\mathcal{G}(M, E, S_B)$ is reached by a unique Plummer's distribution function.

d) As above, this result gives immediately nontrivial upper bounds (or prove their impossibility) on S_{Rq} and S_{Tq} . In particular, it turns out that S_{Rq} can be made as large as we want if $1 < q < 9/7$ or $0 \leq E$. As $\lim_{q \rightarrow 1+} S_{Rq}[f] = S_B[f]$, the classical result on the unboundedness of Boltzmann's entropy over $\mathcal{G}(M, E, S_B)$ appears now as a limiting case of a more general result. Also, extension to any H -function which bears some relation to an H_q , can be made at once: For instance, boundedness occurs if $af^q \leq C(f)$ with $9/7 \leq q \leq \infty$ ($E < 0$).

.1 The “relative entropy” inequality

We recall here the well known “relative entropy” inequality. Consider two nonnegative functions F and G defined over R^n , and satisfying

$$\int_{R^n} F(x) dx = \int_{R^n} G(x) dx < \infty. \quad (\text{I59})$$

From the convexity of the function $s \ln s$ (and with the convention $0 \ln 0 = 0$), we have

$$G(x) \ln G(x) - F(x) \ln F(x) \geq [G(x) - F(x)][1 + \ln F(x)], \quad (\text{I60})$$

with equality holding only if $F(x) = G(x)$. Integrating this relation over R^n , we thus get, taking Eq. (I59) into account,

$$\int_{R^n} F(x) \ln \frac{F(x)}{G(x)} dx \geq 0, \quad (\text{I61})$$

with equality holding only if $F \equiv G$.

Bibliographie

- [Aarseth1972] S.J. Aarseth.
Gravitational N body problem - IAU Symposium 10
Lecar, M. - Dordrecht - Reidel, 1972.
- [Aarseth1985] S.J. Aarseth.
Multiple time scale.
Brackbill, J.U. and Cohen, B.I. - Academic Press New York, 1985.
- [Alimi & Scholl1993] J.M. Alimi & H. Scholl.
Formation of large scale structure of the universe on the CM2
Int. J. Mod Phys. C, 4:197, 1993.
- [Allen *et al.*1990] A.J. Allen, P. Palmer, & J. Papaloizou.
A conservative numerical technique for collisionless dynamical systems. comparison of the radial and circular orbit instability
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 242:576, 1990.
- [Aly & Perez1992] J.J. Aly & J. Perez.
On the stability of a gaseous sphere against non-radial perturbations
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 259:95, 1992.
- [Aly & Perez1995] J.J. Aly & J. Perez.
Bounds on the H-functions of a self-gravitating system
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., submitted, 1995.
- [Aly1989] J.J. Aly.
On the lowest energy state of a collisionless self-gravitating system under phase space volume constraints
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 241:15, 1989.
- [Aly1993] J.J. Aly.
A model for energy storage and Taylor's relaxation in the solar corona
Phys. Fluids B, 5:151, 1993.

- [Aly1994] J.J. Aly.
Thermodynamics of a two-dimensional self gravitating system
 Phys. Rev E, 49:3771
- [Antonov1961] V.A. Antonov.
Remarks on the problem of stability in stellar dynamics
 Soviet Astronomy, 4(5):859, 1961.
- [Antonov1962] V.A. Antonov.
Most probable phase space distribution in spherical star systems and conditions for its existence
 Vestnik Leningrad Univ., 7:135 en russe, traduit en anglais dans [Goodman & Hut, 1985], 1962.
- [Antonov1973] V.A. Antonov.
On the instability of stationary spherical models with purely radial motion
 In G.B. Omarov, editor, *The dynamics of galaxies and star clusters*, pages 139. (en russe, traduit en anglais dans [deZeew1987]). Alma Ata : Nauka, 1973.
- [Arnold1978] V.I. Arnold.
Mathematical method of classical mechanics
 Springer New York, 1978.
- [Aubin1982] T. Aubin.
Non linear analysis on manifolds : Monge-Ampère equations
 Springer Verlag Berlin, 1982.
- [Azizov & Iokhvidov1989] T.Y. Azizov & I.S. Iokhvidov.
Linear operators in spaces with an indefinite metric
 Wiley Chichester UK, 1989.
- [Barnes *et al.*1986] J. Barnes, J. Goodman, & P. Hut.
Dynamical instability in spherical stellar systems
 Astrophys. J., 300:112, 1986.
- [Barnes1986] J. Barnes.
Dynamical instability in spherical stellar systems
 In T. de Zeew, editor, *Dynamics of stellar systems IAU Symposium 113*. Dordrecht : Reidel, 1986.
- [Bartholomew1971] P. Bartholomew.
On the theory of stability of galaxies
 Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 151:333, 1971.
- [Binney & Tremaine1987] J. Binney & S. Tremaine.
Galactic dynamics
 Princeton University Press, 1987.

- [Callot1973] G. Callot.
Cours de statistiques descriptives
Dunod, 1973.
- [Chandrasekhar1942] S. Chandrasekhar.
Principles of stellar dynamics
University of Chicago press, 1942.
- [Chandrasekhar1957] S. Chandrasekhar.
An introduction to the study of stellar structure
Dover New York, 1957.
- [Chanillo & Kiessling1994] S. Chanillo & M.K.H.Kiessling.
Conformally invariant systems of non linear PDEs of Liouville type
Geometric and functional analysis, in press, 1994.
- [Chen & Li1991] W. Chen & C. Li.
Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations
Duke Math. J., 63:615, 1991.
- [Clement1965] M.J. Clement.
The radial and non radial oscillations of slowly rotating gaseous masses
Astrophys. J., 141:210, 1965.
- [Courant & Hilbert1962] Courant J. & S. Hilbert.
Methods of mathematical physics
New York Interscience, 1962.
- [Dautray & Lyons1984] R. Dautray & J.L. Lyons.
Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques
Masson Paris, 1984.
- [de Zeeuw & Franx1991] P.T. de Zeeuw & M. Franx.
Structure and dynamics of elliptical galaxies
Annual Rev. of Astron. and Astrophys., 29:239, 1991.
- [de Zeeuw1987] T. de Zeeuw.
Structure and dynamics of elliptical galaxies - IAU Symposium 127
Dordrecht, Reidel, 1987.
- [Dejonghe1986] H. Dejonghe.
Stellar dynamics and the description of stellar systems
Physics Reports, 133:217, 1986.

- [Dejonghe1987] H. Dejonghe.
On entropy and stellar systems
 Astrophys. J., 320:477, 1987.
- [Dejonghe & Merritt1993] H. Dejonghe. & D. Merritt.
Radial and non radial stability of spherical stellar systems
 Astrophys. J., 328:93, 1993.
- [Diu *et al.*1989] B. Diu, C. Guthmann, & B. Lederer, D. and Roulet.
Physique statistique
 Herman Paris, 1989.
- [Doremus *et al.*1971] J.P. Doremus, M.R. Feix, & G. Baumann.
Stability of encounterless spherical stellar systems
 Phys. Rev. Lett., 26:725, 1971.
- [Eisenfeld1969] J. Eisenfeld.
A completeness theorem for an integro-differential operator
 J. Math. An. Applic., 26:357, 1969.
- [Fridman & Polyachenko1984] A.M. Fridman & V.L. Polyachenko.
Physics of gravitating systems
 2 vol. Springer New York, 1984.
- [Gidas *et al.*1981] B. Gidas, Ni Wei-Ming, & L. Nirenberg.
Symetry of positive solutions of non linear elliptic equations in $\mathbb{R}^3$
 Math. Analysis and appl. A - Advances in Math. sup. studies, 7A:369, 1981.
- [Gilbarg & Trudinger1983] D. Gilbarg & N.S. Trudinger.
Elliptic partial differential equations of second order
 Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [Gillon *et al.*1976] D. Gillon, J.P. Doremus, & G. Baumann.
Stability of self gravitating systems with phase space density a function of energy and angular momentum for aspherical modes
 Astron. & Astrophys., 48:474, 1976.
- [Goodman1988] J. Goodman.
An instability test for non rotating galaxies
 Astrophys. J., 329:612, 1988.
- [Goodman & Hut1985] J. Goodman & P. Hut.
Dynamics of star clusters - IAU Symposium 113
 Dordrecht , Reidel, 1985.

- [Henon1973] M. Henon.
Numerical experiments on the stability of spherical stellar clusters
Astron. Astrophys., 24:229, 1973.
- [Hillis & Barnes1987] W.D. Hillis & J. Barnes.
Programing a highly parallel computer
Nature, 326:27, 1987.
- [Hunter1975] C. Hunter.
Determination of the distribution function of an elliptical galaxy
Astron. J., 80:783, 1975.
- [Ipser & Horwitz1979] J.R. Ipser & G. Horwitz.
The problem of maximizing functionnals in newtonian stellar dynamics, and its relation to thermodynamics and dynamical stability
Astrophys. J., 232:863, 1979.
- [Ipser1974] J.R. Ipser.
On using entropy arguments to study the evolution and secular stability of stellar dynamical systems
Astrophys. J., 193:463, 1974.
- [Jeans1929] J.H. Jeans.
Astronomy and cosmogony
Cambridge University Press, 1929.
- [Kandrup & O'Neill1994] H.E. Kandrup & E. O'Neill.
Hamiltonian structure of collisionless newtonian cosmologies and the problem of stability
Phys. Rev. D, 47:3229, 1994.
- [Kandrup & Sygnet1985] H.E. Kandrup & J.F. Sygnet.
A simple proof of dynamical stability for a class of spherical clusters
Astrophys. J., 298:27, 1985.
- [Kandrup1990] H.E. Kandrup.
Geometric approach to secular and nonlinear stability for spherical star clusters
Astrophys. J., 351:104, 1990.
- [Kandrup1991a] H.E. Kandrup.
The secular instability of axisymmetric collisionless star clusters
Astrophys. J., 380:511, 1991.
- [Kandrup1991b] H.E. Kandrup.
A stability criterion for any collisionless stellar equilibrium and some concrete applications thereof
Astrophys. J., 370:312, 1991.

- [Kandrup1987] H.E. Kandrup.
An H-Theorem for violent relaxation ?
 Astrophys. J., 225:995, 1987.
- [Katz & Lynden-Bell1978] J. Katz & D. Lynden-Bell
The gravothermal instability in two dimensions
 Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 184:709, 1978.
- [Kiessling1994] M. K. H. Kiessling.
The unbounded 2-D guiding center plasma
 J. Plasma Phys., in press, 1994.
- [Kulsrud & Mark1970] R.M. Kulsrud & J.W.-K. Mark.
Collective instabilities and waves for inhomogeneous stellar systems I : the necessary and sufficient energy principle
 Astrophys. J., 160:471, 1970.
- [Landau & Lifchitz1966] L.D. Landau & E. Lifchitz.
Cours de physique théorique - Tome 1 : Mécanique
 Mir Moscou, 1966.
- [Landau1946] L.D. Landau.
 traduction en anglais dans [ter haar ,1969].
 J. Phys. (USSR), 10:25, 1946.
- [Larsson1991] J. Larsson.
Hermitian structure for the linearized Vlasov-Poisson and Vlasov-Maxwell equations
 Physics Review Let., 66:1466, 1991.
- [Laval *et al.*1965] G. Laval, C. Mercier, & R. Pellat.
Necessity of the energy principles for magnetostatic stability
 Nuclear Fusion, 5:156, 1965.
- [Lebovitz1965] N.R. Lebovitz.
On Schwarzschild's criterion for the stability of gaseous masses
 Astrophys. J., 142:229, 1965.
- [Lieb1977] E.H. Lieb.
Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's non linear equation
 Stud. Appl. Math., 57:93, 1977.
- [Lindblad1933] B. Lindblad.
Handbuch der Astrophysik
 volume 5.,Springer Berlin, 1933.

- [Lynden-Bell & Sannit1967] D. Lynden-Bell & N. Sannit.
The Schrodinger operator criterion for the stability of galaxies and gas spheres
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 143:167, 1967.
- [Lynden-Bell & Wood1969] D. Lynden-Bell & R. Wood.
The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 138:495, 1969.
- [Lynden-Bell1960] D. Lynden-Bell.
Can spherical clusters rotate ?
Mon. not. roy. astron. soc., 120:204, 1960.
- [Lynden-Bell1962] D. Lynden-Bell.
Exact solution of the self-gravitation equation
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 123:447, 1962.
- [Lynden-Bell1967] D. Lynden-Bell.
Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 136:101, 1967.
- [Marsden *et al.*1986] J.E. Marsden, Montgomery R., P.J. Morrison & W.B. Thompson
Covariant Poisson bracket for classical fields
Annals of Physics, 169:29, 1986.
- [Marsden & Weinstein1982] J.E. Marsden & A. Weinstein.
Titre
Physica D, 4:394, 1982.
- [May & Binney1986] A. May & J.J. Binney.
Testing the stability of stellar systems
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 218:743, 1986.
- [Merritt & Aguilar1985] D. Merritt & L.A. Aguilar.
A numerical study of the stability of spherical galaxies
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 217:787, 1985.
- [Merritt1985a] D. Merritt.
Distribution function for spherical galaxies
Month. Not. Roy. Astron. Soc., 214:25P, 1985.
- [Merritt1985b] D. Merritt.
Spherical stellar systems with spheroidal velocity distributions
Astron. J., 90:1027, 1985.

- [Morrison1980] P.J. Morrison.
The Maxwell-Vlasov equations as continuous hamiltonian systems
 Phys. lett. A, 80:383, 1980.
- [Mossino1984] J. Mossino.
Inégalités isopérimétriques et applications en physique
 Ecole Polytechnique, 1984.
- [Ossipkov1979] L.P. Ossipkov.
Titre
 Pis'ma Astr. Zh., 5:77, 1979.
- [Palmer & Papaloizou1986] P.L. Palmer & J. Papaloizou.
Instability in spherical stellar systems
 Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 224:1043, 1986.
- [Palmer *et al.*1989] P. Palmer, J. Papaloizou, & A.J. Allen.
Resonant driven overstabilities in stellar systems
 Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 238:1281, 1989.
- [Palmer1994a] P. Palmer.
The study of stability in stellar dynamics
 In G. Contopoulos, editor, *N body systems : Theory and simulations EADN summer school 1994*. Springer, 1994.
- [Palmer1994b] P.L. Palmer.
Stability of collisionless stellar systems
 Kluwer Academic, 1994.
- [Perez1995] Perez J.
Stabilité d'un système de particules en interaction gravitationnelle
 PhD thesis, Université Paris VII - Denis Diderot, 1995.
- [Perez & Aly1995] J. Perez & J.J. Aly.
Stability of spherical stellar systems I - analytical results
 Mon. Not. Roy. Astron. Soc., submitted, 1995.
- [Perez *et al.*1995a] J. Perez, J.M. Alimi, J.J. Aly, & H. Scholl.
Stability of spherical stellar systems II - numerical results
 Mon. Not. Roy. Astron. Soc., submitted, 1995.
- [Perez *et al.*1995b] J. Perez, M. Lachieze-Rey, & J.M. Alimi.
A symplectic approach to gravitational instability
 Astrophys. J., submitted, 1995.

- [Plastino & Plastino1993] A.R. Plastino & A. Plastino.
Stellar polytropes and Tsallis' entropy
Phys. Let. A, 174:384, 1993.
- [Polyachenko1992] V.L. Polyachenko.
Titre
Soc. Phys. JEPT, 74:755, 1992.
- [Renyi1970] A. Renyi.
Probability theory
North Holland, Amsterdam, 1970.
- [Saslaw1985] W.C. Saslaw.
Gravitational physics of stellar and galactic systems
Cambridge University Press, 1985.
- [Schuster1883] A. Schuster.
The solution of the Lane-Emden equation for $n=5$
British Assoc. Report, page 427, 1883.
- [Serna *et al.*1994] A. Serna, J.M. Alimi, & H. Scholl.
Sub-clustering and luminous dark matter segregation in galaxies clusters
Astrophys. J., 427:1, 1994.
- [Sygnet *et al.*1984] J.F. Sygnet, G. Des Forets, M. Lachieze-Rey, & R. Pellat.
Stability of gravitational systems and gravothermal catastrophe in astrophysics
Astrophys. J., 276:737, 1984.
- [Ter Haar1969] D. Ter Haar.
Men of physics : Collected papers of L.D. Landau
Pergamon Oxford, 1969.
- [Tremaine *et al.*1986] S. Tremaine, M. Henon, & D. Lynden-bell
H-Functions and mixing in violent relaxation
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 219:285, 1988.
- [Tsallis1988] C. Tsallis
Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics
J. Statistical Phys., 52:479, 1988.
- [Vandervoort1989] P.O. Vandervoort.
On lagrangian methods for the study of small perturbations in stellar systems
Astrophys. J., 341:105, 1989.