



**HAL**  
open science

# Géométrie sous-riemannienne et contrôle non-linéaire

Frédéric Jean

► **To cite this version:**

Frédéric Jean. Géométrie sous-riemannienne et contrôle non-linéaire. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université Pierre & Marie Curie - Paris 6, 2007. tel-03502582

**HAL Id: tel-03502582**

**<https://hal-ensta-paris.archives-ouvertes.fr/tel-03502582>**

Submitted on 25 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie, Paris 6

MÉMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme

d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

par

**Frédéric JEAN**

École Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA)

Sujet :

**Géométrie sous-riemannienne  
et contrôle non-linéaire**

Soutenu le 16 mars 2007 devant le jury composé de :

<b>M. Andrei AGRACHEV</b>	Rapporteur
<b>M. Bernard BONNARD</b>	Examineur
<b>M. Jean-Paul GAUTHIER</b>	Rapporteur
<b>M. Jean-Paul LAUMOND</b>	Examineur
<b>M. Pierre PANSU</b>	Examineur
<b>M. Jean-Jacques RISLER</b>	Président

Absent lors de la soutenance :

<b>M. Richard MONTGOMERY</b>	Rapporteur
------------------------------	------------



# Remerciements

J'adresse tout d'abord ma plus vive reconnaissance à Jean-Jacques Risler et Jean-Paul Laumond. Ils ont guidé mes premiers travaux de recherche, Jean-Jacques ayant été mon directeur de thèse et Jean-Paul l'initiateur de celle-ci, et m'ont toujours accompagné depuis de leurs conseils amicaux.

Je tiens ensuite à remercier Andrei Agrachev et Jean-Paul Gauthier, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et de faire partie du jury. L'intérêt qu'ils portent à mon travail est pour moi un encouragement et une source de motivation importants.

Bernard Bonnard et Pierre Pansu me font l'honneur et le plaisir de participer au jury. Je les en remercie chaleureusement.

Mes remerciements vont aussi à Richard Montgomery, qui a accepté d'être rapporteur de ce mémoire mais qui ne peut malheureusement pas faire partie du jury.

J'ai trouvé au sein de l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA un cadre de travail extrêmement agréable et enrichissant, avec des compétences scientifiques diverses mais toujours de qualité et une ambiance très amicale. J'en suis infiniment reconnaissant à l'ensemble des membres du laboratoire, et plus particulièrement à ceux que je côtoie le plus : Jérôme Perez, Hasnaa Zidani et surtout Pierre Carpentier.

Parmi les personnes avec lesquelles j'ai collaborées, je tiens à remercier Elisha Falbel, avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler, ainsi que Marilena Vendittelli et Giuseppe Oriolo, pour notre collaboration "slow, but inexorable" (dixit Giuseppe). Enfin, un immense merci à mes deux amis et acolytes des "Inconnus", Yacine Chitour et Emmanuel Trélat, en espérant qu'un nouveau CJT voie bientôt le jour.



# Table des matières

Résumé . . . . .	vi
Abstract (résumé en anglais) . . . . .	viii
<b>1 Géométrie des variétés sous-riemanniennes</b>	<b>1</b>
1.1 Généralités sur la géométrie sous-riemannienne . . . . .	1
1.2 Estimations uniformes des boules SR . . . . .	5
1.3 Entropie et complexité des chemins . . . . .	7
1.4 Une classe de longueurs dimensionnées . . . . .	12
1.5 Mesures de Hausdorff . . . . .	14
<b>2 Planification des mouvements non-holonomes</b>	<b>19</b>
2.1 Un algorithme global de planification des mouvements . . . . .	19
2.2 Complexité en milieu encombré . . . . .	22
<b>3 Trajectoires singulières</b>	<b>25</b>
3.1 Trajectoires et courbes singulières . . . . .	25
3.2 Ordre minimal . . . . .	29
3.3 Résultats de généricité . . . . .	32
3.4 Conséquences . . . . .	34
<b>4 Perspectives et projets de recherche</b>	<b>37</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>

## Résumé

Ce mémoire présente les travaux de recherche que j'ai effectués depuis 1998, c'est-à-dire depuis ma thèse, en tant qu'enseignant-chercheur à l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA. Le mémoire est constitué de trois chapitres qui regroupent mes travaux respectivement en géométrie sous-riemannienne, sur le problème de la planification de trajectoires non-holonomes et sur les trajectoires singulières.

Notons que des versions électroniques de tous les documents relatifs à ces travaux sont disponibles en ligne à l'adresse <http://www.ensta.fr/~fjean>.

Le premier chapitre présente l'essentiel de mes travaux sur la géométrie sous-riemannienne, qui ont donné lieu aux publications [3, 6, 7, 14, 16, 19]. Nous nous intéressons dans un premier temps aux estimations des boules sous-riemanniennes de petit rayon. Rappelons que la forme de ces boules est décrite par le théorème dit de la "boule-boîte". Cette description est très utile pour l'étude de divers problèmes (dimensions et mesures géométriques, inégalités isopérimétriques, de Sobolev, etc) mais n'est réellement exploitable que lorsqu'elle est uniforme. Ceci n'est pas le cas en général, dès que la variété n'est pas équirégulière en fait. Nous présentons donc une généralisation du théorème de la "boule-boîte" qui donne une estimation uniforme des boules sous-riemanniennes. La construction de cette estimation est basée sur une technique de désingularisation isométrique des variétés sous-riemanniennes.

Le reste du chapitre est consacré à l'étude des propriétés métriques des chemins. En effet, en géométrie sous-riemannienne, seuls les chemins horizontaux sont de longueur finie; comment alors caractériser les chemins non horizontaux en termes de dimension et de mesure? La première voie que nous envisageons est d'étudier deux notions, l'entropie métrique et la complexité, associées à des approximations par des ensembles discrets et dont le comportement asymptotique reflète bien la géométrie des chemins. Nous donnons des estimations au sens faible des ces deux quantités, qui permettent en particulier de déterminer la dimension d'entropie.

Une deuxième voie consiste à élaborer une théorie de la mesure géométrique pour les chemins. Cette théorie repose sur la construction de mesures dimensionnées sur l'espace métrique tangent au sens de Gromov, dont nous donnons une description intrinsèque. Nous obtenons ainsi une classe de longueurs dimensionnées, que nous calculons dans le cas des variétés sous-riemanniennes de contact.

Enfin, nous comparons toutes les notions évoquées ci-dessus avec les mesures de Hausdorff, sphériques ou non. Nous montrons que, avec une hypothèse très faible sur le chemin, les longueurs dimensionnées définies précédemment coïncident avec les mesures de Hausdorff, ce qui permet de calculer la dimension de Hausdorff du chemin, et sont proportionnelles mais non égales aux mesures de Hausdorff sphériques. Nous donnons également des équivalents de l'entropie et de la complexité d'interpolation non-holonome en fonction des mesures de Hausdorff.

Le deuxième chapitre, qui regroupe les travaux publiés dans [4, 8, 13, 17], traite du

problème de la planification des mouvements pour un système de contrôle non-holonome. On aborde ce problème avec le point de vue de la robotique. Dans ce cadre, on distingue habituellement la planification dans un environnement libre de la planification en présence d'obstacles, la résolution du premier problème constituant une étape dans la résolution du second. Traitant d'abord du premier problème, nous proposons une méthode globale de planification valable pour des systèmes très généraux, qui repose sur la construction d'approximations adéquates du système de contrôle. Les algorithmes que nous obtenons, et dont nous prouvons la convergence, ont de plus la particularité de produire un contrôle stabilisant, d'être robustes et possèdent les propriétés topologiques nécessaires à leur intégration dans des algorithmes de planification en milieu encombré.

La présence d'obstacles ajoute un deuxième niveau de difficulté au problème de la planification des mouvements d'un robot non-holonome : il faut prendre en compte, en plus de la dynamique du système, les contraintes sur l'état dues aux obstacles. On s'intéresse alors à l'augmentation de complexité due à la non-holonomie. Nous proposons plusieurs définitions de cette quantité, de nature topologiques ou métriques, que nous comparons et estimons à l'aide notamment des résultats du chapitre précédent.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation des résultats obtenus en collaboration avec Yacine Chitour et Emmanuel Trélat dans [5, 9, 12, 15] sur les trajectoires et courbes singulières. Les trajectoires singulières d'un système de contrôle sont les points critiques de l'application point-final qui, à une trajectoire d'origine donnée, associe son point final. Les courbes singulières d'une distribution sont définies de façon similaire à partir des courbes horizontales. Les trajectoires singulières apparaissent comme des singularités de l'espace des trajectoires joignant deux points fixes : cet espace est une variété de Banach au voisinage d'une trajectoire non singulière et peut ne pas l'être au voisinage d'une singulière. À ce titre, elles jouent un rôle majeur en contrôle optimal, ainsi évidemment que les courbes singulières en géométrie sous-riemannienne.

On commence par dégager une propriété des trajectoires et des courbes singulières, l'ordre minimal, qui permet de les caractériser comme solutions d'équations différentielles. Nous montrons ensuite que, pour une distribution générique (pour la topologie de Whitney), toute courbe singulière est d'ordre minimal et de corang un. Ceci nous a permis de montrer en particulier qu'une variété sous-riemannienne  $(M, D, g)$  n'admet pas de courbe singulière minimisante si  $D$  est une distribution générique de rang supérieur à deux, ce qui à son tour a de nombreuses conséquences sur la régularité de la distance et des sphères sous-riemanniennes.

Nous obtenons des résultats similaires pour les systèmes de contrôle affines. On montre en particulier que, pour un coût quadratique fixé et pour un système générique défini par plus de deux champs de vecteurs, il n'existe pas de trajectoires singulières minimisantes. Ces résultats peuvent être utilisés pour obtenir des résultats de régularité pour la fonction valeur et dans la théorie des équations de Hamilton-Jacobi, avec des applications à la stabilisation et à la planification des mouvements.



## Abstract (résumé en anglais)

This report reviews my research activities that I have conducted since I defended my PhD, in 1998, as a teacher-researcher at ENSTA, in the Applied Mathematics Department. The report is divided into three chapters. In the first one, I collected my works on sub-Riemannian geometry, in the second one my works on the nonholonomic motion planning problem, and in the third one my works on singular trajectories.

Note that the electronic files of all the papers corresponding to my works are available on line at the following address: <http://www.ensta.fr/~fjean>.

The first chapter presents most of my contributions in sub-Riemannian geometry, which correspond to the papers [3, 6, 7, 14, 16, 19]. We first focus on estimates of the small radius sub-Riemannian balls. The usual description of these balls is given by the so-called “Ball-Box Theorem”. This result is instrumental for the study of a series of problems, such as computations of Hausdorff measures and dimensions, isoperimetric and Sobolev inequalities, etc; it is however usable in practice only if it holds uniformly. And this is not the case in general, as soon as the manifold is not equiregular. We then give a uniform estimate of sub-Riemannian balls, without the equiregularity assumption, that generalizes the Ball-Box Theorem. The construction of these estimates is based on a technique of isometric desingularization of sub-Riemannian manifolds.

The rest of the chapter is devoted to a study of the metric properties of the paths. As is well-known, in sub-Riemannian geometry only paths that are horizontal can have a finite length. The question is then how can we characterize non horizontal paths in terms of measure and dimension. We first introduce two notions, the metric entropy and the complexity, both associated to approximations of a path by discrete sets, the asymptotic behavior of which reflects the geometry of the path. We give weak equivalents of these two quantities, characterizing in particular the entropy dimension.

A second approach consists in elaborating a geometric measure theory for the paths. This theory is based on the construction of dimensioned measures on the metric tangent space (in Gromov’s sense), of which we provide an intrinsic description. We obtain in this way  $k$ -dimensional lengths, and we compute these  $k$ -lengths in the case of contact sub-Riemannian manifolds.

Finally, we compare all the notions introduced above with the Hausdorff measures (the spherical and the usual ones). We show that, with a weak hypothesis on the path, the Hausdorff measures are proportional but not equal to the spherical Hausdorff measures, and coincide with the  $k$ -lengths. This allows to compute the Hausdorff dimension of the path. We also give equivalents for the entropy and the nonholonomic interpolation complexity as functions of the Hausdorff measures.

The second chapter gathers the works published in [4, 8, 13, 17], and is devoted to the problem of nonholonomic motion planning. We address the question from a robotics point of view. We then consider motion planning in two different settings: in a free environment or in the presence of obstacles. Solving the first problem is of course a necessary step for

the resolution of the second one. Working first in a free environment, we propose a global motion planning method which is valid for a large class of nonholonomic control systems. The method rests on the construction of appropriate approximations of a control system. Our algorithms, whose convergence is proved, are robust and yield a stabilizing control law. Moreover they possess the required topological properties for an integration in an algorithm of motion planning with obstacles.

The presence of obstacles adds a second level of difficulties to the problem of motion planning for a nonholonomic robot ; we have to take into account not only the dynamic constraints due to the robot, but also the state constraints due to the obstacles. We are interested here in the increase of complexity induced by the nonholonomy, that is by the dynamic constraint. We propose for this quantity several definitions that we compare and estimate, using in particular the results of the preceding chapter.

We present in the last chapter the results we obtained in [5, 9, 12, 15] with Yacine Chitour and Emmanuel Trélat on singular curves and trajectories. The singular trajectories of a control system are the critical points of the end-point mapping, which associates to a trajectory issued from a given point its terminal point. One can define similarly the singular curves of a distribution. Singular trajectories appear as singularities in the space of trajectories joining two given points. Hence they play a crucial role in optimal control, just as the singular curves do in sub-Riemannian geometry.

We begin by isolating a property, called the minimal order, from which one can characterize singular curves and trajectories as solutions of a differential equation. We then prove that, for a generic distribution (for the Whitney topology), every singular curve is of minimal order and corank one. This allows to show that a sub-Riemannian manifold  $(M, D, g)$  has no minimizing singular curves if  $D$  is a generic distribution of rank greater than two, which in turn has several consequences on the regularity of the sub-Riemannian distance and spheres.

We obtain similar results for control-affine systems. We show in particular that, for a fixed quadratic cost and for a generic system having more than two vector fields, minimizing singular trajectories do not exist. This can be used to obtain regularity results for the value function and in the theory of Hamilton-Jacobi equations, with some applications in stabilization and motion planning.



# Chapitre 1

## Géométrie des variétés sous-riemanniennes

### 1.1 Généralités sur la géométrie sous-riemannienne

Dans cette section, nous regroupons les rappels de géométrie sous-riemannienne qui sont nécessaires à l'exposé de nos travaux. Pour une présentation plus complète, on pourra se référer aux ouvrages [30, 69] ou aux notes [14].

**Variétés sous-riemanniennes** La géométrie sous-riemannienne a émergé dans les trente dernières années comme un domaine de recherche à part entière, avec des motivations et des ramifications dans plusieurs branches des mathématiques pures et appliquées. En plus de la théorie du contrôle, citons la géométrie riemannienne (dont la géométrie sous-riemannienne est une généralisation), la mécanique non-holonome, la théorie des diffusions sur les variétés, l'analyse des opérateurs hypoelliptiques ou la géométrie de Cauchy-Riemann.

Une conséquence désagréable de cette diversité est que la définition même de variété sous-riemannienne n'est pas unique. Dans ce mémoire, nous adopterons un point de vue suffisamment général pour concilier les différentes approches.

Nous considérons donc ici que la géométrie sous-riemannienne a pour objet l'étude d'une variété  $M$  équipée d'une *métrique sous-riemannienne*, c'est-à-dire une fonction régulière  $g_{SR} : TM \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant la propriété suivante en tout point  $q \in M$  : une fois restreinte à un certain sous-espace vectoriel  $D_q$  de  $T_qM$ ,  $g_{SR}$  est une forme quadratique définie positive et est infinie ailleurs. Cette métrique sous-riemannienne peut être obtenue de deux façons différentes, selon que l'on se place respectivement dans le contexte de la géométrie riemannienne ou de la théorie du contrôle :

- soit à partir d'un couple  $(D, g)$ , appelé *structure sous-riemannienne*, formé d'une distribution  $D$  sur  $M$ , c'est-à-dire un sous-fibré du fibré tangent  $TM$ , et d'une métrique riemannienne  $g$  définie seulement sur  $D$ , en posant, pour  $q \in M$  et  $v \in$

$T_qM$ ,

$$g_{SR}(q, v) = \begin{cases} g_q(v) & \text{si } v \in D_q, \\ +\infty & \text{sinon ;} \end{cases} \quad (1.1)$$

– soit à partir d’une famille de champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_m$ , en posant pour  $q \in M$  et  $v \in T_qM$ ,

$$g_{SR}(q, v) = \inf \{ u_1^2 + \dots + u_m^2 : \sum_{i=1}^m u_i f_i(q) = v \}, \quad (1.2)$$

avec la convention que l’infimum de l’ensemble vide est égal à  $+\infty$ .

Muni d’une telle métrique  $g_{SR}$ , on définit la longueur d’un chemin absolument continu  $c(t)$ ,  $t \in [a, b]$  :

$$\text{long}(c) = \int_a^b \sqrt{g_{SR}(c(t), \dot{c}(t))} dt,$$

puis la *distance sous-riemannienne* par

$$d(p, q) = \inf \text{long}(c),$$

l’infimum étant pris sur tous les chemins  $c$  absolument continus joignant  $p$  à  $q$ . L’espace métrique  $(M, d)$  ainsi construit est appelé une *variété sous-riemannienne*. On dit que la variété sous-riemannienne est analytique si  $M$  l’est ainsi que les champs  $f_1, \dots, f_m$  ou la structure  $(D, g)$  qui définissent la métrique  $g_{SR}$ .

Appelons *chemin horizontal* un chemin absolument continu  $c$  tel que  $g_{SR}(c(t), \dot{c}(t)) < \infty$  presque partout (*i.e.* en tout point de Lebesgue de  $\dot{c}$ ). Dans la formulation (1.1), ce sont les chemins tangents presque partout à la distribution  $D$ , et dans la formulation (1.2) ce sont les trajectoires du système de contrôle non-holonome

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(q).$$

Seuls les chemins horizontaux peuvent avoir une longueur finie, la distance  $d$  aurait donc pu être définie à partir de ces seuls chemins. Un chemin (forcément horizontal)  $c(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , est dit *minimisant* si sa longueur est égale à  $d(c(a), c(b))$ .

Lorsque le point de vue est local, ce qui sera le cas dans tout ce chapitre, on peut toujours supposer que la métrique sous-riemannienne  $g_{SR}$  est donnée sous la forme (1.2) à partir d’une famille de champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_m$ . En effet, si  $g_{SR}$  est associée à un couple  $(D, g)$ , il suffit de choisir  $f_1, \dots, f_m$  comme un champ local de repères  $g$ -orthonormés de  $D$ .

**Algèbres de Lie associées** Considérons une variété sous-riemannienne  $(M, d)$  définie à partir d’une famille de champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_m$ .

Notons  $\mathcal{L}^1$  l’ensemble des combinaisons linéaires des champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_m$  et définissons récursivement les ensembles  $\mathcal{L}^s$ , pour  $s > 1$ , par  $\mathcal{L}^s = \mathcal{L}^{s-1} + \bigcup_{k \geq 1} [\mathcal{L}^{s-k}, \mathcal{L}^k]$ .

L'union  $\mathcal{L}$  de tous les  $\mathcal{L}^s$  est l'algèbre de lie engendrée par  $f_1, \dots, f_m$ . Elle est engendrée par les commutateurs de la forme  $[[f_{i_1}, f_{i_2}], \dots, f_{i_k}]$ . Un tel commutateur est noté  $f_I$ , où  $I$  est le multi-indice  $I = i_1 \cdots i_k$ , et sa longueur est  $|I| = k$ .

Pour  $p \in M$  et  $s \geq 1$ , notons  $L^s(p)$  (resp.  $L(p)$ ) le sous-espace de  $T_p M$  formé des valeurs  $f(p)$  prises au point  $p$  par les champs de vecteurs appartenant à  $\mathcal{L}^s$  (resp.  $\mathcal{L}$ ). On dit que les champs  $f_1, \dots, f_m$  satisfont la *condition du rang* si  $L(p) = T_p M$  en tout point  $p \in M$ . Il est bien connu (théorème de Chow [39]) que, si cette condition est satisfaite et si de plus  $M$  est connexe, la distance sous-riemannienne  $d$  est finie et continue. En particulier, la topologie induite par  $d$  coïncide alors avec la topologie d'origine de  $M$ .

D'autre part, il existe en chaque point  $p$  un plus petit entier  $r = r(p)$  tel que  $L^{r(p)}(p) = L(p)$ . Cet entier est appelé le *degré de non-holonomie* en  $p$  et la suite croissante  $(n_1(p), \dots, n_r(p))$ , où  $n_s(p) = \dim L^s(p)$ , le *vecteur de croissance* en  $p$ .

Si le vecteur de croissance reste constant dans un voisinage d'un point  $p$ , on dit que  $p$  est un *point régulier*; sinon  $p$  est un *point singulier*. Une variété sous-riemannienne dont tous les points sont réguliers est dite *équivariante*.

**Multiplicité non-holonome et coordonnées privilégiées** Pour faire du calcul infinitésimal sur une variété et obtenir des approximations des différents objets étudiés (distance, fonctions, champs, etc), on utilise habituellement la structure tangente. Cependant la structure tangente classique ne remplit pas ce rôle pour une variété sous-riemannienne. Il faut donc définir une notion adaptée d'approximation infinitésimale, et donc de multiplicité.

Soit  $p \in M$ . On définit la *multiplicité (non-holonome)* en  $p$  d'une fonction  $\varphi$  régulière comme le plus petit entier  $s \geq 0$  pour lequel il existe  $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, m\}$  tels que la dérivée de Lie itérée  $f_{i_1} \cdots f_{i_s} \varphi$  est non nulle. On peut montrer que  $\varphi$  est de multiplicité  $\geq s$  en  $p$  si et seulement si  $\varphi(q) = O(d(p, q)^s)$ .

Définissons les entiers  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , en posant  $w_j = s$  si  $n_{s-1} < j \leq n_s$ , avec  $n_s = n_s(p)$  et  $n_0 = 0$ . On dit que des coordonnées locales  $z_1, \dots, z_n$  centrées en  $p$  forment un *système de coordonnées privilégiées* en  $p$  si, pour  $j = 1, \dots, n$ , la multiplicité de  $z_j$  en  $p$  est égale à  $w_j$  (appelé le *poids* de la coordonnée  $z_j$ ).

Les coordonnées privilégiées fournissent un outil adapté au calcul infinitésimal sur les variétés sous-riemanniennes. En effet, la multiplicité d'une fonction  $\varphi$  exprimée en coordonnées privilégiées s'obtient comme le plus petit degré pondéré d'un monôme apparaissant avec un coefficient non nul dans le développement de Taylor de  $\varphi$ . De plus, on peut dans ces coordonnées estimer la distance sous-riemannienne à partir de  $p$  ainsi que les boules sous-riemanniennes  $B(p, \varepsilon)$  centrées en  $p$  et de petit rayon  $\varepsilon$ .

**Théorème 1.1** (Théorème de la "boule-boîte"). *Soit  $z = (z_1, \dots, z_n)$  un système de coordonnées privilégiées en  $p$ . Il existe des constantes positives  $C_p$  et  $\varepsilon_p$  telles que, pour  $\varepsilon < \varepsilon_p$ ,*

$$Bo\hat{u}te(p, \varepsilon/C_p) \subset B(p, \varepsilon) \subset Bo\hat{u}te(p, C_p \varepsilon),$$

où  $Bo\hat{u}te(p, \eta) = \{q \in M : |z_i(q)| < \eta^{w_i}, i = 1, \dots, n\}$ .

De façon équivalente, pour tout point  $q$  vérifiant  $d(p, q) < \varepsilon_p$ ,

$$\frac{1}{C_p} \|z(q)\|_p \leq d(p, q) \leq C_p \|z(q)\|_p, \quad (1.3)$$

où  $\|z\|_p = |z_1|^{1/w_1} + \dots + |z_n|^{1/w_n}$ .

On trouve dans la littérature deux types de constructions pour obtenir des coordonnées privilégiées : soit des coordonnées exponentielles [53, 83], soit des coordonnées polynômiales [24, 29, 88]. Ces constructions reposent sur la notion de base adaptée : on dit qu'une famille de champs de vecteurs  $g_1, \dots, g_n$  forme une *base adaptée en  $p$*  si chaque  $g_i$  appartient à  $\mathcal{L}^{w_i}$  et si les vecteurs  $g_1(p), \dots, g_n(p)$  forment une base de  $T_p M$  (les champs  $g_i$  sont généralement choisis de la forme  $f_{I_i}$ ,  $|I_i| = w_i$ ). Par exemple, avec une telle base, l'inverse du difféomorphisme local

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto e^{z_n g_n} \circ \dots \circ e^{z_1 g_1}(p)$$

définit un système de coordonnées privilégiées en  $p$  (voir [53, 69]), appelées coordonnées canoniques du second type.

**Approximations au premier ordre, espace métrique tangent** La notion de multiplicité non-holonome se prolonge aux champs de vecteurs (et aux opérateurs différentiels) : la multiplicité d'un champ de vecteurs  $f$  en  $p$  est le plus grand entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que, pour tout  $s \geq 0$  et toute fonction  $\varphi$  de multiplicité  $s$  en  $p$ , la fonction  $f\varphi$  est de multiplicité  $\geq k + s$  en  $p$ .

Il est clair que les champs  $f_1, \dots, f_m$  ont une multiplicité  $\geq -1$  en tout point et que au moins l'un d'entre eux a une multiplicité égale à  $-1$ . On dit alors qu'une famille  $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$  est une *approximation au 1er ordre* de  $(f_1, \dots, f_m)$  en  $p$  si les champs de vecteurs  $f_i - \bar{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont de multiplicité  $\geq 0$  en  $p$ . La distance sous-riemannienne  $\bar{d}$  définie par la famille  $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$  sur  $M$  donne alors une approximation de la distance  $d$  :

$$d(p, q) = \bar{d}(p, q) + o(\bar{d}(p, q)).$$

Étant donné un système de coordonnées privilégiées en  $p$ , on peut calculer la multiplicité d'un champ de vecteurs exprimé dans ces coordonnées de façon similaire à celle d'une fonction (il faut de plus affecter les poids  $-w_j$  aux champs de coordonnées  $\partial/\partial z_j$ ). En particulier, chaque champ  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , exprimé dans ces coordonnées privilégiées, s'écrit comme

$$f_i(z) = f_i^{(-1)}(z) + f_i^{(0)}(z) + f_i^{(1)}(z) + \dots,$$

où  $f_i^{(s)}(z)$  est de degré pondéré égal à  $s$  et homogène (pour le degré pondéré).

En posant  $\widehat{f}_i = f_i^{(-1)}$ , on obtient une famille  $\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_m$  qui est une approximation au premier ordre de  $f_1, \dots, f_m$  et qui est de plus nilpotente d'ordre  $r$ . On appelle cette famille une *approximation nilpotente homogène* de  $f_1, \dots, f_m$  en  $p$ . Soit  $\widehat{d}$  la distance

sous-riemannienne définie par  $\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_m$  sur  $\mathbb{R}^n$ . La variété sous-riemannienne  $(\mathbb{R}^n, \widehat{d})$  est, à isométrie près, l'espace métrique tangent (au sens de Gromov) en  $p$  à  $(M, d)$ . Elle a de plus une structure de groupe de Lie nilpotent si  $p$  est un point régulier, et d'espace homogène, quotient de deux groupes de Lie nilpotent, si  $p$  est un point singulier.

## 1.2 Estimations uniformes des boules SR

La forme des boules sous-riemanniennes de petit rayon est décrite par le théorème 1.1 dit de la “boule-boîte” : pour  $\varepsilon$  inférieur à une constante  $\varepsilon_p$ , la boule  $B(p, \varepsilon)$  centrée en  $p$  de rayon  $\varepsilon$  ressemble à une boîte  $[-\varepsilon^{w_1}, \varepsilon^{w_1}] \times \dots \times [-\varepsilon^{w_n}, \varepsilon^{w_n}]$  en coordonnées privilégiées. Cette description est très utile pour l'étude de différents problèmes de mesures et de dimensions mais n'est réellement exploitable que lorsqu'elle est uniforme, c'est-à-dire quand les constantes  $C_p$  et  $\varepsilon_p$  du théorème 1.1 varient continûment avec  $p$ .

C'est précisément le cas au voisinage d'un point  $p$  régulier. On peut alors construire sur un voisinage  $U$  de  $p$  une application continue associant à tout point  $q$  un système de coordonnées  $z^q$  privilégiées en  $q$  et il existe des fonctions  $q \mapsto C_q$  et  $q \mapsto \varepsilon_q$  continues et à valeurs positives sur  $U$  telles que, pour tout  $q \in U$  et tout  $\varepsilon < \varepsilon_q$ ,

$$Boîte(q, \frac{\varepsilon}{C_p}) \subset B(q, \varepsilon) \subset Boîte(q, C_p \varepsilon),$$

où  $Boîte(q, \eta) = \{q' \in M : |z_i^q(q')| \leq \eta^{w_i}, i = 1, \dots, n\}$  (rappelons que les poids  $w_i$  sont constants au voisinage du point régulier  $p$ ).

Ainsi, sur les variétés sous-riemanniennes équirégulières (*i.e.* sans aucun point singulier), des résultats sur les dimensions et mesures de Hausdorff, ainsi que des inégalités isopérimétriques et de Sobolev, ont pu être obtenus [50, 66, 75, 93].

Remarquons enfin, comme le souligne Bellaïche [29], que la structure de groupe de l'espace métrique tangent en un point régulier résulte de l'uniformité du théorème 1.1 autour d'un tel point (voir aussi [65]).

En revanche la description de la “boule-boîte” n'est plus uniforme en présence de points singuliers : les entiers  $w_i$  peuvent changer d'un point à l'autre et il n'est plus possible de trouver des fonctions  $p \mapsto \varepsilon_p$  et  $p \mapsto C_p$  continues. En particulier, si  $q_k$  est une suite de points réguliers convergeant vers un point singulier  $p$ , la suite  $\varepsilon_{q_k}$  tend vers 0 alors que  $\varepsilon_p$  est non nul. Il n'est donc plus possible d'utiliser cette description pour des opérations telles que calculer le nombre de boules d'un rayon donné nécessaires pour recouvrir un ensemble compact. Or cette opération est nécessaire au calcul de dimensions et mesures de Hausdorff, d'entropies ou d'autres mesures géométriques comme la complexité d'un chemin (voir [7, 19]).

Dans [3], nous avons obtenu une description des petites boules sous-riemanniennes dépendant uniformément de leur centre et de leur rayon, généralisant ainsi le théorème 1.1. Les boules y sont toujours comparées à des boîtes, mais celles-ci sont définies par des coordonnées qui dépendent du rayon de la boule, et non plus seulement par les coordonnées



privilégées. La construction de telles coordonnées repose sur une généralisation de la notion de base adaptée (qui est, rappelons-le, essentielle dans la construction de coordonnées privilégiées), que nous donnons maintenant.

Soit  $(M, d)$  une variété sous-riemannienne. Notre point de vue étant par nature local, nous considérons que  $d$  est définie à partir d'une famille de champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_m$ . Nous supposons de plus que  $(M, d)$  est une variété sous-riemannienne analytique et que  $M$  est une variété orientée (d'où l'existence d'une  $n$ -forme déterminant, notée  $\det$ ). On se donne enfin un compact  $\Omega \subset M$  et on note  $r$  le maximum du degré de non-holonomie sur  $\Omega$ .

Soient  $p \in \Omega$  et  $\varepsilon > 0$ . Considérons l'ensemble (fini) des familles de  $n$  champs de vecteurs  $\underline{I} = (f_{I_1}, \dots, f_{I_n})$  où chaque commutateur  $f_{I_j}$  est de longueur  $|I_j| \leq r$  et, sur cet ensemble, la fonction

$$\underline{I} \mapsto \left| \det \left( f_{I_1} \varepsilon^{|I_1|}, \dots, f_{I_n} \varepsilon^{|I_n|} \right) (p) \right|.$$

On dit que  $\underline{I} = (f_{I_1}, \dots, f_{I_n})$  est une *base associée* à  $(p, \varepsilon)$  (sur  $\Omega$ ) si elle réalise le maximum de cette fonction. En particulier, les valeurs en  $p$  d'une telle famille forment une base de  $T_p M$ .

Cette notion est bien une généralisation des bases adaptées : à  $p$  fixé et pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, une base associée à  $(p, \varepsilon)$  est une base adaptée en  $p$ . En revanche, elle ne l'est pas forcément quand  $\varepsilon$  grandit (tout en restant petit, bien entendu), comme le montre l'exemple ci-dessous.

*Exemple.* Considérons la métrique sous-riemannienne de Martinet définie sur  $\mathbb{R}^3$  par les champs de vecteurs

$$f_1 = \partial_x, \quad f_2 = \partial_y + \frac{x^2}{2} \partial_z.$$

On vérifie alors aisément que les bases associées à  $((x, y, z), \varepsilon)$  sont :

$$(f_1, f_2, f_{121}) \text{ si } |x| < \varepsilon, \quad (f_1, f_2, f_{12}) \text{ si } |x| > \varepsilon, \quad \text{les deux si } |x| = \varepsilon,$$

alors que la base adaptée en  $(x, y, z)$  est  $(f_1, f_2, f_{12})$  si  $x \neq 0$ .

L'estimation d'une boule  $B(p, \varepsilon)$  se fait dans les coordonnées exponentielles du second type construites à partir d'une base associée à  $(p, \varepsilon)$ .

**Théorème 1.2.** *Il existe une constante  $\delta_0 > 0$  et des fonctions  $k(\delta)$ ,  $K(\delta)$ ,  $0 < k(\delta) < K(\delta)$ , avec  $\lim_{\delta \rightarrow 0} K(\delta) = 0$ , telles que :*

*pour tout  $p \in \Omega$ ,  $\varepsilon < 1$ ,  $\delta < \delta_0$  et toute base  $\underline{I} = (f_{I_1}, \dots, f_{I_n})$  associée à  $(p, \varepsilon)$*

$$B_{\underline{I}}(p, k(\delta)\varepsilon) \subset B(p, \delta\varepsilon) \subset B_{\underline{I}}(p, K(\delta)\varepsilon) \tag{1.4}$$

où  $B_{\underline{I}}(p, \varepsilon) = \{p \exp(x_n f_{I_n}) \cdots \exp(x_1 f_{I_1}) : |x_i| < \varepsilon^{|I_i|}, 1 \leq i \leq n\}$ .

Dans ce résultat, la base  $\underline{I}$  utilisée pour construire la boîte  $B_{\underline{I}}$  et les coordonnées  $x_i$  dépendent de  $\varepsilon$ . C'est pourquoi nous avons introduit le paramètre  $\delta$  : il permet de comparer des boules  $B(p, \delta\varepsilon)$  de différents rayons dans le même système de coordonnées  $x_i$  (c'est-à-dire avec la même base  $\underline{I}$ ). Si on fixe  $p$  et  $\delta$ , on retrouve bien le théorème de la "boule-boîte" pour  $\varepsilon$  suffisamment petit.

La démonstration de ce théorème est donnée dans [3]. Le principe en est de désingulariser localement  $(M, d)$  en la relevant sur une variété équirégulière, où le théorème de la "boule-boîte" est valide uniformément, puis de projeter les boules dans des coordonnées adéquates. Le choix des coordonnées pour la projection est inspiré de [72]. La technique de désingularisation est basée sur des travaux déjà existants sur les relèvements [29, 49, 83] et conduit au résultat suivant.

**Théorème 1.3.** *Soient  $p \in M$  et  $r = r(p)$  le degré de non-holonomie en  $p$ . Il existe alors une variété  $\widetilde{M} = M \times \mathbb{R}^{\widetilde{n}-n}$ ,  $\widetilde{n} \geq n$ , des coordonnées  $(y, z)$  sur un voisinage  $\widetilde{U}$  de  $(p, 0)$  dans  $\widetilde{M}$  et des champs de vecteurs sur  $\widetilde{M}$  définis localement par*

$$\xi_i(y, z) = f_i(y) + \sum_{j=n+1}^{\widetilde{n}} b_{ij}(y, z) \partial_{z_j} \quad (1.5)$$

tels que, si  $\widetilde{d}$  est la distance sous-riemannienne définie sur  $\widetilde{M}$  par la famille  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$  :

- la famille  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$  satisfait la condition du rang sur  $\widetilde{U}$  ;
- tout point  $\widetilde{q} \in \widetilde{U}$  est un point régulier de la variété  $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$  ;
- en notant  $\pi$  la projection canonique de  $\widetilde{M}$  dans  $M$ , on a, pour tous points  $q_1, q_2$  dans  $\pi(\widetilde{U})$ , voisinage de  $p$  dans  $M$ ,

$$d(q_1, q_2) = \inf_{\widetilde{q}_2 \in \pi^{-1}(q_2)} \widetilde{d}((q_1, 0), \widetilde{q}_2).$$

Nous verrons des applications de ce résultat section 2.1.

### 1.3 Entropie et complexité des chemins

Comme la distance riemannienne, la distance sous-riemannienne est définie à partir d'une notion de longueur de chemins. Cependant seuls certains chemins, les chemins horizontaux, peuvent avoir une longueur finie. Comment mesurer alors les chemins non horizontaux ? En particulier, puisque leur longueur, mesure de dimension 1, est infinie, ils ont certainement une dimension de Hausdorff supérieure à 1. Quelle est sa valeur exactement ?

Ces questions, soulevées en particulier par Gromov [50], ont constitué une part importante de mes recherches depuis ma thèse et font l'objet de tout le reste du chapitre. Nous présentons d'abord dans cette section les travaux effectués sur ce sujet dans [19]

et [7]. Nous en verrons également des applications à la planification des mouvements dans la section 2.2.

Considérons une courbe  $\mathcal{C}$ , image d'un chemin absolument continu  $c : [a, b] \rightarrow M$ , *i.e.*  $\mathcal{C} = c([a, b])$ . Notre approche ici est d'étudier  $\mathcal{C}$  au moyen de notions qui soient globales et de nature métrique, telles que l'entropie, la mesure de Hausdorff ou la complexité. Leur construction ne fera donc appel qu'à la variété sous-riemannienne  $(M, d)$  en tant qu'espace métrique.

**Entropie métrique** L'*entropie métrique* d'un sous-ensemble borné  $A$  de  $M$  est la fonction  $\varepsilon \mapsto e(A, \varepsilon)$ , définie pour  $\varepsilon > 0$ , où  $e(A, \varepsilon)$  est le nombre minimal de boules SR de rayon  $\varepsilon$  nécessaires pour recouvrir  $A$ . La notion d'entropie a été introduite par Kolmogorov [58] (qui utilise plutôt l' $\varepsilon$ -entropie, égale au logarithme de  $e(A, \varepsilon)$ ) et représente la quantité d'information nécessaire pour décrire un point quelconque dans  $A$  avec une précision  $\varepsilon$ .

Le comportement asymptotique de  $e(A, \varepsilon)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 reflète la géométrie de l'ensemble  $A$  dans  $M$ . Il est essentiellement caractérisé par la *dimension d'entropie*

$$\dim_e A = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log e(A, \varepsilon)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

C'est donc le comportement asymptotique de  $e$ , ainsi que la dimension d'entropie, qui vont nous intéresser ici. Nous nous contenterons d'obtenir des équivalents au sens faible : on dit que deux fonctions  $g_1(\varepsilon)$  et  $g_2(\varepsilon)$ , tendant vers  $+\infty$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , sont *faiblement équivalentes*, et on note  $g_1(\varepsilon) \asymp g_2(\varepsilon)$ , si il existe deux constantes positives  $k_1, k_2$  telles que

$$k_1 g_1(\varepsilon) \leq g_2(\varepsilon) \leq k_2 g_1(\varepsilon),$$

pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Si seule l'inégalité de gauche est valable, on note  $g_1(\varepsilon) \preceq g_2(\varepsilon)$ .

Lorsque la variété sous-riemannienne  $(M, d)$  est équirégulière, l'uniformité du théorème de la "boule-boîte" (voir la section précédente) permet de donner relativement aisément des équivalents au sens faible de l'entropie. Nous verrons dans la section 1.5 que l'on peut en fait obtenir des équivalents au sens fort dans ce cas, avec en particulier la valeur de la dimension d'entropie. Nous nous intéressons donc ici à une variété sous-riemannienne quelconque, sans hypothèse de régularité.

L'entropie d'une variété sous-riemannienne non équirégulière, le plan de Grušin, a été calculée dans [29]. Ce dernier exemple est intéressant car l'entropie n'y est pas équivalente à une puissance de  $1/\varepsilon$ , ce qui montre que le comportement asymptotique de l'entropie ne peut pas se déduire uniquement de la dimension d'entropie.

**Complexité et approximations par des ensembles discrets** La complexité d'une courbe est un invariant géométrique que nous avons introduit dans [7] (voir aussi [18]) et qui mesure la longueur des chemins horizontaux  $\varepsilon$ -proches de la courbe pour la topologie

$C^0$ . Plus précisément, soit  $\text{Tube}(\mathcal{C}, \varepsilon) = \bigcup_{q \in \mathcal{C}} B(q, \varepsilon)$  le tube sous-riemannien de rayon  $\varepsilon > 0$  centré sur la courbe  $\mathcal{C}$ . On définit la *complexité de la courbe*  $\mathcal{C}$  comme la fonction  $\varepsilon \mapsto \sigma(\mathcal{C}, \varepsilon)$ , définie pour  $\varepsilon > 0$ , où

$$\sigma(\mathcal{C}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \inf \text{long}(\gamma),$$

l'infimum étant pris sur tous les chemins horizontaux  $\gamma$  contenus dans  $\text{Tube}(\mathcal{C}, \varepsilon)$  et reliant les deux extrémités  $c(a)$  et  $c(b)$  de  $\mathcal{C}$ .

Dans [19], suivant des idées de Gromov [50, p. 278], nous présentons le point de vue, a priori différent mais en fait équivalent, de l'approximation d'une courbe par des ensembles discrets. Nous considérons deux types d'ensembles finis : les  $\varepsilon$ -réseaux et les  $\varepsilon$ -chaînes.

Un  $\varepsilon$ -réseau de  $\mathcal{C}$  est un ensemble discret  $Z$  de points de  $M$  tel que tout point de  $\mathcal{C}$  est à une distance inférieure à  $\varepsilon$  d'au moins un point de  $Z$ . Le nombre minimal de points dans un  $\varepsilon$ -réseau est justement l'entropie  $e(\mathcal{C}, \varepsilon)$ .

Une  $\varepsilon$ -chaîne de  $\mathcal{C}$  est une suite de points  $v_0 = c(a), v_1, \dots, v_k = c(b)$  dans  $\mathcal{C}$  dont deux points successifs sont à une distance inférieure à  $\varepsilon$ . On définit la *complexité d'interpolation non-holonome*  $\sigma_{\text{int}}(\mathcal{C}, \varepsilon)$  comme le nombre minimal de points dans une  $\varepsilon$ -chaîne de  $\mathcal{C}$ . Cette complexité  $\sigma_{\text{int}}(\mathcal{C}, \varepsilon)$  est faiblement équivalente à la complexité  $\sigma(\mathcal{C}, \varepsilon)$  (elle est en fait comprise entre  $\sigma(\mathcal{C}, \varepsilon)$  et  $\sigma(\mathcal{C}, 3\varepsilon)$ ). La terminologie "interpolation non-holonome" a été introduite par Gauthier et Zakalyukin [48], qui interprètent  $\varepsilon \sigma_{\text{int}}(\mathcal{C}, \varepsilon)$  comme la longueur minimale d'un chemin horizontal interpolant  $\mathcal{C}$  avec une précision  $\varepsilon$ , les points d'une  $\varepsilon$ -chaîne étant alors les points de contrôle de l'interpolation.

Il est naturel d'utiliser la taille de ces ensembles discrets pour construire des notions de longueurs dimensionnées,

$$\text{long}_k^e(\mathcal{C}) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^k e(\mathcal{C}, \varepsilon) \quad \text{et} \quad \text{long}_k^\sigma(\mathcal{C}) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^k \sigma_{\text{int}}(\mathcal{C}, \varepsilon),$$

généralisant la notion usuelle de longueur (remarquons que, pour une courbe horizontale  $\mathcal{C}$ , les deux fonctions ci-dessus coïncident avec  $\text{long}(\mathcal{C})$  quand  $k = 1$ ). La question est alors de savoir si ces deux notions sont équivalentes (au moins faiblement), c'est-à-dire si entropie et complexité sont équivalentes. Nous y reviendrons.

**Estimation de l'entropie** Notre estimation de l'entropie repose sur la description des boules sous-riemanniennes du théorème 1.2. Nous aurons en particulier besoin de la notion de base associée introduite dans la section 1.2, qui nous servira à construire une  $\varepsilon$ -norme sur l'espace tangent  $T_p M$ .

Soient  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour une base  $\underline{I} = (f_{I_1}, \dots, f_{I_n})$  associée à  $(p, \varepsilon)$  (sur un compact  $\Omega$  contenant  $\mathcal{C}$ ), on note  $v_1^I, \dots, v_n^I$  les réels tels que  $v = \sum_{i=1}^n v_i^I f_{I_i}(p)$ . On définit alors la  $\varepsilon$ -norme de  $v \in T_p M$  comme

$$\|v\|_{p, \varepsilon} = \max_{\substack{\underline{I} \text{ base associée} \\ \text{à } (p, \varepsilon)}} \left( \left[ \frac{v_1^I}{\varepsilon^{|Y_1|}} \right]^2 + \dots + \left[ \frac{v_n^I}{\varepsilon^{|Y_n|}} \right]^2 \right)^{1/2}.$$

À  $\varepsilon$  fixé, cette  $\varepsilon$ -norme induit une métrique Riemannienne qui, multipliée par  $\varepsilon^2$ , tend vers la métrique sous-riemannienne quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

Quand  $v$  est le vecteur tangent  $\dot{c}(t)$  à un chemin, la dépendance par rapport à  $c(t)$  est implicite et on écrit la  $\varepsilon$ -norme comme  $\|\dot{c}(t)\|_\varepsilon$ .

On obtient alors le résultat suivant quand la variété sous-riemannienne est analytique.

**Théorème 1.4.** *Pour un chemin analytique  $c : [a, b] \rightarrow M$ , l'entropie de la courbe  $\mathcal{C} = c([a, b])$  vérifie*

$$e(\mathcal{C}, \varepsilon) \asymp \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_\varepsilon dt.$$

Remarquons que, quand  $\mathcal{C}$  est une courbe horizontale, l'intégrale de la  $\varepsilon$ -norme est équivalente (au sens fort) à  $\text{long}(\mathcal{C})/\varepsilon$ .

Cette estimation permet également de calculer la dimension d'entropie. Introduisons d'abord un raffinement de la notion de point régulier : on dit que  $q \in \mathcal{C}$  est un *point  $\mathcal{C}$ -régulier* si le vecteur de croissance est constant sur  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $q$ , et que c'est un point  *$\mathcal{C}$ -singulier* sinon. Un point  $\mathcal{C}$ -singulier est forcément singulier mais un point  $\mathcal{C}$ -régulier peut être régulier ou singulier. On dit alors que  $\mathcal{C}$  est *équirégulière* si tous les points de  $\mathcal{C}$  sont  $\mathcal{C}$ -réguliers.

**Corollaire 1.5.** *La dimension d'entropie d'une courbe analytique  $\mathcal{C}$  est comprise dans l'intervalle  $[\beta_{\text{reg}}, r]$ , où*

- $\beta_{\text{reg}}$  est le plus petit entier  $\beta$  tel que  $T_q\mathcal{C} \in L^\beta(q)$  pour tout point  $q$   $\mathcal{C}$ -régulier ;
- $r$  est le maximum du degré de non-holonomie sur  $\mathcal{C}$ .

*Si de plus  $\mathcal{C}$  est équirégulière, la dimension d'entropie de  $\mathcal{C}$  est  $\dim_e \mathcal{C} = \beta_{\text{reg}}$ .*

Notons de plus quelques propriétés remarquables de la dimension d'entropie que l'on peut obtenir à partir d'exemples relativement simples (voir [7]).

- La dimension d'entropie de  $\mathcal{C}$  peut prendre non seulement les valeurs entières appartenant à l'intervalle  $[\beta_{\text{reg}}, r]$ , mais aussi des valeurs rationnelles.
- Quand  $\mathcal{C}$  n'est pas équirégulière, on peut avoir  $\dim_e \mathcal{C} > \beta$  alors que  $T_q\mathcal{C} \in L^\beta(q)$  pour tout  $q \in \mathcal{C}$ . Inversement, il est possible d'avoir  $T_q\mathcal{C} \in L^\beta(q)/L^{\beta-1}(q)$  pour un point  $q \in \mathcal{C}$  alors que  $\dim_e \mathcal{C} < \beta$ .
- Dans certains cas, l'entropie peut avoir un comportement similaire à celle du plan de Grušin, c'est-à-dire que la dimension d'entropie est égale à 2 alors que  $\varepsilon^2 e(\mathcal{C}, \varepsilon)$  tend vers l'infini.

**Estimation de la complexité** L'estimation de la complexité s'obtient à partir de celle de l'entropie et repose sur la comparaison des deux notions.

Une première relation est évidente :  $\sigma(\mathcal{C}, \varepsilon) \preceq e(\mathcal{C}, \varepsilon)$  puisque l'on peut toujours construire une  $\varepsilon$ -chaîne à partir d'un  $\varepsilon$ -réseau. Il s'avère en revanche que construire un  $\varepsilon$ -réseau à partir d'une  $\varepsilon$ -chaîne n'est pas toujours possible, en raison de l'existence de points particuliers sur la courbe.

Nous appelons *cusps métrique* d'une courbe  $\mathcal{C}$  un point  $q$  dans l'intérieur de  $\mathcal{C}$  tel que, pour toute constante positive  $k$ , le tube  $\text{Tube}(\mathcal{C}, \varepsilon)$  privé de la boule  $B(q, k\varepsilon)$  est connexe pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Les cusps métriques sont des points isolés dans  $\mathcal{C}$ . Nous utilisons le terme "cusp" par analogie avec les singularités algébriques de courbes ; cependant ici la propriété est de nature purement métrique et des chemins réguliers ou analytiques peuvent avoir des cusps métriques.

Maintenant, en l'absence de tels points sur  $\mathcal{C}$ , une  $\varepsilon$ -chaîne est un  $k\varepsilon$ -réseau pour une certaine constante  $k$ , ce qui permet d'établir que dans ce cas,  $\sigma(\mathcal{C}, \varepsilon) \asymp e(\mathcal{C}, \varepsilon)$ . On peut de plus montrer qu'un cusp métrique qui n'est pas  $\mathcal{C}$ -singulier a une influence négligeable sur la complexité, ce qui mène au résultat suivant.

**Théorème 1.6.** *Soit  $c : [a, b] \rightarrow M$  un chemin analytique et  $t_1 < \dots < t_s$  les paramètres des cusps métriques qui sont également  $\mathcal{C}$ -singuliers ( $a < t_1$  and  $t_s < b$ ). La complexité de la courbe  $\mathcal{C} = c([a, b])$  vérifie*

$$\int_a^b \|\dot{c}(t)\|_\varepsilon dt - \sum_{i=1}^s \int_{t_i-\varepsilon}^{t_i+\varepsilon} \|\dot{c}(t)\|_\varepsilon dt \preceq \sigma(\mathcal{C}, \varepsilon) \preceq \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_\varepsilon dt.$$

Ce résultat ne permet pas toujours d'estimer la complexité et de la comparer avec l'entropie. Nous donnons cependant dans [7] une condition algébrique sur les courbes qui est vérifiée génériquement et qui assure que l'entropie et la complexité sont équivalentes.

Enfin, entropie et complexité peuvent ne pas être équivalentes, comme le montre l'exemple suivant.

*Exemple.* Considérons la métrique sous-riemannienne définie sur  $\mathbb{R}^3$  par les champs de vecteurs

$$f_1 = \partial_x, \quad f_2 = \partial_y + (x^9 - xz^2)\partial_z,$$

et la courbe  $\mathcal{C}$ , image du chemin  $c : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par  $c(t) = (0, t, t^2)$ . En utilisant les théorèmes 1.4 et 1.6, on montre que l'origine est à la fois un cusp métrique et un point  $\mathcal{C}$ -singulier et

$$e(\mathcal{C}, \varepsilon) \asymp \varepsilon^{-6} \quad \text{et} \quad \sigma(\mathcal{C}, \varepsilon) \asymp \varepsilon^{-4}.$$

L'entropie et la complexité de  $\mathcal{C}$  ne sont donc pas équivalentes.

Notons que, dans des travaux postérieurs aux nôtres [44, 45, 46, 47, 48], Gauthier et Zakalyukin ont étudié la complexité et la complexité d'interpolation, cherchant pour chacune un équivalent au sens fort et des chemins horizontaux réalisant la synthèse optimale. Leurs résultats sont valables génériquement pour des métriques sous-riemanniennes qui sont soit définies à partir de distributions de corang 1, soit telles que le degré de non-holonomie est au maximum 2 ou 3. Ils montrent que la complexité est alors équivalente (au sens fort) à l'intégrale d'un invariant géométrique de la courbe.

## 1.4 Une classe de longueurs dimensionnées

Nous exposons dans cette section les résultats obtenus en collaboration avec Elisha Falbel dans [6].

Comme dans la section précédente, notre but est d'introduire une notion géométrique permettant de mesurer un chemin non horizontal. L'approche est cependant différente. Alors qu'entropie, mesures de Hausdorff et complexité sont des mesures globales, nous cherchons ici une définition calquée sur celle de la longueur : la mesure doit apparaître comme l'intégrale d'une mesure infinitésimale. Cette mesure infinitésimale doit de plus être intrinsèque à l'espace métrique  $(M, d)$  et ne doit pas dépendre de la métrique sous-riemannienne sous-jacente (ici supposée définie à partir d'une structure sous-riemannienne  $(D, g)$ ). Ainsi, utiliser la  $\varepsilon$ -norme introduite dans la section précédente ne convient pas.

Une telle mesure infinitésimale est une généralisation de la norme riemannienne sur l'espace tangent et nécessite une étude détaillée de la structure métrique de l'espace tangent. Notre démarche consiste à reformuler de façon purement métrique les notions de base de géométrie différentielle et riemannienne nécessaires à la construction de l'espace tangent afin de les étendre à la géométrie sous-riemannienne.

**Description intrinsèque de l'espace métrique tangent** La notion d'espace métrique tangent à un espace métrique quelconque a été introduite par Gromov [51]. Comme nous l'avons rappelé dans la section 1.1, l'espace métrique tangent à une variété sous-riemannienne est lui-même une variété sous-riemannienne, qui est isométrique à  $(\mathbb{R}^n, \widehat{d})$ . Cependant, les descriptions existantes de cet espace sont soit non intrinsèques [29, 66], soit valides uniquement aux points réguliers [64, 65]. Or nous avons besoin d'une description intrinsèque qui soit valide également aux points singuliers, un chemin, même générique, pouvant toujours contenir des points singuliers.

Mentionnons ici la construction élaborée par Agrachev et Marigo dans [23] d'un *espace tangent non-holonyme* : il s'agit de la structure tangente à une variété non-holonyme, c'est-à-dire une variété  $M$  munie d'une distribution  $D$ . Le point de vue est différent du nôtre, puisque purement algébrique (il n'y a pas de notion métrique). Il est cependant clair que cet espace doit être, à isomorphisme près, l'ensemble sous-jacent à l'espace métrique tangent.

Fixons un point  $p \in M$  et considérons l'ensemble  $\mathcal{C}_p$  des chemins  $c(s)$ , définis sur un intervalle  $0 \leq s \leq \varepsilon$  et à valeurs dans  $M$ , qui sont dérivables en 0, absolument continus, et tels que  $c(0) = p$ . Par analogie avec la définition habituelle des vecteurs tangents comme classes d'équivalence de courbes tangentes, on introduit les définitions suivantes, inspirées de [65].

- Deux chemins  $c_1(s)$  et  $c_2(s)$  sont dits *équivalents* si

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} d(c_1(s), c_2(s)) = 0.$$

- Un chemin  $c(s) \in \mathcal{C}_p$  est dit *rectifiable* si  $d(p, c(s)) \leq Cs$  quand  $s \rightarrow 0$  et si il est équivalent à un chemin  $C^\infty$  dans  $\mathcal{C}_p$ .
- Soit  $C_p M$  l'ensemble des classes d'équivalence  $[c(s)]$  de courbes rectifiables. On appelle *cône tangent* à  $M$  en  $p$  l'espace  $C_p M$  muni de la distance  $\bar{d}$  définie par

$$\bar{d}([c_1(s)], [c_2(s)]) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} d(c_1(s), c_2(s)).$$

On obtient ainsi une description intrinsèque de l'espace métrique tangent.

**Théorème 1.7.** *Le cône tangent  $(C_p M, \bar{d})$  est isométrique à  $(\mathbb{R}^n, \hat{d})$  et donc à l'espace métrique tangent à  $(M, d)$  en  $p$ .*

La distance  $\bar{d}$  sur  $C_p M$  permet déjà de définir une mesure infinitésimale en un point où un chemin est rectifiable. Tout chemin n'est cependant pas rectifiable. Si  $k \geq 1$  est un réel, on dit qu'un chemin  $c(s) \in \mathcal{C}_p$  est *k-rectifiable* si  $c(s^k)$  est rectifiable et on définit  $C_p^k M$  comme l'ensemble des classes d'équivalences  $[c(s^k)]$  pour les chemins  $c(s)$  *k-rectifiables*.

Il s'avère que tout chemin est *r-rectifiable* ( $r = r(p)$  est le degré de non-holonomie en  $p$ ), ce qui conduit à la filtration suivante du cône tangent :

$$C_p M = C_p^1 M \supset C_p^2 M \supset \dots \supset C_p^r M \supset C_p^{r+1} M = [p],$$

où  $[p]$  désigne la classe d'équivalence du chemin identiquement égal à  $p$ . En comparant cette filtration à celle de l'espace tangent  $T_p M$  par les ensembles de crochets,

$$\{0\} \subset L^1(p) \subset L^2(p) \subset \dots \subset L^r(p) = T_p M,$$

on a pu en donner une caractérisation algébrique :  $C_p^k M / C_p^{k+1} M$  est égal à l'ensemble des classes d'équivalence  $[c(s^k)]$  pour tous les chemins  $c(s)$  tangents presque partout à  $\mathcal{L}^k / \mathcal{L}^{k-1}$ .

**Mesures infinitésimales et k-longueurs** On définit la *k-mesure infinitésimale* en  $p$  d'un chemin  $c(s)$  comme

$$\text{meas}_p^k(c(s)) = \begin{cases} \bar{d}([p], [c(s^k)])^k & \text{si } c(s) \text{ est } k\text{-rectifiable,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est en fait une mesure sur  $C_p^k M$ .

On définit ensuite une classe de longueurs de chemins par intégration des mesures infinitésimales : la *k-longueur* d'un chemin absolument continu  $c : [a, b] \rightarrow M$  est :

$$\text{Long}_k(c) = \int_a^b \text{meas}_{c(t)}^k(c(t+s)) dt.$$

Ces longueurs possèdent les propriétés suivantes, qui montrent qu'elles répondent bien à la question initiale.



**Théorème 1.8.**

- La  $k$ -longueur d'un chemin est invariante par reparamétrage.
- La 1-longueur est la longueur (sous-riemannienne) usuelle :  $\text{Long}_1(c) = \text{long}(c)$ .

Le premier point permet d'écrire sans ambiguïté  $\text{Long}_k(\mathcal{C})$  au lieu de  $\text{Long}_k(c)$  quand  $\mathcal{C} = c([a, b])$ , ce que nous ferons section 1.5.

On a également obtenu une caractérisation plus explicite :

$$\text{Long}_k(c) = \int_a^b \left[ \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} d(c(t), c(t + s^k)) \right]^k dt,$$

qui mène à une caractérisation similaire à celle des mesures de Hausdorff.

**Théorème 1.9.** *Soit  $k_c$  le plus petit réel  $k \geq 1$  tel que  $c$  est  $k$ -rectifiable presque partout sur  $[a, b]$ . Alors  $k_c$  est un entier et :*

- $\text{Long}_k(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > k_c, \\ +\infty & \text{si } k < k_c; \end{cases}$
- $k_c$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $\dot{c}(t) \in \mathcal{L}^k(c(t))$  presque partout sur  $[a, b]$ .

*En particulier un chemin est rectifiable presque partout si et seulement si il est horizontal.*

Nous avons enfin calculé les mesures infinitésimales dans le cas d'une variété sous-riemannienne *de contact* :  $M$  est une variété de dimension  $2n + 1$  et la métrique sous-riemannienne est définie par une structure  $(D, g)$  où  $D$  est une distribution de contact de dimension  $2n$ . Rappelons que l'on peut alors définir de façon canonique une unique forme de contact  $\theta$  ainsi qu'un invariant  $\lambda_{\max}$  de la variété de contact (c'est le maximum des modules des valeurs propres de l'opérateur anti-symétrique associé à la restriction de  $d\theta|_D$  à  $D$ ).

**Théorème 1.10.** *Soit  $(M, D, g)$  une variété sous-riemannienne de contact de dimension  $2n+1$  et  $\theta$  la forme canonique de contact. Pour tout point  $p \in M$  et tout chemin  $c(s) \in \mathcal{C}_p$ ,*

$$\text{meas}_p^2(c(s)) = \frac{4\pi}{\lambda_{\max}(p)} |\theta(\dot{c}(0))|.$$

*En particulier, si la variété est de dimension 3, on a simplement*

$$\text{meas}_p^2(c(s)) = 4\pi |\theta(\dot{c}(0))|.$$

## 1.5 Mesures de Hausdorff

Les différentes notions que nous avons utilisées jusqu'à maintenant pour mesurer les chemins,  $k$ -longueurs, entropie, complexités, ont toutes en commun de... ne pas être des mesures sur  $M$ . Il est donc temps d'aborder des notions usuelles de mesures dans un espace métrique, les mesures de Hausdorff, et de les comparer avec les quantités

précédentes. Nous présentons ici les résultats que nous avons obtenu dans cette direction dans [16].

Commençons par rappeler la définition des mesures de Hausdorff. On se place dans l'espace métrique  $(M, d)$  et on note  $\text{diam } S$  le diamètre d'un ensemble  $S \subset M$ .

**Définition.** Soit  $k \geq 0$  un réel. Pour tout ensemble  $A \subset M$ , on définit la *mesure de Hausdorff  $k$ -dimensionnelle*  $\mathcal{H}^k$  de  $A$  comme  $\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon^k(A)$ , où

$$\mathcal{H}_\varepsilon^k(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } S_i)^k : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, \text{diam } S_i \leq \varepsilon, S_i \text{ ens. fermé} \right\},$$

ainsi que la *mesure de Hausdorff  $k$ -dimensionnelle sphérique*  $\mathcal{S}^k$  de  $A$  comme  $\mathcal{S}^k(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{S}_\varepsilon^k(A)$ , où

$$\mathcal{S}_\varepsilon^k(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } S_i)^k : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, S_i \text{ est une boule, diam } S_i \leq \varepsilon \right\}.$$

Notons que ces mesures satisfont  $\mathcal{H}^k \leq \mathcal{S}^k \leq 2^k \mathcal{H}^k$ . Rappelons également que, dans le cas particulier où  $(M, d)$  est une variété riemannienne, les mesures  $\mathcal{H}^n$  et  $\mathcal{S}^n$  sont toutes deux égales à la mesure de Lebesgue, à un facteur de renormalisation près ; de plus, dans ce cas, pour toute sous-variété  $A$  de classe  $C^1$  de  $M$ ,  $\mathcal{H}^k(A)$  et  $\mathcal{S}^k(A)$  coïncident pour tout  $k$ .

Pour un ensemble donné  $A \subset M$ ,  $\mathcal{H}^k(A)$  est une fonction décroissante de  $k$ , infinie jusqu'à une certaine valeur de  $k$ , nulle ensuite. On appelle *dimension de Hausdorff* de  $A$  le réel

$$\dim_{\text{H}} A = \sup \{k : \mathcal{H}^k(A) = \infty\} = \inf \{k : \mathcal{H}^k(A) = 0\}.$$

Lorsque le variété sous-riemannienne  $(M, d)$  est équirégulière, les dimensions de Hausdorff sont relativement aisées à calculer, grâce à l'uniformité du théorème de la "boule-boîte" (voir la section 1.2). La dimension de Hausdorff de la variété est

$$\dim_{\text{H}} M = \sum_{s \geq 1} s (\dim L^s(p) - \dim L^{s-1}(p)),$$

pour un point  $p \in M$  quelconque [66, 94] et ce résultat s'étend à une sous-variété  $N$  de  $M$  [50, p. 104] :

$$\dim_{\text{H}} N = \max_{q \in N} \left\{ \sum_{s \geq 1} s (\dim L_N^s(q) - \dim L_N^{s-1}(q)) \right\}, \quad (1.6)$$

où  $L_N^s(q)$  est le sous-espace vectoriel  $L^s(q) \cap T_q N$ .

Considérons maintenant une courbe  $\mathcal{C} = c([a, b])$ , où  $c : [a, b] \rightarrow M$  est un chemin absolument continu. La comparaison entre mesures de Hausdorff et  $k$ -longueurs de  $\mathcal{C}$  nécessite une hypothèse de régularité très faible sur le chemin :  $c$  est dit *presque partout régulier* (p.p. régulier) si l'ensemble  $\{t \in [a, b] : c(t) \text{ } \mathcal{C}\text{-singulier}\}$  est de mesure de Lebesgue nulle.

**Théorème 1.11.** *Soit  $c : [a, b] \rightarrow M$  un chemin absolument continu et p.p. régulier. Alors, pour tout  $k \geq 1$  et  $\mathcal{C} = c([a, b])$ ,*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k(\mathcal{C}) &= \text{Long}_k(\mathcal{C}), \\ \mathcal{S}^k(\mathcal{C}) &= 2^{k-1} \text{Long}_k(\mathcal{C}).\end{aligned}$$

Quand  $k = 1$ , ce résultat et le théorème 1.8 permettent de retrouver la relation classique  $\mathcal{H}^1(\mathcal{C}) = \mathcal{S}^1(\mathcal{C}) = \text{long}(\mathcal{C})$  (voir [42, 2.10.13]). En revanche, pour  $k > 1$ , on constate que les mesures de Hausdorff  $k$ -dimensionnelles sphérique et non sphérique ne coïncident pas, même pour des courbes lisses, contrairement à ce qui se passe en géométrie riemannienne. Cette différence est déjà mise en évidence dans [82] pour les mesures de Hausdorff  $Q$ -dimensionnelles dans un groupe de Carnot de dimension homogène  $Q$  et est reliée à la non existence d'inégalités isodiamétriques.

Une autre conséquence importante du théorème ci-dessus est que la dimension de Hausdorff est égale à l'entier  $k_c$  défini dans le théorème 1.9.

**Corollaire 1.12.** *Si  $\mathcal{C} = c([a, b])$ , où  $c : [a, b] \rightarrow M$  est absolument continue et p.p. régulière, alors  $\dim_{\mathbb{H}} \mathcal{C}$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $T_q \mathcal{C}$  appartient à  $D^k(q)$  pour  $\mathcal{H}^1$ -presque tout  $q \in \mathcal{C}$ .*

Ce corollaire constitue une généralisation de la formule (1.6). Il établit en particulier que la dimension de Hausdorff d'une courbe est toujours un entier. Ceci, avec la remarque suivant le corollaire 1.5, montre que dimension d'entropie et dimension de Hausdorff peuvent ne pas être égales lorsque la courbe n'est pas équirégulière.

Enfin, l'intérêt principal du théorème 1.11 tient à ce qu'il donne une représentation intégrale des mesures de Hausdorff. Cette représentation peut par exemple être calculée dans le cas d'une variété sous-riemannienne de contact, grâce au théorème 1.10.

**Corollaire 1.13.** *Soit  $(M, D, g)$  une variété sous-riemannienne de contact de dimension  $2n+1$  et  $\theta$  sa forme canonique. Si  $\mathcal{C} = c([a, b])$ , où  $c : [a, b] \rightarrow M$  est absolument continue, alors*

$$\mathcal{H}^2(\mathcal{C}) = 4\pi \int_a^b \frac{|\theta(c(t), \dot{c}(t))|}{\lambda_{\max}(c(t))} dt.$$

Quand la variété de contact coïncide avec le groupe de Heisenberg de dimension 3, on obtient, pour la mesure sphérique,

$$\mathcal{S}^2(\mathcal{C}) = 8\pi \int_a^b |\theta(c(t), \dot{c}(t))| dt.$$

Cette formule, due originellement à Pansu [74], intervient de façon cruciale dans la preuve de la formule de co-aire dans le groupe de Heisenberg (voir [63], où le lien entre 2-longueurs et mesures de Hausdorff 2-dimensionnelles sphériques est déjà noté).

Il est d'autre part naturel de comparer les mesures de Hausdorff, basées sur des approximations par des ensembles dénombrables, aux notions basées sur des approximations par des ensembles discrets, c'est-à-dire l'entropie  $e$  et la complexité d'interpolation non-holonyme  $\sigma_{\text{int}}$  définies page 9.

Remarquons déjà que, de façon générale, l'entropie métrique d'un ensemble  $A$  est reliée aux mesures de Hausdorff sphériques : pour tout  $k \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$ , on a  $2^{-k} \mathcal{S}^k(A) \leq \varepsilon^k e(A, \varepsilon)$ , et donc  $\dim_{\text{H}} A \leq \dim_e A$ . On a en fait beaucoup mieux pour les courbes suffisamment régulières.

**Théorème 1.14.** *Soit  $c : [a, b] \rightarrow M$  un chemin  $C^1$  sans point double. Si  $\mathcal{C} = c([a, b])$  est équirégulière, alors  $\mathcal{H}^k(\mathcal{C}) = \text{Long}_k(\mathcal{C})$  (d'après le théorème 1.11) et*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(\mathcal{C}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^k \sigma_{\text{int}}(\mathcal{C}, \varepsilon), \\ \frac{1}{2} \mathcal{H}^k(\mathcal{C}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^k e(\mathcal{C}, \varepsilon). \end{aligned}$$

Ainsi, les calculs de Gauthier et Zakalyukin dans [48] sur les équivalents de la complexité d'interpolation non-holonyme  $\sigma_{\text{int}}$  donnent directement les valeurs correspondantes des mesures de Hausdorff. Inversement, on retrouve leurs résultats dans le cas de contact à partir du corollaire 1.13.

Notons pour finir que l'hypothèse d'équirégularité dans le théorème ci-dessus est essentielle, au vu des résultats de la section 1.3. En revanche, dans le théorème 1.11, l'hypothèse de régularité p.p. semble d'ordre technique et devrait pouvoir être levée prochainement.



# Chapitre 2

## Planification des mouvements non-holonomes

On considère un système non-holonome

$$(\Sigma) \quad \dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x),$$

où  $x$  appartient à un sous-ensemble ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f_1, \dots, f_m$  sont des champs de vecteurs sur  $\Omega$  et le contrôle  $u = (u_1, \dots, u_m)$  est une fonction intégrable à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ . Le problème qui nous intéresse dans ce chapitre est celui de la *planification des mouvements* :

étant donnés deux points  $x_0$  et  $x_1$  dans  $\Omega$ ,  
trouver une trajectoire de  $(\Sigma)$  joignant  $x_0$  à  $x_1$ .

Autrement dit, il s'agit de trouver un contrôle  $u \in L^2([0, T], U)$  tel que la trajectoire  $x(\cdot, x_0, u)$  issue de  $x_0$  et associée à  $u$  vérifie  $x(T, x_0, u) = x_1$  (problème de contrôle en *boucle ouverte*).

Si l'ensemble  $\Omega$  est connexe et si les champs  $f_1, \dots, f_m$  y satisfont la condition du rang, le théorème de Chow [39] assure que le problème de planification des mouvements a une solution. Nous nous placerons toujours sous ces hypothèses.

La planification des mouvements est un problème crucial en robotique non-holonome. Dans ce cadre, on distingue habituellement la planification dans un environnement libre (*i.e.* avec  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ) de la planification en présence d'obstacles, la résolution du premier problème constituant une étape dans la résolution du second.

### 2.1 Un algorithme global de planification des mouvements

Même en l'absence d'obstacles, la planification de mouvements non-holonomes n'est pas une tâche simple. Le problème n'a été résolu de façon efficace que pour des classes par-

ticulières de systèmes non-holonomes. Parmi les techniques utilisées, citons une méthode de théorie des groupes de Lie pour les systèmes nilpotentisables [59], les contrôles sinusoïdaux [71] pour les systèmes qui peuvent être mis sous forme chaînée et la génération de trajectoires pour les systèmes plats [43].

Beaucoup de systèmes étudiés en robotique (les plus simples surtout, donc les plus fréquents !) sont couverts par ces classes particulières. Il existe cependant des robots non-holonomes dont le modèle n’entre dans aucune de ces catégories. Par exemple, les robots mobiles avec plus d’une remorque ne peuvent pas être mis sous forme chaînée (et donc ne sont pas plats), à moins que chaque remorque ne soit attachée au centre de l’essieu qui la précède, un arrangement très inhabituel dans les véhicules réels. Un autre exemple est celui des systèmes robotisés qui réalisent de la manipulation d’objets par roulement [73] : même le plus simple mécanisme de cette catégorie (le “plate-ball”) ne peut être mis sous forme chaînée. Plus généralement, pour les systèmes à deux entrées, dès que l’espace est de dimension au moins 5, la nilpotentisabilité exacte devient l’exception plutôt que la règle (alors que tous les systèmes jusqu’à la dimension 4 possèdent cette propriété, voir [52, 70]).

Des méthodes existent pour planifier les mouvements d’un système non-holonome a priori quelconque, parmi lesquelles la technique itérative de [59], la méthode de boucle générique de [86] et la méthode de continuation de [38, 89]. Ces méthodes ne sont cependant pas totalement satisfaisantes. Par exemple, les deux premières sont de nature locale et nécessitent la connaissance a priori d’une “distance critique” qui est généralement impossible à déterminer, alors que la troisième impose des hypothèses fortes sur le système.

Nous présentons dans cette section les travaux que nous avons réalisés en collaboration avec Giuseppe Oriolo et Marilena Vendittelli [8, 13, 17] sur des méthodes globales de planification valables pour des systèmes très généraux.

On considère donc un système non-holonome dans  $\mathbb{R}^n$

$$(\Sigma) \quad \dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$$

satisfaisant la condition du rang. L’objectif est d’amener le système d’un point initial donné à un but (que l’on supposera être l’origine), avec une marge d’erreur  $e$  fixée.

Notre méthode repose sur la construction d’une application de planification approchée, notée AppSteer (pour “Approximate Steering”), qui amène le système d’un point  $x_0$  à un point  $\text{AppSteer}(x_0, x_1)$  proche de  $x_1$ . Nous nous placerons ici dans le cadre de la géométrie sous-riemannienne définie sur  $\mathbb{R}^n$  par les champs  $f_1, \dots, f_m$ , et utiliserons les notations et définitions de la section 1.1. La construction de AppSteer fait appel à la notion d’approximation au 1er ordre (voir page 4), et comprend trois étapes :

1. choisir une approximation au 1er ordre  $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)$  de  $(f_1, \dots, f_m)$  en  $x_1$  qui soit de plus nilpotente ;
2. choisir un contrôle  $u$ , défini sur un intervalle  $[0, T]$ , amenant le système approché  $\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i \hat{f}_i(x)$  de  $x_0$  à  $x_1$  ;

3. appliquer le contrôle  $u$  à  $(\Sigma)$  :  $\text{AppSteer}(x_0, x_1) := x(T, x_0, u)$ .

L'intérêt de choisir une approximation nilpotente est qu'alors l'étape 2 est réalisable, par exemple avec la méthode de [59]. En revanche, dans l'étape 3, l'existence de la trajectoire  $x(\cdot, x_0, u)$  sur  $[0, T]$ , et donc celle de  $\text{AppSteer}(x_0, x_1)$ , n'est garantie que si  $u$  est suffisamment petit.

Nous imposons donc dans l'étape 2 une condition sur la norme  $L^2$  de  $u$  en fonction de la distance sous-riemannienne entre  $x_0$  et  $x_1$  (condition satisfaite par la méthode de [59]) pour que  $\text{AppSteer}(x_0, x_1)$  soit défini dès que  $x_0$  et  $x_1$  sont suffisamment proches. De plus, avec cette condition, les propriétés des approximations au 1er ordre (voir [29, Prop. 7.29]) assurent que l'application  $\text{AppSteer}$  est *contractante* : précisément, pour tout  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe des constantes positives  $\beta = \beta(x_1)$  et  $\mu = \mu(x_1)$  telles que, si  $d(x_0, x_1) < \mu$ ,

$$d(\text{AppSteer}(x_0, x_1), x_1) \leq d(x_0, x_1)^{1+\beta}. \quad (2.1)$$

Muni d'une application  $\text{AppSteer}$  contractante, il est aisé de construire un algorithme local de planification : en effet la suite définie récursivement par  $x^{k+1} = \text{AppSteer}(x^k, x_1)$ ,  $x^0 = x_0$ , converge vers  $x_1$  si  $d(x_0, x_1) \leq \mu(x_1)$ .

En revanche, pour espérer construire un algorithme global de planification, il faut que l'application  $\text{AppSteer}$  soit *uniformément contractante*, c'est-à-dire que, sur tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'inégalité (2.1) soit valable pour tout  $x_1 \in K$  avec des constantes positives  $\beta_K$  et  $\mu_K$  indépendantes de  $x_1$ . L'idée directrice pour construire un algorithme global est alors la suivante. Fixons un compact  $K$  et un chemin  $\gamma \subset K$  joignant le point initial  $x_0$  au but  $x_1$ , et choisissons une suite finie de buts intermédiaires  $x_0^d = x_0, x_1^d, \dots, x_n^d = x_1$  sur  $\gamma$  espacés d'une distance inférieure à  $\mu_K/2$ . Il est alors aisé de montrer que l'application itérée de  $\text{AppSteer}$  entre le point courant  $x^i$  et le prochain sous-but  $x_{i+1}^d$  (en posant  $x_i^d = x_1, \forall i \geq n$ ) définit une suite  $x^i$  qui converge vers  $x_1$ .

Pour convertir cette idée en un véritable algorithme, trois problèmes restent à régler.

Le premier est celui de la construction d'une application  $\text{AppSteer}$  uniformément contractante. Nous avons réalisé une telle construction pour les systèmes réguliers (c'est-à-dire que le vecteur de croissance associé est constant) dans [13] et pour une classe générique de systèmes dans [8, 17]. La difficulté dans le second cas est d'obtenir une approximation du premier ordre dépendant continûment du point d'approximation, même quand celui-ci est singulier, et a été résolue en utilisant la technique de désingularisation des variétés sous-riemanniennes de [3] (voir théorème 1.3).

Le deuxième problème est que la distance sous-riemannienne associée au système  $(\Sigma)$  apparaît à de nombreuses reprises à la fois dans les algorithmes et dans les preuves de convergence, alors que l'on ne dispose pas en général d'expression pour cette distance. Il est donc nécessaire d'en avoir des estimations qui soient de plus valables uniformément. Nous les obtenons en adaptant les résultats de [3], le résultat de désingularisation du théorème 1.3 jouant là encore un rôle clé.

Enfin le dernier problème est que, pour le choix des buts intermédiaires, la connaissance de la distance critique  $\mu_K$  est a priori requise, mais en pratique non disponible.



Il faut donc trouver une technique de globalisation de l’algorithme local un peu moins naïve que celle proposée ci-dessus. Nous utilisons pour cela des méthodes de type région de confiance.

Nous obtenons donc finalement des algorithmes réalisant la planification des mouvements d’une très large classe (générique) de systèmes non-holonomes, dont nous montrons la convergence globale. Ces algorithmes ont de plus la particularité de produire un contrôle stabilisant et d’être robustes, grâce à l’utilisation des approximations du premier ordre (voir également [73]). Enfin, si le point initial est proche du but, les trajectoires produites restent elles aussi proches du but. Cette propriété topologique rend possible l’utilisation de cet algorithme au sein d’un algorithme de planification en milieu encombré (voir [60] et la section suivante).

## 2.2 Complexité en milieu encombré

La présence d’obstacles ajoute un deuxième niveau de difficulté au problème de la planification des mouvements d’un robot non-holonyme : il faut prendre en compte, en plus de la dynamique du système, les contraintes sur l’état dues aux obstacles. Il apparaît alors nécessaire de combiner des techniques purement géométriques gérant l’évitement des obstacles avec des méthodes de planification de mouvements. Une telle combinaison est possible par des arguments de nature topologique.

Reprenons la modélisation du problème. Une configuration du robot est représentée par un point de  $\mathbb{R}^n$  (ou d’une variété de dimension  $n$ , peu importe ici) et les mouvements sont décrits par un système non-holonyme

$$(\Sigma) \quad \dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x),$$

supposé vérifier la condition du rang. Les obstacles sont représentés par un sous-ensemble fermé  $O$  de  $\mathbb{R}^n$ . Le problème est donc maintenant de résoudre le problème de la planification de mouvements pour le système  $(\Sigma)$  restreint à l’ensemble ouvert  $\mathbb{R}^n \setminus O$ , appelé *l’espace libre*.

D’après le théorème de Chow, résoudre ce problème entre deux points  $x_0$  et  $x_1$  est possible si et seulement si ces deux points se trouvent dans la même composante connexe de l’espace libre. Cet espace étant ouvert, ceci est équivalent à l’existence d’une courbe dans  $\mathbb{R}^n \setminus O$  joignant  $a$  à  $b$ . Cet argument est le point de départ d’une méthode générale, appelée “Approximation d’une courbe holonome sans collisions” (voir [60]), constituée de deux étapes :

1. trouver une courbe  $\mathcal{C}$  dans l’espace libre joignant  $x_0$  à  $x_1$  ( $\mathcal{C}$  est la “courbe holonome sans collisions”);
2. réaliser une approximation de  $\mathcal{C}$  par des trajectoires de  $(\Sigma)$  suffisamment proches pour être contenues dans l’espace libre.

La complexité de la première étape (c'est-à-dire la planification des mouvements pour un système holonome) est bien comprise. Elle dépend de la complexité des primitives géométriques utilisées pour modéliser les obstacles et le robot dans la réalité (voir [37, 85]).

Nous présentons dans cette section les travaux que nous avons mené dans [4] (voir aussi [18]) sur la complexité de la deuxième étape.

Considérons une courbe  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus O$  obtenue en résolvant la première étape de la méthode ci-dessus. Comme dans la section 1.3, on note  $\text{Tube}(\mathcal{C}, \rho) = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} B(x, \rho)$  le tube de rayon  $\rho > 0$  centré sur la courbe  $\mathcal{C}$ , où  $B(x, \rho)$  est la boule ouverte centrée en  $x$  et de rayon  $\rho$ , pour la distance sous-riemannienne définie par les champs  $f_1, \dots, f_m$ .

Soit alors  $\varepsilon$  la distance de  $\mathcal{C}$  aux obstacles, c'est-à-dire le plus grand rayon  $\rho$  pour lequel  $\text{Tube}(\mathcal{C}, \rho)$  est contenu dans  $\mathbb{R}^n \setminus O$ . On dit qu'une trajectoire de  $(\Sigma)$  est une *approximation de  $\mathcal{C}$*  si elle est contenue dans  $\text{Tube}(\mathcal{C}, \varepsilon)$  et si elle a les mêmes extrémités  $x_0$  et  $x_1$  que  $\mathcal{C}$ .

La complexité de la deuxième étape de la méthode « Approximation d'une courbe holonome sans collisions » doit apparaître comme une fonction de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la distance  $\varepsilon$  de  $\mathcal{C}$  aux obstacles, que nous appellerons une *complexité d'approximation de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus O$* . Un premier type de définition utilise l'infimum de la complexité des trajectoires qui sont des approximations de  $\mathcal{C}$ . On en propose trois différentes.

- Si on ne considère que des trajectoires “bang-bang”, le nombre de changements de valeurs (ou *switches*) du contrôle définit une complexité. On peut alors définir une complexité  $\sigma_{sw}(\mathcal{C}, \varepsilon)$  comme l'infimum du nombre de switches parmi toutes les trajectoires bang-bang qui sont des approximations de  $\mathcal{C}$ .
- Une deuxième définition, plus générale que la précédente, utilise la complexité topologique d'une fonction continue par morceaux, c'est-à-dire le nombre de changement de signe de la variation de la fonction. On définit donc la *complexité topologique*  $\sigma_t(\mathcal{C}, \varepsilon)$  de  $\mathcal{C}$  comme l'infimum du nombre total de changements de signe dans les contrôles  $u_i$  parmi toutes les trajectoires  $C^1$  par morceaux qui sont des approximations de  $\mathcal{C}$ .
- Une troisième solution consiste à utiliser la longueur d'une trajectoire. Puisque  $\varepsilon$  est une sorte de distance de libre parcours, il est naturel de considérer que l'étape élémentaire du processus d'approximation de  $\mathcal{C}$  est la construction d'une trajectoire de longueur  $\varepsilon$ . Le nombre d'étapes élémentaires dans une trajectoire  $\gamma$ , c'est-à-dire  $\text{long}(\gamma)/\varepsilon$ , représente une complexité de  $\gamma$ . On définit alors la *complexité métrique*  $\sigma(\mathcal{C}, \varepsilon)$  de  $\mathcal{C}$  comme l'infimum de  $\text{long}(\gamma)/\varepsilon$  parmi toutes les trajectoires  $\gamma$  qui sont des approximations de  $\mathcal{C}$ . C'est la notion de complexité que nous avons introduite dans la section 1.3. Notons que l'on pourrait également utiliser la complexité d'interpolation non-holonome (définie page 9), qui est faiblement équivalente à  $\sigma$ .

Un autre type de définition repose sur les boules sous-riemanniennes. Supposons que l'on sache construire ces boules ainsi que les géodésiques sous-riemanniennes (c'est le cas par exemple pour le robot-voiture, voir [87]). Une façon efficace de construire l'approximation d'une courbe est de la recouvrir par des boules contenues dans l'espace libre puis

de relier les centres de deux boules adjacentes par des géodésiques [57]. Ceci suggère que l'entropie  $e(\mathcal{C}, \varepsilon)$ , le nombre minimal de boules de rayon  $\varepsilon$  nécessaires pour recouvrir  $\mathcal{C}$ , définit également une complexité d'approximation de  $\mathcal{C}$ .

*Remarque.* Il est clair que ces notions de complexité correspondent en fait au “pire cas”, celui d'un espace très encombré où la distance entre les obstacles est petite et sensiblement la même partout. Elles doivent donc plutôt être considérées comme des bornes supérieures de la complexité algorithmique.

Les estimations des deux dernières notions, la complexité métrique  $\sigma$  et l'entropie  $e$ , résultent de l'étude de la section 1.3. Dans le contexte de ce chapitre, celui de la robotique, on peut de plus supposer que, pour tous les chemins considérés,  $\sigma(\mathcal{C}, \varepsilon)$  et  $e(\mathcal{C}, \varepsilon)$  sont faiblement équivalentes (voir le commentaire suivant le théorème 1.6). Dans [4], nous avons appliqué ces résultats au cas d'un robot à roue avec remorques pour calculer la complexité d'effectuer diverses manœuvres : parking en créneau, déplacement latéral d'une remorque, etc.

Ces estimations permettent également de minorer les deux premières notions de la complexité,  $\sigma_t(\mathcal{C}, \varepsilon)$  et  $\sigma_{sw}(\mathcal{C}, \varepsilon)$ . En effet, on montre dans [4] que, pour un chemin  $\mathcal{C}$  qui n'est jamais tangent à la distribution engendrée par  $f_1, \dots, f_m$ , on a

$$\sigma(\mathcal{C}, \varepsilon) \preceq \sigma_t(\mathcal{C}, \varepsilon) \leq \sigma_{sw}(\mathcal{C}, \varepsilon).$$

On peut d'autre part obtenir des majorations de  $\sigma_t$  et  $\sigma_{sw}$  dans des cas particuliers, quand  $f_1, \dots, f_m$  engendrent une algèbre de Lie nilpotente par exemple, à l'aide les résultats de [11], ou encore en utilisant les synthèses optimales obtenues dans les travaux de Gauthier *et al.* [44, 45, 46, 47, 48]. Il n'existe cependant pas de majoration valable en toute généralité.

# Chapitre 3

## Trajectoires singulières

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats obtenus avec Yacine Chitour et Emmanuel Trélat dans [9, 15] (voir aussi [5, 12]).

Dans tout ce chapitre, on fixe une variété  $M$  de dimension  $n$  et on note  $VF(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $M$  muni de la topologie  $C^\infty$  de Whitney.

### 3.1 Trajectoires et courbes singulières

**Trajectoires singulières** Considérons le système de contrôle affine sur  $M$

$$(\Sigma) \quad \dot{q} = f_0(q) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(q),$$

où  $q \in M$ ,  $m$  est un entier positif,  $(f_0, \dots, f_m)$  est un  $(m+1)$ -uplet de champs de vecteurs sur  $M$ , et le contrôle  $u = (u_1, \dots, u_m)$  prend ses valeurs dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ . Pour  $q_0 \in M$  et  $T > 0$ , un contrôle  $u \in L^\infty([0, T], U)$  est dit *admissible* si la trajectoire  $q(\cdot, q_0, u)$  de  $(\Sigma)$  associée à  $u$  et partant de  $q_0$  est bien définie sur  $[0, T]$ . Sur l'ensemble  $\mathcal{U}_{q_0, T}$  des contrôles admissibles, définissons l'*application point-final* comme

$$E_{q_0, T}(u) := q(T, q_0, u).$$

L'ensemble  $\mathcal{U}_{q_0, T}$  est ouvert dans  $L^\infty([0, T], U)$  et  $E_{q_0, T} : \mathcal{U}_{q_0, T} \rightarrow M$  est une application régulière.

**Définition.** Un contrôle  $u \in \mathcal{U}_{q_0, T}$  est dit singulier si  $u$  est un point critique de l'*application point-final*  $E_{q_0, T}$ , c'est-à-dire que sa différentielle  $DE_{q_0, T}(u)$  n'est pas surjective. Une trajectoire  $q(\cdot, q_0, u)$  est dite *singulière* si  $u$  est singulier, et *de corang un* si la codimension de l'image de  $DE_{q_0, T}(u)$  dans l'espace tangent est égale à un.

En d'autres termes, un contrôle  $u \in \mathcal{U}_{q_0, T}$  est singulier si le système linéarisé le long de la trajectoire  $q(\cdot, q_0, u)$  n'est pas commandable sur  $[0, T]$ .

**Courbes et chemins singuliers** Une notion similaire existe pour les distributions. Considérons une distribution  $D$  de rang  $m \leq n$  sur la variété  $M$ . Pour  $q_0 \in M$ , on note  $\Omega(q_0)$  l'ensemble des chemins horizontaux  $q(\cdot) : [0, 1] \rightarrow M$  tels que  $q(0) = q_0$ , et  $\text{End}_{q_0} : \Omega(q_0) \rightarrow M$  l'application point-final définie par  $\text{End}_{q_0}(q(\cdot)) = q(1)$ . Muni de la topologie  $W^{1,1}$ , l'ensemble  $\Omega(q_0)$  a une structure de variété de Banach et l'application  $\text{End}_{q_0}$  y est régulière.

Pour  $q_0, q_1 \in M$ ,  $\Omega(q_0, q_1) = \text{End}_{q_0}^{-1}(q_1)$  est l'ensemble des chemins horizontaux joignant  $q_0$  à  $q_1$ . C'est une sous-variété de Banach excepté éventuellement au voisinage d'un point critique de  $\text{End}_{q_0}$ .

**Définition.** On dit que  $q(\cdot)$  est un *chemin singulier* si il est horizontal et si c'est un point critique de l'application  $\text{End}_{q_0}$ . La codimension de la singularité est appelée le *corang* du chemin singulier.

Localement, dans un ouvert  $\Omega$ , on peut choisir un champ de repères  $(f_1, \dots, f_m)$  de la distribution  $D$ . Tout chemin horizontal contenu dans  $\Omega$  est alors trajectoire du système de contrôle affine sans dérive (*i.e.* non-holonome),

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(q),$$

et il est clair que le chemin est singulier si et seulement si la trajectoire est singulière. Les deux notions coïncident donc localement. Il y a cependant une légère différence. Quand  $(f_1, \dots, f_m)$  est le champ de repère d'une distribution  $D$ , le rang de la famille est identiquement égal à  $m$  et il y a correspondance univoque entre les chemins  $D$ -horizontaux issus de  $q_0$  et les contrôles. En conséquence, pour un chemin  $D$ -horizontal  $q(\cdot)$ , le fait d'être singulier est en fait une propriété intrinsèque au lieu géométrique du chemin, c'est-à-dire à la courbe  $q([0, 1])$ , que l'on appelle alors une *courbe singulière*. L'ensemble de ces courbes singulières constitue d'ailleurs un invariant géométrique de la distribution, qui suffit parfois à la caractériser à difféomorphisme près [56, 68].

En revanche, la famille des champs de vecteurs  $f_0, \dots, f_m$  définissant un système de contrôle affine n'est en général pas supposée de rang constant. Ainsi une même courbe peut être le lieu géométrique de deux trajectoires différentes (*i.e.* associées à deux contrôles différents), l'une régulière et l'autre singulière.

**Le point de vue du contrôle optimal** Trajectoires et courbes singulières apparaissent comme des singularités respectivement de  $\Omega(q_0, q_1)$  et de l'espace des trajectoires joignant deux points donnés. Elles jouent donc un rôle important en théorie du contrôle optimal et en calcul des variations avec des contraintes non-holonomes, en particulier en géométrie sous-riemannienne. Commençons par montrer comment elles apparaissent en contrôle optimal.

Soient  $q_0$  et  $q_1$  deux points de  $M$  et  $T > 0$ . Considérons le problème de contrôle optimal suivant : parmi toutes les trajectoires de  $(\Sigma)$  reliant  $q_0$  à  $q_1$ , déterminer la trajectoire

minimisant le coût quadratique :

$$C_{Q,\alpha,g}(T, u) = \int_0^T \left( \frac{1}{2} u(t)^T Q(q(t)) u(t) + \alpha(q(t))^T u(t) + g(t, q(t)) \right) dt, \quad (3.1)$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ ,  $g \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$  et  $Q \in \mathcal{S}_m^+(M)$  où  $\mathcal{S}_m^+(M)$  désigne l'ensemble des applications régulières  $q \mapsto Q(q)$  sur  $M$  à valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{S}_m^+$  des matrices  $m \times m$  symétriques définies positives.

D'après le principe de maximum de Pontryagin (voir [77]), pour toute trajectoire optimale  $q(\cdot) := q(\cdot, q_0, u)$ , il existe un couple non nul  $(\lambda(\cdot), \lambda^0)$ , où  $\lambda^0$  est un réel négatif ou nul et  $\lambda(\cdot)$  est une fonction absolument continue sur  $[0, T]$  (appelée le *vecteur adjoint*) avec  $\lambda(t) \in T_{q(t)}^* M$ , tel que, presque partout sur  $[0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, q(t), \lambda(t), \lambda^0, u(t)), \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q}(t, q(t), \lambda(t), \lambda^0, u(t)), \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t, q(t), \lambda(t), \lambda^0, u(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où

$$H(t, q, \lambda, \lambda^0, u) := \sum_{i=1}^m u_i \langle \lambda, f_i(q) \rangle + \lambda^0 \left( \frac{1}{2} u^T Q(q) u + \alpha(q)^T u + g(t, q) \right)$$

est le *hamiltonien* du système. Une *extrémale* est un quadruplet  $(q(\cdot), \lambda(\cdot), \lambda^0, u(\cdot))$  solution du système d'équations (3.2). L'extrémale est dite *normale* si  $\lambda^0 \neq 0$  et *anormale* si  $\lambda^0 = 0$ .

C'est ici que les trajectoires singulières font leur apparition en contrôle optimal : ce sont exactement les projections des anormales extrémales. Bien entendu une trajectoire singulière peut être la projection de plusieurs extrémales anormales et également d'une extrémale normale. On dit qu'une trajectoire singulière est strictement anormale si elle n'est pas la projection d'une extrémale normale. Notons qu'une trajectoire singulière est de corang un si et seulement si elle est la projection d'une unique (à une renormalisation scalaire près) extrémale anormale ; elle est strictement anormale et de corang un si et seulement si elle est la projection d'une unique extrémale qui est anormale.

Pour une extrémale normale, le contrôle  $u$  s'obtient comme une fonction feedback connue de  $(q, \lambda)$ . Les extrémales normales sont alors les courbes intégrales d'un champ hamiltonien : elles sont donc lisses et paramétrées par la valeur initiale  $\lambda(0) \in T_{q_0}^* M \setminus \{0\}$  du vecteur adjoint.

Pour une extrémale anormale, la situation est plus complexe, le problème étant qu'il n'est pas possible de déterminer en toute généralité une expression explicite des contrôles singuliers à partir des équations (3.2).

**Formulation géométrique pour les courbes singulières** Pour les courbes singulières à une distribution, en plus de la caractérisation locale du paragraphe précédent, on dispose d'une caractérisation géométrique intrinsèque. Bien entendu, la terminologie que nous allons introduire coïncide localement avec celle introduite au paragraphe précédent.

Soient  $D$  une distribution de rang  $m$  sur  $M$  et  $\omega$  la forme symplectique canonique sur  $T^*M$ . On note  $D^\perp$  l'annulateur de  $D$  dans  $T^*M$  privé de sa section nulle et  $\bar{\omega}$  la restriction de  $\omega$  à  $D^\perp$ ; cette restriction n'est pas nécessairement symplectique et peut donc admettre des *sous-espaces caractéristiques*  $\ker \bar{\omega}(\psi)$  en  $\psi \in D^\perp$ . Une courbe absolument continue  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow D^\perp$  telle que  $\dot{\psi}(t) \in \ker \bar{\omega}(\psi(t))$  pour presque tout  $t \in [0, 1]$  est appelée une *courbe caractéristique* ou une *extrémale anormale* de  $D$  (nous préférons évidemment cette dernière dénomination). Les courbes singulières de  $D$  sont exactement les projections sur  $M$  des extrémales anormales (voir [55]).

Considérons maintenant la variété sous-riemannienne  $(M, D, g)$  définie à partir d'une structure sous-riemannienne  $(D, g)$  sur  $M$ . On définit le hamiltonien  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  comme la moitié de la *cométrique*  $g^*$  associée à  $(D, g)$ , c'est-à-dire que, pour tout  $q \in M$ , la restriction de  $H$  à la fibre  $T_q^*M$  est donnée par la forme quadratique semi-définie positive

$$\lambda \longmapsto \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{\lambda(v)^2}{g_q(v)} : v \in D_q \setminus \{0\} \right\}.$$

Une *extrémale normale* de  $(D, g)$  est une courbe intégrale de  $\vec{H}$  définie sur  $[0, 1]$ .

On obtient dans ce cadre une formulation globale du principe du maximum de Pontryagin : si une courbe est minimisante, elle est nécessairement la projection soit d'une extrémale normale de  $(D, g)$ , soit d'une extrémale anormale de  $D$ . En particulier, les courbes singulières de  $D$  satisfont cette condition.

### Importance en théorie du contrôle optimal et en géométrie sous-riemannienne

Ainsi, pour un problème de contrôle optimal donné, les trajectoires singulières peuvent être des solutions minimisantes et jouent un rôle particulier puisqu'elles ne dépendent que du système de contrôle, pas du problème spécifique de minimisation considéré.

L'existence de telles courbes et trajectoires était déjà connue dans la théorie du calcul des variations classique (voir par exemple [32, 95]) et a posé un problème majeur au cours du développement, dans les années 40, de cette discipline qui est devenue la théorie du contrôle optimal (voir [33] sur leur rôle en contrôle non-linéaire). On a pourtant longtemps douté qu'il existe des courbes singulières optimales. Montgomery a finalement donné, dans [67], un exemple de courbe singulière minimisante en géométrie sous-riemannienne ainsi qu'une liste de plusieurs démonstrations fausses (de plusieurs auteurs différents) du fait qu'une singulière ne peut pas être optimale. Ce résultat a activé une série de travaux ayant pour but d'élucider le rôle des trajectoires et courbes singulières, notamment en géométrie sous-riemannienne.

Leur optimalité a été principalement étudiée par [34, 91] en ce qui concerne les

systèmes de contrôle affines mono-entrée (*i.e.* avec  $m = 1$ ), par [25, 62, 67, 91] dans le cadre de la géométrie sous-riemannienne associée aux distributions de rang 2, et par [27, 84] pour les systèmes non-linéaires généraux. Ces travaux ont conduit à des résultats de *rigidité* (voir également [26, 36]) des trajectoires singulières, c'est-à-dire qu'elles sont localement isolées parmi les trajectoires ayant les mêmes extrémités, et donc optimales.

## 3.2 Ordre minimal

Le but est ici de dégager une propriété des trajectoires et courbes singulières qui permette de déterminer leur contrôle ou leur vecteur vitesse. Cette propriété, l'ordre minimal, s'exprime différemment selon que l'on se place du point de vue de la théorie du contrôle ou de celui de la géométrie.

**Trajectoires singulières d'ordre minimal** Avant de s'attaquer au problème des contrôles singuliers, il faut traiter une autre difficulté, celle liée à la non-unicité du contrôle associé à une trajectoire donnée.

Soit  $q(\cdot) := q(\cdot, q_0, u)$  une trajectoire du système de contrôle  $(\Sigma)$ . Définissons le sous-ensemble fermé de  $[0, T]$

$$I_{\text{dep}}(q(\cdot)) := \{t \in [0, T] \mid \text{rang}\{f_0(q(t)), \dots, f_m(q(t))\} < m + 1\}.$$

Sur l'ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  où  $\text{rang}\{f_0, \dots, f_m\} = m + 1$ , il y a correspondance univoque entre les trajectoires et les contrôles. En revanche, sur  $I_{\text{dep}}(q(\cdot))$ , il n'y a pas unicité du contrôle associé à  $q(\cdot)$ ; en particulier,  $q(\cdot)$  peut être associée à la fois à des contrôles singuliers et non singuliers. Cette situation est particulièrement gênante quand la trajectoire reste dans le lieu où le rang chute, c'est-à-dire quand  $I_{\text{dep}}(q(\cdot))$  contient un intervalle ouvert.

Le résultat suivant, que nous avons établi dans [15], résout ce problème pour un système de contrôle générique.

**Théorème 3.1.** *Soit  $m < n$  un entier positif. Il existe un sous-ensemble ouvert et dense  $O_{m+1}$  de  $VF(M)^{m+1}$  tel que, si le  $(m + 1)$ -uplet  $(f_0, \dots, f_m)$  appartient à  $O_{m+1}$ , alors toute trajectoire  $q(\cdot)$  du système de contrôle affine associé  $\dot{q} = f_0(q) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(q)$  vérifie*

$$\dot{q}(t) = 0, \text{ pour presque tout } t \in I_{\text{dep}}(q(\cdot)).$$

*On peut de plus imposer une codimension arbitrairement grande au complémentaire de  $O_{m+1}$ .*

Dans les conditions de ce théorème, on peut déterminer le contrôle  $u$  sur  $I_{\text{dep}}(q(\cdot))$  : pour tout  $t \in I_{\text{dep}}(q(\cdot))$ ,  $u(t)$  est égal aux coefficients  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  d'une combinaison linéaire nulle  $f_0(q(t)) + \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(q(t)) = 0$ . En particulier, sur tout sous-intervalle



de  $I_{\text{dep}}(q(\cdot))$ , la trajectoire  $q(\cdot)$  est constante et le contrôle peut être choisi constant également.

Considérons maintenant une trajectoire singulière  $q(\cdot)$ . Nous avons vu que c'est la projection d'une extrémale anormale  $(q(\cdot), \lambda(\cdot))$ . Pour  $t \in [0, T]$  et  $i, j \in \{0, \dots, m\}$ , on pose  $h_i(t) := \langle \lambda(t), f_i(q(t)) \rangle$  et  $h_{ij}(t) := \langle \lambda(t), [f_i, f_j](q(t)) \rangle$ . Le long de l'extrémale anormale, on a, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$h_0(t) = \text{constante}, \quad h_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

En dérivant ces identités, on obtient, presque partout sur  $[0, T]$ ,

$$h_{i0}(t) + \sum_{j=1}^m h_{ij}(t)u_j(t) = 0, \quad i \in \{0, \dots, m\}. \quad (3.3)$$

Définissons la *matrice de Goh*  $G(t)$  au temps  $t \in [0, T]$  comme la matrice  $m \times m$  anti-symétrique  $G(t) := (h_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq m}$ . Le rang de  $G(t)$  est pair et l'équation (3.3) s'écrit, presque partout sur  $[0, T]$ ,

$$G(t)u(t) = b(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T], \quad (3.4)$$

où  $b(t) := -(h_{i0}(t))_{1 \leq i \leq m}$ . Quand  $G(t)$  est inversible,  $u(t)$  est déterminé de façon unique par cette équation.

Quand  $m$  est impair, le cas ci-dessus n'est pas possible,  $G(t)$  n'étant jamais inversible. On peut cependant faire une construction similaire. Définissons la matrice  $\bar{G}(t) := (h_{ij}(t))_{0 \leq i, j \leq m}$ . Puisque elle est anti-symétrique, son déterminant est le carré d'un polynôme  $\bar{P}(t)$  en les  $h_{ij}(t)$  de degré  $(m+1)/2$ , appelé *pfaffien*. D'après l'équation (3.3),  $\bar{G}(t)$  n'est pas inversible et donc, le long de l'extrémale,  $\bar{P}(t) = 0$ . Après dérivation, on obtient

$$\{\bar{P}, h_0\}(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)\{\bar{P}, h_i\}(t) = 0 \quad \text{p.p. sur } [0, T].$$

Définissons la matrice  $\tilde{G}(t)$  comme  $G(t)$  augmentée de la ligne  $(\{\bar{P}, h_j\}(t))_{1 \leq j \leq m}$ , et le vecteur  $\tilde{b}(t)$  comme  $b(t)$  augmenté du coefficient  $-\{\bar{P}, h_0\}(t)$ . On obtient

$$\tilde{G}(t)u(t) = \tilde{b}(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T]. \quad (3.5)$$

Si  $\tilde{G}(t)$  est de rang  $m$ ,  $u(t)$  est déterminé de façon unique par l'équation (3.5).

**Définition.** Une trajectoire singulière  $q(\cdot)$  est dite d'*ordre minimal* si

- (i)  $\dot{q}(t) = 0$ , pour presque tout  $t \in I_{\text{dep}}(q(\cdot))$ ;
- (ii) elle est la projection d'une extrémale anormale telle que

$$\begin{cases} \text{rang } G(t) = m, & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \text{rang } \tilde{G}(t) = m, & \text{si } m \text{ est impair,} \end{cases} \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T] \setminus I_{\text{dep}}(q(\cdot)).$$

D'après les équations (3.4), (3.5) et la remarque suivant le théorème 3.1, le contrôle d'une trajectoire singulière d'ordre minimal est déterminé comme une fonction feedback de  $(q, \lambda)$  presque partout sur  $[0, T]$ . Notons que notre définition de l'ordre minimal diffère légèrement de la définition correspondante de [35], où le contrôle est déterminé de manière unique mais seulement sur un sous-ensemble ouvert et dense de  $[0, T]$ .

À l'opposé, une trajectoire singulière est dite *de Goh* si elle est la projection d'une extrémale anormale le long de laquelle la matrice de Goh est identiquement nulle. Une trajectoire de Goh non triviale ne peut pas être d'ordre minimal quand  $m \geq 3$ .

**Courbes singulières** Pour les courbes singulières d'une distribution  $D$ , l'ordre minimal peut être défini de façon géométrique. Cela nécessite une caractérisation hamiltonienne des courbes caractéristiques que nous avons obtenue dans [9].

Étant donné un champ de vecteurs  $f$  sur  $M$ , on note  $\vec{h}_f$  le champ de vecteur hamiltonien sur  $T^*M$  défini par  $i_{\vec{h}_f}\omega = -dh_f$ , où  $h_f$  est la fonction sur  $T^*M$  telle que  $h_f(\psi) = \psi(f)$ . Pour  $\psi \in D^\perp$ , on note ensuite  $\vec{h}_D(\psi)$  le sous-ensemble de  $T_\psi(T^*M)$  formé de tous les éléments  $\vec{h}_f(\psi)$ , où  $f$  est une section  $C^\infty$  de  $D$ . Ainsi  $\vec{h}_D$  est un sous-fibré de  $T(T^*M)$  de rang  $m$  et de base  $D^\perp$ .

On définit alors  $\omega_D$  comme la restriction de  $\omega$  au sous-fibré  $\vec{h}_D$ . Pour  $\psi \in D^\perp$  tel que  $\omega_D^{m/2}(\psi) = 0$ , on définit également l'application linéaire

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_D(\psi) : \vec{h}_D(\psi) &\longrightarrow \Lambda^1(\vec{h}_D(\psi)) \times \Lambda^m(\vec{h}_D(\psi)) \\ \xi_\psi &\longmapsto (\omega_D(\psi)(\xi_\psi, \cdot), L_{\xi_\psi}\omega_D^{m/2}(\psi)), \end{aligned}$$

où on a noté  $\Lambda^k(\cdot)$  l'ensemble des  $k$ -formes sur un espace vectoriel.

Notre caractérisation est la suivante.

**Proposition 3.2.** *Une courbe absolument continue  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow D^\perp$  est une extrémale anormale de  $D$  si et seulement si*

- $\dot{\psi}(t) \in \ker \omega_D(\psi(t))$  p.p. si  $m$  est impair,
- $\dot{\psi}(t) \in \ker \tilde{\omega}_D(\psi(t))$  p.p. si  $m$  est pair.

Si  $m$  est impair, la propriété  $\dim \ker \omega_D(\psi) = 1$  est ouverte dans  $D^\perp$ . De même, si  $m$  est pair, la propriété  $\dim \ker \tilde{\omega}_D(\psi) = 1$  est ouverte dans  $\{\omega_D^{m/2} = 0\}$ . En conséquence, pour toute extrémale anormale  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow D^\perp$  de  $D$ , si il existe  $t_0 \in [0, 1]$  tel que  $\dim \ker \omega_D(\psi(t_0)) = 1$  si  $m$  est impair (resp.  $\dim \ker \tilde{\omega}_D(\psi(t_0)) = 1$  si  $m$  est pair), il est alors possible de définir, dans un voisinage de  $\psi(t_0)$ , un unique champ de directions caractéristiques et donc de reconstruire localement l'extrémale anormale  $\psi(\cdot)$ , à reparamétrisation près.

De plus, quand  $m$  est impair, si  $\dim \ker \omega_D(\psi(\cdot)) = 1$  p.p. le long de l'extrémale anormale  $\psi(\cdot)$  de  $D$ , il existe un sous-ensemble ouvert et dense de  $M$  tel que, par tout point de ce sous-ensemble passe une courbe singulière non triviale (voir aussi [68]).

Ceci motive la définition suivante.

**Définition.** Une courbe singulière  $q(\cdot) : [0, 1] \rightarrow M$  est dite *d'ordre minimal* si elle est la projection d'une extrémale anormal  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow D^\perp$  telle que  $\dim \ker \omega_D(\psi(t)) = 1$  p.p. si  $m$  est impair, et  $\dim \ker \tilde{\omega}_D(\psi(t)) = 1$  p.p. si  $m$  est pair.

*Remarque.* Nous avons également défini dans [15] une notion d'ordre minimal pour les trajectoires singulières d'un système non-holonyme  $\dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(q)$ . Bien entendu, cette notion est compatible avec celle définie ci-dessus : toute courbe singulière d'ordre minimal est localement une trajectoire singulière d'ordre minimal du système non-holonyme construit à partir d'un champ de repère local  $(f_1, \dots, f_m)$  de la distribution. Cependant, pour les trajectoires d'un système non-holonyme, la définition de l'ordre minimal prend également en compte le lieu où le rang de la famille  $f_1, \dots, f_m$  est inférieur à  $m$ , comme cela a été fait pour les trajectoires d'un système de contrôle affine.

### 3.3 Résultats de généricité

Nous donnons d'abord, dans les deux paragraphes qui suivent, les résultats obtenus dans [15].

#### Trajectoires singulières d'un système de contrôle affine

**Théorème 3.3.** *Soit  $m < n$  un entier positif. Il existe un sous-ensemble ouvert et dense  $O_{m+1}$  de  $VF(M)^{m+1}$  tel que, si le  $(m+1)$ -uplet  $(f_0, \dots, f_m)$  appartient à  $O_{m+1}$ , toute trajectoire singulière non triviale du système de contrôle  $\dot{q}(t) = f_0(q(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t)f_i(q(t))$  est d'ordre minimal et de corang un.*

Ce théorème généralise les résultats de [35] sur les systèmes de contrôle affines mono-entrées.

*Remarque.* Dans le théorème ci-dessus, comme dans tous les résultats de généricité de ce chapitre, le sous-ensemble ouvert et dense  $O_{m+1}$  de  $VF(M)^{m+1}$  peut être choisi de façon à ce que son complémentaire soit de codimension arbitrairement grande.

**Corollaire 3.4.** *Avec les notations du théorème 3.3 et pour  $m \geq 2$ , il existe un sous-ensemble ouvert et dense  $O_{m+1}$  de  $VF(M)^{m+1}$  tel que tout système de contrôle affine défini avec un  $(m+1)$ -uplet de  $O_{m+1}$  n'a pas de trajectoires singulières de Goh non triviales.*

**Trajectoires singulières minimisantes** Considérons un système de contrôle affine  $(\Sigma)$  et le coût quadratique  $C_{Q,\alpha,g}$  défini en (3.1). Pour  $q_0 \in M$  et  $T > 0$ , on s'intéresse au problème de contrôle optimal

$$\inf \{ C_{Q,\alpha,g}(T, u) \mid E_{q_0,T}(u) = q \}. \quad (3.6)$$

Le corollaire 3.4 permet de montrer un résultat de non-existence des singulières minimisantes.

**Théorème 3.5.** *Fixons  $Q \in \mathcal{S}_m^+(M)$ ,  $\alpha \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$  et  $g \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$ . Soit  $m \geq 2$  un entier. Il existe un sous-ensemble ouvert et dense  $O_{m+1}$  de  $VF(M)^{m+1}$  tel que le problème de contrôle optimal (3.6) défini par un  $(m+1)$ -uplet de  $O_{m+1}$  n'a pas de trajectoires singulières minimisantes non triviales.*

Pour établir ce théorème, nous montrons que, pour un système de contrôle affine associé à un  $(m+1)$ -uplet générique, les trajectoires singulières non triviales sont strictement anormales. Nous avons également obtenu le résultat suivant de stricte anormalité pour un système fixé et un coût générique. Munissons l'espace  $\mathcal{S}_m^+(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$  de la topologie de Whitney.

**Proposition 3.6.** *Fixons  $(f_0, \dots, f_m) \in VF(M)^{m+1}$  satisfaisant la condition du rang et  $g \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$ . Il existe alors un sous-ensemble ouvert et dense  $\mathcal{B}_m$  de  $\mathcal{S}_m^+(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$  tel que toute trajectoire singulière non triviale du système de contrôle affine associé au  $(m+1)$ -uplet  $(f_0, \dots, f_m)$  est strictement anormale pour le problème de contrôle optimal (3.6) défini avec  $(Q, \alpha) \in \mathcal{B}_m$  et  $g$ .*

**Propriétés génériques des courbes singulières** Des résultats de généricité similaires aux précédents sont valables pour les trajectoires singulières d'un système non-holonyme et pour les courbes singulières d'une distribution. Nous nous contenterons d'énoncer ces derniers, montrés dans [9].

**Théorème 3.7.** *Soient  $m \geq 2$  un entier et  $\mathcal{D}_m$  l'ensemble des distributions de rang  $m$  sur  $M$  muni de la topologie  $C^\infty$  de Whitney. Il existe un sous-ensemble  $O_m$  ouvert et dense de  $\mathcal{D}_m$  tel que toute courbe singulière non triviale d'une distribution  $D$  de  $O_m$  est d'ordre minimal et de corang un.*

*En particulier, si  $m \geq 3$ , les distributions  $D \in O_m$  n'admettent pas de courbes singulières de Goh non triviales.*

Ce théorème généralise les résultats de [62], qui ne concernent que les distributions de rang 2. Le dernier point sur les courbes de Goh améliore [22, Theorem 8], où seule l'existence d'un ensemble dense de codimension infinie est montré (ce qui est une conséquence de notre résultat).

Une première application de ce théorème concerne l'existence de *courbes rigides*. Rappelons que, une distribution  $D$  étant fixée, une courbe  $q(\cdot) \in \Omega(q_0, q_1)$  est rigide si elle est isolée (à reparamétrisation près) dans  $\Omega(q_0, q_1)$  muni de la topologie  $W^{1,\infty}$ . Une courbe rigide devant être de Goh (voir [26]), on obtient le résultat suivant, qui répond positivement à une conjecture de Bryant et Hsu [36].

**Corollaire 3.8.** *Si  $m \geq 3$ , une distribution  $D \in O_m$  n'a pas de courbes rigides non triviales.*

Le théorème 3.7 a également des conséquences sur l'existence de courbes singulières minimisantes en géométrie sous-riemannienne. En effet, d'après [28, Theorem 3.7], une

courbe singulière minimisante qui est strictement anormale est nécessairement une courbe de Goh. Or il s'avère (voir [9]) que pour une distribution générique  $D$  et une métrique  $g$  quelconque, toutes les courbes singulières sont strictement anormales pour  $(D, g)$ . Nous obtenons ainsi le résultat ci-après. Avant de l'énoncer, remarquons que, dans une variété sous-riemannienne  $(M, D, g)$ , on peut toujours considérer  $g$  comme une métrique riemannienne (et donc  $(M, g)$  comme une variété riemannienne), la définition de la métrique sous-riemannienne n'utilisant que la restriction de  $g$  à  $D$ .

**Théorème 3.9.** *Soient  $m \geq 3$  un entier et  $(M, g)$  une variété riemannienne. Il existe un sous-ensemble ouvert et dense  $O_m$  de  $\mathcal{D}_m$  tel que, si  $D \in O_m$ , la variété sous-riemannienne  $(M, D, g)$  n'admet pas de courbes singulières minimisantes.*

## 3.4 Conséquences

**Régularité de la fonction valeur et de la distance sous-riemannienne** La fonction valeur du problème de contrôle optimal (3.6) est définie par

$$S_{q_0, T}(q) := \inf\{C_{Q, \alpha, g}(T, u) \mid E_{q_0, T}(u) = q\},$$

pour tout  $q \in M$  (avec, comme d'habitude,  $\inf \emptyset := -\infty$ ). Nous supposons à partir de maintenant que toutes les données du problème sont analytiques.

La régularité de  $S_{q_0, T}$  est étroitement liée à l'existence de trajectoires singulières minimisantes issues de  $q_0$ . Il est montré dans [90] que, en l'absence de telles trajectoires, la fonction valeur est continue et sous-analytique (voir par exemple [54] pour une définition des fonctions sous-analytiques). Les résultats de la section précédente montrent que, pour un coût fixé, cette situation prévaut pour les systèmes de contrôle affines génériques avec  $m \geq 2$  et pour les systèmes non-holonomes génériques avec  $m \geq 3$ . Notons que, s'il existe une trajectoire singulière minimisante, la fonction valeur peut ne pas être sous-analytique, ni même continue (voir [15, 90]).

De façon similaire, en géométrie sous-riemannienne, la régularité de la distance est liée à la présence de courbes singulières minimisantes. Précisément, dans une variété sous-riemannienne analytique  $(M, D, g)$ , l'absence de courbes singulières minimisantes non triviales dans  $\Omega(q)$  implique la sous-analyticité de la distance  $d(q, \cdot)$  dans un voisinage épointé de  $q$  et donc celle des sphères sous-riemanniennes  $S(q, r)$  de petit rayon  $r > 0$  (voir [21, 28]). D'après la section précédente, c'est le cas dans une variété sous-riemannienne analytique obtenue à partir d'une variété riemannienne  $(M, g)$  munie d'une distribution générique de rang au moins trois. Ceci étend en particulier [22, Theorem 9], où la généricité, dans un sens plus faible qu'ici, porte sur le couple  $(D, g)$ .

**Régularité des solutions de viscosité d'équations d'Hamilton-Jacobi** Considérons à nouveau le problème de contrôle optimal (3.6) avec des données analytiques et

$\alpha = 0$ . Il est standard (voir [41, 61]) que la fonction valeur  $v(t, q) = S_{q_0, t}(q)$  est une solution de viscosité de l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial v}{\partial q}\right) = g(t, q), \quad (3.7)$$

où  $\mathcal{H}(q, p) = \langle p, f_0(q) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (Q^{-1}(q))_{ij} \langle p, f_i(q) \rangle \langle p, f_j(q) \rangle$ .

Inversement, la solution de viscosité de (3.7) avec des conditions analytiques de type Dirichlet est sous-analytique dès que le problème de contrôle optimal correspondant n'admet pas de trajectoires singulières minimisantes (voir [92]). D'après nos résultats ci-dessus, cette situation prévaut génériquement si  $m \geq 2$  (et, pour les systèmes non-holonomes, si  $m \geq 3$ ). Ceci a des conséquences importantes sur la convergence globale des schémas numériques de résolution de l'équation (3.7) (voir [41]).

**Applications à la stabilisation et à la planification des mouvements** Pour un système non-holonyme commandable, il existe des stratégies de stabilisation générales inspirées de la programmation dynamique. Le feedback stabilisant est calculé à partir du gradient de la fonction valeur pour un problème de contrôle optimal bien choisi. Bien entendu ceci n'est possible qu'en dehors de l'ensemble singulier  $\text{Sing}(S)$  et il faut concevoir une autre construction pour le feedback sur  $\text{Sing}(S)$ . Mentionnons deux stratégies de ce type, la première fournissant un feedback hybride [78], la deuxième un feedback dit "SRS" (pour *smooth repulsive stabilizing*) ayant de bonnes propriétés de régularité (voir [79, 80]). Ces deux stratégies nécessitent que  $\text{Sing}(S)$  soit une variété stratifiée de codimension positive, ce qui, comme nous l'avons vu ci-dessus, est le cas génériquement pour les systèmes de contrôle affines analytiques quand  $m \geq 3$ .

D'autre part, l'absence de trajectoires singulières minimisantes est la propriété de base requise pour la convergence des algorithmes usuels en contrôle optimal (telles que les méthodes directes ou indirectes, voir par exemple [31, 76]). Encore une fois, ceci est valide génériquement quand  $m \geq 2$ .

Mentionnons enfin une dernière application. Considérons un système non-holonyme quelconque sur  $\mathbb{R}^n$ ; nous avons montré dans [15] qu'il est alors possible de choisir une fonction coût  $C_{Q,g}$  (générique) telle que toutes les trajectoires singulières soient strictement anormales. En combinant ce fait avec [81, Theorem 1.1], on en déduit qu'il existe un sous-ensemble dense  $N$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que tout point de  $N$  est atteint par une unique trajectoire minimisante, qui de plus n'est pas singulière. Ainsi, une méthode de tir avec cible dans  $N$  convergera, ce qui devrait pouvoir être utilisé pour résoudre, au moins approximativement, des problèmes de planification de mouvement.



# Chapitre 4

## Perspectives et projets de recherche

Pour poursuivre les recherches présentées dans ce mémoire, un premier objectif est de développer des algorithmes résolvant le problème de planification des trajectoires pour un système de contrôle affine de façon satisfaisante. Nous chercherons en particulier à traiter une large classe de systèmes, y compris des systèmes avec dérive, et à produire des lois de commandes aussi régulières que possible, le tout avec de bonnes propriétés de convergence.

Nous comptons dans un premier temps poursuivre le développement de méthodes itératives basées sur des approximations nilpotentes. Il s'agira notamment de résoudre les problèmes de convergence restant et de tester numériquement les diverses variantes en cours d'étude, puis d'étendre ce type de méthodes à une classe encore plus large de systèmes, en particulier à des systèmes avec dérive.

Une autre approche envisagée pour la planification des trajectoires est d'utiliser une méthode de continuation par homotopie dans l'espace des contrôles. Il s'agit de construire, en inversant l'application point-final, une équation différentielle dans l'espace des contrôles, puis de la résoudre numériquement (voir [38]). Les trajectoires singulières y jouent donc un rôle crucial, en tant que singularités de l'équation différentielle, et pourraient constituer un obstacle à la convergence de l'algorithme. Nous comptons nous appuyer sur notre étude des trajectoires singulières pour attaquer ce problème.

Une deuxième direction de recherche, liée à la précédente, est d'utiliser notre étude des trajectoires singulières pour résoudre des problèmes de planification des trajectoires, de stabilisation et d'optimisation de systèmes de contrôle affines, comme nous le suggérons dans la section 3.4. En particulier, l'approche de la stabilisation à l'aide de feedbacks "SRS", en association avec des techniques de perturbation (perturbation générique par rapport au coût ou par rapport au système), semble prometteuse.

L'autre objectif dans le domaine des trajectoires singulières est de s'attaquer aux conjectures dites "de Sard" (voir par exemple [69, 81]). Il s'agit de déterminer la taille de l'ensemble des points atteints par les trajectoires singulières issues d'un point donné, ou au moins par les trajectoires singulières minimisantes (pour un coût donné). Cet ensemble est-il de mesure nulle ? D'intérieur vide ? Inclus dans un ensemble de codimension



positive ? Répondre positivement à une de ces questions conduirait à un progrès essentiel dans la compréhension de la structure des solutions d'un problème de contrôle optimal, puisqu'il serait alors possible d'approcher les solutions singulières par des régulières.

Enfin nous souhaitons développer les notions métriques d'ordre et de calcul infinitésimal en géométrie sous-riemannienne. Notre travail de la section 1.4 sur l'espace métrique tangent à une variété sous-riemannienne est un premier pas dans cette direction, tout comme l'étude des approximations du premier ordre de [8, 17], que nous utilisons par ailleurs pour la planification de trajectoires. Un calcul récent de Diniz [40] sur le jacobien de l'application exponentielle suggère de plus que des notions similaires existent pour les géodésiques.

# Bibliographie

*Les références [1, . . . , 20] en version électronique sont disponibles en ligne à l'adresse <http://www.ensta.fr/~fjean>.*

## Articles de journaux

- [1] F. Jean. The car with n trailers: Characterization of the singular configurations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 1:241–266, 1996.
- [2] A. Gabriellov, F. Jean, and J.-J. Risler. Multiplicity of polynomials on trajectories of polynomials vector fields in  $C^3$ . In W. Pawłucki B. Jakubczyk and J. Stasica, editors, *Singularities Symposium – Łojasiewicz 70*, volume 44, pages 109–121. Banach Center Publications, Warszawa, 1998.
- [3] F. Jean. Uniform estimation of sub-Riemannian balls. *J. Dyn. Control Syst.*, 7(4):473–500, 2001.
- [4] F. Jean. Complexity of nonholonomic motion planning. *International Journal of Control*, 74(8):776–782, 2001.
- [5] Y. Chitour, F. Jean, and E. Trélat. Propriétés génériques des trajectoires singulières. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I*, 337:49–52, 2003.
- [6] E. Falbel and F. Jean. Measures of transverse paths in sub-Riemannian geometry. *Journal d'Analyse Mathématique*, 91:231–246, 2003.
- [7] F. Jean. Entropy and complexity of a path in sub-Riemannian geometry. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 9:485–506, 2003.
- [8] M. Vendittelli, G. Oriolo, F. Jean, and J.-P. Laumond. Nonhomogeneous nilpotent approximations for systems with singularities. *IEEE Trans. Automat. Control*, 49(2), 2004.
- [9] Y. Chitour, F. Jean, and E. Trélat. Genericity results for singular curves. *J. Differential Geometry*, 73(1), 2006.

## Actes de colloques, proceedings

- [10] F. Jean. The singular locus for the n trailers car control system. In *Proceedings of the 34th IEEE International Conference on Decision and Control*, pages 3869–3870, New-Orleans, 1995.

- [11] F. Jean and P.-V. Koseleff. Elementary approximation of exponentials of Lie polynomials. In T. Mora and H. Mattson, editors, *Proceedings 12th AAECC Symp.*, volume 1255 of *Lect. Notes in Comp. Science*, pages 174–188. Springer, 1997.
- [12] Y. Chitour, F. Jean, and E. Trélat. Singular trajectories of driftless and control-affine systems. In *Proceedings of 44th IEEE CDC-ECC'05, Séville, Spain*, 2005.
- [13] F. Jean, G. Oriolo, and M. Vendittelli. A globally convergent steering algorithm for regular nonholonomic systems. In *Proceedings of 44th IEEE CDC-ECC'05, Sevilla, Spain*, 2005.

### Articles en préparation, prépublications

- [14] F. Jean. Sub-riemannian geometry. Lectures given at the Trimester on Dynamical and Control Systems, SISSA-ICTP, Trieste, 2003.
- [15] Y. Chitour, F. Jean, and E. Trélat. Singular trajectories of control-affine systems. Preprint de l'Université Paris-Sud 11, June 2006.
- [16] F. Jean. On Hausdorff measures of curves in sub-Riemannian geometry. Preprint du CMAP, École Polytechnique, November 2006.
- [17] F. Jean, G. Oriolo, and M. Vendittelli. A global algorithm for nonholonomic motion planning. En préparation.

### Chapitres de livres

- [18] A. Bellaïche, F. Jean, and J.-J. Risler. Geometry of nonholonomic systems. In J.-P. Laumond, editor, *Robot Motion Planning and Control*, volume 229 of *Lect. Notes in Information and Control Sciences*. Springer, 1998.
- [19] F. Jean. Paths in sub-Riemannian geometry. In A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarigue, and W. Respondek, editors, *Nonlinear Control in the Year 2000*. Springer-Verlag, 2000.

### Thèse de doctorat

- [20] F. Jean. *Complexités pour les systèmes non-holonomes*. Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 1998.

---

### Autres références

- [21] A. A. Agrachev. Compactness for sub-Riemannian length minimizers and subanalyticity. *Rend. Semin. Mat. Torino*, 56, 1998.

- [22] A. A. Agrachev and J.-P. Gauthier. On subanalyticity of Carnot-Carathéodory distances. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 18(3), 2001.
- [23] A. A. Agrachev and A. Marigo. Nonholonomic tangent spaces : Intrinsic construction and rigid dimensions. *Electronic Research Announcements Of The American Mathematical Society*, 9:111–120, 2003.
- [24] A. A. Agrachev and A. V. Sarychev. Filtrations of a Lie algebra of vector fields and nilpotent approximations of control systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 285:777–781, 1987. English transl.: *Soviet Math. Dokl.*, 36:104–108, 1988.
- [25] A. A. Agrachev and A. V. Sarychev. Strong minimality of abnormal geodesics for 2-distributions. *J. Dyn. Control Syst.*, 1(2), 1995.
- [26] A. A. Agrachev and A. V. Sarychev. Abnormal sub-Riemannian geodesics: Morse index and rigidity. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire*, 13(6):635–690, 1996.
- [27] A. A. Agrachev and A. V. Sarychev. On abnormal extremals for Lagrange variational problems. *J. Math. Syst. Estim. Cont.*, 8(1):87–118, 1998.
- [28] A. A. Agrachev and A. V. Sarychev. Sub-Riemannian metrics: Minimality of abnormal geodesics versus subanalyticity. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 4, 1999.
- [29] A. Bellaïche. The tangent space in sub-Riemannian geometry. In A. Bellaïche and J.-J. Risler, editors, *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1996.
- [30] A. Bellaïche and J.-J. Risler, editors. *Sub-Riemannian Geometry*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1996.
- [31] J. T. Betts. Practical methods for optimal control using nonlinear programming. In *Advances in Design and Control*. SIAM, Philadelphia, PA, 2001.
- [32] G. A. Bliss. *Lectures on the Calculus of Variations*. University of Chicago Press, 1946.
- [33] B. Bonnard and M. Chyba. *Singular Trajectories and Their Role in Control Theory*. Springer, 2003.
- [34] B. Bonnard and I. Kupka. Théorie des singularités de l’application entrée/sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du temps minimal. *Forum Math.*, 5, 1993.
- [35] B. Bonnard and I. Kupka. Generic properties of singular trajectories. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14(2), 1997.
- [36] R. L. Bryant and L. Hsu. Rigidity of integral curves of rank 2 distributions. *Inventiones Math.*, 114, 1993.
- [37] J. F. Canny. *The Complexity of Robot Motion Planning*. MIT Press, 1988.
- [38] Y. Chitour. A continuation method for motion-planning problems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12, 2006.

- [39] W. L. Chow. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Math. Ann.*, 117:98–115, 1940.
- [40] M. Diniz. *Quelques contributions à l'étude des variétés sous-riemanniennes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2004.
- [41] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [42] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, 1969.
- [43] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems: Introductory theory and examples. *Int. J. of Control*, 61:1327–1361, 1995.
- [44] J.-P. Gauthier, F. Monroy-Perez, and C. Romero-Melendez. On complexity and motion planning for corank one SR metrics. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10:634–655, 2004.
- [45] J.-P. Gauthier and V. Zakalyukin. On the codimension one motion planning problem. *J. Dyn. Control Syst.*, 11(1):73–89, 2005.
- [46] J.-P. Gauthier and V. Zakalyukin. On the one-step-bracket-generating motion planning problem. *J. Dyn. Control Syst.*, 11(2):215–235, 2005.
- [47] J.-P. Gauthier and V. Zakalyukin. Robot motion planning, a wild case. In *Proceedings of the 2004 Suszdal conference on dynamical systems*, volume 250 of *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, 2005.
- [48] J.-P. Gauthier and V. Zakalyukin. On the motion planning problem, complexity, entropy and nonholonomic interpolation. *J. Dyn. Control Syst.*, 12(3):371–404, 2006.
- [49] N. Goodman. *Nilpotent Lie groups*, volume 562 of *Springer Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1976.
- [50] M. Gromov. Carnot-Carathéodory spaces seen from within. In A. Bellaïche and J.-J. Risler, editors, *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1996.
- [51] M. Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Birkhäuser, 2001.
- [52] H. Hermes. Distributions and the lie algebras their bases can generate. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 106(2) :555–565, 1989.
- [53] H. Hermes. Nilpotent and high-order approximations of vector field systems. *SIAM Review*, 33(2):238–264, 1991.
- [54] H. Hironaka. Subanalytic sets. In *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in Honor of Yasuo Akizuki*, pages 453–493. Kinokuniya, Tokyo, 1973.
- [55] L. Hsu. Calculus of variations via the Griffiths formalism. *J. Differential Geometry*, 36(3):551–589, 1992.

- [56] B. Jakubczyk and M. Zhitomirskii. Distributions of corank 1 and their characteristic vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(7):2857–2883, 2003.
- [57] M. Khatib, H. Jaouni, R. Chatila, and J.-P. Laumond. Dynamic path modification for car-like nonholonomic mobile robots. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Albuquerque, 1997.
- [58] A. N. Kolmogorov. On certain asymptotics characteristics of some completely bounded metric spaces. *Soviet Math. Dokl.*, 108:385–388, 1956.
- [59] G. Laferriere and H. J. Sussmann. A differential geometric approach to motion planning. In Z. Li and J. F. Canny, editors, *Nonholonomic Motion Planning*. Kluwer, 1992.
- [60] J.-P. Laumond, S. Sekhavat, and F. Lamiroux. Guidelines in nonholonomic motion planning for mobile robots. In J.-P. Laumond, editor, *Robot Motion Planning and Control*, volume 229 of *Lect. Notes in Information and Control Sciences*. Springer, 1998.
- [61] P.-L. Lions. *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*. Pitman, 1982.
- [62] W. S. Liu and H. J. Sussmann. Shortest paths for sub-Riemannian metrics of rank two distributions. *Memoirs AMS*, 118(564), 1995.
- [63] V. Magnani. Note on coarea formulae in the Heisenberg group. *Publ. Mat.*, 48(2), 2004.
- [64] G. A. Margulis and G. D. Mostow. The differential of a quasi-conformal mapping of a Carnot-Carathéodory space. *Geometric And Functional Analysis*, 5(2):402–433, 1995.
- [65] G. A. Margulis and G. D. Mostow. Some remarks on the definition of tangent cones in a Carnot-Carathéodory space. *Journal d'Analyse Mathématique*, 80:299–317, 2000.
- [66] J. Mitchell. On Carnot-Carathéodory metrics. *Journal of Differential Geom.*, 21:35–45, 1985.
- [67] R. Montgomery. Abnormal minimizers. *SIAM J. Control Optim.*, 32(6):1605–1620, 1994.
- [68] R. Montgomery. A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry. *J. Dyn. Control Syst.*, 1(1):49–90, 1995.
- [69] R. Montgomery. *A tour of sub-Riemannian geometries, their geodesics and applications*. Math. Surveys and Monographs. American Math. Soc., 2002.
- [70] R. M. Murray. Nilpotent bases for a class of nonintegrable distributions with applications to trajectory generation for nonholonomic systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 7 :58–75, 1994.
- [71] R. M. Murray and S. S. Sastry. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids. *IEEE Trans. Autom. Control*, 38(5):700–716, 1993.

- [72] A. Nagel, E. M. Stein, and S. Wainger. Metrics defined by vector fields. *Acta Math.*, 155:103–147, 1985.
- [73] G. Oriolo and M. Vendittelli. A framework for the stabilization of general nonholonomic systems with an application to the plate-ball mechanism. *IEEE Trans. on Robotics*, 21(2):162–175, 2005.
- [74] P. Pansu. *Géométrie du groupe d’Heisenberg*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1982.
- [75] P. Pansu. Une inégalité isopérimétrique sur le groupe d’Heisenberg. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 295:127–130, 1982.
- [76] H. J. Pesch. A practical guide to the solution of real-life optimal control problems. Parametric optimization. *Control Cybernet.*, 23(1-2):7–60, 1994.
- [77] L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, and E. Mischenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley Interscience, 1962.
- [78] C. Prieur and E. Trélat. Quasi-optimal robust stabilization of control systems. *to appear in SIAM J. Control Optim.*, 2006.
- [79] L. Rifford. The stabilization problem: AGAS and SRS feedbacks. In *Optimal Control, Stabilization, and Nonsmooth Analysis*, volume 301 of *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, pages 173–184. Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [80] L. Rifford. On the existence of local smooth repulsive stabilizing feedbacks in dimension three. *to appear in J. Differential Equations*, 2006.
- [81] L. Rifford and E. Trélat. Morse-Sard type results in sub-Riemannian geometry. *Math. Ann.*, 332(1):145–159, 2005.
- [82] S. Rigot. Isodiametric inequality in Carnot group. Preprint de l’Université Paris-Sud, 2005.
- [83] L. P. Rothschild and E. M. Stein. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Math.*, 137:247–320, 1976.
- [84] A. V. Sarychev. The index of the second variation of a control system. *Math. USSR Sbornik*, 41(3), 1982.
- [85] J. T. Schwartz and M. Sharir. On the ‘piano movers’ problem II: General techniques for computing topological properties of real algebraic manifolds. *Advances in Applied Mathematics*, 4:298–351, 1983.
- [86] E. D. Sontag. Control of systems without drift via generic loops. *IEEE Trans. Automat. Control*, 40(7):1210–1219, 1995.
- [87] P. Souères and J.-P. Laumond. Shortest path synthesis for a car-like robot. *IEEE Trans. Automat. Control*, 41(5):672–688, 1996.
- [88] G. Stefani. On local controllability of a scalar-input system. In Lindquist Byrnes, editor, *Theory and Appl. of Nonlinear Control Syst.*, pages 167–179. North Holland, Amsterdam, 1986.

- [89] H. J. Sussmann. A continuation method for nonholonomic path-finding problems. In *Proceedings of 32nd IEEE CDC*, pages 2718–2723, 1993.
- [90] E. Trélat. Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost. *J. Dyn. Control Syst.*, 6(4), 2000.
- [91] E. Trélat. Asymptotics of accessibility sets along an abnormal trajectory. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6:387–414, 2001.
- [92] E. Trélat. Global subanalytic solutions of Hamilton-Jacobi type equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 23(3):363–387, 2006.
- [93] N. Th. Varopoulos. Small time gaussian estimates of heat diffusion kernels. *J. Funct. Analysis*, 93, 1990.
- [94] A. M. Vershik and V. Ya. Gershkovich. Nonholonomic dynamical systems, geometry of distributions and variational problems. In V. I Arnold and S. P. Novikov, editors, *Dynamical Systems VII*, volume 16 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, 1994.
- [95] L. C. Young. *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. W.B. Saunders Co., Philadelphia-London-Toronto, Ont., 1969.